

§ 22. РУХ ТІЛА ПІД ДІЄЮ СИЛИ ТЯЖІННЯ

Траєкторія руху м'яча, кинутого вертикально вгору або вниз, — пряма. Розбігшись, людина стрибає у воду — траєкторією руху її тіла буде гілка параболи. Снаряд, випущений із гармати під кутом до горизонту, теж опише частину параболи. Рухи всіх цих тіл відбуваються під дією сили тяжіння. Чому ж ці рухи так відрізняються один від одного? Причина — у різних початкових умовах. У цьому параграфі ви познайомитеся з розв'язанням задач на рух тіл під дією сили тяжіння.

1 Здійснюємо ряд спрощень

Характер реального руху тіла в полі тяжіння Землі є досить складним, і його описування виходить за межі шкільної програми. Тому, щоб розв'язувати задачі, приймемо низку спрощень:

1) СВ, пов'язану з точкою на поверхні Землі, вважатимемо інерційною;

2) розглядатимемо переміщення тіл поблизу поверхні Землі й на невеликі (порівняно з її радіусом) відстані. Тоді кривизною поверхні Землі та зміною прискорення вільного падіння можна знехтувати; інакше кажучи, Землю будемо вважати плоскою, а прискорення вільного падіння — постійним;

3) будемо нехтувати опором повітря.

Зверніть увагу: якщо прийняти тільки перші два спрощення, отриманий результат буде дуже близьким до реального; останнє ж спрощення не призведе до серйозного викривлення результату тільки у випадках, коли швидкість руху тіла досить мала.

2 Які рівняння описують рух тіл під дією сили тяжіння

Під дією сили тяжіння тіло рухається рівноприскорено з прискоренням \vec{g} . Для такого руху рівняння залежності швидкості від часу має вигляд: $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t$. Ця рівність показує, що рух тіла відбувається в площині, утвореній векторами \vec{v}_0 і \vec{g} , тому для описання руху тіла під дією сили тяжіння досить використати двовимірну систему координат (рис. 22.1).

Будь-який складний рух для зручності можна розкласти на декілька простих. Рух тіла під дією сили тяжіння будемо розглядати як результат додавання двох простих незалежних рухів:

1) рівномірного — уздовж осі OX (оскільки проекція сили тяжіння на вісь OX дорівнює нулю), — який описується рівняннями:

$$v_x = v_{0x}, \quad x = x_0 + v_{0x}t; \quad (1)$$

2) рівноприскореного (з прискоренням \vec{g}) — уздовж осі OY , — який описується рівняннями:

$$v_y = v_{0y} + g_y t, \quad y = y_0 + v_{0y}t + \frac{g_y t^2}{2}. \quad (2)$$

Зверніть увагу: характер руху тіла вздовж осі OY не залежить від того, чи мало тіло швидкість у горизонтальному напрямку (рис. 22.2).

Рівнянь (1) і (2) досить, щоб розв'язати практично будь-яку задачу на рух тіл під дією сили тяжіння.

3 Як рухається тіло, кинуте вертикально вгору або вниз

Якщо тіло кинути вертикально, то траєкторією руху тіла буде *відрізок прямої*, оскільки руху по осі OX не відбувається ($v_{0x} = 0$, а $x = x_0$) (див. рис. 22.3).

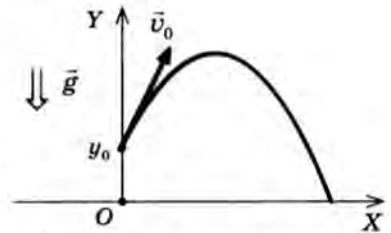


Рис. 22.1. Для описання руху тіла під дією сили тяжіння досить скористатися двовимірною системою координат. Якщо спрямувати вісь OY вертикально вгору (або вниз), а вісь OX — горизонтально, так що вектори \vec{v}_0 і \vec{g} лежатимуть у площині XOY , то в будь-який момент часу тіло перебуватиме в цій площині



Рис. 22.2. Рисунок зі стробоскопічної фотографії руху двох кульок: одночасно одну кульку кинуту горизонтально, а друга розпочала вертикальне падіння. Обидві кульки в ті самі моменти часу опиняються на однаковій висоті, тому на Землю впадуть одночасно

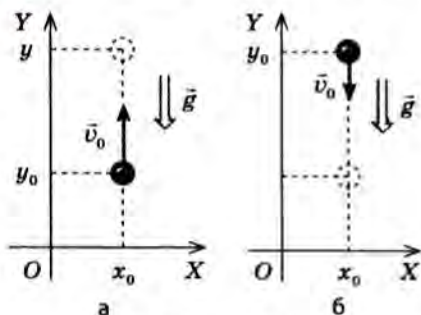


Рис. 22.3. Рух тіла, кинутого вертикально: а — вгору; б — вниз. Початок координат пов'язаний із точкою на поверхні Землі, вісь OY напрямлена вертикально вгору



Рис. 22.4. Траєкторія руху частинок струменя води, напрямленого горизонтально, являє собою вітку параболи. Зовнішній вигляд параболи залежить від початкової швидкості частинок води

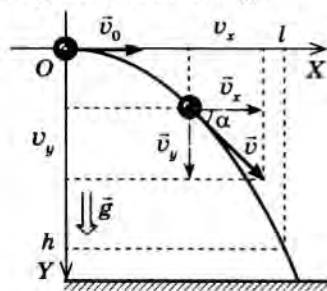


Рис. 22.5. Траєкторія руху тіла, кинутого горизонтально, являє собою вітку параболи. Швидкість v руху тіла в даній точці траєкторії можна розраховувати за теоремою Піфагора: $v^2 = v_x^2 + v_y^2$, а кут α нахилу швидкості до горизонту знайти зі співвідношення: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_y}{v_x}$.

Якщо початкова швидкість тіла напрямлена вертикально вгору (рис. 22.3, а), то в обраній системі координат $v_{0y} = v_0$, а $g_y = -g$, тому рівняння (2) набудуть вигляду:

$$v_y = v_0 - gt, \quad y = y_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

Якщо початкова швидкість тіла напрямлена вертикально вниз (рис. 22.3, б), то $v_{0y} = -v_0$, $g_y = -g$, тому рівняння (2) набудуть вигляду:

$$v_y = -v_0 - gt, \quad y = y_0 - v_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

Із прикладом розв'язування задач на рух по вертикалі ви вже познайомилися, коли вивчали § 12.

Як рухається тіло, кинуте горизонтально

Якщо тіло кинуте горизонтально, то траєкторією його руху буде гілка параболи (рис. 22.4). Для доведення цього виведемо рівняння залежності $y(x)$ — рівняння траєкторії руху.

Виконаємо пояснювальний рисунок, на якому зазначимо осі координат, початкове положення тіла, напрямки його початкової швидкості та прискорення (рис. 22.5).

В обраній системі координат $x_0 = 0$, $v_{0x} = v_0$, $y_0 = 0$, $v_{0y} = 0$, а $g_y = g$, тому рівняння (1) і (2) набудуть вигляду:

$$v_x = v_0, \quad x = v_0 t;$$

$$v_y = gt, \quad y = \frac{gt^2}{2}.$$

З рівняння $x = v_0 t$ знайдемо t : $t = \frac{x}{v_0}$.

Підставивши одержаний вираз у рівняння $y = \frac{gt^2}{2}$, маємо: $y = \frac{g}{2v_0^2} x^2$, або $y = Ax^2$, де $A = \frac{g}{2v_0^2}$ — величина стала для даного конкретного руху. З курсу математики ви знаєте, що графік функції вигляду $y = Ax^2$ — парабола.

У задачах часто потрібно визначити швидкість руху тіла в даний момент часу t . Оскільки швидкість тіла можна розкласти на складові по осі OX і по осі OY (див. рис. 22.5), то модуль швидкості можна обчислити, скориставшись теоремою Піфагора, а кут α нахилу швидкості до осі OX знайти, визначивши його тангенс:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{gt}{v_0}.$$

Задача 1. З прямовисної скелі з висоти 20 м у море кинута камінь; у момент кидка швидкість руху каменя була напрямлена горизонтально. З якою швидкістю кинута камінь, якщо він упав у воду на відстані 16 м від скелі? Якою буде швидкість руху каменя в момент падіння в море? Під яким кутом камінь увійде у воду?

Дано:

$h = 20$ м
 $l = 16$ м
 $g = 10$ м/с²

v_0 — ?
 v — ?
 α — ?

Розв'язання

1) Виконаємо пояснювальний рисунок. Початок координат пов'яжемо з точкою кидання каменя, вісь OY напрямимо вертикально вниз, вісь OX — у напрямку початкової швидкості руху каменя (див. рис. 22.5).

2) У даному випадку: $x_0 = 0$, $v_{0x} = v_0$, $x = l$, $y_0 = 0$, $v_{0y} = 0$, $g_y = g$, $y = h$, тому рівняння (1) і (2) набудуть вигляду:

$$v_x = v_0, \quad l = v_0 t; \quad v_y = gt, \quad h = \frac{gt^2}{2}.$$

3) Із останнього рівняння визначимо час падіння: $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$.

Знаючи час падіння каменя, визначимо початкову швидкість його руху, швидкість у момент падіння та кут α , під яким камінь увійде у воду: $l = v_0 t \Rightarrow v_0 = \frac{l}{t}$; $v = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}$; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{gt}{v_0}$.

Знайдемо значення шуканих величин:

$$[t] = \sqrt{\frac{\text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{м}}} = \text{с}, \quad \{t\} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20}{10}} = 2, \quad t = 2 \text{ с}; \quad v_0 = \frac{16 \text{ м}}{2 \text{ с}} = 8 \text{ м/с};$$

$$[v] = \sqrt{\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}} = \frac{\text{м}}{\text{с}}, \quad \{v\} = \sqrt{64 + 400} \approx 22, \quad v \approx 22 \text{ м/с};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{20}{8} = 2,5 \Rightarrow \alpha \approx 68^\circ.$$

Відповідь: початкова швидкість руху каменя $v_0 = 8$ м/с; швидкість його руху у момент падіння $v \approx 22$ м/с; камінь увійшов у воду під кутом $\alpha \approx 68^\circ$ до горизонту.

5 Як розрахувати рух тіла, кинутого під кутом до горизонту

Розглянемо рух тіла, початкова швидкість v_0 якого напрямлена під кутом α до горизонту (рис. 22.6). В обраній системі координат $x_0 = 0$, $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$, $y_0 = 0$, $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$, $g_y = -g$, тому рівняння (1) і (2) набудуть вигляду:

$$v_x = v_0 \cos \alpha, \quad x = v_0 \cos \alpha \cdot t;$$

$$v_y = v_0 \sin \alpha - gt, \quad y = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}.$$

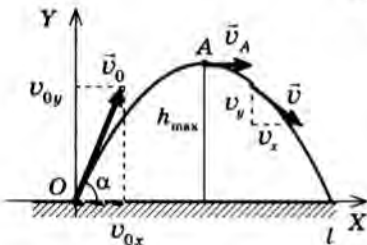


Рис. 22.6. Рух тіла, кинутого під кутом до горизонту: початок координат пов'язаний з точкою, із якої кинуто тіло; вісь OY напрямлена вертикально вниз, вісь OX — горизонтально; точка A — верхня точка траєкторії руху тіла; h_{\max} — максимальна висота підняття тіла; l — дальність польоту

Якщо з рівняння $x = v_0 \cos \alpha \cdot t$ знайти t і підставити одержаний вираз в останнє рівняння, отримаємо *рівняння траєкторії руху тіла, кинутого під кутом до горизонту*. Воно матиме вигляд квадратичної функції: $y(x) = Bx + Ax^2$. Таким чином, *траєкторія руху тіла, кинутого під кутом до горизонту, — парабола*.

Як і в разі руху тіла, кинутого горизонтально, швидкість руху тіла, кинутого під кутом до горизонту, у довільний момент часу t можна обчислити за формулою: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, а кут нахилу швидкості до осі OX визначити зі співвідношення: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_y}{v_x}$.

Далі, розглядаючи розв'язання задачі на рух тіла, кинутого під кутом до горизонту, визначимо ще низку параметрів, які характеризують такий рух: *час польоту, максимальну висоту підняття, дальність польоту*. Знаходити ці параметри часто необхідно, коли маємо справу з практичними завданнями.

Задача 2. Струмінь води вилітає з брандспойта зі швидкістю v_0 під кутом α до горизонту. Знайдіть час польоту частинок води в струмені, дальність їхнього польоту та найбільшу висоту підняття.

Дано:

v_0

α

$g \approx 10 \text{ м/с}^2$

$t = ?$

$h_{\max} = ?$

$l = ?$

Розв'язання

1) Виконаємо пояснювальний рисунок: початок координат пов'яжемо з точкою на поверхні Землі; вісь OY спрямуємо вертикально вгору; вісь OX — горизонтально (див. рис. 22.6).

2) В обраній системі координат $x_0 = 0$, $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$, $y_0 = 0$, $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$, $g_y = -g$, тому рівняння (1) і (2) набудуть вигляду:

$$v_x = v_0 \cos \alpha, \quad x = v_0 \cos \alpha \cdot t; \quad v_y = v_0 \sin \alpha - gt, \quad y = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}.$$

3) Щоб визначити максимальну висоту підняття тіла, потрібно визначити час t_1 його підняття. Цей час можна знайти, знаючи, що у верхній точці траєкторії (точці А) швидкість v руху тіла напрямлена горизонтально, отже, її проекція на вісь OY дорівнює нулю: $v_y = 0$. Оскільки $v_y = v_0 \sin \alpha - gt$, маємо:

$$v_0 \sin \alpha - gt_1 = 0 \Rightarrow v_0 \sin \alpha = gt_1 \Rightarrow t_1 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}.$$

Знаючи час t_1 підняття тіла, визначимо координату y тіла в точці А — це й буде максимальна висота підняття тіла ($y_A = h_{\max}$):

$$y_A = v_0 \sin \alpha \cdot t_1 - \frac{gt_1^2}{2} = \frac{v_0 \sin \alpha \cdot v_0 \sin \alpha}{g} - \frac{g}{2} \left(\frac{v_0 \sin \alpha}{g} \right)^2 = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}, \text{ отже:}$$

$$h_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

Загальний час t руху тіла у два рази більший за час t_1 його підняття: $t = 2t_1$, отже:

$$t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$$

Дальність l польоту дорівнює координаті x тіла наприкінці руху ($l = x$). Оскільки $x = v_0 \cos \alpha \cdot t$, а $t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$, то $l = v_0 \cos \alpha \cdot \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}$. Із курсу математики відомо, що $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$, отже:

$$l = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Зверніть увагу: якщо $\alpha = 45^\circ$, то $\sin 2\alpha = 1$. Це максимально можливе значення синуса, отже, найбільша дальність польоту тіла досягається у випадку, якщо тіло кинуте під кутом 45° до горизонту.

Підбиваємо підсумки

Якщо на тіло діє тільки сила тяжіння, то його рух можна розглядати як результат додавання двох простих рухів: рівномірного — по осі OX і рівноприскореного (з прискоренням \vec{g}) — по осі OY . Для цих рухів рівняння залежностей швидкості та координати від часу мають вигляд: $v_x = v_{0x}$, $x = x_0 + v_{0x}t$; $v_y = v_{0y} + g_y t$, $y = y_0 + v_{0y}t + \frac{g_y t^2}{2}$.

Наведених рівнянь досить, щоб розв'язати практично будь-яку задачу на рух тіла під дією сили тяжіння. Для розв'язання задачі потрібно: 1) виконати пояснювальний рисунок; 2) скориставшись рисунком, перейти від рівняння в проекціях до рівняння в модулях; 3) використовуючи дані задачі, розв'язати систему одержаних рівнянь.

Модуль швидкості в будь-якій точці траєкторії можна обчислити, скориставшись теоремою Піфагора: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, а кут α нахилу швидкості до осі OX знайти зі співвідношення: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_y}{v_x}$.

Контрольні запитання

1. Які спрощення ми приймаємо, розв'язуючи задачі на рух тіл під дією сили тяжіння? 2. Запишіть у загальному вигляді рівняння руху тіла під дією сили тяжіння. 3. Який вигляд матимуть рівняння руху, якщо тіло кинуто вертикально? горизонтально? під кутом до горизонту? 4. Якою є траєкторія руху тіла, кинутого вертикально? горизонтально? під кутом до горизонту? 5. Як визначити модуль і напрямок швидкості руху тіла в будь-якій точці траєкторії?

Вправа № 19

Розв'язуючи задачі, вважайте, що $g = 10 \text{ м/с}^2$.

- Тіло рухається тільки під дією сили тяжіння. Систему координат обрано так, що вісь OX напрямлена горизонтально, вісь OY — вертикально вгору, початок координат розташований у точці на поверхні Землі. Опишіть, зробивши відповідний рисунок, характер руху тіла, якщо:

а) $x_0 = 0, y_0 > 0, v_{0x} = 0, v_{0y} < 0$;	в) $x_0 > 0, y_0 > 0, v_{0x} < 0, v_{0y} > 0$;
б) $x_0 = 0, y_0 > 0, v_{0x} > 0, v_{0y} = 0$;	г) $x_0 = 0, y_0 > 0, v_{0x} > 0, v_{0y} < 0$.
- Стріла, випущена з лука вертикально вгору, впала на землю через 6 с. Знайдіть початкову швидкість руху стріли та максимальну висоту її підняття.
- М'яч кинутий горизонтально з висоти 2 м з початковою швидкістю 5 м/с. Через який час, з якою швидкістю та під яким кутом м'яч упаде на Землю? Визначте також дальність польоту та переміщення м'яча.
- Куля вилетіла з рушниці зі швидкістю 200 м/с у горизонтальному напрямку. Чи влучить куля у вертикальну мішень діаметром 10 см, якщо та розташована на відстані 100 м від стрільця, а її центр міститься нижче від лінії стрільби на 1 м?
- Визначте максимальну висоту підняття та дальність польоту каменя, кинутого з початковою швидкістю 10 м/с під кутом 45° до горизонту.
- Гравець посилає м'яч з висоти 1,2 м під кутом 45° до горизонту. На відстані 20 м від гравця й на висоті 7 м від підлоги розташована сітка. Чи перелетить м'яч через сітку, якщо початкова швидкість його руху 20 м/с?

Експериментальне завдання

Покладіть на стіл невелику важку кульку та штовхніть її. Під час руху по столу швидкість кульки практично не змінюється. Спробуйте її визначити без секундоміра. Це можна зробити, якщо дозволити кульці спокійно скотитися зі столу, — тоді для визначення швидкості її руху по столу буде потрібна тільки лінійка. Подумайте, як це зробити. Запишіть план експерименту та проведіть його.