

## § 40. КОЛИВАННЯ ПРУЖИННОГО МАЯТНИКА

**71** Коливальні рухи бувають дуже різноманітними. Однак існує «класика» коливальних рухів — вони описані сотні років тому, їх вивченням займалися *Г. Галілей* і сучасник І. Ньютона *Христіан Гюйгенс* (1629–1695). Це — коливання пружинного маятника (тіла, закріпленого на пружині) і математичного маятника. У цьому параграфі ви познайомитеся з коливаннями пружинного маятника. У фізиці пружинний маятник ще називають *гармонічним осцилятором*.

### **1** Коливання пружинного маятника

*Пружинний маятник — коливальна система, яка являє собою тіло, закріплене на пружині.*

Розглянемо коливання горизонтального пружинного маятника — візка масою  $m$ , прикріпленого до вертикальної стіни пружиною жорсткістю  $k$  (рис. 40.1).

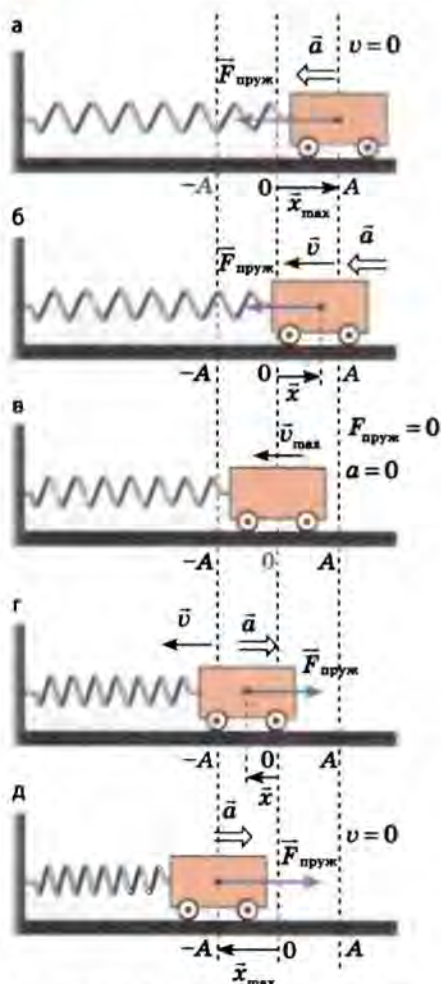


Рис. 40.1. Вільні коливання пружинного маятника

пружності та прискорення дорівнюватимуть нулю, а швидкість руху візка сягне максимального значення. Діставши положення рівноваги, візок не зупиниться, а внаслідок інертності продовжить рух вліво (рис. 40.1, *г*). Пружина почне стискатися, і виникне зростаюча сила пружності, напрямлена вправо. Сила пружності гальмуватиме рух візка. Досягнувши точки повороту (максимального відхилення від положення рівноваги), візок на мить зупиниться (рис. 40.1, *д*). До цього моменту від моменту початку коливань пройде половина періоду ( $t = T/2$ ).

Наступну половину періоду характер руху візка буде таким самим, тільки у зворотному напрямку: візок почне рухатися вправо до положення рівноваги, знову збільшуючи швидкість; через проміжок часу  $t = \frac{3}{4}T$  він пройде це положення й далі знову відхилиться на відстань  $A$ . Так завершиться одне повне коливання ( $t = T$ ). Далі все повториться.

Будемо вважати:

1) сили тертя, які діють у системі, нехтовно малі, тому їх можна не враховувати, тоді коливання маятника будуть незатухаючими, тобто їхня амплітуда з часом не змінюватиметься;

2) деформації пружини в процесі коливань підпорядковуються закону Гука:  $F_{\text{пруж}} = k|x|$ .

Для встановлення причин вільних коливань пружинного маятника розглянемо докладніше процес коливання.

Відведемо візок на відстань  $x_{\text{max}}$  вправо від положення рівноваги (рис. 40.1, *а*) — пружина розтягнеться, і на візок почне діяти сила пружності, напрямлена вліво; у цей момент сила пружності максимальна:  $F_{\text{пруж}} = k|x_{\text{max}}| = kA$ .

Відпустимо візок — під дією сили пружності він почне рухатися вліво (рис. 40.1, *б*). Напрямок прискорення візка збігається з напрямком швидкості його руху ( $\vec{a} \uparrow \vec{v}$ ), тому швидкість руху візка буде збільшуватися. Натомість видовження пружини буде зменшуватися, тому меншатиме й сила пружності, а отже, і прискорення руху візка.

Через час, який дорівнює чверті періоду ( $t = T/4$ ), візок дійде до положення рівноваги (рис. 40.1, *в*). У цей момент сила

Зверніть увагу: протягом усього часу колювання сила пружності напрямлена в бік, протилежний видовженню пружини (протилежно зміщенню візка),— весь час сила пружності «штовхала» візок до положення рівноваги.

Отже, вільні колювання пружинного маятника мають такі причини:

1) сила, що діє на тіло, завжди напрямлена до положення рівноваги;

2) тіло, що колювається, є інертним, тому воно не зупиняється в положенні рівноваги (коли сила пружності стає рівною нулю), а продовжує рух у тому самому напрямку.

## 2 Як розрахувати період колювань пружинного маятника

Розглянемо колювання візка, закріпленого на горизонтальній пружині, з погляду другого закону Ньютона (рис. 40.2). На візок діють три сили: сила реакції опори  $\vec{N}$ , сила тяжіння  $m\vec{g}$  та сила пружності  $\vec{F}_{\text{пруж}}$ . Запишемо рівняння другого закону Ньютона у векторному вигляді та в проекціях на осі координат. Вісь  $OX$  напрямимо вздовж лінії руху візка, вісь  $OY$  — вертикально вгору, початок координат сумістимо з положенням рівноваги візка.

Рівняння другого закону Ньютона в цьому випадку має вигляд:

$$\vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_{\text{пруж}} = m\vec{a}.$$

Проектуючи це рівняння на осі координат і враховуючи, що відповідно до закону Гука  $F_{\text{пруж}x} = -kx$ , одержимо систему рівнянь:

$$\begin{cases} OX: F_{\text{пруж}x} = ma_x, \\ OY: N - mg = 0, \\ F_{\text{пруж}x} = -kx. \end{cases}$$

Зрівнявши праві частини першого та останнього рівнянь системи, знайдемо  $a_x$ . Оскільки  $ma_x = -kx$ , маємо:

$$a_x = -\frac{k}{m}x. \quad (1)$$

Дане рівняння називають *рівнянням вільних колювань пружинного маятника*. Аналізуючи це рівняння, можна зробити висновок: під час колювань пружинного маятника прискорення прямо пропорційне зміщенню маятника та напрямлене в бік, протилежний зміщенню.

Доведено: якщо в будь-який момент часу руху тіла його прискорення прямо пропорційне зміщенню ( $a \sim x$ ) і напрямлене в бік, протилежний зміщенню ( $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{x}$ ), то такий рух являє собою гармонічні

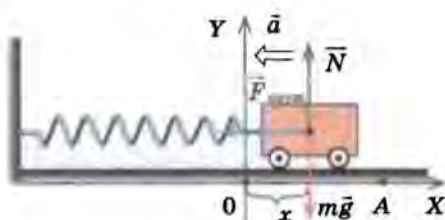


Рис. 40.2. У разі відсутності тертя на візок у процесі колювань діють три сили: сила реакції опори  $N$ , сила тяжіння  $m\vec{g}$  та сила пружності  $\vec{F}_{\text{пруж}}$



коливання (описується за законом синуса (косинуса)) і рівняння цих коливань можна записати у вигляді:

$$a_x = -\omega^2 x, \quad (2)$$

де  $\omega$  — циклічна частота гармонічних коливань.

Зіставивши формули (1) і (2), одержимо:  $\omega^2 = \frac{k}{m}$ , або  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ .

Узявши до уваги, що  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , отримаємо **формулу для обчислення періоду коливань пружинного маятника**:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (3)$$

Зверніть увагу: період коливань пружинного маятника не залежить ані від амплітуди коливань, ані від того, де відбуваються ці коливання (на поверхні Землі, у космічному кораблі чи на поверхні Місяця); він визначається тільки власними характеристиками коливальної системи «тіло — пружина». Якщо період  $T$  коливань тіла та жорсткість  $k$  пружини відомі, можна знайти масу  $m$  тіла. Такий спосіб визначення маси використовують у стані невагомості, коли звичайні ваги не працюють.

### 3 Учимися розв'язувати задачі

**Задача.** Рівняння коливань тягара на пружині має вигляд:  $x = 0,02 \cos \frac{2\pi}{3} t$  (м). Визначте масу тягара, якщо жорсткість пружини дорівнює 40 Н/м. Визначте прискорення руху тягара та силу пружності, що діє на тягар у момент часу  $t = 1$  с.

Дано:

$$x = 0,02 \cos \frac{2\pi}{3} t \text{ (м)}$$

$$k = 40 \text{ Н/м}$$

$$t = 1 \text{ с}$$

$$m \text{ — ?}$$

$$a \text{ — ?}$$

$$F_{\text{пруж}} \text{ — ?}$$

*Аналіз фізичної проблеми, розв'язання.* Коливання є гармонічними, тому для розв'язання задачі порівняємо задане рівняння із загальним виглядом рівняння гармонічних коливань:  $x = 0,02 \cos \frac{2\pi}{3} t$ ,  $x = A \cos \omega t$ .

Зіставивши рівняння, маємо:

$$A = 0,02 \text{ м}; \quad \omega = \frac{2\pi}{3} \text{ с}^{-1}.$$

Скориставшись формулою  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , знайдемо масу тягара:  $m = \frac{k}{\omega^2}$ .

Згідно із законом Гука  $F_{\text{пруж}} = k|x|$ ; відповідно до другого закону Ньютона  $a = \frac{F_{\text{пруж}}}{m}$ .

Визначимо значення шуканих величин:

$$x = 0,02 \cos \frac{2\pi}{3} t = 0,02 \cos \frac{2\pi}{3} \cdot 1 = 0,01 \text{ (м)};$$

$$[m] = \frac{H}{M \cdot c^{-2}} = \frac{H \cdot c^2}{M} = \frac{кг \cdot м / c^2 \cdot c^2}{м} = кг, \quad \{m\} = \frac{40 \cdot 9}{4\pi^2} = 9, \quad m = 9 \text{ кг};$$

$$[F] = \frac{H}{M} \cdot M = H, \quad \{F\} = 40 \cdot 0,01 = 0,4, \quad F = 0,4 \text{ Н};$$

$$[a] = \frac{H}{кг} = \frac{кг \cdot м / c^2}{кг} = \frac{м}{c^2}, \quad \{a\} = \frac{0,4}{9} = 0,044, \quad a = 0,044 \frac{м}{c^2}.$$

**Відповідь:** маса тягара  $m = 9$  кг; прискорення руху тягара в момент часу  $t = 1$  с:  $a = 0,044 \frac{м}{c^2}$ ; сила пружності, що діє в цей момент на тягар,  $F_{\text{пруж}} = 0,4$  Н.

### Підбиваємо підсумки

Пружинний маятник — коливальна система, яка являє собою тіло, закріплене на пружині. Причини вільних колювань пружинного маятника: 1) сила пружності, яка діє на тіло, завжди напрямлена до положення рівноваги; 2) тіло, яке колювається, є інертним.

Період вільних колювань пружинного маятника не залежить від амплітуди його колювань і визначається за формулою:  $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ .

Якщо під час руху прискорення тіла завжди прямо пропорційне зміщенню і напрямлене в бік, протилежний зміщенню, то такий рух являє собою гармонічні колювання. Рівняння гармонічних колювань можна записати у вигляді:  $a_x = -\omega^2 x$ , де  $\omega$  — циклічна частота колювань.

### Контрольні запитання

1. Що таке пружинний маятник? Наведіть приклади.
2. Опишіть процес колювань пружинного маятника.
3. Чому в ході колювань тіло не зупиняється, коли проходить положення рівноваги?
4. Як змінюється сила пружності в ході колювань?
5. За якою формулою визначають період колювань пружинного маятника?
6. Чи залежить під час гармонічних колювань прискорення руху тіла від зміщення тіла? Якщо залежить, то як?
7. Запишіть рівняння гармонічних колювань.

### Вправа № 35

1. Тягар масою 10 кг колювається на пружині, маючи період колювань 2 с. Визначте жорсткість пружини та частоту колювань тягара.
2. Визначте масу тіла, підвішеного на пружині жорсткістю 40 Н/м, якщо після відхилення тіла від положення рівноваги воно здійснює 8 колювань за 12 с.
3. Два тіла підвішені на двох однакових пружинах. Як відрізняються періоди колювань цих маятників, якщо маса одного тіла в 4 рази більша за масу іншого?
4. Рівняння колювань пружинного маятника має вигляд:  $x = 5 \sin \frac{\pi}{6} t$  (м). Визначте жорсткість пружини та частоту колювань тягара, якщо його маса дорівнює 2 кг. Яка сила пружності діє на тягар через 1 с після початку руху?
5. Вертикальна пружина під дією тягара видовжилася на 2 см. Визначте частоту вільних колювань такого маятника.
- 6\*. На поверхні води плаває дерев'яний брусок масою 200 г. Брусок трохи занурили у воду та відпустили. Знайдіть частоту колювань бруска. Площа основи бруска — 50 см<sup>2</sup>.