§ 41. КОЛИВАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО МАЯТНИКА

Спостерігаючи коливання великої люстри у флорентійському соборі, яка розгойдувалася через протяг, Ґ. Ґалілей виміряв період її коливань і встановив, що період коливань не залежить від амплітуди. Годинників на той час ще не винайшли, і період коливань Ґалілей визначав, підраховуючи власний пульс. Коли довідуєшся про ці дослідження, не перестаєш дивуватися вмінню вченого одержувати простими засобами точні результати. Адже фактично Ґалілей дав нам сучасні уявлення фізики коливальних рухів, запровадивши поняття амплітуди коливань і періоду коливань.

Люстра, підвішена до стелі, дитяча гойдалка, маятник годинника тощо — це приклади фізичних маятників. Саме з коливаннями таких маятників ви познайомитесь у цьому параграфі.

1 Що називають математичним маятником

Будь-яке тверде тіло, яке здійснює або може здійснювати коливання відносно осі, що проходить через точку підвісу, розташовану вище від центра мас тіла, називають *фізичним маятником*.

Прикладом фізичного маятника може слугувати іграшка, підвішена в салоні автомобіля. Якщо іграшку вивести з положення рівноваги, вона почне коливатись. Проте вивчати такі коливання доволі складно: їхній характер визначається розмірами іграшки, властивостями підвісу та іншими чинниками.

Щоб розміри тіла не впливали на характер його коливань, слід узяти підвіс, довжина якого набагато більша за розміри тіла. У такому випадку тіло можна вважати матеріальною точкою. При цьому підвіс має бути легким, а щоб під час коливань тіло весь час перебувало на однаковій відстані від точки підвісу,— нерозтяжним. У такий спосіб буде створено *фізичну модель — математичний маятник*.

Математичний маятник — це фізична модель, яка являє собою матеріальну точку, що підвішена на невагомій і нерозтяжній нитці та здійснює коливання під дією сили тяжіння.

Коливальну систему в цьому випадку утворюють матеріальна точка, підвішена на нитці, і Земля, без якої ця система не могла б бути маятником.

2 Коливання математичного маятника

Візьмемо невелику, але досить важку кульку та підвісимо її на довгій нерозтяжній нитці — такий маятник можна вважати математичним. Якщо відхилити кульку від положення рівноваги та відпустити, то вона почне коливатися біля положення рівноваги. Розглянемо рух кульки та з'ясуємо причини цього руху.

Якщо кульку відхилити від положення рівноваги (рис. 41.1, *а*), то рівнодійна $\vec{F}$ сили тяжіння $m\vec{g}$ і сили $\vec{T}$ натягу нитки буде напрямлена до положення рівноваги. Якщо потім кульку відпустити, то вона почне рухатися до положення рівноваги, при цьому швидкість її руху збільшуватиметься (оскільки $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{v}$).

У момент проходження кулькою положення рівноваги (рис. 41.1, *б*) сили, які діють на кульку, будуть скомпенсовані (їхня рівнодійна дорівнюватиме нулю: $\vec{F}=0$), а швидкість руху кульки сягне максимального значення.

Однак у положенні рівноваги кулька не зупиниться, а внаслідок своєї інертності продовжить рух (рис. 41.1, *в*). І тепер рівнодійна $\vec{F}$ сил, прикладених до кульки, а отже, прискорення $\vec{a}$, викликане цими силами, будуть напрямлені проти руху кульки ($\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{v}$) і вона почне сповільнювати швидкість. Досягнувши лівої точки повороту (максимального відхилення вліво від положення рівноваги), кулька на мить зупиниться (рис. 41.1, *г*), після чого рівнодійна сила знову надасть їй руху, тільки тепер уже у зворотному напрямку. Кулька знову пройде положення рівноваги і, досягнувши правої точки повороту, на мить зупиниться. У наступний момент процес почне повторюватися.

Отже, математичний маятник здійснює вільні коливання — коливання під дією внутрішніх сил системи. Причини, завдяки яким математичний маятник здійснює вільні коливання, ті самі, що й у випадку коливань пружинного маятника: 1) рівнодійна сил, прикладених до тіла, завжди напрямлена до положення рівноваги; 2) тіло, що коливається, є інертним.

3 Як обчислити період коливань математичного маятника

Доведемо, що математичний маятник, спочатку відхилений від положення рівноваги на невеликий кут (3–5°), здійснюватиме гармонічні коливання. Для цього доведемо, що рівняння руху такого маятника можна записати у вигляді: $a_x=-\omega^2x$.

Виконаємо пояснювальний рисунок, на якому зобразимо сили, що діють на тіло в деякий довільний момент часу (рис. 41.2). Вісь OX напрямимо вздовж дотичної до траєкторії руху тіла, тоді вісь OY буде напрямлена вздовж лінії дії сили натягу нитки.

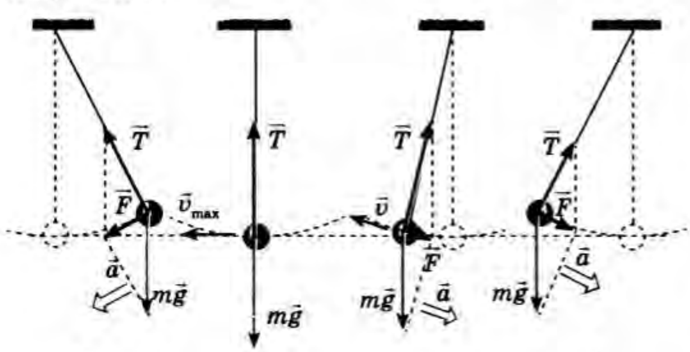

Рис. 41.1. Вільні коливання математичного маятника

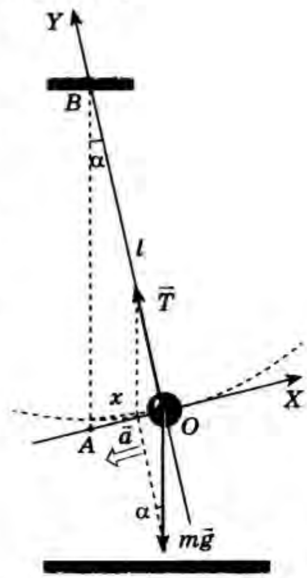

Рис. 41.2. До виведення формули періоду коливань математичного маятника: l — довжина нитки маятника; x — зміщення тіла; α — кут відхилення маятника від положення рівноваги

Запишемо рівняння другого закону Ньютона у векторному вигляді та в проекціях. Уздовж осі OY тіло не рухається, оскільки нитка нерозтяжна, тому запишемо проекції тільки на вісь OX:

$$\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a};\ \ T_x + (mg)_x = ma_x.$$

Оскільки $T_x = 0$, $(mg)_x = -mg\sin\alpha$, то рівняння проекцій набуде вигляду: $-mg\sin\alpha = ma_x$, або:

$$a_x = -g\sin\alpha. \qquad (1)$$

Значення $\sin\alpha$ знайдемо з прямокутного трикутника AOB: $\sin\alpha = \frac{AO}{AB}$. Оскільки кут відхилення малий, то $AB \approx l$, де l — довжина нитки маятника; $AO \approx x$, де x — зміщення кульки. Таким чином, $\sin\alpha = \frac{x}{l}$. Підставивши цей вираз у формулу (1), одержимо рівняння коливань математичного маятника:

$$a_x = -\frac{g}{l}x. \qquad (2)$$

Це рівняння можна записати у вигляді:

$$a_x = -\omega^2 x. \qquad (3)$$

Таким чином, доведено, що коливання математичного маятника є гармонічними. Порівнявши праві частини рівнянь (2) і (3), знайдемо циклічну частоту коливань маятника: $\omega^2 = \frac{g}{l}$, звідки $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Оскільки $T = \frac{2\pi}{\omega}$, маємо ***формулу періоду коливань математичного маятника***:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Дану формулу вперше одержав у XVII ст. голландський учений *Х. Гюйгенс*, тому її називають ***формулою Гюйгенса***.

Період коливань математичного маятника не залежить від його маси, а визначається лише довжиною нитки та прискоренням вільного падіння в тому місці, де розташований цей маятник. Тому, вимірявши довжину нитки та період коливань маятника, можна визначити прискорення вільного падіння в певній місцевості.

4 Учимося розв'язувати задачі

Задача. У кабінеті фізики здійснюють коливання два маятники, довжини яких відрізняються на 22 см. За деякий проміжок часу один із маятників здійснив 30 коливань, другий — 36 коливань. Визначте довжини маятників.

Дано:
$l_1 - l_2 = 22\text{ см} =$
$= 0{,}22\text{ м}$
$N_1 = 30$
$N_2 = 36$
$t_1 = t_2 = t$

l_1 – ?
l_2 – ?

Аналіз фізичної проблеми. Маятники коливаються в одному кабінеті, отже, прискорення вільного падіння для них однакові. Очевидно, що чим довший маятник, тим менше коливань він здійснить за даний час. Приймемо, що $l_1 > l_2$, тоді $N_2 > N_1$.
Пошук математичної моделі, розв'язання. Для розв'язання задачі запишемо формулу періоду коливань для кожного маятника:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}}\ ;\ T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}}\ .$$

Розділивши перше рівняння на друге, маємо: $\dfrac{T_1}{T_2} = \dfrac{2\pi\sqrt{\dfrac{l_1}{g}}}{2\pi\sqrt{\dfrac{l_2}{g}}} = \sqrt{\dfrac{l_1}{l_2}}$. (1)

За означенням періоду: $T_1 = \dfrac{t}{N_1}$; $T_2 = \dfrac{t}{N_2}$, де час t коливань однаковий для обох маятників; тоді: $\dfrac{T_1}{T_2} = \dfrac{N_2}{N_1}$. (2)

Зрівнявши праві частини рівностей (1) і (2) та підставивши дані задачі, маємо:

$$\sqrt{\frac{l_1}{l_2}} = \frac{N_2}{N_1} \ \Rightarrow\ \frac{l_1}{l_2} = \frac{N_2^2}{N_1^2} = \frac{36^2}{30^2} = 1{,}44 \ \Rightarrow\ l_1 = 1{,}44 l_2\,.$$

За умовою задачі $l_1 - l_2 = 0{,}22\text{ м} \ \Rightarrow\ 1{,}44l_2 - l_2 = 0{,}22\text{ м} \ \Rightarrow$
$\Rightarrow\ 0{,}44l_2 = 0{,}22\text{ м} \ \Rightarrow\ l_2 = 0{,}5\text{ м} = 50\text{ см};\ l_1 = 1{,}44l_2 = 72\text{ см}.$

Відповідь: довжина першого маятника $l_1 = 72$ см, довжина другого маятника $l_2 = 50$ см.

Підбиваємо підсумки

Математичний маятник — це фізична модель, яка являє собою матеріальну точку, що підвішена на невагомій нерозтяжній нитці та здійснює коливання під дією сили тяжіння. Коливальну систему математичного маятника утворюють нитка, приєднане до неї тіло і Земля.

Вільні коливання математичного маятника мають такі причини: 1) рівнодійна сили тяжіння і сили пружності завжди напрямлена до положення рівноваги; 2) тіло, яке коливається, є інертним.

Період коливань математичного маятника не залежить від його маси та амплітуди коливань і визначається за формулою Гюйгенса:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,.$$

Контрольні запитання

1. Що таке фізичний маятник? Наведіть приклади. **2.** Дайте визначення математичного маятника. **3.** Опишіть коливання математичного маятника. **4.** Якими є причини коливань математичного маятника? **5.** За якою формулою визначають період коливань математичного маятника? Хто вперше вивів цю формулу? **6.** Хто першим з'ясував, що період коливань математичного маятника не залежить від амплітуди коливань? Як це було зроблено?

Вправа № 36

1. Визначте прискорення вільного падіння на планеті, де маятник завдовжки 6,00 м має період коливань 3,14 с.
2. Якою є довжина маятника, якщо період його коливань дорівнює 2 с?
3. Чи відбуватимуться коливання математичного маятника в невагомості? Відповідь обґрунтуйте.
4. Один із двох маятників, розташованих у лабораторії, за певний час здійснив на 30 коливань більше, ніж другий. Співвідношення довжин маятників 4 : 9. Скільки коливань здійснив за даний проміжок часу кожний маятник?

5*. Яким буде період коливань математичного маятника завдовжки 1 м, якщо його помістити на Марс? Маса Марса в 9,3 разу менша, ніж маса Землі; радіус Марса в 1,9 разу менший, ніж радіус Землі.