

§ 28. РУХ ТІЛА ПІД ДІЄЮ КІЛЬКОХ СИЛ

71

Вивчаючи цей параграф, ви познайомитеся з основними етапами розв'язування задач із динаміки, розглянете приклади розв'язування деяких ключових задач. Матеріал параграфа слід ретельно опрацювати, адже з подібними задачами ви будете зустрічатися в ході вивчення всього подальшого курсу фізики.

1

Алгоритм розв'язування задач із динаміки

1. Уважно прочитайте умову задачі. З'ясуйте, які сили діють на тіло, яким є характер його руху (рухається це тіло з прискоренням чи рівномірно прямолінійно).
2. Виконайте пояснювальний рисунок, на якому зазначте сили, що діють на тіло, і напрямок прискорення руху тіла.
3. Виберіть систему координат*. Осі координат бажано спрямувати так, щоб якнайбільше сил було напрямлено вздовж цих осей (це не змінить результату розв'язання, але значно його спростить).
4. Запишіть рівняння другого закону Ньютона у векторному вигляді та в проекціях на осі координат. Запишіть формули для обчислення сил. Одержавши систему рівнянь, розв'яжіть її у загальному вигляді відносно невідомої величини. Якщо в задачі дано якісь додаткові умови, використайте їх.
5. Перевірте одиницю та визначте числове значення шуканої величини. Проаналізуйте результат і запишіть відповідь.

* Систему координат будемо зображувати так, щоб точка перетину осей координат перебувала на одній лінії з центром тяжіння тіла. При цьому слід пам'ятати, що ця точка нерухома відносно поверхні Землі.

2 Ковзання тіла по горизонтальній поверхні

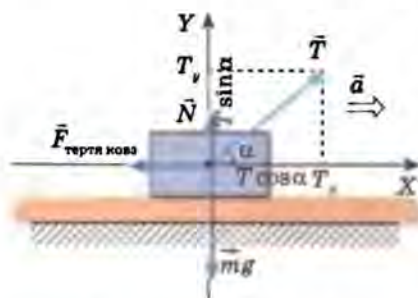
Задача 1. Тіло масою 10 кг тягнуть по горизонтальній поверхні за мотузку, прикладаючи при цьому силу 40 Н, напрямлену під кутом 30° до горизонту. Прискорення руху тіла $2,5 \text{ м/с}^2$. Визначте коефіцієнт тертя між тілом і поверхнею.

Дано:
 $m = 10 \text{ кг}$
 $T = 40 \text{ Н}$
 $\alpha = 30^\circ$
 $a = 2,5 \text{ м/с}^2$
 $g \approx 10 \text{ м/с}^2$

μ — ?

Аналіз фізичної проблеми. На тіло діють чотири сили: сила тяжіння $m\vec{g}$, сила \vec{N} нормальної реакції опори, сила \vec{T} натягу мотузки та сила тертя ковзання $\vec{F}_{\text{тертя ковз}}$. Тіло збільшує швидкість свого руху, отже, прискорення та рух тіла мають однаковий напрямок.

Виконаємо пояснювальний рисунок, зазначивши на ньому сили, які діють на тіло, напрямки швидкості та прискорення руху.



Пов'яжемо систему координат із тілом на поверхні Землі, вісь OY спрямуємо вертикально вгору, вісь OX — горизонтально, в напрямку руху тіла.

Пошук математичної моделі, розв'язання. Запишемо другий закон Ньютона у векторному вигляді:
 $\vec{T} + \vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_{\text{тертя ковз}} = m\vec{a}$.

Спроектуємо рівняння на осі координат (сила натягу \vec{T} не лежить на осі координат, тому для знаходження її проекцій проведемо із кінця вектора \vec{T} перпендикуляри до осей OX і OY : $T_x = T \cos \alpha$; $T_y = T \sin \alpha$) і запишемо вираз для сили тертя:

$$\begin{cases} OX: T \cos \alpha - F_{\text{тертя ковз}} = ma \text{ (оскільки } N_x = 0; mg_x = 0), \\ OY: T \sin \alpha + N - mg = 0 \text{ (оскільки } F_{\text{тертя ковз} y} = 0), \\ F_{\text{тертя ковз}} = \mu N. \end{cases}$$

Розв'язавши одержану систему рівнянь, знайдемо μ :

$$N = mg - T \sin \alpha \Rightarrow F_{\text{тертя ковз}} = \mu(mg - T \sin \alpha) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T \cos \alpha - \mu(mg - T \sin \alpha) = ma \Rightarrow \mu = \frac{T \cos \alpha - ma}{mg - T \sin \alpha}.$$

Визначимо значення шуканої величини:

$$[\mu] = \frac{\text{Н} \cdot \text{кг} \cdot \text{м/с}^2}{\text{кг} \cdot \text{м/с}^2 - \text{Н}} = \frac{\text{Н}}{\text{Н}} = 1; \quad \{\mu\} = \frac{40 \frac{\sqrt{3}}{2} - 25}{100 - 40 : 2} = 0,12; \quad \mu = 0,12.$$

Відповідь: коефіцієнт тертя ковзання $\mu = 0,12$.

Рух по похилій площині

Задача 2. Автомобіль масою 4 т рухається на гору, сповільнюючи свій рух. Визначте силу тяги автомобіля, якщо ухил гори становить 0,02, а коефіцієнт опору руху дорівнює 0,04. Прискорення автомобіля є постійним і дорівнює $0,15 \text{ м/с}^2$.

Зверніть увагу: у задачі є два нові для вас терміни: ухил і коефіцієнт опору руху. Вони зустрічаються в багатьох задачах із фізики.

Ухил — це синус кута нахилу полотна дороги до горизонту. Якщо ухил є малим (меншим за 0,1), то $\cos \alpha \approx 1$ (для малих кутів $\sin \alpha \approx \alpha$, тому іноді ухил позначають як α).

Коефіцієнт опору руху враховує всі види тертя (у даному випадку — тертя кочення коліс об дорогу, тертя ковзання в осях тощо). Коефіцієнт опору руху позначають символом μ ; сила опору $F_{\text{оп}}$ напрямлена протилежно напрямку руху тіла й обчислюється за формулою: $F_{\text{оп}} = \mu N$.

Дано:

$$m = 4 \cdot 10^3 \text{ кг}$$

$$\sin \alpha = 0,02$$

$$\mu = 0,04$$

$$a = 0,15 \text{ м/с}^2$$

$$g \approx 10 \text{ м/с}^2$$

$$F_{\text{тяги}} = ?$$

Аналіз фізичної проблеми. На тіло діють чотири сили: сила тяжіння $m\vec{g}$, сила \vec{N} нормальної реакції опори, сила тяги $\vec{F}_{\text{тяги}}$ та сила опору $\vec{F}_{\text{оп}}$.

Тіло зменшує свою швидкість, тому прискорення руху тіла напрямлене протилежно напрямку його руху.

Виконаємо пояснювальний рисунок, зазначивши на ньому сили, що діють на тіло, напрямки швидкості та прискорення руху.

Пов'яжемо систему координат із тілом на поверхні Землі, вісь OY спрямуємо перпендикулярно до поверхні дороги, вісь OX — уздовж дороги (за такого вибору осей тільки одна сила ($m\vec{g}$) не лежить на осях координат).

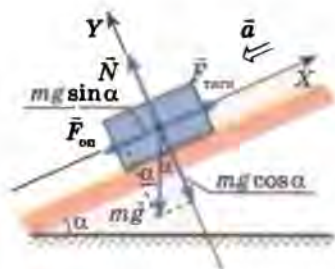
Пошук математичної моделі, розв'язання. Запишемо другий закон Ньютона у векторному вигляді:

$$\vec{F}_{\text{тяги}} + \vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_{\text{оп}} = m\vec{a}.$$

Спроектуємо рівняння на осі координат (сила $m\vec{g}$ не лежить на осі координат, тому для знаходження її проекцій опустимо з кінця вектора $m\vec{g}$ перпендикуляри на осі OX і OY : $mg_x = -mg \sin \alpha$; $mg_y = -mg \cos \alpha$) і запишемо вираз для $F_{\text{оп}}$:

$$\begin{cases} OX: F_{\text{тяги}} - F_{\text{оп}} - mg \sin \alpha = -ma, \\ OY: N - mg \cos \alpha = 0, \\ F_{\text{оп}} = \mu N. \end{cases}$$

Розв'язавши одержану систему рівнянь, знайдемо $F_{\text{тяги}}$:



$$\begin{aligned}
 N &= mg \cos \alpha \Rightarrow F_{\text{оп}} = \mu mg \cos \alpha \Rightarrow \\
 &\Rightarrow F_{\text{тяги}} - \mu mg \cos \alpha - mg \sin \alpha = -ma \Rightarrow \\
 &\Rightarrow F_{\text{тяги}} = \mu mg \cos \alpha + mg \sin \alpha - ma = m(\mu g \cos \alpha + g \sin \alpha - a).
 \end{aligned}$$

Визначимо значення шуканої величини:

$$[F_{\text{тяги}}] = \text{кг}(\text{м/с}^2 + \text{м/с}^2 + \text{м/с}^2) = \text{Н};$$

$$\{F_{\text{тяги}}\} = 4 \cdot 10^3 \cdot (0,04 \cdot 10 + 10 \cdot 0,02 - 0,15) = 1,8 \cdot 10^3;$$

$$F_{\text{тяги}} = 1,8 \cdot 10^3 \text{ Н} = 1,8 \text{ кН}.$$

Відповідь: сили тяги автомобіля $F_{\text{тяги}} = 1,8 \text{ кН}$.

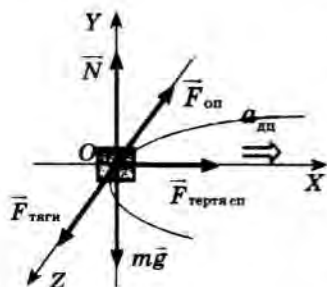
4 Рух по колу

Задача 3. На горизонтальній дорозі автомобіль має зробити поворот радіусом 45 м. Яку найбільшу швидкість може розвинути автомобіль, щоб «вписатись» у цей поворот? Коефіцієнт тертя ковзання шин об асфальт дорівнює 0,5.

Дано:
 $r = 45 \text{ м}$
 $\mu = 0,5$
 $g \approx 10 \text{ м/с}^2$
 $v_{\text{макс}} = ?$

Аналіз фізичної проблеми. Автомобіль рухається по колу, отже, він має доцентрове прискорення. На автомобіль діють п'ять сил: сила тяжіння $m\vec{g}$, сила \vec{N} нормальної реакції опори, сила тяги $\vec{F}_{\text{тяги}}$, сила опору $\vec{F}_{\text{оп}}$ та сила тертя спокою $\vec{F}_{\text{тертя сп}}$, яка напрямлена до центра кола і завдяки якій автомобіль може зробити поворот.

Автомобіль «не впишеться» в поворот, якщо $\vec{F}_{\text{тертя сп}}$ сягне максимального значення й «перейде» в силу тертя ковзання. Будемо вважати, що $F_{\text{тертя сп макс}} = \mu N$, де μ — коефіцієнт тертя ковзання.



Виконаємо пояснювальний рисунок, зазначивши на ньому сили, що діють на автомобіль, напрямки швидкості та прискорення руху. Пов'яжемо систему координат із тілом на поверхні Землі, вісь OY спрямуємо перпендикулярно до поверхні дороги, вісь OX спрямуємо до центра повороту, вісь OZ — у напрямку руху.

Пошук математичної моделі, розв'язання. Запишемо другий закон Ньютона у векторному вигляді:

$$\vec{F}_{\text{тяги}} + \vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_{\text{оп}} + \vec{F}_{\text{тертя сп}} = m\vec{a}_{\text{дц}}.$$

Спроектуємо рівняння на осі координат; запишемо вираз для $F_{\text{тертя сп max}}$ та формулу для доцентрового прискорення $a_{\text{дц}}$:

$$\begin{cases} OX: F_{\text{тертя сп}} = ma_{\text{дц}}, \\ OY: N - mg = 0, \\ OZ: F_{\text{тяги}} - F_{\text{оп}} = 0, \\ F_{\text{тертя сп max}} = \mu N, \\ a_{\text{дц}} = \frac{v^2}{r}. \end{cases}$$

Розв'яжемо одержану систему лінійних рівнянь відносно v :

$$\begin{aligned} N = mg \Rightarrow F_{\text{тертя сп max}} = \mu mg \Rightarrow \mu mg = ma_{\text{дц}} \Rightarrow \mu g = a_{\text{дц}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \mu g = \frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\mu gr}. \end{aligned}$$

Визначимо значення шуканої величини:

$$[v] = \sqrt{\text{м/с}^2 \cdot \text{м}} = \text{м/с}; \{v\} = \sqrt{0,5 \cdot 45 \cdot 10} = 15; v = 15 \text{ м/с}.$$

Відповідь: найбільша швидкість автомобіля $v_{\text{max}} = 15 \text{ м/с}$.

5 Рух зв'язаних систем

Задача 4. Два однакові тягарі масами 1 і 2 кг зв'язані між собою міцною нерозтяжною ниткою. Тягар масою 1 кг тягнуть вертикально вгору із силою 45 Н. Визначте прискорення тягарів і силу натягу нитки.

Дано:

$$m_1 = 1 \text{ кг}$$

$$m_2 = 2 \text{ кг}$$

$$F = 45 \text{ Н}$$

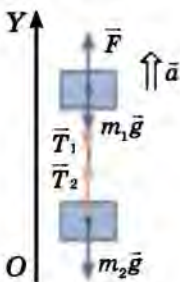
$$g \approx 10 \text{ м/с}^2$$

$$a = ?$$

$$T = ?$$

Аналіз фізичної проблеми. Оскільки нитка міцна й нерозтяжна, тягарі рухаються як єдине ціле з прискоренням \vec{a} . За допомогою нитки тягарі взаємодіють один з одним із силами \vec{T}_1 і \vec{T}_2 . Згідно з третім законом Ньютона ці сили рівні за модулем і протилежні за напрямком ($\vec{T}_1 = -\vec{T}_2$).

Виконаємо пояснювальний рисунок, зазначивши на ньому сили, що діють на кожний тягар, і напрямок прискорення руху тягарів. Вісь OY спрямуємо вертикально вгору.



Пошук математичної моделі, розв'язання. Для кожного тягара запишемо рівняння другого закону Ньютона у векторному вигляді та в проекції на вісь OY :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \vec{F} + m_1 \vec{g} + \vec{T}_1 = m_1 \vec{a}, \\ m_2 \vec{g} + \vec{T}_2 = m_2 \vec{a}; \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} F - m_1 g - T_1 = m_1 a, \\ -m_2 g + T_2 = m_2 a; \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} F - m_1 g - T = m_1 a, \\ -m_2 g + T = m_2 a \end{cases} \quad (\text{оскільки } T_1 = T_2 = T). \end{aligned}$$

Розв'яжемо систему методом додавання:

$$F - (m_1 + m_2)g = (m_1 + m_2)a \Rightarrow a = \frac{F}{m_1 + m_2} - g.$$

Силу натягу нитки знайдемо з другого рівняння системи:
 $T = m_2(a + g)$. Визначимо значення шуканих величин:

$$[a] = \frac{\text{Н}}{\text{кг} + \text{кг}} + \frac{\text{м}}{\text{с}^2} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} / \text{с}^2}{\text{кг}} + \frac{\text{м}}{\text{с}^2} = \frac{\text{м}}{\text{с}^2}, \quad \{a\} = \frac{45}{1+2} - 10 = 5, \quad a = 5 \text{ м/с}^2;$$

$$[T] = \text{кг} \left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2} + \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \right) = \text{кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}^2} = \text{Н}, \quad \{T\} = 2(5 + 10) = 30, \quad T = 30 \text{ Н}.$$

Відповідь: тіла рухаються з прискоренням $a = 5 \text{ м/с}^2$, сила натягу нитки $T = 30 \text{ Н}$.

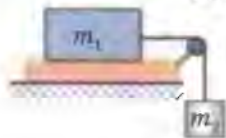
1 Замість підсумків

Ви познайомились із розв'язуванням деяких типових задач із динаміки. Звичайно, розглянути в рамках підручника всі типи задач неможливо, та й не потрібно. Головне — у вас є алгоритм розв'язування й приклади роботи з цим алгоритмом. Решта — за вами.

Отже, розв'язуючи будь-яку задачу з динаміки, спочатку виконайте пояснювальний рисунок, укажіть сили, запишіть рівняння другого закону Ньютона, виберіть СВ, знайдіть проекції. Звичайно, слід знати, як напрямлені сили, коли вони виникають і за якими формулами визначаються. А далі, навіть якщо ви відразу не бачите всього ходу розв'язання задачі, — не страшно. Ви обов'язково знайдете якусь величину, знання якої допоможе вам побачити подальший хід розв'язування. Можна навіть сказати так: «Якщо не знаєш, як розв'язувати задачу, то почни її розв'язувати». Не потрібно боятися зробити хибний крок. Той не перемагає, хто не вміє програвати. Навчитися розв'язувати задачі з фізики може кожен, потрібно тільки їх розв'язувати!

Вправа № 24

1. Собака упряжка починає тягти з постійною силою 150 Н санки масою 100 кг, що стоять на снігу. За який проміжок часу санки проїдуть перші 200 м шляху? Вважайте, що коефіцієнт тертя ковзання полозів об сніг дорівнює 0,05.



2. Тіло масою $m_1 = 1 \text{ кг}$ ковзає по горизонтальній поверхні під дією тягаря масою $m_2 = 250 \text{ г}$ (див. рисунок). Дана система тіл рухається з прискоренням $1,5 \text{ м/с}^2$. Визначте коефіцієнт тертя між тілом і поверхнею.
3. Санчата скочуються з гори завдовжки 10 м за 2 с. Знайдіть кут нахилу гори, якщо коефіцієнт тертя ковзання полозів об сніг 0,02.
4. Автомобіль масою 3 т рухається на гору, розвиваючи силу тяги 3000 Н. З яким прискоренням рухається автомобіль, якщо коефіцієнт опору руху дорівнює 0,04, а ухил — 0,03?
5. Робітник штовхає вагонетку із силою, напрямленою вниз під кутом 45° до горизонту. Яку найменшу силу має прикласти робітник, щоб зрушити вагонетку з місця, якщо її маса 300 кг, а коефіцієнт опору 0,01? Вагонетка стоїть горизонтально.
6. Кулька, підвішена на нитці завдовжки 50 см, обертається в горизонтальній площині. З якою швидкістю рухається кулька, якщо кут відхилення нитки від вертикалі становить 60° ?