§ 28. ПЕРІОД ВЛАСНИХ КОЛИВАНЬ У КОЛИВАЛЬНОМУ КОНТУРІ

?! Абсолютна шкала температур, поширення хвиль по поверхні рідини, гравітаційний розігрів зір, електромагнітні коливання, вдосконалений морський компас, ехолот безперервної дії, кабель, точний гальванометр. І десятирічний студент університету. Ви, напевно, вже здогадалися, що все це поєднує одне ім'я — Вільям Томсон (лорд Кельвін). У 1853 р. Вільям Томсон вивів формулу залежності періоду власних коливань контуру від його ємності та індуктивності. Цю формулу будемо виводити й ми.

1 Як розрахувати період власних коливань коливального контуру

Оскільки коливання — періодичні процеси, однією з основних фізичних величин, що їх характеризують, є період. Нагадаємо, що період коливань тіла на пружині обчислюється за формулою:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Якщо ви правильно склали таблицю аналогій (вправа № 23, завдання 4), то отримали, що маса m тіла в механічній коливальній системі аналогічна індуктивності L котушки, а жорсткість k пружини — величині, оберненій до ємності конденсатора, тобто $\frac{1}{C}$. Отже, скориставшись методом аналогій, можемо записати *формулу для розрахунку періоду власних електромагнітних коливань у коливальному контурі* — ***формулу Томсона***:

$$T = 2\pi\sqrt{LC}.$$

2 Чому формула Томсона є наслідком закону збереження енергії

Доведемо, що формула Томсона, яку ми отримали методом аналогій, є справедливою. Скористаємось такими фактами.

1) За означенням сила струму дорівнює швидкості зміни заряду: $I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$. Сила струму в коливальному контурі постійно змінюється, тому в даний момент часу t сила струму дорівнює: $i(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = q'(t)$. Відповідно, швидкість зміни сили струму дорівнює: $i'(t) = q''(t)$.

2) Коливальний контур ідеальний, тому його повна енергія не змінюється з часом: $\frac{q^2}{2C} + \frac{Li^2}{2} = \text{const}$.

Знайдемо похідні від правої й лівої частин останнього рівняння: $\left(\frac{q^2}{2C} + \frac{Li^2}{2}\right)' = (\text{const})'$. Скориставшись правилами знаходження похідних, отримаємо:

$$\frac{1}{2C}\left(q^2\right)' + \frac{L}{2}\left(i^2\right)' = 0 \Rightarrow \frac{1}{2C}(2q \cdot q') + \frac{L}{2}(2i \cdot i') = 0 \Rightarrow \frac{1}{C} \cdot q \cdot q' + L \cdot i \cdot i' = 0.$$

Враховуючи, що $i = q'$, а $i' = q''$, маємо:

$$\frac{1}{C} \cdot q \cdot q' + L \cdot q' \cdot q'' = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{C} \cdot q + L \cdot q'' = 0.$$

Звідси:

$$q'' = -\frac{1}{CL} \cdot q. \qquad (1)$$

Рівняння (1) є диференціальним рівнянням другого порядку, розв'язком якого, як відомо з математики, є функція косинуса (синуса). Дійсно, якщо $q = q_{\max}\cos(\omega t + \varphi_0)$, то $q' = -q_{\max}\omega\sin(\omega t + \varphi_0)$, а $q'' = -q_{\max}\omega \cdot \omega\cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 q_{\max}\cos(\omega t + \varphi_0)$, тобто

$$q'' = -\omega^2 q. \qquad (2)$$

Таким чином, заряд на обкладках конденсатора ідеального коливального контуру змінюється за гармонічним законом, і рівняння коливань заряду має вигляд:

$$q = q_{\max}\cos(\omega t + \varphi_0),$$

де $q_{\max}$ — амплітудне значення заряду на обкладках конденсатора; ω — циклічна частота коливань; φ_0 — початкова фаза коливань.

Порівнюючи вирази (1) і (2), маємо: $\omega^2 = \frac{1}{CL}$, тобто $\omega = \frac{1}{\sqrt{CL}}$. Оскільки період коливань $T = \frac{2\pi}{\omega}$, то одержимо **формулу Томсона:**

$$T = 2\pi\sqrt{CL}$$

Зверніть увагу:

1) якщо в момент початку спостереження заряд на обкладках конденсатора максимальний, то *рівняння коливань заряду має вигляд* $q = q_{max} \cos \omega t$, *а графік коливань заряду являє собою косинусоїду* (рис. 28.1);

2) сила струму пов'язана із зарядом на обкладках конденсатора співвідношенням:

$$i(t) = q'(t) = -q_{max}\omega \sin \omega t = -I_{max} \sin \omega t =$$

$$= I_{max} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right),$$

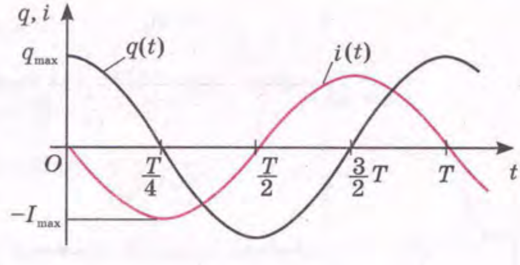

Рис. 28.1. Графіки електромагнітних коливань в ідеальному коливальному контурі: $q(t)$ — графік залежності заряду на обкладках конденсатора від часу; $i(t)$ — графік залежності сили струму в контурі від часу

де $I_{max} = q_{max}\omega$ — амплітудне значення сили струму в контурі.

Коливання сили струму в контурі випереджають коливання заряду на обкладках конденсатора на фазу $\frac{\pi}{2}$, тобто на *чверть періоду* $\left(\varphi = \omega t = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\right)$ (див. рис. 28.1).

★ 3 Яким є період вільних коливань у реальному коливальному контурі

У *реальних* коливальних контурах завжди є певні втрати енергії.

1) Енергія витрачається на нагрівання провідників під час проходження струму. Чим вищою є частота електромагнітних коливань у контурі, тим сильніше нагріваються провідники. Річ у тім, що для змінного струму має місце так званий *скін-ефект*: струм високої частоти проходить не по всьому об'єму провідника, а тільки по тонкому шару на його поверхні, у результаті площа перерізу, по якому йде струм, зменшується, і опір зростає. Чим вищою є частота, тим тонший робочий шар.

2) Діелектрик між обкладками конденсатора теж нагрівається, оскільки змінне електричне поле викликає коливання молекул діелектрика. До того ж діелектрики не є ідеальними ізоляторами, тому конденсатор частково розряджається не через котушку, а безпосередньо через діелектрик.

3) Нагріваються феромагнітні осердя, що їх використовують для збільшення індуктивності котушок, оскільки в них виникають струми Фуко. Деяка частина енергії витрачається і на перемагнічування осердь.

4) Енергія витрачається на випромінювання електромагнітних хвиль.

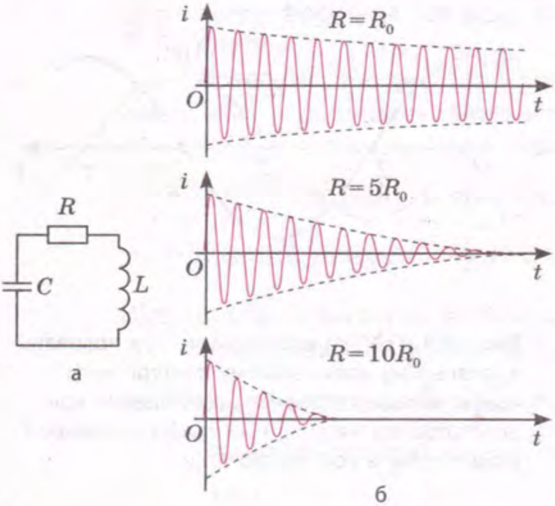

Рис. 28.2. Затухаючі електромагнітні коливання в реальному коливальному контурі: *а* — електрична схема; *б* — графіки залежності сили струму від часу $i(t)$: чим більший опір *R* контуру, тим швидше затухають коливання

Усі ці втрати умовно вважають втратами в деякому активному опорі R (рис. 28.2, *а*). Наявність активного опору приводить до того, що амплітуда сили струму в контурі поступово зменшується і коливання припиняються. Таким чином, ***вільні електромагнітні коливання в реальному коливальному контурі є затухаючими*** (рис. 28.2, *б*). Якщо опір R великий, то коливання навіть не почнуться.

Використовуючи елементи математичного аналізу, можна довести, що для затухаючих електромагнітних коливань формула Томсона набуває вигляду:

$$T=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{CL}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}}.$$

Отже, чим більше активний опір R контуру, тим більшим є період коливань.★

4 Учимося розв'язувати задачі

Задача. Максимальна напруга на обкладках конденсатора ідеального коливального контуру досягає 1,0 кВ. Визначте період електромагнітних коливань у контурі, якщо за амплітудного значення сили струму 1,0 А енергія магнітного поля в контурі становить 1,0 мДж.

T — ?

Дано:
$U_{max}=1{,}0\cdot10^3$ В
$I_{max}=1{,}0$ А
$W_{м.\,max}=1{,}0\cdot10^{-3}$ Дж

Пошук математичної моделі, розв'язання. Для визначення періоду електромагнітних коливань скористаємося формулою Томсона $T=2\pi\sqrt{CL}$ і законом збереження енергії:

$$W_{ел.\,max}=W_{м.\,max}. \qquad (*)$$

Оскільки $W_{ел.\,max}=\frac{CU^2_{max}}{2}$, а $W_{м.\,max}=\frac{LI^2_{max}}{2}$, то, перемноживши ці рівності та враховуючи рівність (*), отримаємо:

$$W_{ел.\,max}\cdot W_{м.\,max}=\frac{CU^2_{max}}{2}\cdot\frac{LI^2_{max}}{2} \text{ або } W^2_{м.\,max}=\frac{CLU^2_{max}I^2_{max}}{4}.$$

Звідси $CL=\frac{4W^2_{м.\,max}}{U^2_{max}I^2_{max}}$, отже, $\sqrt{CL}=\frac{2W_{м.\,max}}{U_{max}I_{max}}$.

Остаточно маємо: $T=4\pi\frac{W_{м.\,max}}{U_{max}I_{max}}$.

Визначимо значення шуканої величини:

$$[T]=\frac{\text{Дж}}{\text{В}\cdot\text{А}}=\frac{\text{Дж}\cdot\text{Кл}}{\text{Дж}\cdot\text{А}}=\frac{\text{А}\cdot\text{с}}{\text{А}}=\text{с};\ \{T\}=\frac{4\cdot 3{,}14\cdot 1{,}0\cdot 10^{-3}}{1{,}0\cdot 10^{3}\cdot 1{,}0}\approx 13\cdot 10^{-6},\ T=13\ \text{мкс}.$$

Відповідь: період електромагнітних коливань у контурі $T=13$ мкс.

Підбиваємо підсумки

Заряд на обкладках конденсатора ідеального коливального контуру змінюється за гармонічним законом: $q=q_{max}\cos(\omega t+\varphi_0)$. Коливання сили струму в контурі випереджають за фазою коливання заряду на обкладках конденсатора на фазу $\frac{\pi}{2}$: $i(t)=q'(t)=-I_{max}\sin(\omega t+\varphi_0)$.

Період власних електромагнітних коливань у коливальному контурі визначається за формулою Томсона: $T=2\pi\sqrt{CL}$.

★ За наявності опору формула Томсона набуває вигляду: $T=\dfrac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{1}{CL}-\left(\dfrac{R}{2L}\right)^2}}$. ★

Контрольні запитання

1. Отримайте формулу Томсона, скориставшись механічною аналогією електромагнітних коливань. 2. Отримайте формулу Томсона, скориставшись законом збереження енергії. 3. Запишіть рівняння залежності $q(t)$ для ідеального коливального контуру. Назвіть фізичні величини, що входять у рівняння. 4. Отримайте рівняння залежності $i(t)$. 5. Який вигляд має графік коливань: заряду на обкладках конденсатора? сили струму в контурі? ★ 6. Чому електромагнітні коливання в реальному коливальному контурі є затухаючими? ★ 7. Запишіть формулу для визначення періоду вільних електромагнітних коливань у реальному коливальному контурі.

Вправа № 24

1. Чи зміняться, і якщо зміняться, то як, період і частота вільних електромагнітних коливань у коливальному контурі, опір якого є нехтовно малим, якщо ємність конденсатора збільшити у 2 рази, а індуктивність котушки зменшити у 8 разів? ★ Чи зміниться результат, якщо опором контуру знехтувати не можна?
2. Чому дорівнює період власних електромагнітних коливань у коливальному контурі, індуктивність якого дорівнює 1,5 мГн, а ємність — 15 мкФ? Як зміниться результат, якщо приєднати ще три такі самі конденсатори: а) паралельно конденсатору; б) послідовно з конденсатором?
3. Електричний заряд на обкладках конденсатора коливального контуру змінюється за законом: $q=0{,}01\cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot 10^6 t\right)$. Ємність конденсатора 400 пФ. Визначте: 1) початкову фазу й циклічну частоту коливань у контурі; 2) період і частоту коливань; 3) амплітудні значення заряду та сили струму; 4) індуктивність котушки; 5) енергію електричного поля конденсатора та енергію магнітного поля котушки через $t=2$ мкс після початку спостереження.