Zeitparadoxon in der Quantengravitation

Clemens Kerschbaumer

22. Mai 2014

1 Überblick über mathematische Konzepte der Differentialgeometrie

Definition 1. *Definition: Eine Teilmenge $S \subset \mathbb{R}^n$ ist eine (eingebettete) Manigfaltigkeit, wenn für jedes $p \in S$ gilt: $\exists V \subset \mathbb{R}^n$ und ein Diffeomorphismus $\boldsymbol{x} : U \to V \cap S$, wobei $U \subset \mathbb{R}^m,\ m < n$.*

Eine eingebettete Manigfaltigkeit heißt Hyperebene (im folgenden bezeichnet Σ immer eine Hyperebene), falls die die Dimension $m = n - 1$. Auf solchen Hyperebene lässt sich die Abbildung (Weingartenabbildung)

$$\begin{aligned} L:\ T_p(\Sigma) &\to T_p(\Sigma) \\ v &\mapsto \nabla_v n \end{aligned}$$

definieren, welche bis auf Vorzeichenwahl des Normalvektors eindeutig ist. ∇_v bezeichnet hierbei die kovariante Ableitung des Umgebungsraumes.

Proposition 1. *Proposition: L ist sebstadjungiert (d.h. für ein inneres Produkt definiert im Umgebungsraum $\mathbb{R}^n$, gilt $\forall u, v \in \mathbb{R}^n : \langle u, L(v)\rangle = \langle L(u), v\rangle$)*

Die Definition der Weingartenabbildung und die damit verbundene Eigenschaft legen die Definition einer neuen Größe nahe. Intuitiv lässt sich die Krümmung einer Fläche messen, indem man die Änderungsrate der Tangentialebene (oder equivalent, des Normalenvectors misst). Mathematisch lässt sich das mittels der Weingartenabbildung ausdrücken:

$$\begin{aligned} K:\ T_p(\Sigma) \times T_p(\Sigma) &\to \mathbb{R} \\ (v, u) &\mapsto -\langle v, L(u)\rangle. \end{aligned}$$

Im folgenden wird oft die einsteinsche Summenkonvention angewandt, was die Wahl einer Basis notwendig macht. In der Standardbasis ergibt sich daher für die Krümmung $K_{ij} = K(e_i, e_j)$. Desweiteren wird die Notation $\nabla_i := \nabla_{e_i}$ genützt werden.

Nun lässt sich die kovariante Ableitung, definiert auf der Hyperebene, mit der kovarianten Ableitung des Umgebungsraumes in Beziehung bringen. Offensichtlich lässt sich der Tangentialraum $T_p(\mathbb{R}^n)$ des Einbettungsraumes, schreiben als direkte Summe:

$$T_p(\mathbb{R}^n) = \mathrm{span}(n) \oplus T_p(\Sigma). \tag{1}$$

Die kovariante Ableitung auf der Hyperebene ist definiert als die Projektion der kovarianten Ableitung des Umgebungsraumes auf die Tangentialräume des Hyperraumes ${}^{(3)}\nabla := P \circ \nabla$, wobei

$$\begin{aligned} P:\ T_p(\mathbb{R}^n) &\to T_p(\Sigma) \\ v &\mapsto v - |\langle v, n\rangle| n. \end{aligned}$$

Satz 1. *Gauss-Weingarten Gleichungen:*

$$\nabla_i e_j = -K_{ij} n + {}^{(3)}\Gamma^k_{ij} e_k. \tag{2}$$

Beweis. Aus der Leibnizregel ($\nabla_i\langle v, n\rangle = \langle v, \nabla_i n\rangle + \langle \nabla_i v, n\rangle$) und der Orthogonalität von v und n folgt

$$\langle v, \nabla_i n\rangle = -\langle \nabla_i v, n\rangle$$

was man zusammen mit Definition der Krümmung K_{ij} die Behauptung bestätigt:

$$\begin{aligned} ({}^{(3)}\nabla_i e_j)^\mu &= P^\mu_\nu \nabla_i \delta^\nu_j = (\delta^\mu_\nu + n^\mu n_\nu)\nabla_i \delta^\mu_j = \\ &= (\nabla_i e_j)^\mu + n^\mu n_\nu \nabla_i e^\nu_j = (\nabla_i e_j)^\mu - n^\mu e^\nu_j \nabla_i n_\nu = (\nabla_i e_j - nK_{ij})^\mu. \end{aligned}$$

□

Damit lässt sich folgender Satz beweisen:

Satz 2. *Gauss-Codazzi Gleichungen:*

$$R^0{}_{ijk} = {}^{(3)}\nabla_j K_{ik} - {}^{(3)}\nabla_k K_{ji} \tag{3}$$

$$R_{mijk} = -(K_{ij}K_{mk} - K_{ik}K_{mj}) + {}^{(3)}R_{mijk} \tag{4}$$

Beweis. Mithilfe des vorherigen Lemmas ergibt sich:

$$\begin{aligned} \nabla_i \nabla_j e_k &= \nabla_i (K_{jk} n + {}^{(3)}\Gamma^m_{jk} e_m) = \\ &= K_{jk,i} n + K_{jk} \nabla_i n + {}^{(3)}\Gamma^m_{jk,i} e_m + {}^{(3)}\Gamma^m_{jk} \nabla_i e_m = \\ &= K_{jk,i} n + K_{jk} K_i{}^m e_m + {}^{(3)}\Gamma^m_{jk,i} e_m + {}^{(3)}\Gamma^m_{jk} (K_{im} n + {}^{(3)}\Gamma^l_{im} e_l) = \\ &= (K_{jk,i} + {}^{(3)}\Gamma^m_{jk} K_{im}) n + (K_{jk} K_i{}^l + {}^{(3)}\Gamma^l_{jk,i} + {}^{(3)}\Gamma^m_{jk}\,{}^{(3)}\Gamma^l_{im}) e_l. \end{aligned}$$

Eingesetzt in die Definition des Riemanntensors ergibt sich:

$$\begin{aligned} R^\alpha{}_{ijk} e_\alpha =& \nabla_i \nabla_j e_k - \nabla_j \nabla_i e_k = \\ =& (K_{jk,i} + {}^{(3)}\Gamma^m_{jk} K_{im} - K_{ik,j} - {}^{(3)}\Gamma^m_{ik} K_{jm}) n + \\ &+ (K_{jk} K_i{}^m - K_{ik} K_j{}^m + {}^{(3)}R^m{}_{ijk}) e_m, \end{aligned}$$

wobei benutzt wurde, dass

$${}^{(3)}R^m{}_{ijk} = {}^{(3)}\Gamma^m_{jk,i} - {}^{(3)}\Gamma^m_{ik,j} + {}^{(3)}\Gamma^l_{jk} {}^{(3)}\Gamma^m_{il} - {}^{(3)}\Gamma^l_{ik} {}^{(3)}\Gamma^m_{jl}.$$

Aus der Orthogonalität der e_α folgt direkt:

$$\begin{aligned} R^0{}_{ijk} &= K_{jk,i} + {}^{(3)}\Gamma^m_j k K_{im} - K_{ik,j} - {}^{(3)}\Gamma^m_{ik} K_{jm} = {}^{(3)}\nabla_i K_{jk} - {}^{(3)}\nabla_j K_{ik} \\ R^m{}_{ijk} &= K_{jk} K_i{}^m - K_{ik} K_j{}^m + {}^{(3)}R^m{}_{ijk} \end{aligned}$$

□

Für nähere Informationen zu klassischer Differentialgeometrie von Flächen, siehe [2].

2 Retrospektive: Klassische Feldtheorie

In der klassischen Feldtheorie übernehmen, die in der klassischen klassischen Mechanik mittels Indizes durchnummerierten verallgemeinerten Koordinaten, glatte Felder, wobei die Rolle der Indizes durch Raumzeitpunkte abgelöst wird. Anstatt der Summe über alle i in der Lagrangefunktion schreibt man ein Raumintegral über eine Lagrangedichte, über die wiederum die Wirkung angegeben werden kann:

$$S[\varphi, t] = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, t). \tag{5}$$

Variation des Feldes liefert die Euler-Lagrangegleichung für Felder:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0. \tag{6}$$

Analog zum klassischen Fall, kann man die Impulsdichte wie folgt definieren

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}, \tag{7}$$

was direkt – über Legendretransformation – zur Hamiltondichte führt:

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\varphi} - \mathcal{L} \tag{8}$$

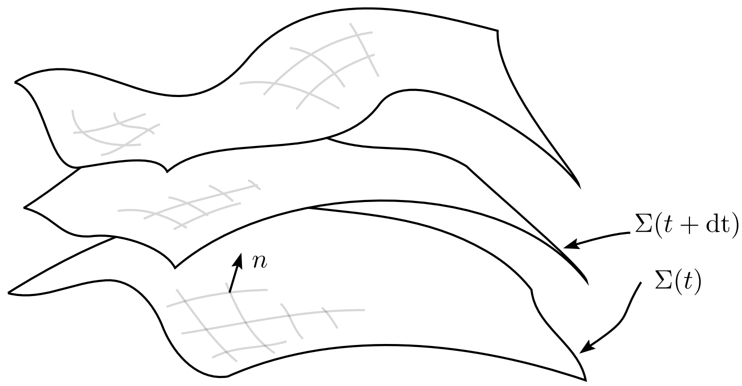

Abbildung 1: Schematische Darstellung der Zerlegung der Raumzeit in Hyperebenen

3 ADM-Formalismus

Der ADM-Formalismus[?, ?] (oft auch 3+1-Formalismus) bezieht sich auf die Formulierung der allgemeinen Relativitätstheorie indem die Raumzeit in dreidimensionale raumartige Hyperebenen unterteilt wird. Anders ausgedrückt, lassen sich die raumartigen Hyperebenen mittels eines Zeitparameters “durchwandern”:

$$M = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \Sigma(t). \tag{9}$$

Eine Bemerkung zu dieser Zerlegung: Um die Existenz zu garantieren, muss vorausgesetzt werden, dass sich M in jedem Punkt zeitordnen lässt. Etwa zeitzyklische Universen, wie etwas das Gödeluniversum, können mit diesem Formalismus nicht abgebildet werden.

Zur Beschreibung der dynamischen Phänomene ist es zuerst notwendig eine günstige Darstellung der Metrik zu finden. Dazu wählt man die Länge des Linienelements ds wie folgt:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\,(\text{Zeitartiger Abstand})^2 + (\text{Raumartiger Abstand})^2 = \\ &= -\,N^2 dt^2 + q_{ij}(dx^i + N^i dt)(dx^j + N^j dt). \end{aligned} \tag{10}$$

Als Matrix lässt sich die allgemeine Metric g mittels N, N^i und q_{ij} schreiben als

$$[g] = \begin{pmatrix} -N^2 + q_{ij}N^iN^j & q_{1j}N^j & q_{2j}N^j & q_{3j}N^j \\ q_{1j}N^j & q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{2j}N^j & q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{3j}N^j & q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix} \tag{11}$$

3.1 Einstein-Hilbert Wirkung und Hamiltonzwangsbedingung

Wie Hilbert zeigen konnte, lässt sich für die einstein'schen Feldgleichungen eine Lagrangedichte angeben, womit die Wirkung angegeben werden kann:

$$S_{EH} = \frac{1}{16\pi G} \int_M \mathrm{d}^4 x \sqrt{-g} R \tag{12}$$

wobei $g = \det(g)$ und R den Ricci-Skalar bezeichnet. S_{EH} lässt sich nun als Funktional auf Lagrangefunktionen mit den Argumenten N, N^i und q_{ij} umschreiben.

Der aufmerksame Beobachter, stellt fest, dass die erste Spalte der Matrixdarstellung von g aus (11) aus Summen vielfachen der anderen 3 Spalten geschrieben werden kann, nämlich – $[g_i]$ sei die i-te Spalte, wobei von 0 begonnen wird zu zählen – wie folgt:

$$[g_0] = \begin{pmatrix} -N^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + N^i [g_i]. \tag{13}$$

Aufgrund elementarer Eigenschaften der Determinante gilt offensichtlich:

$$g = \det(g) = \det \begin{pmatrix} -N^2 & q_{1j}N^j & q_{2j}N^j & q_{3j}N^j \\ 0 & q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ 0 & q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ 0 & q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix} = -N^2 \det(q). \tag{14}$$

Als nächsten Schritt gilt es, den Ricci-Skalar in den neuen Argumenten auszudrücken. Aus den Gauss-Codazzi Gleichungen folgt unmittelbar

$$R = {}^{(3)}R + \mathrm{Tr}(K)^2 - K^{ij} K_{ij}.$$

Die Lagrangedichte ist somit $\mathcal{L} = \frac{1}{16\pi G} N \sqrt{h} ({}^{(3)}R + \mathrm{Tr}(K)^2 - K^{ij} K_{ij})$.

Daraus ergibt sich die Hamiltondichte, wobei

$$\pi_{ij} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t q_{ij})}. \tag{15}$$

Ignorieren der Randterme führt schließlich zum Ausdruck

$$S_{EH} = \int \mathrm{d}t \int_\Sigma \mathrm{d}^3 x (\pi^{ij} \partial_t q_{ij} - N H_\perp - N^i H_i). \tag{16}$$

Man erkennt sofort, dass diese Funktion nicht abhängig von $\partial_t N$ und $\partial_t N^i$ ist, womit die Ableitungen der der Hamiltonfunktion nach N und N^i konstant entlang der gewählten Zeitentwicklung bleiben. Konkret sind die Größen

$$H_\perp := 16\pi G G_{ijkl} \pi^{ij} \pi^{kl} - \frac{1}{16\pi G} \sqrt{q} {}^{(3)}R = 0 \tag{17}$$

$$H^i := -2 {}^{(3)}\nabla_j \pi^{ij} = 0 \tag{18}$$

zeitinvarianten darstellen. Erstere wird super-Hamilonzwangsbedingung (im Englischen „super-hamiltonian constraint“) und zweitere super-Impulszwangsbedingung (im Englischen „super-momentum constraint“) genannt. Mit der üblichen Poissonklammern für q_{ij} und π_{ij},

$$\{q_{ij}(\vec{x}), \pi^{kl}(\vec{x}\,')\} = \delta^k_{(i}\delta^l_{j)}\delta(\vec{x} - \vec{x}\,'), \tag{19}$$

kann gezeigt werden [1, ?], dass die Zwangsbedingungen die Kommutatorrelationen

$$\{H_i(\vec{x}), H_j(\vec{x}\,')\} = H_i(\vec{x}\,')\partial_j\delta(\vec{x} - \vec{x}\vec{x}\,') - H_j(\vec{x})\partial\vec{x}_i'\delta(\vec{x} - \vec{x}\vec{x}\,') \tag{20}$$

$$\{H_i(\vec{x}), H_\perp(\vec{x}\,')\} = H_\perp(\vec{x})\partial_j\delta(\vec{x} - \vec{x}\,') \tag{21}$$

$$\{H_i(\vec{x}), H_\perp(\vec{x}\,')\} = q^{ij}(\vec{x})H_i(\vec{x})\partial_j'\delta(\vec{x} - \vec{x}\,') - q^{ij}(\vec{x}\,')H_i(\vec{x}\,')\partial_j\delta(\vec{x} - \vec{x}\,') \tag{22}$$

erfüllen [?].

3.2 Tieferliegende Rolle der Zwangsbedingungen

Es stellt sich heraus, dass die Zwangsbedingungen eine äußerst wichtige Rolle in der Entwicklung eines Systems spielen. Tatsächlich enthalten sie die selbe dynamische Information wie die einsteinschen Feldgleichungen, wie folgender Satz zeigt [?].

Satz 3. *Eine Lorentzmetrik q erfüllt die einsteinschen Feldgleichungen genau dann, wenn die Zwangsbedingungen (??-??) erfüllt sind.*

Beweis. tba. □

4 Kanonische Quantisierung

4.1 Allgemeine Wiederholung

Bei der kanonischen Quantisierung geht man von einer Lagrangedichte für ein Feld aus, und erhebt die klassischen reelen Funktionen $\phi(x)$ und $\pi(x)$ in den Rang von Operatoren.
Ohne zu tief in die Materie eintauchen zu wollen, ist es als Beispiel aber nichtsdestoweniger hilfreich sich den Fall eines freien skalaren Feldes zu Gemüte zu führen.

Die Langrangedichte für ein solches Feld lautet

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - m^2\varphi^2) \tag{23}$$

Um mit den Feldoperatoren in einem vernünftigen Rahmen rechnen zu können ist es notwendig zu wissen wie, verschiedene Operatoren mitteinander in

Beziehung stehen. Das gelingt indem man Kommutatorrelationen angiebt. Diese verallgemeinern sich auf natürliche (kanonische) Weise zu

$$[\varphi(\vec{x}), \varphi(\vec{y})] = 0 = [\pi(\vec{x}), \pi(\vec{y})] \tag{24}$$

$$[\varphi(\vec{x}), \pi(\vec{y})] = i\delta(\vec{x} - \vec{y}). \tag{25}$$

Eine Bemerkung zu Fällen, in denen die Ableitung der Felder auftritt: Hier ist es natürlich notwendig das Konzept der Ableitung auch entsprechend zu verallgemeinern. Das wird mithilfe der funktionalen Ableitung erreicht (siehe Fréchet Ableitung bzw. Gâteaux Ableitung).

4.2 Kanonische Quantisierung der Gravitation

tba.

5 Problem der Zeit in der Quantengravitation

Um nicht zu weit Abzuschweifen, muss in diesem Kapitel auf tieferliegende mathematische Begründungen leider verzichtet werden. Für weiterführende Referenzen siehe [**?**, **?**].

Wie bereits in vorherigem Abschnitt beobachtet, kommen in der Wheeler-DeWitt Gleichung keine expliziten Zeitabhängigkeiten vor. Natürlich ist das nicht überraschend, da bereits in der klassischen Version offensichtlich keine Zeit in den Zwangsbedingungen auftritt – es wurden ja nur Funktionen mit Operatoren ersetzt – führt aber dennoch zur konzeptuell unterschiedlichen Zeitinterpretationen, nämlich, dass man der Zeit entweder vor oder nach der Quantisierung Bedeutung schenkt. Diese Entscheidungsfreiheit charakterisiert die ersten beiden Auslegungen. In der dritte der gängigen Anschauungen auf das Problem der Zeit wird die Zeit von ihrer bisherigen Sonderstellung enttront und es wird ihr nur noch die Bedeutung einer phänomenologischen Erscheinung zugeteilt. Dies manifestiert sich in ansich zeitlosen Theorien.

In den folgenden Unterabschnitten werden Beispiele für diese Interpretationen genannt und die darin auftretenden Vor- und Nachteile kurz besprochen.

5.1 Identifikation der Zeit vor der Quantisierung

Die erste Möglichkeit, das Problem der Zeit zu behandeln ist die Identifikation der Zeit als Funktional von q_{ij} und π_{ij} vor der Quantisierung. Eine der Realisierungen ist beispielsweise die Implementierung des Zeitbegriffs via „Matter Clocks“ und „Reference Fluids“ [**?**, **?**]. tba.

5.2 Identifikation der Zeit nach der Quantisierung

5.3 Zeitfreie Theorien

Literatur

[1] P.A.M. Dirac. *Lectures on Quantum Mechanics*. Belfer Graduate School of Science, monograph series. Dover Publications, 2001.

[2] Manfredo Perdigao do Carmo. *Differential geometry of curves and surfaces*. Prentice-Hall, 1 edition, 1976.