§ 14. РІВНОМІРНИЙ РУХ ТІЛА ПО КОЛУ

Описувати криволінійний рух досить складно хоча б тому, що різних форм криволінійних траєкторій — безліч. Однак часто виявляється, що не потрібно розглядати рух по кожній кривій окремо. Подивіться уважно на рис. 14.1: окремі ділянки складної криволінійної траєкторії можна подати як сукупність дуг різних радіусів. Тому практично будь-який криволінійний рух можна розглядати як рух по дугах кіл. Як завжди, почнемо з найпростішого — з рівномірного руху по колу.

1 Які фізичні величини характеризують періодичність рівномірного руху по колу

Рівномірний рух тіла по колу — це такий криволінійний рух, при якому траєкторією руху тіла є коло, а лінійна швидкість і модуль миттєвої швидкості не змінюються з часом.

Рівномірний рух по колу — це *періодичний рух*, оскільки він *повторюється через однакові проміжки часу*, які дорівнюють часу одного повного оберту. З курсу фізики 8-го класу ви знаєте, що будь-який періодичний рух характеризується такими фізичними величинами, як *період* і *частота*.

Період обертання — це фізична величина, яка дорівнює проміжку часу, за який тіло, що рівномірно рухається по колу, здійснює один повний оберт:

$$T=\frac{t}{N}, \qquad (1)$$

де T — період обертання; N — кількість повних обертів, зроблених тілом за проміжок часу t.

Одиниця періоду обертання в СІ — **секунда** (с).

Знаючи період обертання та радіус кола, по якому рухається тіло, легко визначити лінійну швидкість v руху тіла. Дійсно, за час одного повного оберту $(t=T)$ тіло проходить відстань, яка дорівнює довжині кола: $l=2\pi r$. Оскільки $v=\frac{l}{t}$, отримаємо:

$$v=\frac{2\pi r}{T}. \qquad (2)$$

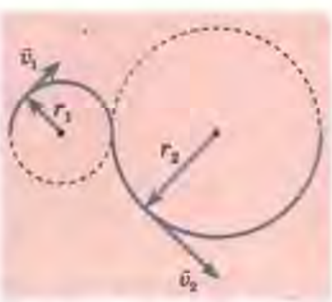

Рис. 14.1. Рух по будь-якій криволінійній траєкторії практично завжди можна подати як рух по дугах кіл

Обертова частота n — це фізична величина, яка чисельно дорівнює кількості повних обертів за одиницю часу:

$$n = \frac{N}{t}, \qquad (3)$$

де n — частота обертання; N — кількість повних обертів, здійснених тілом за проміжок часу t.

Одиниця обертової частоти в СІ — **оберт на секунду** (об/с, або $с^{-1}$).

Із формул (1) і (3) випливає, що період і обертова частота пов'язані співвідношенням:

$$n = \frac{1}{T}.$$

Підставивши цей вираз у формулу (2), одержимо ще одну формулу для лінійної швидкості рівномірного руху тіла по колу: $v = 2\pi rn$.

2 Що таке кутова швидкість і як вона пов'язана з лінійною швидкістю

Крім лінійної швидкості для характеристики швидкості руху тіла по колу часто використовують *кутову швидкість*.

Кутова швидкість — це фізична величина, яка чисельно дорівнює куту повороту радіус-вектора за одиницю часу:

$$\omega = \frac{\varphi}{t},$$

де ω — кутова швидкість; φ — кут повороту радіус-вектора за проміжок часу t (рис. 14.2).

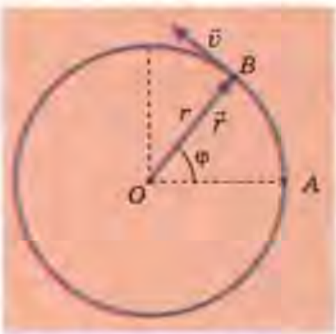

Рис. 14.2. Рівномірний рух тіла по колу: r — радіус кола; $\vec{v}$ — вектор миттєвої швидкості в точці B; φ — кут повороту радіус-вектора $\vec{r}$

Одиниця кутової швидкості в СІ — **радіан на секунду** (рад/с, або $с^{-1}$)*.

Оскільки за час, що дорівнює одному періоду ($t = T$), радіус-вектор виконує один повний оберт ($\varphi = 2\pi$), кутову швидкість можна обчислити за формулою:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n. \qquad (4)$$

Із формул (2) і (4) випливає, що кутова та лінійна швидкості пов'язані співвідношенням: $v = \omega r$.

3 Чому прискорення під час рівномірного руху тіла по колу називають доцентровим

Нагадаємо, що будь-який криволінійний рух — це завжди рух із прискоренням. Прискореним буде й рівномірний рух по колу, оскільки напрямок миттєвої швидкості безперервно змінюється. Визначимо модуль і напрямок прискорення, яке характеризує рівномірний рух тіла по колу.

* Кут 360° (один повний оберт) дорівнює 2π радіан, де $\pi = 3,14$.

З означення прискорення $\vec{a}=\frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t}$ випливає, що напрямки векторів прискорення та зміни швидкості збігаються ($\vec{a}\uparrow\uparrow\overrightarrow{\Delta v}$), а модуль прискорення можна знайти за формулою: $a=\frac{\Delta v}{\Delta t}$.

Спочатку визначимо напрямок прискорення (рис. 14.3). Для цього перенесемо вектор $\vec{v}_0$ паралельно самому собі так, щоб він виходив із точки B. Із рис. 14.3 видно, що за малих кутів φ вектор зміни швидкості $\Delta\vec{v}$ напрямлений до середини кола. Оскільки $\vec{a}\uparrow\uparrow\Delta\vec{v}$, то так само напрямлений і вектор прискорення $\vec{a}$. Доведемо, що вектор $\vec{a}$ напрямлений безпосередньо до центра кола, тобто вздовж радіуса. Оскільки в разі руху тіла по колу його миттєва швидкість $\vec{v}$ напрямлена по дотичній, а дотична в даній точці кола перпендикулярна до радіуса, проведеного в цю точку, то потрібно довести, що $\vec{a}\perp\vec{v}$.

Здійснимо доведення методом від протилежного. Припустимо, що вектор прискорення $\vec{a}$ не є перпендикулярним до вектора миттєвої швидкості $\vec{v}$ (рис. 14.4). Це означає, що проекція прискорення на вісь OX відмінна від нуля. Однак у даному випадку, якщо $a_x>0$, то швидкість руху тіла буде збільшуватися, а якщо $a_x<0$ — зменшуватися, отже, йдеться про нерівномірний рух, тоді як ми розглядаємо рівномірний. Таким чином, наше припущення було хибним. Отже, $\vec{a}\perp\vec{v}$.

У разі рівномірного руху тіла по колу вектор прискорення в даній точці кола завжди перпендикулярний до вектора миттєвої швидкості й напрямлений до центра кола. Саме тому прискорення тіла під час його руху по колу називають *доцентровим прискоренням* і записують з індексом: $\vec{a}_{\text{дц}}$ (рис. 14.5).

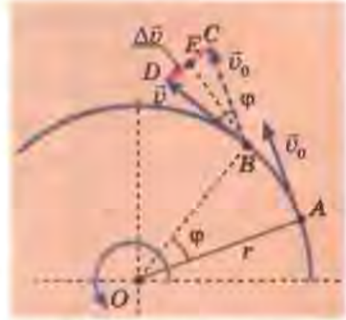

Рис. 14.3. Визначення прискорення для рівномірного руху тіла по колу. Якщо за дуже малий проміжок часу Δt тіло, рухаючись із постійною лінійною швидкістю v по дузі кола радіусом r, переміститься з точки A в точку B, то радіус-вектор тіла повернеться на малий кут φ, а зміна швидкості становитиме: $\overrightarrow{\Delta v}=\vec{v}-\vec{v}_0$

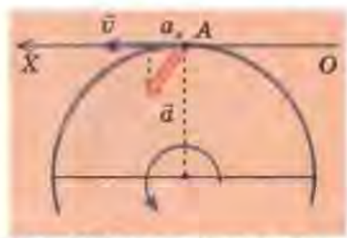

Рис. 14.4. Якщо вектор прискорення не є перпендикулярним до вектора швидкості, то a_x — проекція прискорення на вісь OX — відмінна від нуля

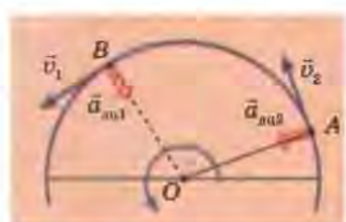

Рис. 14.5. У випадку рівномірного руху по колу прискорення руху тіла в даній точці завжди напрямлене до центра кола (є перпендикулярним до миттєвої швидкості)

4 Чому дорівнює модуль прискорення під час рівномірного руху тіла по колу

Для визначення модуля прискорення знову звернемося до рис. 14.3.

Розглянемо трикутник BCD, утворений векторами $\Delta\vec{v}$ ($\overrightarrow{CD}$), $\vec{v}$ ($\overrightarrow{BD}$) і $\vec{v}_0$ ($\overrightarrow{BC}$). Цей трикутник є рівнобедреним, оскільки $v=v_0$ (рух рівномірний).

Кут при вершині цього трикутника дорівнює φ ($\angle CBD = \angle AOB$ як кути зі взаємно перпендикулярними сторонами). Опустимо на сторону CD перпендикуляр BE. Висота, проведена з вершини рівнобедреного трикутника, є медіаною та бісектрисою цього трикутника, тому $CD = 2CE = 2BC\sin\frac{\varphi}{2}$, або $\Delta v = 2v\sin\frac{\varphi}{2}$. При малих кутах $\sin\frac{\varphi}{2} \approx \frac{\varphi}{2}$, тому $\Delta v = 2v\frac{\varphi}{2} = v\varphi$.

За означенням $a_{дц} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$, отже, $a_{дц} = \frac{v\varphi}{\Delta t}$. Оскільки $\frac{\varphi}{\Delta t} = \omega$ — кутова швидкість, а кутова та лінійна швидкості пов'язані співвідношенням $\omega = \frac{v}{r}$, то остаточно маємо: $a_{дц} = v\omega = \frac{v \cdot v}{r} = \frac{v^2}{r}$.

Отже, ***у разі рівномірного руху тіла по колу модуль прискорення не залежить від часу і його можна обчислити за формулою:***

$$a_{дц} = \frac{v^2}{r}$$

Взявши до уваги, що лінійну швидкість можна подати через період обертання, через обертову частоту і через кутову швидкість, можна записати ще ряд формул:

$$v = \frac{2\pi r}{T}, \text{ тому } a_{дц} = \frac{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2};$$

$$v = 2\pi r n, \text{ тому } a_{дц} = \frac{(2\pi r n)^2}{r} = 4\pi^2 n^2 r;$$

$$v = \omega r, \text{ тому } a_{дц} = \frac{(\omega r)^2}{r} = \omega^2 r.$$

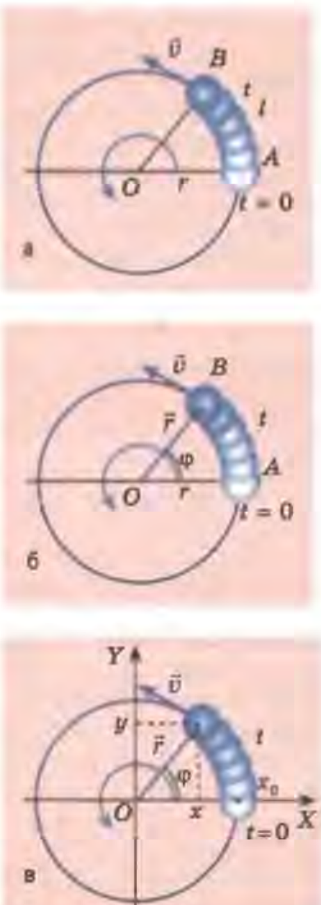

Рис. 14.6. Визначення положення тіла, яке рухається по колу: *а* — за пройденим шляхом: $l = vt$; *б* — за кутом повороту радіус-вектора: $\varphi = \omega t$; *в* — за рівняннями координат: $x = r\cos\varphi$; $y = r\sin\varphi$

S Як розв'язати основну задачу механіки для рівномірного руху по колу

Розв'язати основну задачу механіки — це визначити положення тіла в будь-який заданий момент часу. Якщо відомі радіус траєкторії руху тіла (r), початкове положення тіла $(x_0; y_0)$, лінійна (v) і, відповідно, кутова (ω) швидкості руху тіла по даній траєкторії, то визначити положення тіла в довільний момент часу можна трьома способами.

Спосіб 1 — за допомогою шляху l, пройденого тілом від початкового положення (рис. 14.6, *а*): $l = vt$.

Спосіб 2 — за допомогою кута φ *повороту радіус-вектора* (рис. 14.6, *б*): $\varphi=\omega t$.

Спосіб 3 — за допомогою рівнянь координат (рис. 14.6, *в*): $x=r\cos\varphi$; $y=r\sin\varphi$.

Оскільки з часом кут φ змінюється за законом $\varphi=\omega t$, то рівняння координат для рівномірного руху тіла по колу матимуть вигляд: $x=r\cos\omega t$; $y=r\sin\omega t$.

Підбиваємо підсумки

Рівномірний рух тіла по колу — це такий криволінійний рух, під час якого траєкторією руху тіла є коло, а лінійна швидкість і модуль миттєвої швидкості не змінюються з часом.

Кутова швидкість ω — це фізична величина, яка чисельно дорівнює куту φ повороту радіус-вектора за одиницю часу t: $\omega=\frac{\varphi}{t}$. Одиниця кутової швидкості в СІ — радіан за секунду (рад/с, або $с^{-1}$). Кутова та лінійна швидкості пов'язані співвідношенням: $v=\omega r$.

Період обертання — це фізична величина, яка дорівнює проміжку часу, за який тіло, що рівномірно рухається по колу, робить один повний оберт: $T=\frac{t}{N}$.

Обертова частота — це фізична величина, яка чисельно дорівнює кількості повних обертів за одиницю часу: $n=\frac{N}{t}$.

Період і обертова частота пов'язані співвідношенням $n=\frac{1}{T}$.

Прискорення у разі рівномірного руху тіла по колу є доцентровим ($a_{дц}$), тобто завжди напрямлене до центра кола; його модуль не залежить від часу та обчислюється за формулою: $a_{дц}=\frac{v^2}{r}=\omega^2 r$.

Контрольні запитання

1. Який рух називають рівномірним рухом по колу? **2.** Які фізичні величини характеризують швидкість руху тіла по колу? Дайте їхні характеристики. **3.** Яким співвідношенням пов'язані кутова та лінійна швидкості руху? Виведіть це співвідношення. **4.** Охарактеризуйте фізичні величини, які описують періодичність руху тіла по колу. **5.** Як пов'язані період і обертова частота? **6.** Доведіть, що в разі рівномірного руху по колу прискорення напрямлене до центра цього кола. **7.** За якою формулою визначають доцентрове прискорення? Виведіть цю формулу. **8.** Перелічіть відомі вам способи розв'язання основної задачі механіки для рівномірного руху тіла по колу.

Вправа № 11

1. На рисунку показано траєкторію автомобіля, який рухається з постійною швидкістю. У якій із зазначених точок траєкторії доцентрове прискорення автомобіля найбільше? найменше?

2. Знайдіть кутову та лінійну швидкості обертання Землі навколо Сонця, вважаючи, що орбіта Землі — коло радіусом $1{,}5\cdot10^8$ км.

3. Радіус колеса велосипеда — 0,4 м. Скільки обертів за хвилину робить колесо, якщо швидкість руху велосипеда становить 15,7 м/с?
4. Автомобіль рухається зі швидкістю 36 км/год по опуклому мосту з радіусом кривизни 30 м. Чому дорівнює прискорення руху автомобіля та куди воно напрямлене?
5. Хвилинна стрілка годинника втричі довша за секундну. Якими є співвідношення між лінійними швидкостями та прискореннями руху кінців цих стрілок?
6. Запишіть рівняння руху тіла, яке рухається з кутовою швидкістю $\frac{1}{6}\pi$ c^{-1} по дузі кола радіусом 10 м. Якими будуть координати тіла через 3 с після початку відліку часу?

Експериментальні завдання

1. Визначте лінійну та кутову швидкості руху точки на барабані пральної машини, а також її доцентрове прискорення під час роботи машини в режимі прання; у режимі віджимання. Які вимірювання вам необхідно здійснити, щоб виконати це завдання?
2. Визначте період обертання, обертову частоту та доцентрове прискорення точки на колесі автомобіля або велосипеда. Швидкість руху задайте самостійно.