

## § 42. ЕНЕРГІЯ КОЛИВАЛЬНОГО РУХУ



Однією з умов, необхідних для виникнення вільних коливань, є передання системі певної енергії. Яку «долю» має ця енергія, ви довідаєтесь із цього параграфа.



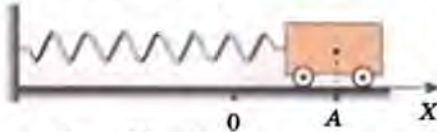
### **Перетворення енергії під час коливального руху маятників**

Розглянемо паралельно коливання *пружинного та математичного маятників*. Будемо вважати, що тертя в обох коливальних системах відсутнє або настільки мале, що дією сил тертя можна знехтувати. У разі відсутності сил тертя коливальна система є консервативною і для неї виконується закон збереження механічної енергії.

## Пружинний маятник

## Математичний маятник

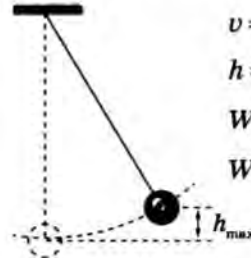
1. Відведемо маятник від положення рівноваги, надавши йому цим певної потенціальної енергії. У перший момент маятник перебуває у стані спокою, тому його кінетична енергія дорівнює нулю. Потенціальна ж енергія максимальна і дорівнює повній енергії маятника:  $W = W_{\text{п max}}$ .



$$v = 0 \Rightarrow W_{\text{к}} = 0$$

$$x = x_{\text{max}} = A \Rightarrow W_{\text{п}} = \frac{kx_{\text{max}}^2}{2} = \frac{kA^2}{2}$$

$$W = W_{\text{п max}} = \frac{kA^2}{2}$$



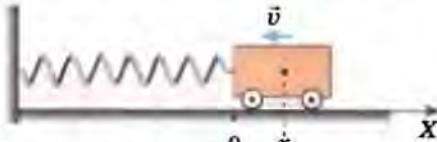
$$v = 0 \Rightarrow W_{\text{к}} = 0$$

$$h = h_{\text{max}} \Rightarrow$$

$$W_{\text{п}} = mgh_{\text{max}}$$

$$W = W_{\text{п max}} = mgh_{\text{max}}$$

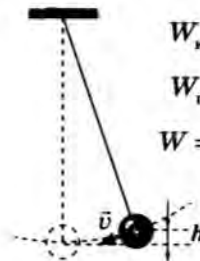
2. Відпустимо маятник. Тіло почне рухатися до положення рівноваги. Його потенціальна енергія почне зменшуватися, а швидкість руху — збільшуватися, отже, зростатиме й кінетична енергія тіла. Повна енергія системи залишається незмінною і дорівнює сумі кінетичної та потенціальної енергій:  $W = W_{\text{к}} + W_{\text{п}}$ .



$$W_{\text{к}} = \frac{mv^2}{2}, v \uparrow \Rightarrow W_{\text{к}} \uparrow$$

$$W_{\text{п}} = \frac{kx^2}{2}, x \downarrow \Rightarrow W_{\text{п}} \downarrow$$

$$W = W_{\text{к}} + W_{\text{п}} = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2}$$

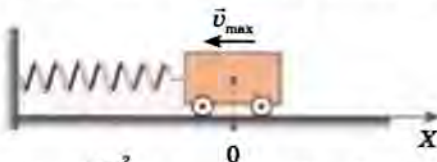


$$W_{\text{к}} = \frac{mv^2}{2}, v \uparrow \Rightarrow W_{\text{к}} \uparrow$$

$$W_{\text{п}} = mgh, h \downarrow \Rightarrow W_{\text{п}} \downarrow$$

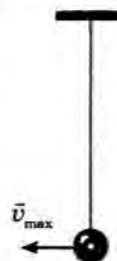
$$W = W_{\text{к}} + W_{\text{п}} = \frac{mv^2}{2} + mgh$$

3. У момент проходження маятником положення рівноваги видовження пружини пружинного маятника (висота підняття тіла математичного маятника) дорівнює нулю, отже, потенціальна енергія маятників теж дорівнює нулю. Швидкість руху тіла при цьому максимальна, максимальна і його кінетична енергія. Повна енергія дорівнює максимальній кінетичній енергії:  $W = W_{\text{к max}}$ .



$$W_{\text{к}} = \frac{mv_{\text{max}}^2}{2}; x = 0 \Rightarrow W_{\text{п}} = 0$$

$$W = W_{\text{к max}} = \frac{mv_{\text{max}}^2}{2}$$



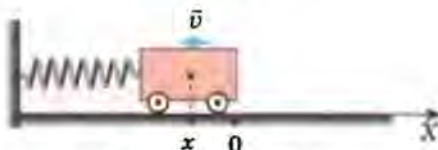
$$W_{\text{к}} = \frac{mv_{\text{max}}^2}{2};$$

$$h = 0 \Rightarrow W_{\text{п}} = 0;$$

$$W = W_{\text{к max}} = \frac{mv_{\text{max}}^2}{2}$$

## Пружинний маятник

4. Під час подальшого руху тіла швидкість руху тіла, а отже, його кінетична енергія почнуть меншати. Потенціальна енергія системи почне збільшуватися. При цьому повна енергія системи залишається незмінною і дорівнює сумі кінетичної і потенціальної енергій маятника:  $W = W_k + W_n$ .

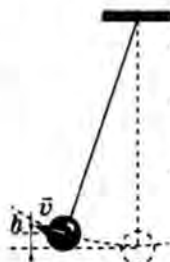


$$W_k = \frac{mv^2}{2}, \quad v \downarrow \Rightarrow W_k \downarrow$$

$$W_n = \frac{kx^2}{2}, \quad |x| \uparrow \Rightarrow W_n \uparrow$$

$$W = W_k + W_n = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2}$$

## Математичний маятник

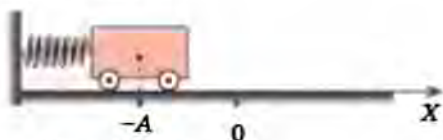


$$W_k = \frac{mv^2}{2}, \quad v \downarrow \Rightarrow W_k \downarrow$$

$$W_n = mgh, \quad h \uparrow \Rightarrow W_n \uparrow$$

$$W = W_k + W_n = \frac{mv^2}{2} + mgh$$

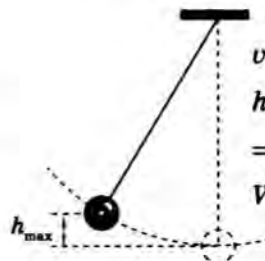
5. У деякий момент часу — коли маятник максимально відхилиться від положення рівноваги — тіло на мить зупиниться і його кінетична енергія дорівнюватиме нулю. Потенціальна енергія маятника знову буде максимальною й дорівнюватиме його повній енергії:  $W = W_{n \max}$ .



$$v = 0 \Rightarrow W_k = 0$$

$$x = x_{\max} = -A \Rightarrow W_{n \max} = \frac{kx_{\max}^2}{2} = \frac{kA^2}{2}$$

$$W = W_{n \max} = \frac{kA^2}{2}$$



$$v = 0 \Rightarrow W_k = 0$$

$$h = h_{\max} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_{n \max} = mgh_{\max}$$

$$W = W_{n \max} = mgh_{\max}$$

Таким чином, у ході вільних коливань маятника його потенціальна та кінетична енергії постійно змінюються. Потенціальна енергія сягає максимального значення в точках повороту (у моменти найбільшого зміщення маятника), кінетична енергія — у момент проходження тілом положення рівноваги (у момент, коли зміщення дорівнює нулю). Перетворення енергії в коливальних рухах зручно описувати за допомогою графіків, наведених на рис. 36.1, 36.2.


**Незатухаючі та затухаючі коливання**

Якщо в коливальній системі немає ніяких втрат енергії, то коливання триватимуть як завгодно довго й ніколи не припиняться; їхня амплітуда з часом змінюватися не буде.



Коливання, амплітуда яких із часом не змінюється, називають **незатухаючими** (рис. 42.1, а).

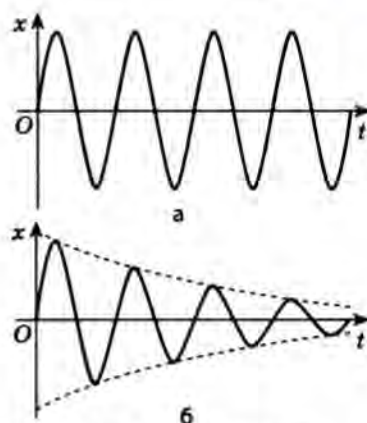


Рис. 42.1. Графіки коливань: а — незатухаючих; б — затухаючих

Однак у будь-якій коливальній системі завжди є втрати механічної енергії. Енергія витрачається на додання сил тертя, опору повітря, на деформацію нитки або пружини маятника в ході коливань. У результаті механічна енергія поступово переходить у внутрішню, тому амплітуда коливань згодом зменшується й через деякий проміжок часу коливання припиняються (затухають).

Коливання, амплітуда яких із часом зменшується, називають **затухаючими** (рис. 42.1, б).

Чим більшого опору зазнає тіло, що коливається, тим швидше затухають коливання. Наприклад, якщо кульку на нитці змусити коливатися у повітрі й у воді, то в повітрі коливання відбуватимуться досить довго, а у воді швидко затухнуть. До речі, на цьому явищі базується робота гідравлічних амортизаторів автомобіля: з кузовом зв'язують поршень, який під час коливань рухається в циліндрі, заповненому рідиною; значний опір рідини приводить до затухання коливань.

### 3 Учимся розв'язувати задачі

**Задача.** Рівняння коливань тягара на пружині має вигляд:  $x = 0,1 \cos 2\pi t$  (м). Знайдіть повну механічну енергію коливань, найбільшу швидкість руху тягара, кінетичну та потенціальну енергії системи через  $\frac{1}{6}$  с після початку відліку часу. Маса тягара — 1 кг. Систему вважайте консервативною.

Дано:

$$x = 0,1 \cos 2\pi t \text{ (м)}$$

$$t = \frac{1}{6} \text{ с}$$

$$m = 1 \text{ кг}$$

$$W - ?$$

$$v_{\max} - ?$$

$$W_{\kappa} - ?$$

$$W_{\pi} - ?$$

**Аналіз фізичної проблеми. Розв'язання.** Оскільки система консервативна, то виконується закон збереження повної механічної енергії:

$$W = \frac{kA^2}{2} = \frac{mv_{\max}^2}{2} = W_{\kappa} + W_{\pi}.$$

Порівняємо рівняння коливань у загальному вигляді з рівнянням, наведеним у задачі:  $x = A \cos \omega t$ ,  $x = 0,1 \cos 2\pi t$ . Отримаємо:  $A = 0,1$  м;  $\omega = 2\pi \text{ с}^{-1}$ .

Оскільки  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , то  $k = \omega^2 m = 4\pi^2 \cdot 1 \approx 40 \text{ (Н/м)}$ ;

$$W = W_{\pi \max} = \frac{kA^2}{2} = \frac{40 \cdot 0,01}{2} = 0,20 \text{ (Дж)};$$

$$\frac{kA^2}{2} = \frac{mv_{\max}^2}{2} \Rightarrow v_{\max} = \sqrt{\frac{kA^2}{m}} = A\sqrt{\frac{k}{m}} = A\omega = 0,1 \cdot 2\pi \approx 0,63 \text{ (м/с)}.$$

Визначивши видовження пружини через  $t = \frac{1}{6}$  с, обчислимо потенціальну енергію пружини:

$$x = 0,1 \cos 2\pi t = 0,1 \cos 2\pi \cdot \frac{1}{6} = 0,1 \cos \frac{\pi}{3} = 0,05 \text{ (м)};$$

$$W_{\text{п}} = \frac{kx^2}{2} = \frac{40 \cdot 0,0025}{2} = 0,05 \text{ (Дж)};$$

$$W = W_{\text{к}} + W_{\text{п}} \Rightarrow W_{\text{к}} = W - W_{\text{п}} = 0,20 - 0,05 = 0,15 \text{ (Дж)}.$$

**Відповідь:** повна механічна енергія коливань  $W = 0,20$  Дж; найбільша швидкість руху тягаря  $v_{\max} = 0,63$  м/с; кінетична енергія тягаря  $W_{\text{к}} = 0,15$  Дж; потенціальна енергія пружини  $W_{\text{п}} = 0,05$  Дж.

### Підбиваємо підсумки

У процесі вільних коливань маятника його потенціальна та кінетична енергії постійно змінюються. Потенціальна енергія є максимальною в точках повороту й дорівнює нулю в момент проходження маятником положення рівноваги. Кінетична енергія в точках повороту дорівнює нулю й сягає максимального значення в момент проходження маятником положення рівноваги.

Якщо в коливальній системі відсутнє тертя, то повна механічна енергія системи залишається незмінною, амплітуда коливань із часом теж не буде змінюватися. Такі коливання називають незатухаючими.

Повна енергія незатухаючих коливань обчислюється за формулами:

$$W = W_{\text{к}} + W_{\text{п}} = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2} = \frac{mv_{\max}^2}{2} \quad \text{— для пружинного маятника};$$

$$W = W_{\text{к}} + W_{\text{п}} = \frac{mv^2}{2} + mgh = mgh_{\max} = \frac{mv_{\max}^2}{2} \quad \text{— для математичного маятника}.$$

У будь-якій реальній коливальній системі частина енергії витрачається на подолання сил тертя, у результаті повна механічна енергія системи зменшується, поступово меншає й амплітуда коливань. Такі коливання називають затухаючими.

### Контрольні запитання

1. Які перетворення енергії відбуваються під час коливань пружинного маятника? математичного маятника?
2. У якому положенні потенціальна енергія маятника сягає максимального значення? мінімального значення? Що можна сказати про його кінетичну енергію в ці моменти?
3. Чому в разі відсутності в системі тертя коливання будуть незатухаючими? Дайте визначення незатухаючих коливань.
4. Чому за наявності тертя амплітуда вільних коливань поступово зменшується? Як називають такі коливання?

### Вправа № 37

1. На яку максимальну висоту відхиляється математичний маятник, якщо в момент проходження ним положення рівноваги швидкість його руху дорівнює 2 м/с?

2. Тіло масою 200 г коливається на пружині жорсткістю 40 Н/м з амплітудою коливань 5 см. Визначте швидкість руху тіла в той момент, коли його зміщення дорівнює 1 см. Обчисліть повну механічну енергію системи та найбільшу швидкість руху тіла.
3. Рівняння коливань пружинного маятника масою 5 кг має вигляд:  
 $x = 0,2 \cos 10\pi t$  (м). Визначте, якими будуть через 0,025 с повна механічна енергія коливань, кінетична та потенціальна енергії маятника. Обчисліть найбільшу швидкість руху тягаря.
- 4\*. Тягар, підвішений на пружині жорсткістю 100 Н/м, коливається з амплітудою 2 см. Обчисліть кінетичну та потенціальну енергії тягаря у фазі  $\frac{\pi}{3}$  рад.