

## § 11. ПЕРЕМІЩЕННЯ ПІД ЧАС РІВНОПРИСКОРЕНОГО РУХУ. РІВНЯННЯ КООРДИНАТИ

71

Ви напевне спостерігали по телевізору: на дорозі сталася аварія, інспектори ДАІ вимірюють гальмівний шлях. Навіщо? Щоб визначити швидкість руху автомобіля на початку гальмування та прискорення в ході гальмування. Ці дані потім використовують для з'ясування причини аварії: чи то водій перевищив дозволenu швидкість, чи то несправні гальма, чи, може, з автомобілем усе гаразд і винен, наприклад, пішохід, який порушив правила дорожнього руху. Як, знаючи час гальмування й гальмівний шлях, визначити швидкість та прискорення руху тіла, ви довідаєтесь із цього параграфа.



### **Переміщення під час рівноприскореного руху**

Щоб отримати формулу для обчислення переміщення тіла під час рівноприскореного руху, покажемо, що в ході такого руху переміщення тіла чисельно дорівнює площі фігури під графіком

залежності проекції швидкості руху тіла від часу. Для простоти розглянемо рівноприскорений рух, при якому початкова швидкість і прискорення мають однаковий напрямок, а напрямок осі  $Ox$  збігається з напрямком швидкості. У цьому випадку графік залежності  $v_x(t)$  має вигляд, поданий на рис. 11.1, а.

Скориставшись наведеним графіком, знайдемо проекцію  $s_x$  переміщення тіла за деякий час  $t$ . Для цього розіб'ємо весь час руху тіла на невеликі проміжки  $\Delta t$  (рис. 11.1, б). Припустимо, що протягом кожного проміжку часу швидкість руху тіла лишалася постійною, тобто замінимо реальний рівноприскорений рух уявним, під час якого швидкість збільшується не рівномірно, а стрибками.

Під час руху з постійною швидкістю переміщення тіла чисельно дорівнює площі прямокутника під графіком залежності  $v_x(t)$ . Загальне переміщення під час уявного руху дорівнюватиме сумі площ смужок завширшки  $\Delta t$ , які разом утворюють східчасту фігуру. Якщо зменшити проміжок часу  $\Delta t$  (рис. 11.1, в), то переміщення, як і раніше, дорівнюватиме площі східчастої фігури, яка поступово набуває вигляду трапеції.

Неважко здогадатися, що в результаті нескінченного зменшення проміжку часу ( $\Delta t \rightarrow 0$ ) східчаста фігура «перетвориться» на трапецію, а переміщення чисельно дорівнюватиме площі цієї трапеції (рис. 11.1, г). Площа трапеції дорівнює добутку півсуми її основ на висоту, тобто  $S_{OABC} = \frac{OA + BC}{2} OC$ . На графіку відрізок  $OA$  відповідає проекції початкової швидкості  $v_{0x}$ , відрізок  $BC$  — проекції кінцевої швидкості  $v_x$ , а відрізок  $OC$  — проміжку часу  $t$ . Замінивши зазначені відрізки відповідними фізичними величинами й взявши до уваги,

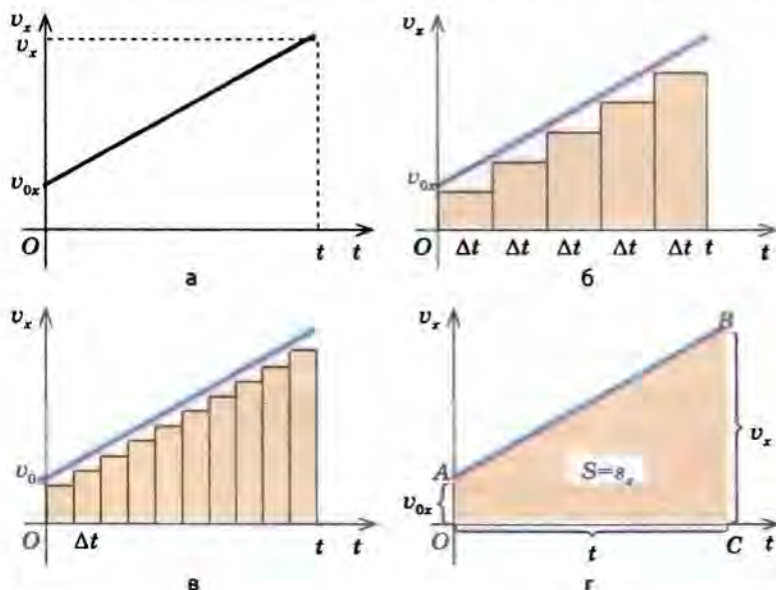


Рис. 11.1. До виведення формули залежності переміщення тіла від часу руху в разі рівноприскореного руху: а — графік залежності  $v_x(t)$ ; графік (г) отримано з графіків (б) і (в) внаслідок нескінченного зменшення проміжку часу  $\Delta t$ . Переміщення тіла чисельно дорівнює площі трапеції, обмеженої осями  $Ov_x$  і  $Ot$ , графіком  $v_x(t)$  і перпендикуляром, проведеним із точки  $t$  до перетину з графіком  $v_x(t)$

що  $s_x = S_{OABC}$ , отримуємо формулу, яка виражає *геометричний зміст переміщення під час рівноприскореного прямолінійного руху*:

$$s_x = \frac{v_{0x} + v_x}{2} t \quad (1)$$

### Як ще можна визначити переміщення у разі рівноприскореного прямолінійного руху

Формула (1) є зручною для розв'язування багатьох задач, але за її допомогою неможливо встановити функціональну залежність проекції переміщення тіла від часу його руху ( $s_x(t)$ ), оскільки у формулі (1) присутні відразу дві змінні:  $v_x$  і  $t$ . Змінну  $v_x$  легко виключити, знаючи, що проекція швидкості при рівноприскореному русі розраховується за формулою:  $v_x = v_{0x} + a_x t$ . Підставивши цей вираз у формулу (1), отримаємо:  $s_x = \frac{v_{0x} + v_{0x} + a_x t}{2} t = \frac{2v_{0x} + a_x t}{2} t = v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}$ . Отже, одержано *рівняння залежності проекції переміщення від часу ( $s_x(t)$ )\*:*

$$s_x = v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2} \quad (2)$$

Оскільки величини  $v_{0x}$  і  $a_x$  не залежать від часу руху, то залежність  $s_x(t)$  є квадратичною. Графік квадратичної функції — *парабола* (рис. 11.2).

Скориставшись означенням прискорення та формулою (1), можна отримати ще одну формулу для обчислення переміщення.

Оскільки  $a_x = \frac{v_x - v_{0x}}{t}$ , то  $t = \frac{v_x - v_{0x}}{a_x}$ . Підставимо вираз, отриманий для  $t$ , у формулу (1):

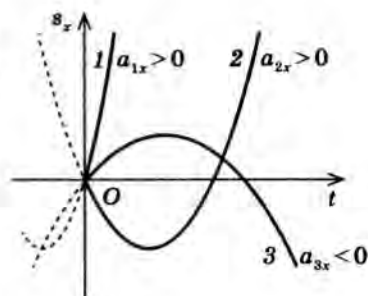
$$s_x = \frac{v_{0x} + v_x}{2} \cdot t = \frac{v_{0x} + v_x}{2} \cdot \frac{v_x - v_{0x}}{a_x} = \frac{(v_{0x} + v_x)(v_x - v_{0x})}{2a_x}.$$

Остаточно маємо:

$$s_x = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2a_x}. \quad (3)$$

Формулою (3) зручно користуватися, якщо в задачі не дано часу руху тіла та не потрібно його знаходити.

Зверніть увагу: у кожній з отриманих формул (1)–(3) проекції  $v_x$ ,  $v_{0x}$  і  $a_x$  можуть бути як додатними, так і від'ємними — залежно від того, як напрямлені вектори  $\vec{v}$ ,  $\vec{v}_0$  і  $\vec{a}$  відносно осі  $OX$ .



**Рис. 11.2.** Графік залежності проекції переміщення від часу — параболы, яка проходить через початок координат: якщо  $a_x > 0$ , то вітки параболы напрямлені вгору (графіки 1, 2); якщо  $a_x < 0$ , то вітки параболы напрямлені вниз (графік 3). Чим крутіше графік, тим більше прискорення ( $a_1 > a_2$ )

\* Переміщення  $\vec{s}$  — величина векторна. Рівняння залежності  $\vec{s}(t)$  для рівноприскореного прямолінійного руху має вигляд:  $\vec{s} = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a} t^2}{2}$ .



### 1 Як під час рівноприскореного прямолінійного руху координата тіла залежить від часу

Знаючи рівняння залежності  $s_x(t)$ , легко одержати рівняння координати тіла для рівноприскореного прямолінійного руху.

Справді, для будь-якого виду руху проекція переміщення і координата пов'язані співвідношенням  $x = x_0 + s_x$ ; для рівноприскореного руху  $s_x = v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$ . Отже, рівняння координати для рівноприскореного прямолінійного руху:

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \quad (4)$$

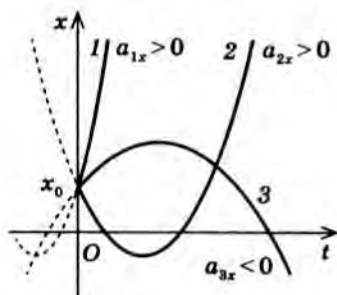


Рис. 11.3. Графік залежності координати від часу — парабола, яка перетинає вісь x у точці  $x_0$

Знаючи початкове положення тіла  $x_0$  (положення в момент часу  $t=0$ ), початкову швидкість  $\vec{v}_0$  тіла, його прискорення  $\vec{a}$  і скориставшись формулою (4), можна визначити положення тіла в будь-який момент часу, тобто розв'язати основну задачу механіки для рівноприскореного прямолінійного руху.

Проаналізувавши рівняння координати, можна дійти висновку, що залежність  $x(t)$  є квадратичною, тому графік залежності координати від часу — парабола (рис. 11.3).

### 4 Учимися розв'язувати задачі

Основні етапи розв'язування задач на рівноприскорений рух розглянемо на конкретному прикладі. У лівому стовпчику таблиці наведено алгоритм — послідовність дій, якої слід дотримуватись у ході розв'язування багатьох задач із кінематики, у правому — приклад розв'язування задачі.

#### Послідовність дій

1. Уважно прочитайте умову задачі. З'ясуйте, які тіла беруть участь у русі, яким є характер їхнього руху, які параметри руху відомі.

2. Запишіть коротку умову задачі. У разі необхідності переведіть значення фізичних величин в одиниці СІ.

#### Приклад розв'язування задачі

**Задача.** Після початку гальмування потяг пройшов до зупинки 225 м. Якою була швидкість руху потяга перед початком гальмування? Вважайте, що прискорення потяга є постійним і дорівнює  $0,5 \text{ м/с}^2$ .

Дано:

$$s = 225 \text{ м}$$

$$a = 0,5 \text{ м/с}^2$$

$$v = 0$$

$$v_0 = ?$$

## Закінчення таблиці

## Послідовність дій

**3.** Виконайте пояснювальний рисунок, на якому позначте осі координат; для кожного тіла позначте також напрямки швидкості руху, початкової швидкості, прискорення.

**4.** Із формул, що описують рівноприскорений рух, виберіть ті, які найбільше відповідають умові задачі.

$$a_x = \frac{v_x - v_{0x}}{t};$$

$$v_x = v_{0x} + a_x t;$$

$$s_x = v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2;$$

$$s_x = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2a_x};$$

$$s_x = \frac{v_{0x} + v_x}{2} t.$$

Обрані формули конкретизуйте для даної задачі.

**5.** Розв'яжіть задачу в загальному вигляді (отримайте математичний вираз для шуканих величин).

**6.** Перевірте одиницю шуканої величини.

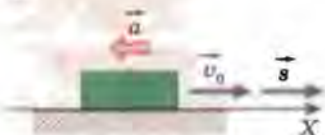
**7.** Знайдіть числове значення шуканої величини.

**8.** Запишіть та проаналізуйте результат.

**9.** Запишіть відповідь.

## Приклад розв'язування задачі

На пояснювальному рисунку напрямимо вісь  $OX$  у напрямку руху потяга. Оскільки потяг зменшує свою швидкість, то  $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{v}_0$ .



З умови задачі відомі  $a$ ,  $v$  і  $s$ , потрібно знайти  $v_0$ . Усі ці чотири фізичні величини входять у формулу  $s_x = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2a_x}$ . Запишемо цю формулу для даного конкретно-

го випадку (скориставшись рисунком, перейдемо від проекцій до модулів). Напрямок переміщення й напрямок початкової швидкості збігаються з напрямком осі  $OX$ , тому  $s_x = s$ ,  $v_{0x} = v_0$ . Напрямок прискорення протилежний напрямку осі  $OX$ , отже,  $a_x = -a$ . За умовою кінцева швидкість  $v = 0$ . Підставимо одержані дані у формулу переміщення:  $s = \frac{0 - v_0^2}{-2a} = \frac{v_0^2}{2a}$ .

Із формули  $s = \frac{v_0^2}{2a}$  знайдемо початкову швидкість  $v_0$ :  $v_0^2 = 2as$ , звідси  $v_0 = \sqrt{2as}$ .

$$[v] = \sqrt{\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{м}} = \sqrt{\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}} = \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

$$\{v\} = \sqrt{2 \cdot 225 \cdot 0,5} = \sqrt{225} = 15.$$

$v_0 = 15 \text{ м/с} = 54 \text{ км/год}$  — цілком реальна швидкість руху для потяга.

**Відповідь:** перед початком гальмування швидкість руху потяга  $v_0 = 54 \text{ км/год}$ .



**Підбиваємо підсумки**

Як і в разі рівномірного руху, для рівноприскореного руху проекція переміщення чисельно дорівнює площі фігури під графіком залежності швидкості від часу:  $s_x = \frac{v_{0x} + v_x}{2} t$ .

Рівняння проекції переміщення для рівноприскореного прямолінійного руху має вигляд:  $s_x = v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2$ .

Рівняння залежності проекції переміщення від часу являє собою квадратичну функцію, тому графік залежності  $s_x(t)$  — парабола.

У ході розв'язування задач застосовують ще одну формулу для обчислення переміщення:  $s_x = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2a_x}$ .

Координату тіла в разі рівноприскореного прямолінійного руху визначають із рівняння:  $x = x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2$ .

Знаючи початкове положення тіла  $x_0$ , його початкову швидкість  $v_0$  і прискорення  $a$ , можна визначити положення тіла в будь-який момент часу, тобто розв'язати основну задачу механіки для рівноприскореного прямолінійного руху.

**Контрольні запитання**

1. Доведіть, що в разі рівноприскореного прямолінійного руху проекція переміщення чисельно дорівнює площі фігури під графіком залежності швидкості від часу.
2. За допомогою яких формул можна обчислити проекцію переміщення для рівноприскореного прямолінійного руху? Виведіть ці формули.
3. Що являє собою графік координати в разі рівноприскореного прямолінійного руху? графік залежності переміщення від часу?
4. Як розв'язується основна задача механіки для рівноприскореного прямолінійного руху?

**Вправа № 9**

1. Лижник, що рухається зі швидкістю 1 м/с, починає спускатися з гори. Визначте довжину спуску, якщо лижник проїхав його за 10 с. Вважайте, що прискорення лижника було постійним і дорівнювало 0,5 м/с<sup>2</sup>.
2. Пасажирський потяг загальмував, змінивши свою швидкість від 54 км/год до 5 м/с. Визначте відстань, яку пройшов потяг під час гальмування, якщо прискорення потяга було постійним і дорівнювало 4 м/с<sup>2</sup>.
3. Гальмо легкового автомобіля є справним, якщо при швидкості 8 м/с гальмівний шлях автомобіля дорівнює 7,2 м. Визначте час гальмування та прискорення руху автомобіля.
4. На рисунку подано графік залежності швидкості від часу для деякого тіла. Визначте шлях і проекцію переміщення тіла протягом 4 с після початку відліку часу. Запишіть рівняння координати, якщо в момент часу  $t = 0$  тіло перебувало в точці з координатою  $-20$  м.

5. Рухи тіл задані рівняннями: а)  $x_1 = 4 + 5t + 2t^2$ ; б)  $x_2 = -9 + t + 0,5t^2$ ; в)  $x_3 = 0,2t^2$ ; г)  $x_4 = -5t - 3t^2$ ; д)  $x_5 = 4 + 0,75t$ . Для кожного випадку запишіть залежність  $v_x(t)$ ; побудуйте графік цієї залежності; опишіть характер руху тіла.

- 6\*. Два автомобілі виїхали з одного пункту в одному напрямку, причому перший автомобіль виїхав на 20 с пізніше, ніж другий. Обидва автомобілі рухаються рівноприскорено з прискоренням 0,4 м/с<sup>2</sup>. Через який проміжок часу після початку руху другого автомобіля відстань між ними становитиме 240 м?

