

§ 6. МАТЕРІАЛЬНА ТОЧКА. ТРАЕКТОРІЯ РУХУ. ШЛЯХ. ПЕРЕМІЩЕННЯ



Будь-яке фізичне тіло складається з величезної кількості частинок. Наприклад, в 1 см^3 заліза міститься понад 10^{23} атомів Феруму. Порівняйте це число з кількістю людей на Землі — 10^{10} (10 млрд). Тобто число атомів в 1 см^3 заліза в багато разів більше за кількість жителів Землі! А щоб визначити розташування тіла у просторі, суворо кажучи, потрібно визначити розташування кожної його точки. Тож розв'язати основну задачу механіки неможливо? Чи так це? І чи завжди для розгляду руху тіла є сенс розглядати рух кожної його точки?



Чи завжди тіло можна вважати матеріальною точкою

У механіці матеріальне тіло описують його розмірами, формою та масою. Наприклад, планета Земля має форму кулі радіусом 6400 км , її маса становить приблизно $6 \cdot 10^{24} \text{ кг}$. Чи завжди для опису руху тіла потрібно знати об'єм і форму цього тіла? Розглянемо

поступальний рух якогось пробного тіла. У ході такого руху всі частини тіла рухаються однаково. Тому можна обрати одну частину пробного тіла, досить малу за розмірами, та розглядати її як «представницю» всього тіла в його русі. Додамо до розташування цієї частини у просторі масу всього тіла й назовемо цю частину *матеріальною точкою*.

Матеріальна точка — це фізична модель, що застосовується для спрощення опису руху тіла та відповідає тілу, розмірами якого в умовах даної задачі можна знехтувати.

Сфера застосування моделі «матеріальна точка» обмежена. Так, розглядаючи рух потяга між станціями, потяг можна вважати матеріальною точкою. Але коли потяг зупиняється на станції, ця модель не працює, бо, наприклад, пасажирки мають знати номери вагонів у потязі, тобто мусять брати до уваги його розміри. Якщо тіло здійснює обертальний рух і радіуси кіл, які описують усі точки тіла, набагато більші за розміри тіла, то цей рух теж можна описувати, вважаючи тіло матеріальною точкою. Наприклад, за допомогою моделі «матеріальна точка» можна описувати рух Землі навколо Сонця. При цьому описувати добове обертання Землі за допомогою цієї моделі, звичайно, не можна.

Далі, якщо не буде спеціальних застережень, вважатимемо, що дане тіло є матеріальною точкою.

2 Що таке траєкторія руху матеріальної точки

Траєкторія — уявна лінія, в кожній точці якої послідовно перебувала матеріальна точка під час свого руху в просторі.

Проведіть по класній дошці крейдою — слід, який залишить крейда, збігається із траєкторією її руху. Іноді можна побачити траєкторію руху літака. Ланцюжок слідів на чистому снігу допоможе відновити траєкторію руху людини або тварини.

Форма траєкторії руху тіла може бути довільною: дуга, парабола, пряма, ламана, яка-небудь складна лінія тощо. Ділянки траєкторії за формою поділяються на *прямолінійні* та *криволінійні*. У першому випадку траєкторія руху тіла в даній СВ — пряма лінія, у другому — крива. Наведемо кілька прикладів.

Траєкторією руху Землі в Сонячній системі є її орбіта. Орбіта Землі плоска, практично не відрізняється від кола. Траєкторія руху штучного супутника Землі трохи складніша й містить у собі дві ділянки: траєкторію підняття супутника та його орбіту. Остання теж плоска, але за формою являє собою еліпс.

Зверніть увагу: *траєкторія руху тіла залежить від того, відносно якого тіла відліку спостерігають за рухом*. Тому для опису руху тіла дуже важливо вибрати таку СВ, у якій траєкторія руху цього тіла якнайпростіша. Для наочності наведемо приклад з історії.



Рис. 6.1. Геоцентрична система світобудови за Птолемеєм. Для пояснення руху планет Птолемеєм придумав «систему епіциклів». Планета «прикріплена» до невеликої «кришталевий» сфери, а та, у свою чергу, «прикріплена» до великої сфери, у центрі якої розташована Земля. Обидві сфери обертаються, причому кожна має свій період обертання. Одночасним обертанням сфер, за Птолемеєм, і пояснюються незвичайні траєкторії планет



Рис. 6.2. Геліоцентрична система світобудови за М. Коперником: у центрі Всесвіту розташоване Сонце, а кожна планета обертається навколо Сонця по своїй коловій орбіті

Давньогрецький учений *Клавдій Птолемеї*, розглядаючи рух усіх небесних тіл і припускаючи, що в центрі Всесвіту розташована Земля (Гея), запропонував *геоцентричну СВ*, тобто СВ, пов'язану із Землею (рис. 6.1). Траєкторії руху планет у цій системі були настільки складними, що мало хто навіть із дуже освічених людей того часу міг їх уявити, а тим більше описати. Кілька століть по тому польський учений *Миколай Коперник* запропонував *геліоцентричну СВ*, узявши за тіло відліку Сонце (Геліос) (рис. 6.2). І картина будови Сонячної системи стала простою й доступною для розуміння.

3 Чим шлях відрізняється від переміщення

З поняттям траєкторії руху тісно пов'язане поняття *шляху*.

Шлях l — це фізична величина, що чисельно дорівнює довжині ділянки траєкторії, яка пройдена тілом за даний проміжок часу.

Одиниця шляху в СІ — метр (м).

Шлях, пройдений тілом, дозволяє визначити положення тіла в певний момент часу тільки тоді, коли відома траєкторія руху тіла. У цьому випадку досить від початкового положення тіла вздовж траєкторії в напрямку руху відкласти пройдений шлях.

Однак що робити, якщо траєкторія руху невідома? Наприклад, вийшовши зі школи, учень пройшов за півгодини шлях, який дорівнює 2 км. У цьому випадку неможливо визначити, у якому місці учень перебуватиме через півгодини, адже він може обрати будь-який напрямок руху і будь-яку траєкторію. Інша річ, якщо відомо, що через півгодини учень опиниться на відстані 2 км на південь від школи. Тут ідеться вже про зовсім іншу фізичну величину, яка називається *переміщенням*.

Переміщення \vec{s} — це векторна величина, яку графічно представляють у вигляді напрямленого відрізка прямої, проведеного із початкового положення точки до її кінцевого положення.

Як і будь-який вектор, переміщення вважається заданим, якщо відомі напрямок і модуль переміщення.

Одиниця модуля переміщення в СІ — метр (м).

Вектор переміщення в загальному випадку не збігається з траєкторією руху тіла (рис. 6.3, 6.4, а, б), тому шлях, пройдений тілом, не завжди дорівнює модулю переміщення: $l \neq s$. Шлях і модуль переміщення виявляються однакови тільки в тому випадку, коли тіло рухається вздовж прямої в незмінному напрямку (рис. 6.4, в).

Зверніть увагу: у будь-якому разі переміщення дорівнює зміні радіус-вектора:

$$\vec{s} = \vec{r} - \vec{r}_0$$



Рис. 6.3. Переміщення \vec{s} (позначено синім кольором) показує, на яку відстань від початкового положення і в якому напрямку перемістилося тіло за даний проміжок часу. Точка А — початкове положення тіла, точка В — положення тіла через заданий проміжок часу; l — шлях, пройдений тілом (позначено червоним кольором)

4 Для чого потрібно вміти знаходити проекцію переміщення

Якщо переміщення тіла відоме, то радіус-вектор тіла в будь-який даний момент часу можна обчислити за формулою:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{s}$$

Таким чином, можна визначити положення тіла в будь-який момент часу, тобто розв'язати основну задачу механіки. Однак за формулами, записаними у векторному вигляді, здійснювати обчислення доволі складно, адже в цьому випадку постійно доводиться враховувати напрямки векторів. Тому для розв'язування задач векторне рівняння переписують для проекцій векторів.

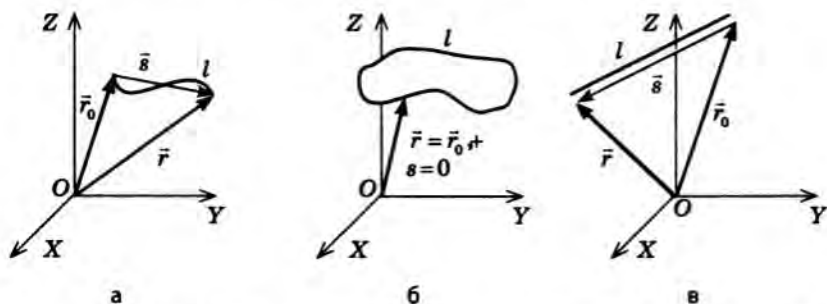


Рис. 6.4. Шлях l і модуль переміщення s тіла: а — траєкторією руху є крива лінія ($l > s$); б — траєкторією руху є замкнена лінія ($l \neq 0$, $s = 0$); в — траєкторією руху є пряма лінія; напрямок руху незмінний ($l = s$). У будь-якому разі $\vec{s} = \vec{r} - \vec{r}_0$

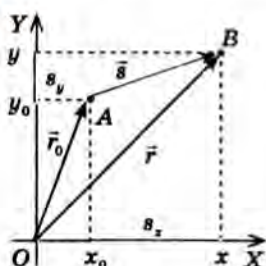


Рис. 6.5. Взаємозв'язок векторного і координатного методів знаходження положення тіла у просторі

Припустимо, що тіло переміщується в одній площині з точки A , положення якої задане радіус-вектором \vec{r}_0 (або координатами x_0, y_0), у точку B , положення якої задане радіус-вектором \vec{r} (або координатами x, y) (рис. 6.5). Тоді рівняння $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{s}$ можна переписати у вигляді:

$$r_x = r_{0x} + s_x; \quad r_y = r_{0y} + s_y,$$

де s_x і s_y — проекції вектора переміщення на осі OX і OY відповідно.

Оскільки $r_x = x$; $r_{0x} = x_0$; $r_y = y$; $r_{0y} = y_0$, то маємо рівняння координат, якими й будемо користуватися для розв'язування задач:

$$x = x_0 + s_x; \quad y = y_0 + s_y$$

Підбиваємо підсумки

Матеріальна точка — це фізична модель, що застосовується для спрощення опису руху тіла та відповідає тілу, розмірами якого за умов задачі можна знехтувати. Матеріальна точка описується координатами у просторі та масою, що збігається з масою тіла.

Лінія руху матеріальної точки у просторі називається траєкторією її руху. Ділянки траєкторії за формою поділяються на прямолінійні та криволінійні. Траєкторія руху тієї самої матеріальної точки залежить від того, відносно якого тіла відліку розглядається рух.

Шлях l — це фізична величина, що чисельно дорівнює довжині ділянки траєкторії, яка пройдена матеріальною точкою за даний проміжок часу.

Переміщення \vec{s} — це векторна величина, яку графічно представляють у вигляді напрямленого відрізка прямої, проведеного із початкового положення точки до її кінцевого положення.

У загальному випадку $l \neq s$. Одиниця шляху й одиниця переміщення в СІ — метр (м).

Положення (координати) матеріальної точки в будь-який момент часу можна обчислити, скориставшись співвідношеннями: $x = x_0 + s_x$; $y = y_0 + s_y$, де x_0, y_0 — координати точки в момент початку відліку часу; x, y — координати точки в момент часу, який визначається в задачі; s_x, s_y — проекції вектора переміщення на відповідні осі координат.

Контрольні запитання

1. Що називають матеріальною точкою? 2. У яких випадках тіло, що рухається, можна розглядати як матеріальну точку? 3. Дайте визначення траєкторії руху тіла. Чи залежить траєкторія руху тіла від вибору СВ? Наведіть приклади.
4. Що таке шлях? У яких одиницях його вимірюють? 5. Чому, знаючи шлях, не завжди можна визначити положення тіла? 6. Дайте визначення переміщення.
7. Коли модуль переміщення дорівнює пройденому шляху? 8. Запишіть формули для визначення положення тіла у просторі у векторному вигляді; через проекції.

Вправа № 4

1. Поясніть, у яких випадках можна вважати матеріальною точкою такі тіла:
а) автомобіль; б) ракету; в) Землю; г) людину.
2. Вертоліт підіймається вертикально. Зобразіть траєкторію руху точки, розташованої на лопаті гвинта, відносно пілота; відносно Землі.
3. Футболіст пробігає за матч близько 10 км. Що означає це число — шлях чи модуль переміщення? Яким може виявитися мінімальний модуль переміщення футболіста за матч?
4. Чи є шлях і переміщення відносними величинами (чи залежать вони від вибору СВ)?
5. З яким тілом потрібно пов'язати СВ, щоб ваші шлях і переміщення в будь-який момент часу дорівнювали нулю?
6. М'яч, кинутий вертикально вгору, піднявся на висоту 5 м і впав на те саме місце, з якого був кинутий. Визначте шлях і модуль переміщення м'яча.
7. Автомобіль рухається на повороті дороги, який являє собою половину дуги кола радіусом 20 м. Визначте шлях і модуль переміщення автомобіля за час повороту.
8. У початковий момент часу тіло перебувало в точці з координатами $x_0 = 4$ м, $y_0 = -3$ м. Через певний проміжок часу тіло перемістилося в точку з координатами $x = -4$ м, $y = 3$ м. Накресліть вектор переміщення та знайдіть його проекції на осі координат. Визначте модуль переміщення. Чи можна, використовуючи дані задачі, визначити шлях, пройдений тілом?

Експериментальне завдання

Зробіть невеликий паперовий круг — «колесо», на «ободі» якого позначте точку. Потім на аркуші накресліть пряму й покладіть колесо так, щоб воно торкалося прямої. Перекочуючи «колесо» вздовж лінії, позначайте на папері положення точки (див. рисунок). Сполучіть одержані позначки — це й буде траєкторія руху заданої точки відносно поверхні Землі.

Побудуйте траєкторію руху цієї ж точки відносно осі обертання «колеса». Позначте інші точки, зробивши в «колесі» 2–3 отвори. Побудуйте траєкторії руху цих точок відносно поверхні Землі та відносно осі обертання «колеса».

