

§ 39. ГАРМОНІЧНІ КОЛИВАННЯ. РІВНЯННЯ ГАРМОНІЧНИХ КОЛИВАНЬ

Якщо тіло здійснює коливальний рух, то його положення в просторі змінюється певним чином. Загальні закони коливального руху є досить складними й виходять за рамки шкільного курсу фізики. Тому запишемо рівняння руху тільки для одного виду коливань — гармонічних коливань. Саме про них і йтиметься.

1 Які коливання називають гармонічними

Коливальний рух і рівномірний рух по колу дуже схожі: обидва ці рухи є періодичними, тобто повторюються через рівні проміжки часу, крім того, ці рухи характеризуються схожими фізичними величинами. Тож можна припустити, що вони описуються схожими законами. Покажемо, що рівняння координати тіла, яке рухається по колу, і рівняння координати тіла, яке коливається, мають однаковий вигляд.

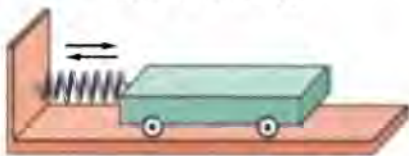


Рис. 39.1. Візок, прикріплений пружиною до вертикальної стіни й виведений із положення рівноваги, здійснює коливальний рух

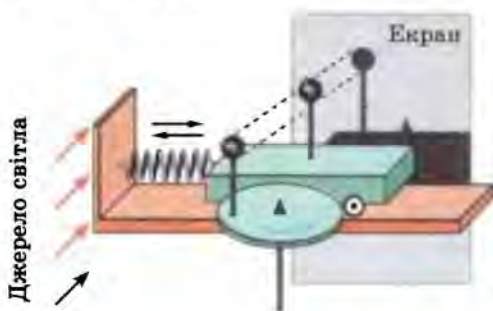


Рис. 39.2. Якщо період обертання диска дорівнює періоду коливань візка, а радіус обертання кульки на диску дорівнює амплітуді коливань візка, то коливання тіней, що їх відкидають обидві кульки, будуть однаковими

Для прикладу порівняємо два рухи: коливання легкорухомого візка, прикріпленого пружиною до вертикальної стіни, і рух по колу кульки, закріпленої на диску, що обертається.

Виведемо візок із положення рівноваги — він почне здійснювати коливальний рух (рис. 39.1). Порахувавши кількість N коливань візка за певний проміжок часу t , визначимо період T

$$\text{його коливань: } T = \frac{t}{N}.$$

Складемо пристрій, як показано на рис. 39.2. Обертатимемо диск із періодом, який дорівнює періоду коливань візка (за одне повне коливання візка диск здійснює один повний оберт). Під час обертання диска тінь від кульки, встановленої на диску, здійснюватиме певний коливальний рух. Якщо розтягти пружину на відстань A , яка дорівнює радіусу r обертання кульки ($A = r$), і відпустити її в той момент, коли тінь від кульки

на диску співпадає з тінню від кульки на візку, то побачимо, що коливання тіней будуть абсолютно однаковими.

У дійсності провести такий дослід не так просто, набагато простіше записати рівняння коливань візка на пружині, використовуючи прийоми вищої математики. Однак ви поки не володієте такими знаннями, тому будемо просто спостерігати й проводити *аналогії*.

Вивчаючи рівномірний рух тіла по колу (див. § 14), ви з'ясували, що координата x тіла під час такого руху змінюється за законом $x = r \cos \varphi$, де r — радіус кола, що його описує тіло; φ — кут повороту радіус-вектора (рис. 39.3). З рисунка бачимо, що так само змінюється й координата тіні кульки, яка рівномірно обертається на диску.

Оскільки $\varphi = \omega t$, де $\omega = \frac{2\pi}{T}$ — кутова швидкість обертання кульки, то рівняння координати x тіні кульки можна записати в такому вигляді:

$$x = r \cos \frac{2\pi}{T} t.$$

Оскільки тінь від кульки на диску і тінь від кульки на візку здійснюють абсолютно однакові рухи, то рівняння коливань кульки на візку буде тим самим. Зважаючи, що за умовами експерименту радіус обертання кульки дорівнює амплітуді коливань візка ($r = A$), а $\frac{2\pi}{T} = \omega$ — циклічна частота коливань візка (за означенням), маємо *рівняння коливань* візка — *рівняння залежності $x(t)$* :

$$x = A \cos \omega t, \quad (1)$$

де x — координата візка в момент часу t . Початок координат збігається з положенням рівноваги візка.

Коливання, під час яких координата тіла, що коливається, змінюється з часом за законом косинуса (або синуса), називають **гармонічними коливаннями**.

Таким чином, візок на пружині здійснює гармонічні коливання.

2 Що таке фаза коливань

Звернемося до формули (1). Величину ωt , що стоїть у ній під знаком косинуса, називають *фазою коливань* і позначають символом φ .

Фаза коливань φ — це фізична величина, яка характеризує стан коливальної системи в довільний момент часу.

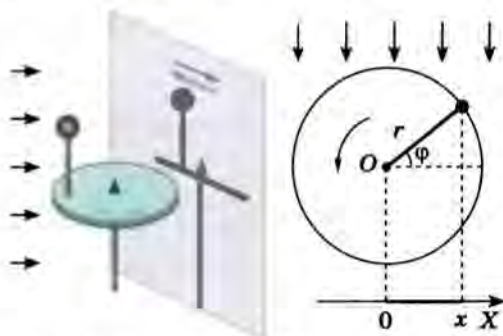


Рис. 39.3. Координата x кульки, яка рівномірно обертається на диску по колу радіусом r , змінюється за законом $x = r \cos \varphi$, де φ — кут повороту радіус-вектора; за цим самим законом змінюється й координата тіні кульки, що здійснює коливальний рух

Фаза коливань визначається характером руху тіла (періодом його коливань T) і моментом часу t , у який фіксується координата ($\varphi = \omega t = \frac{2\pi}{T}t$). Фаза коливань також залежить від моменту початку відліку часу. Якщо, вивчаючи коливальний рух, ввімкнути секундомір не в момент максимального відхилення тіла від положення рівноваги, а через деякий час, то рівняння коливань набуде вигляду:

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0),$$

де $\omega = 2\pi/T$ — частота; φ_0 — початкова фаза коливань — фаза коливань у момент початку відліку часу ($t=0 \Rightarrow \varphi = \omega t + \varphi_0 = \varphi_0$).

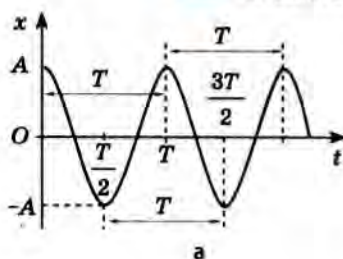
Якщо початок відліку часу збігається з моментом проходження тілом положення рівноваги, то в цей момент координата тіла дорівнює нулю, тому рівняння коливань матиме вигляд:

$$x = A \sin \omega t. \quad (2)$$

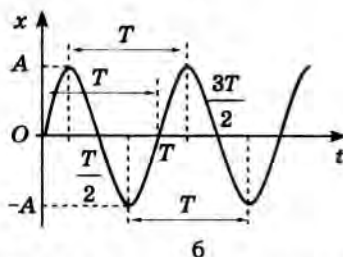
Насправді коливання, які описані рівняннями (1) і (2), відрізняються тільки початковою фазою коливань.

3 Який вигляд мають графіки гармонічних коливань

Графік залежності координати тіла, що коливається, від часу називають **графіком коливань**.



а



б

Графік гармонічних коливань має вигляд кривої, яку в математиці називають *синусоїдою* або *косинусоїдою* (рис. 39.4). З графіка коливань, як і з рівняння коливань, легко визначити всі кінематичні характеристики коливального руху. Також графік дає змогу записати рівняння коливань (див. п. 4 цього параграфа).

Точно кажучи, вільні коливання не є гармонічними. Однак якщо тертя в коливальній системі мале, то протягом невеликих проміжків часу (поки амплітуда не встигне помітно зменшитися) вільні коливання можна вважати гармонічними та описувати графіками, подібними до зображених на рис. 39.4.



Учимося розв'язувати задачі

Задача 1. Рівняння коливань тіла має

вигляд: $x = 5 \cos \frac{\pi}{6}t$ (м). Визначте амплітуду,

період і частоту коливань тіла. Визначте фазу коливань і координату тіла через 2 с після початку відліку часу.

Рис. 39.4. Графіки гармонічних коливань. Координата тіла, яке коливається, змінюється залежно від часу t за законом: $x = A \cos \omega t$ (а); $x = A \sin \omega t$ (б) (A — амплітуда коливань; $\omega = \frac{2\pi}{T}$ — циклічна частота; T — період коливань)

Дано:

$$x = 5 \cos \frac{\pi}{6} t \text{ (м)}$$

$$t = 2 \text{ с}$$

 $A = ?$
 $T = ?$
 $\nu = ?$
 $\varphi = ?$
 $x = ?$

Аналіз фізичної проблеми, розв'язання. Коливання є гармонічними, тому для розв'язання задачі порівняємо подане рівняння із загальним виглядом рівняння гармонічних коливань. Для зручності запишемо їх одне під одним:

$$x = 5 \cos \frac{\pi}{6} t,$$

$$x = A \cos \omega t.$$

Порівнявши, маємо: $A = 5 \text{ м}$; $\omega = \frac{\pi}{6} \text{ с}^{-1}$.

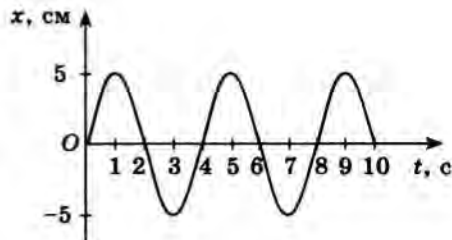
Оскільки $\omega = \frac{2\pi}{T}$, то $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\pi/6} = 12 \text{ (с)}$;

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{12} \approx 0,08 \text{ Гц}; \quad \varphi = \omega t = \frac{\pi}{6} \text{ с}^{-1} \cdot 2 \text{ с} = \frac{\pi}{3};$$

$$x = 5 \cos \frac{\pi}{6} t = 5 \cos \frac{\pi}{6} \cdot 2 = 5 \cos \frac{\pi}{3} = 5 \cdot \frac{1}{2} = 2,5 \text{ (м)}.$$

Відповідь: амплітуда коливань $A = 5 \text{ м}$; період коливань $T = 12 \text{ с}$; частота коливань $\nu \approx 0,08 \text{ Гц}$; фаза коливань через 2 с : $\varphi = \frac{\pi}{3}$; координата через 2 с : $x = 2,5 \text{ м}$.

Задача 2. За графіком, наведеним на рисунку, визначте амплітуду та період коливань тіла. Обчисліть частоту та циклічну частоту коливань тіла; запишіть рівняння коливань; знайдіть зміщення тіла у фазі $\frac{\pi}{2}$ рад.



Дано:

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

 $A = ?$
 $T = ?$
 $\omega = ?$
 $x(t) = ?$
 $x\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right) = ?$

Аналіз фізичної проблеми. У момент початку спостереження ($t=0$) тіло перебувало в положенні рівноваги ($x_0=0$), тому рівняння коливань має вигляд: $x = A \sin \omega t$.

З графіка бачимо: максимальне зміщення тіла дорівнює 5 см , тому $A = x_{\text{max}} = 5 \text{ см} = 0,05 \text{ м}$; проміжок часу, за який тіло здійснює одне повне коливання, дорівнює 4 с , отже, $T = 4 \text{ с}$.

Пошук математичної моделі, розв'язання. Обчислимо частоту й циклічну частоту коливань:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{4 \text{ с}} = 0,25 \text{ Гц};$$

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi \cdot 0,25 \text{ с}^{-1} = 0,5\pi \text{ с}^{-1}.$$

Підставивши значення $A=0,05$ м і $\omega=0,5\pi$ с⁻¹ у рівняння коливань, маємо: $x=0,05\sin 0,5\pi t$ (м).

Якщо $\varphi=\frac{\pi}{2}$, то $x=A\sin\varphi=0,05\sin\frac{\pi}{2}=0,05$ (м).

Відповідь: амплітуда коливань $A=0,05$ м; період коливань $T=4$ с; частота коливань $\nu=0,25$ Гц; циклічна частота $\omega=0,5\pi$ с⁻¹; рівняння коливань має вигляд: $x=0,05\sin 0,5\pi t$ (м); зміщення тіла у фазі $\frac{\pi}{2}$ рад: $x=0,05$ м.

Підбиваємо підсумки

Коливання, у ході яких координата тіла, яке коливається, змінюється з часом за законом косинуса (або синуса), називають гармонічними коливаннями.

Якщо в момент початку відліку часу тіло було максимально відхилене від положення рівноваги, то рівняння коливань — рівняння залежності $x(t)$ — має вигляд: $x=A\cos\omega t$.

Якщо початок відліку часу збігається з моментом проходження тілом положення рівноваги, то рівняння коливань має вигляд: $x=A\sin\omega t$.

Величину, яка стоїть під знаком косинуса або синуса в рівнянні гармонічних коливань, називають фазою коливань: $\varphi=\omega t+\varphi_0$. Фаза коливань визначається характером руху тіла (його періодом), моментом часу, у який фіксується координата, і моментом початку відліку часу.

Колівальний рух можна також задати за допомогою графіка, який матиме вигляд синусоїди (косинусоїди). З рівняння коливань або з графіка колівального руху можна визначити всі кінематичні характеристики цього руху.

Контрольні запитання

1. Які коливання називають гармонічними? 2. Чому, щоб записати рівняння гармонічних коливань, ми порівнювали коливання з рухом по колу? Опишіть цей дослід. 3. Запишіть рівняння гармонічних коливань. 4. Яким рівнянням ви будете користуватися, якщо в момент початку спостереження тіло перебувало в положенні рівноваги? якщо тіло було максимально відхилене від положення рівноваги? 5. Який вигляд має графік вільних гармонічних коливань? 6. Як можна задати колівальний рух?

Вправа № 34

- Запишіть рівняння гармонічних коливань для тіла, якщо амплітуда його коливань 10 см, а період коливань 1 с. Вважайте, що в момент початку спостереження тіло було максимально відхилене від положення рівноваги.
- Тіло на пружині здійснює 10 коливань за 2 с. Максимальне відхилення тіла від положення рівноваги становить 5 см. Запишіть рівняння гармонічних коливань, якщо в момент початку спостереження тіло перебувало в положенні рівноваги.
- Рівняння коливань тіла має вигляд $x=4\sin\frac{2\pi}{3}t$ (м). Визначте амплітуду, період і частоту коливань цього тіла.

- Рівняння коливань тіла має вигляд: $x = 0,3 \cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right)$ (м). Визначте амплітуду, період і частоту коливань цього тіла; фазу коливань і координату тіла через 1 с після початку спостереження.
- На рис. 1–3 наведено графіки гармонічних коливань деяких тіл. Для кожного тіла: а) визначте амплітуду коливань; б) період коливань; в) частоту коливань; г) запишіть рівняння коливань.

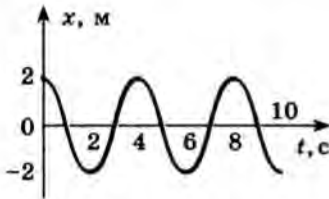


Рис. 1

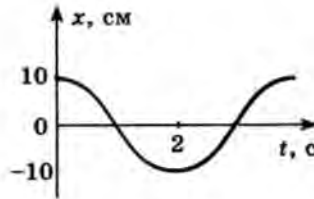


Рис. 2

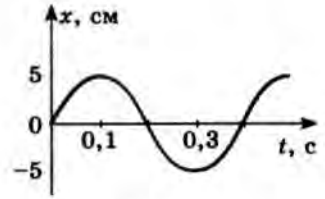


Рис. 3

Експериментальне завдання

Складіть пристрій, як показано на рис. 4. Закрийте отвір конуса пальцем і насипте в конус сухий річковий пісок (або сіль, пшоно). Відведіть конус від положення рівноваги та відпустіть. Одночасно почніть переміщувати паперову стрічку так, як показано на рисунку. Висипаючись, пісок залишить на стрічці слід у вигляді хвилястої лінії. (Щоб потім пісок не зсипався з паперової смужки, попередньо вкрийте її шаром клейстеру, виготовленого з борошна й води, або клею для шпалер.) Укажіть на одержаному «графіку гармонічних коливань» амплітуду коливань і визначте її.



Рис. 4