Układy równań liniowych

Karolina Glaza
github.com/kequel

Maj 2025

1 Generacja macierzy i wektora

Wygenerowano macierz **A** o postaci:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

gdzie:

- **A** jest macierzą pasmową o rozmiarze $N \times N$ ($N = 1293$), zdefiniowaną przez:
  - Główną diagonalę: $a_1 = 6$,
  - Sąsiednie diagonale: $a_2 = -1$,
  - Skrajne diagonale: $a_3 = -1$.
- **b** jest wektorem pobudzenia, gdzie n-ty element wynosi $\sin(n \cdot 9)$.

Opis metod numerycznych

Dla rozwiązania układu $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ zastosowano trzy podejścia: metodę Jacobiego, Gaussa-Seidla oraz faktoryzację LU.

Metoda Jacobiego

W każdej iteracji k, nowe przybliżenie $x^{(k+1)}$ obliczane jest niezależnie, według wzoru:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{1}$$

Metoda Gaussa-Seidla

W tej metodzie, podczas iteracji k, bieżące przybliżenia są wykorzystywane natychmiast:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{2}$$

Faktoryzacja LU

Macierz $\mathbf{A}$ rozkładana jest jako:

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU},$$

gdzie:

- $\mathbf{L}$ — macierz dolnotrójkątna z jedynkami na diagonali,
- $\mathbf{U}$ — macierz górnotrójkątna.

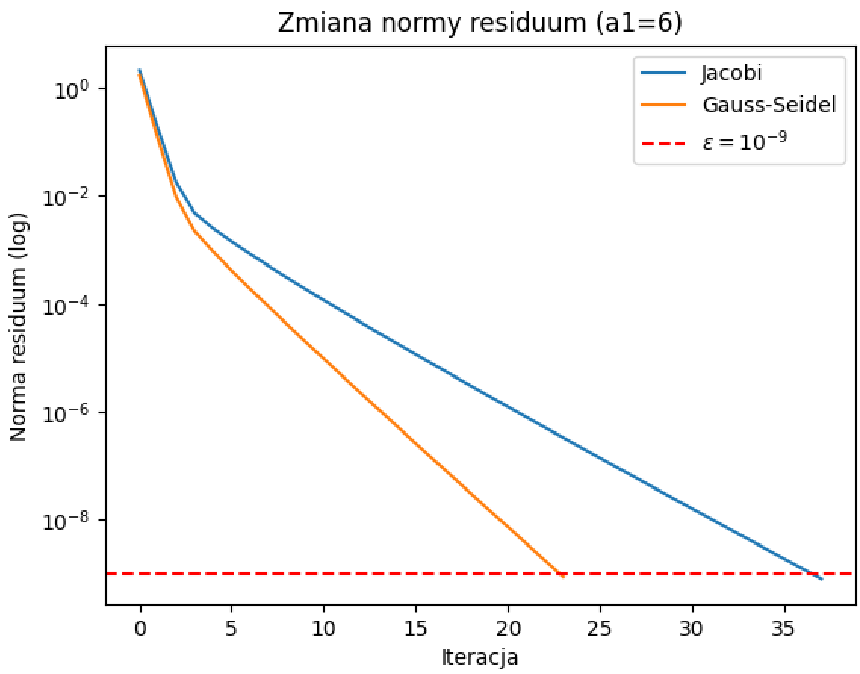
Elementy macierzy L i U wyznaczane są rekurencyjnie:

$$l_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{u_{kk}}, \quad \text{dla } i > k, \tag{3}$$

$$u_{ij}^{(k+1)} = u_{ij}^{(k)} - l_{ik} \cdot u_{kj}^{(k)}, \quad \text{dla } j = k, k+1, .., n. \tag{4}$$

2 Metody iteracyjne dla $a_1 = 6$

2.1 Wykres



Rysunek 1: Zmiana normy residuum w kolejnych iteracjach (skala logarytmiczna).

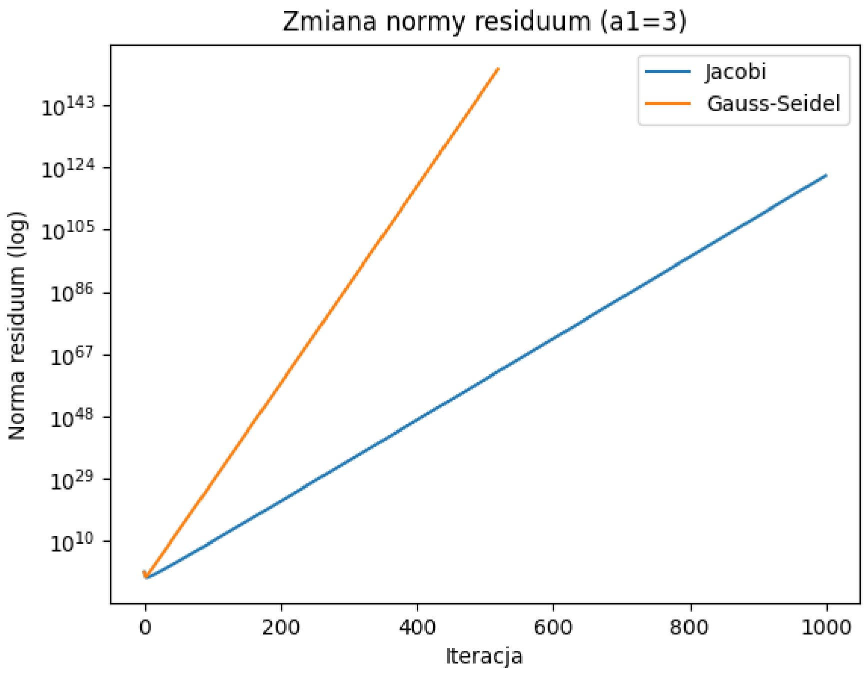
2.2 Wyniki

- Metoda Jacobiego: zbieżność osiągnięta po ~ 37 iteracjach.
- Metoda Gaussa-Seidla: zbieżność osiągnięta po ~ 23 iteracjach.

Gauss-Seidel był prawie $2\times$ szybszy od Jacobiego.

3 Metody iteracyjne dla $a_1 = 3$

3.1 Wykres



Rysunek 2: Zmiana normy residuum dla $a_1 = 3$ (skala logarytmiczna).

3.2 Wyniki

- Obie metody są **rozbieżne** – norma residuum rośnie wykładniczo.
- Metody iteracyjne, takie jak Jacobi i Gauss-Seidel, gwarantują zbieżność tylko dla macierzy diagonalnie dominujących.

$$|a_{ii}| = 3$$

$$\sum_{j \neq i} |a_{ij}| = |-1| + |-1| + |-1| + |-1| = 4$$

$$|a_{ii}| < |a_{ij}|$$

Macierz $\mathbf{A}$ nie jest diagonalnie dominująca dla $a_1 = 3$.

4 Metoda LU dla $a_1 = 3$

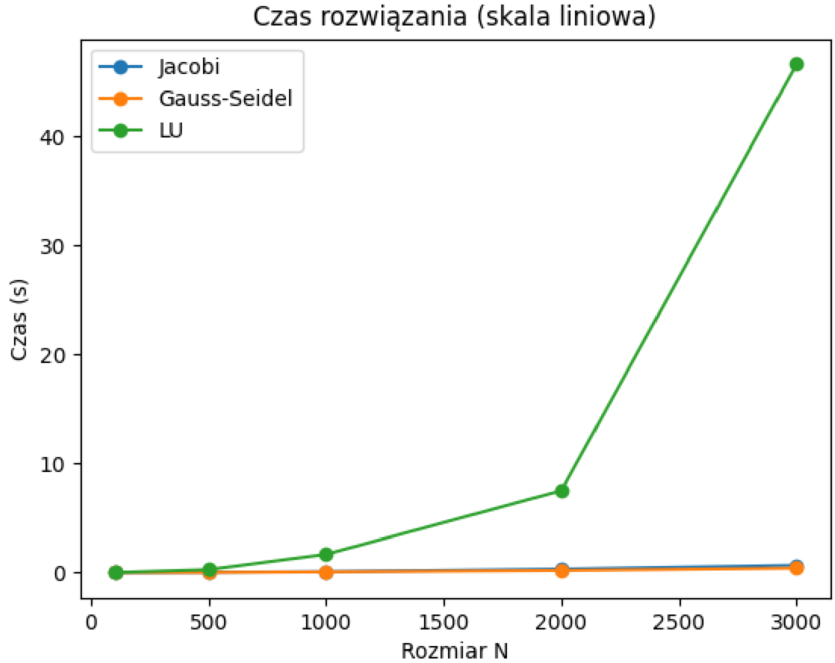
4.1 Wyniki

- Norma residuum: $\|\mathbf{r}\|_2 \approx 2.42 \times 10^{-13}$.

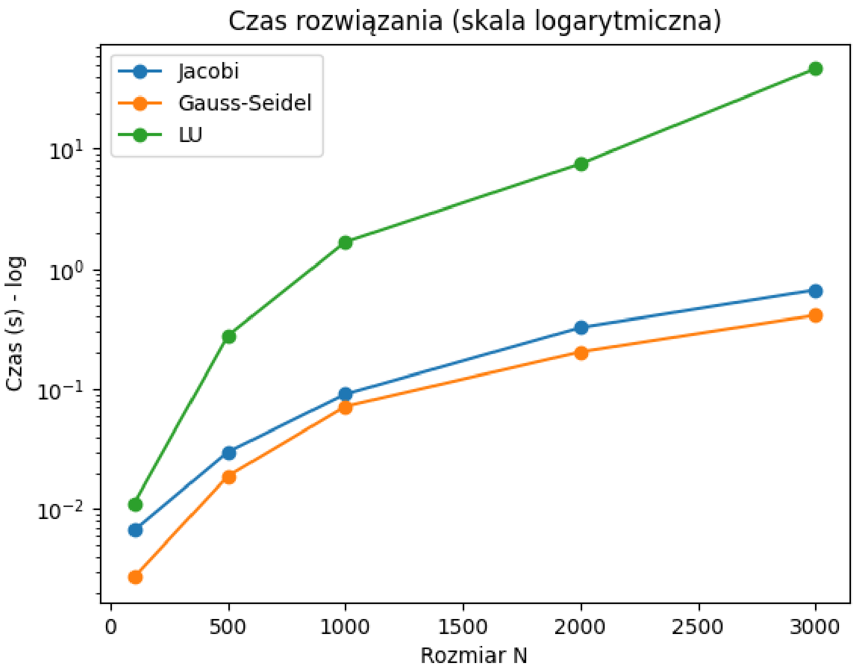
Metoda LU zapewnia bardzo dokładne rozwiązanie – błąd mieści się w granicach precyzji numerycznej dla macierzy dobrze uwarunkowanej.

5 Analiza czasu wykonania

5.1 Wykresy



Rysunek 3: Czas rozwiązania w zależności od N (skala liniowa).



Rysunek 4: Czas rozwiązania w zależności od N (skala logarytmiczna).

5.2 Obserwacje

- Metody iteracyjne (Jacobi, Gauss-Seidel): linie są lekko rosnące, niemal płaskie – czas wzrasta powoli, wzrost jest zgodny z liniową złożonością czasową.
- Metoda LU: Czas działania metody LU rośnie gwałtownie od $N \approx 500$, a szczególnie mocno dla $N > 2000$ – czas rośnie dużo szybciej, co wskazuje na wyższą złożoność obliczeniową (rzędu $O(N^3)$). Dla większych N metoda LU staje się niepraktyczna.

6 Podsumowanie

- Metody iteracyjne są efektywne dla macierzy diagonalnie dominujących (np. $a_1 = 6$).
- Gauss-Seidel jest prawie $2\times$ szybszy od Jacobiego dzięki aktualizacji wartości w locie.
- Metoda LU jest dokładna, ale ma wysoką złożoność obliczeniową.
- Dla $a_1 = 3$ (kiedy macierz nie jest diagonalnie dominująca) metody iteracyjne zawodzą – konieczne jest użycie metod bezpośrednich.

7 Bibliografia

- Wózr Metoda Jacobiego
- Wzór Metoda Gaussa-Seidla
- Wzór Metoda LU
- Zbieżność metody Gauss–Seidel