

Matemática IV- 2018

TP1 - Números

1. Analizar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

- (a) $z \in Z \leftrightarrow 2z \in Z$
- (b) $z \in Z \leftrightarrow -z \in N$
- (c) $z \in Z \leftrightarrow z^2 \in Z$
- (d) $z \in Z \leftrightarrow z^2 = 1 \in Z$
- (e) $z \in N \leftrightarrow z^2 \in N$
- (f) $z \in N \leftrightarrow -z \notin N$
- (g) $z \in N \leftrightarrow 2z \in N$
- (h) $z \in N \leftrightarrow z + 1 > 0$

2. (a) ¿Qué enteros z , $-10 \leq z \leq 10$ se escriben en la forma $4m + 1$, para algún $m \in Z$?
Idem para $4m - 1$
- (b) ¿Qué enteros z , $-10 \leq z \leq 10$ se escriben en la forma $4m + 3$, , para algún $m \in Z$? y $4m - 3$?
- (c) ¿Hay números enteros z que puedan escribirse en la forma $4m + 1$ y $4t + 3$ simultáneamente?
- (d) Probar que no hay enteros simultáneamente pares e impares

3. Demostrar las siguientes propiedades para a, b, c números enteros :

- (a) $a|a$
- (b) $1|a$ y $a|0$
- (c) Si $a|b$ entonces $a|-b$; $-a|b$ y $-a|-b$
- (d) $a(a + 1)$ es par
- (e) $a|b$ y $b|c$ entonces $a|c$
- (f) $a|b$ entonces $a|bc$
- (g) $a|b$ y $a|c$ entonces $a|b + c$
- (h) $a|b + c$ y $a|b$ entonces $a|c$

4. Analizar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

- (a) $a|b$ y $b|a$ entonces $|a| = |b|$
- (b) $a|bc$ entonces $a|b$ ó $a|c$
- (c) $a|b$ y $c|b$ entonces $ac|b$
- (d) $a|b + c$ entonces $a|c$ ó $a|b$
- (e) $a|b$ y $b \neq 0$ entonces $|a| \leq |b|$

5. Sean a y b dos números enteros que tienen restos 4 y 7 respectivamente en la división por 11. Hallar los restos de la división por 11 de los siguientes enteros:
 - (a) $3a$
 - (b) $a + b^2$
6. Calcular el máximo común divisor entre:
 - (i) (16, 38) (ii) (120, 50) (iii) (31, 57) (iv) (120, 245) (v) (9834, 1430)
 - (vi) (-60, 45) (vii) (187, 77) (viii) (-187, 77)
7. Probar que si a y b son enteros:
 - (a) $(a, 1) = 1$
 - (b) si a es no nulo, $(a, 0) = |a|$
 - (c) $(a, a) = |a|$
 - (d) si a y b son no nulos, $1 \leq (a, b) \leq \min(|a|, |b|)$
8. Si a un número se lo divide por 4, el resto es 2 y si se lo divide por 3, el resto es 1. ¿Cuál es el resto si se lo divide por 12 ?
9. Probar que para cualquier a entero se cumple que a y $a + 1$ son coprimos
10. Sean a y b dos enteros coprimos, demostrar que :
 - (a) Si $(a, b) = d$; $a|c$ y $b|c$ entonces $ab|cd$
 - (b) $a + b$ es coprimo con a
 - (c) $a + b$ y ab son coprimos
 - (d) $a|c$ y $b|c$ entonces $ab|c$
11. Si p es primo, calcular (a, p) para cualquier $a \in \mathbb{Z}$
12. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ y sea p primo. Demostrar que si $p|ab$ entonces $p|a$ ó $p|b$
Mostrar que ésto no se cumple si p no es primo.
13. Sean u y v números racionales. Probar que:
 - (a) $u + v \in \mathbb{Q}$ y $u - v \in \mathbb{Q}$
 - (b) $u \cdot v \in \mathbb{Q}$
 - (c) Si u es no nulo, $u^{-1} \in \mathbb{Q}$
14. Demostrar que dados a y b en \mathbb{Q} tales que $a < b$, existe otro número racional x tal que $a < x < b$.

15. Dados $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, suponiendo que los denominadores no se anulen y que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ no es cero, probar:
- $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ y $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$
 - $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ y $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$
 - $\frac{a+c}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$
 - $\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}$
16. Probar que no existe un número racional cuyo cuadrado sea 2
17. Demostrar que si p es primo y $n \in \mathbb{N}$, entonces \sqrt{np}
18. Escriba en la forma binómica los siguientes números:
- $\sqrt{-49}$; b) $\sqrt{-20}$; c) $\sqrt{-\frac{9}{16}}$
19. Encuentre el conjugado de los siguientes números:
- $$z_1 = -8 + 15i; \quad z_2 = 5 - 7i; \quad z_3 = 5i; \quad z_4 = 9; \quad z_5 = m + ni;$$
20. Indique la parte real $\text{Re}(z)$ y la parte imaginaria $\text{Im}(z)$ de los siguientes complejos:
- $z = -8 + 15i$ b) $z = 7$
 - $z = (3 + i) + (5 - 4i)$ d) $z = 3i - (5 - 2i)$
21. La suma de un número complejo y su conjugado es -8 y la suma de sus módulos es 10. De qué números complejos se trata?
22. La suma de dos números complejos es 6, el módulo del primero es $\sqrt{13}$ y el del segundo es 5. De qué números complejos se trata?
23. Expresar los siguientes números complejos en forma binómica :
- $\frac{1+3i}{3-i}$ b) $\frac{1-i}{(1+i)^2}$ c) $\frac{2-5i}{4+2i}$
24. Encuentre x e y tales que:
- $x - 15i = 9 + 5yi$; b) $2x + 3yi = 6 + yi$; c) $\frac{x+2i}{1-i} + yi = 1$
25. Encontrar el valor de k para que el complejo $\frac{2-(1+k)i}{1-ki}$ sea un número real.
26. Encontrar el valor de h para que el complejo $\frac{1+3hi}{7+(h-2)i}$ sea un imaginario puro.

27. Graficar en el plano complejo:

- a) $\{z \in C : |z| = 1\}$ b) $\{z \in C : |z - (3 + 4i)| = 2\}$ c) $\{z \in C : |z + 5| \leq 1\}$
d) $\{z \in C : |z - 2i| \geq 3\}$ e) $\{z \in C : \text{Im}(z) \geq 3\}$ f) $\{z \in C : \text{Re}(z) = 2\}$
g) $\{z \in C : |z - (-1 + i)| \leq 2 \& \text{Im}(z) \leq 0\}$ h) $\{z \in C : |z + i| \geq 4 \& \text{Re}(z) \geq 4\}$

28. Calcular las siguientes potencias:

- a) i^{489} b) $-i^{1026}$ c) i^{2051} d) i^{628} e) $(3i)^{68}$ f) $(-5i)^{128}$ g) $(15i)^{1024}$

29. Encontrar las formas de par ordenado, trigonométrica y exponencial de los siguientes complejos en forma binómica:

- $z_1 = 3 + 3i$ $z_2 = -1 + i$ $z_3 = 5 + 4i$ $z_4 = 9$ $z_5 = 5i$ $z_6 = -7$
 $z_7 = -4 - 4i$ $z_8 = -8i$ $z_9 = 2 - 2i$ $z_{10} = 3 - 4i$

30. Realizar las siguientes operaciones con los complejos del punto anterior:

- a) $z_1 + z_7$ b) $z_5 - z_3$ c) $z_9 \cdot z_6$ d) z_8 / z_{10} e) $z_3 + z_6$ f) $z_2 - z_6$
g) $z_3 \cdot z_{10}$ h) z_1^3 i) z_9^9 j) z_5^{15} k) z_{10}^3
l) hallar las raíces cuartas de z_2
m) hallar las raíces cúbicas de z_4
n) hallar las raíces séptimas de z_8
ñ) hallar las raíces cúbicas de z_5
o) hallar las raíces quintas de z_6
p) hallar las raíces séptimas de i