

## § 8. ЕНЕРГІЯ ТА ГУСТИНА ЕНЕРГІЇ ЕЛЕКТРОСТАТИЧНОГО ПОЛЯ



У попередньому параграфі йшлося про те, що конденсатор зберігає заряди. Але навіщо накопичувати заряди та зберігати їх? Що ще ховається між обкладками зарядженого конденсатора? І чим відрізняється заряджений конденсатор від незарядженого? У цьому параграфі ви дізнаєтеся відповіді на ці запитання.



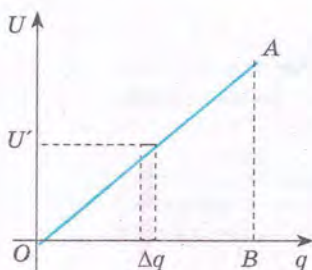
### Чому дорівнює енергія плоского конденсатора

Заряджений конденсатор, як і будь-яка інша система заряджених тіл, має енергію. У правильності цього твердження можна переконатися за допомогою простого експерименту.

Приєднаємо до обкладок зарядженого конденсатора лампочку кишенькового ліхтарика й виявимо, що в момент замикання ключа лампочка спалахує. Тепер виміряємо напругу на обкладках конденсатора — напруга дорівнюватиме нулю, отже, конденсатор розрядився. А це, у свою чергу, означає, що заряджений конденсатор мав енергію, яка перетворилася на енергію світла.

Розрахуємо енергію зарядженого до напруги  $U$  конденсатора, який має ємність  $C$  і заряд  $q$ .

Під час розрядження конденсатора напруга  $U$  на його обкладках змінюється прямо пропорційно заряду  $q$  конденсатора, оскільки ємність  $C$  конденсатора  $\left( C = \frac{q}{U} \right)$  у даному випадку є постійною.



**Рис. 8.1.** До розрахунку роботи, яку виконує електричне поле зарядженого конденсатора під час його розрядження

Таким чином, графік залежності  $U(q)$  має вигляд, поданий на рис. 8.1. Тоді, щоб розрахувати роботу  $A$ , яку виконує електричне поле зарядженого конденсатора під час його розрядження, скористаємося вже відомим вам прийомом. Уявно розділимо увесь заряд конденсатора на маленькі «порції»  $\Delta q$  і будемо вважати, що під час втрати кожної такої «порції» заряду напруга на конденсаторі не змінюється. Таким чином отримаємо ряд відрізків, кожний із яких відповідає зменшенню заряду конденсатора на  $\Delta q$ . На рис. 8.1 показано прямокутник, побудований на одному з таких відрізків. Площа прямокутника дорівнює добутку двох його сторін, тобто  $\Delta q U'$ , де  $U'$  — напруга, за якої конденсатор втрачав дану «порцію» заряду  $\Delta q$ . Вам уже відомо,

що  $A = qU$ . Таким чином, площа даного прямокутника чисельно дорівнює роботі, яку виконає поле під час втрати конденсатором заряду  $\Delta q$ . Зрозуміло, що повна робота, яку виконає поле під час зменшення заряду конденсатора від  $q$  до 0, визначається площею фігури під графіком залежності  $U(q)$ , тобто площею трикутника  $AOB$ . Отже,  $A = \frac{qU}{2}$ . Урахувавши, що  $q = CU$ , отримаємо:  $A = \frac{CU^2}{2}$ , або  $A = \frac{q^2}{2C}$ .

З іншого боку, робота, виконана під час розрядження конденсатора, дорівнює зміні енергії  $\Delta W_{\text{п}}$  електричного поля:

$$A = -\Delta W_{\text{п}} = W_{\text{п}0} - 0 = W_{\text{п}0}. \text{ Отже, } W_{\text{п}0} = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C}.$$

Таким чином, енергія  $W_{\text{п}}$  зарядженого до напруги  $U$  конденсатора, який має електроємність  $C$  і заряд  $q$ , дорівнює:

$$W_{\text{п}} = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C}$$

Цю енергію точніше було б назвати енергією електростатичного поля, яке існує між обкладками конденсатора, оскільки енергія будь-яких заряджених тіл зосереджена в електричному полі, створюваному цими тілами, і розподілена по всьому простору, де є це поле. Чітке доведення цього твердження в рамках електростатики неможливе, оскільки в дослідах з електростатики заряджені тіла та поля не відокремлені одні від інших. Однак у ході вивчення електромагнітних хвиль (розділ 4 підручника) буде доведено, що енергія локалізована в полі.

### Що називають об'ємною густиною енергії електричного поля

Подано енергію електричного поля конденсатора через характеристику поля. Для цього виразимо напругу через напруженість ( $U = Ed$ ) і скористаємося виразом для електроємності плоского



конденсатора  $\left(C = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d}\right)$ . Після підстановки наведених формул у формулу  $W_n = \frac{CU^2}{2}$  отримаємо:  $W_n = \frac{CE^2 d^2}{2} = \frac{\epsilon_0 \epsilon S E^2 d^2}{2d} = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} S d = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} V$ .

Аналізуючи останню формулу, доходимо висновку, що енергія однорідного поля прямо пропорційна об'єму, який займає поле. У зв'язку з цим говорять про *енергію одиниці об'єму поля*, так звану **об'ємну густину енергії**  $\omega_{\text{ел}}$ :  $\omega_{\text{ел}} = \frac{W_n}{V}$ . Тоді:

$$\omega_{\text{ел}} = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} \quad (*)$$

Одиниця об'ємної густини енергії в СІ — **джоуль на кубічний метр**  $\left(\frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}\right)$ .

Формула (\*) справджується не тільки для будь-якого електростатичного поля, але й для змінного електричного поля.

Слід зауважити, що вперше поняття густини енергії електричного поля ввів британський фізик і математик *Джеймс Клерк Максвелл* (1831–1879) (див. рис. 25.2), який слушно вважав, що енергія електричного поля розподілена по всьому об'єму, де є поле з густиною, вираженою формулою (\*).★

### Учимося розв'язувати задачі

**3 Задача 1.** Конденсатор 1 зарядили до різниці потенціалів 100 В, відключили від джерела напруги і паралельно приєднали до конденсатора 2. Знайдіть енергію іскри, яка проскочила в момент з'єднання конденсаторів, якщо ємність конденсатора 1 дорівнює 0,5 мкФ, а конденсатора 2 — 0,4 мкФ.

$\Delta W$  — ?

Дано:

$$\Delta\phi_1 = U_1 = 100 \text{ В}$$

$$C_1 = 5,0 \cdot 10^{-7} \text{ Ф}$$

$$C_2 = 4 \cdot 10^{-7} \text{ Ф}$$

*Аналіз фізичної проблеми.* Заряджений конденсатор 1 має енергію. Після підключення до нього незарядженого конденсатора 2 одержана батарея також матиме енергію, однак її значення буде меншим, ніж значення початкової енергії конденсатора 1. Визначивши зміну енергії системи конденсаторів, знайдемо шукану величину.

*Пошук математичної моделі, розв'язання.* Енергія зарядженого конденсатора 1 дорівнює:  $W_1 = \frac{C_1 U_1^2}{2}$ . Після приєднання конденсатора 2 енергія батареї становитиме  $W_2 = \frac{C U^2}{2}$ , де  $C$  — ємність батареї конденсаторів,  $U$  — напруга на ній. Ємність батареї, що складається з двох паралельно з'єднаних конденсаторів, визначається за формулою:  $C = C_1 + C_2$ .

За умовою задачі конденсатор 1 був відключений від джерела напруги, тому  $q_1 = q$ , де  $q_1$  і  $q$  — заряди конденсатора 1 і батареї

відповідно. Тоді з урахуванням, що  $q_1 = C_1 U_1$  і  $q = CU$ , маємо:  $C_1 U_1 = CU$ .

Отже,  $U = \frac{C_1 U_1}{C}$ . Підставивши вирази для  $C$  і  $U$  у формулу для  $W_2$ ,

$$\text{отримуємо: } W_2 = \frac{C_1^2 U_1^2}{2(C_1 + C_2)}.$$

$$\text{Енергію іскри } \Delta W \text{ знайдемо з умови: } \Delta W = W_1 - W_2 = \frac{C_1 C_2 U_1^2}{2(C_1 + C_2)}.$$

Визначимо значення шуканої величини:

$$[\Delta W] = \frac{\Phi \cdot \Phi \cdot B^2}{\Phi} = \Phi \cdot B^2 = \frac{\text{Кл} \cdot \text{В}^2}{\text{В}} = \text{Дж};$$

$$\{\Delta W\} = \frac{5 \cdot 10^{-7} \cdot 4 \cdot 10^{-7} \cdot 10^4}{2(5+4) \cdot 10^{-7}} \approx 1 \cdot 10^{-3}, \Delta W \approx 1 \cdot 10^{-3} \text{ Дж}.$$

Відповідь: енергія іскри  $\Delta W \approx 1$  мДж.

**★ Задача 2.** Металева куля, яка має радіус 3 см і заряд 20 нКл, занурена в посудину з гасом так, що не торкається до стінок посудини. Визначте об'ємну густину енергії поля, створеного цією кулею, в точках, віддалених від центра кулі на відстані 2 і 4 см.

$\omega_{\text{ел1}} = ?$

$\omega_{\text{ел2}} = ?$

Дано:

$$R = 3 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

$$q = 2 \cdot 10^{-8} \text{ Кл}$$

$$d_1 = 2 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

$$d_2 = 4 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

$$\epsilon = 2$$

*Аналіз фізичної проблеми.* Точка, розташована на відстані 2 см від центра кулі, перебуває всередині кулі, тому напруженість поля в цій точці дорівнює нулю:  $E_1 = 0$ . Отже,  $\omega_{\text{ел1}} = 0$ .

Густину енергії в точці, віддаленій від центра кулі на 4 см, знайдемо, використовуючи формули для розрахунку напруженості поля, створеного кулею.

*Пошук математичної моделі, розв'язання.* За означенням  $\omega_{\text{ел2}} = \frac{\epsilon_0 \epsilon E_2^2}{2}$ , де  $E_2$  — напруженість поля кулі в точці, розташованій на відстані  $d_2$  від центра кулі.

$$\text{Оскільки } E_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon d_2^2}, \text{ то } \omega_{\text{ел2}} = \frac{\epsilon_0\epsilon}{2} \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon d_2^2} \right)^2, \text{ або } \omega_{\text{ел2}} = \frac{q^2}{32\pi^2\epsilon_0\epsilon d_2^4}.$$

Обчислимо значення шуканої величини:

$$[\omega_{\text{ел2}}] = \frac{\frac{\text{Кл}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}^2} \cdot \text{м}^4}{\frac{\text{Кл}^2}{\text{м}^2} \cdot \text{м}^4} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{м}^2 \cdot \text{м}} = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3};$$

$$\{\omega_{\text{ел2}}\} = \frac{4 \cdot 10^{-16}}{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 32 \cdot 3,14^2 \cdot 2 \cdot 4^4 \cdot 10^{-8}} \approx 0,03, \omega_{\text{ел2}} \approx 0,03 \text{ Дж/м}^3.$$

Відповідь: об'ємна густина енергії поля в даних точках дорівнює:  $\omega_{\text{ел1}} = 0$ ;  $\omega_{\text{ел2}} \approx 0,03$  Дж/м<sup>3</sup> відповідно. ★

### Підбиваємо підсумки

Енергія  $W_n$  зарядженого конденсатора прямо пропорційна його електричній ємності  $C$  і квадрату напруги  $U$  між його обкладками:  $W_n = \frac{CU^2}{2}$ . Енергію конденсатора також можна розрахувати за



формулою  $W_n = \frac{q^2}{2C}$ , де  $q$  — заряд конденсатора. Уся ця енергія зосереджена в електричному полі. ★ Об'ємна густина енергії поля прямо пропорційна квадрату напруженості поля:  $w_{\text{ел}} = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2}$ . ★



### Контрольні запитання

1. Який досвід підтверджує, що заряджений конденсатор має енергію? 2. За допомогою яких формул розраховують енергію зарядженого конденсатора? Виведіть ці формули. ★ 3. Що таке об'ємна густина енергії електричного поля? Як її розраховують? ★ 4. Хто вперше ввів поняття об'ємної густини енергії електричного поля?



### Вправа № 8

- Напруга між обкладками плоского конденсатора дорівнює 12 В. Заряд конденсатора 60 мкКл. Яку електроємність має конденсатор? Чому дорівнює його енергія? Як зміниться енергія конденсатора, якщо, не змінюючи напруги між його обкладками, удвічі збільшити відстань між ними?
- За різниці потенціалів між обкладками плоского повітряного конденсатора 5000 В його заряд дорівнює 0,1 мкКл. Обчисліть площу пластин конденсатора й енергію, запасену в ньому. Відстань між пластинами конденсатора 5 мм.
- Плоский повітряний конденсатор після зарядження відключили від джерела напруги та опустили в гас. Як зміниться енергія конденсатора?
- Відстань між пластинами плоского конденсатора збільшують від 5 до 12 мм. На скільки при цьому зміниться енергія конденсатора, якщо різниця потенціалів між його пластинами становить 180 В? Площа пластини конденсатора дорівнює 174 см<sup>2</sup>.
- Два провідники розташовані на великій відстані один від одного. Перший, ємністю  $10^{-5}$  мкФ, заряджений до потенціалу 6 кВ, а другий, ємністю  $2 \cdot 10^{-5}$  мкФ, — до потенціалу 12 кВ. Яка кількість теплоти виділиться, якщо з'єднати провідники тонким дротом?
- ★ Дві однакові металеві кулі розташовані на великій відстані одна від одної. Поле першої кулі має енергію  $16 \cdot 10^{-4}$  Дж, другої —  $36 \cdot 10^{-4}$  Дж. Яка кількість теплоти виділиться, якщо з'єднати ці кулі тонким дротом?

### ФІЗИКА ТА ТЕХНІКА В УКРАЇНІ



О. В. Кириленко

#### Інститут електродинаміки НАН України (Київ)

Інститут, створений у 1947 р., свого часу очолювали такі видатні вчені, як академіки С. О. Лебедев, А. К. Шидловський, чл.-кор. АН УРСР О. М. Мілях. У 1951 р. акад. С. О. Лебедев створив першу на Європейському континенті електронну обчислювану машину (ЕОМ). З неї почався розвиток комп'ютерної індустрії в СРСР. У 1997 р. вченого було нагороджено американською премією як засновника радянської комп'ютерної індустрії.

Основні напрямки діяльності Інституту електродинаміки: перетворення та стабілізація електромагнітної енергії; аналіз, оптимізація та автоматизація електроенергетичних систем; інформаційно-вимірювальні системи та метрологічне забезпечення в енергетиці; комплексні енергетичні системи з відновлюваними джерелами енергії. У цих галузях Інститут є провідним в Україні. Досягнення інституту в галузі електроенергетичних систем дозволяють уникати аварій за умов одночасного використання різних потужних електростанцій.

Учені інституту мають багато державних та міжнародних відзнак і премій. З 2007 р. директор Інституту електродинаміки — академік НАНУ Олександр Васильович Кириленко.