



Das Problem der Zeit in der Quantengravitation

Teil 1: Vorbereitungen und allgemeine Betrachtungen

27. Mai 2014

Überblick

Mathematische Konzepte der Differentialgeometrie

- Mannigfaltigkeiten

- Metrik

- Kovariante Ableitung

- Krümmung

Feldtheorien und ADM-Formalismus

- Rückblick: klassische Feldtheorien

- ADM-Formalismus

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡



Mannigfaltigkeit

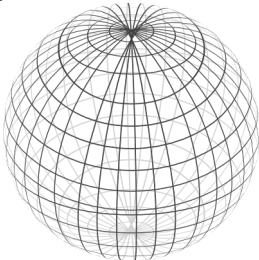
Eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit ist Menge M , die lokal die selbe Struktur wie \mathbb{R}^n .

Beispiel:

Mannigfaltigkeit

Eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit ist Menge M , die lokal die selbe Struktur wie \mathbb{R}^n .

Beispiel:

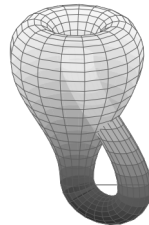
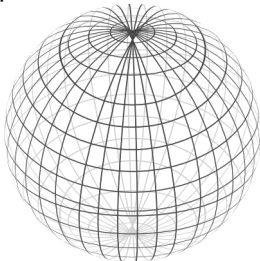




Mannigfaltigkeit

Eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit ist Menge M , die lokal die selbe Struktur wie \mathbb{R}^n .

Beispiel:



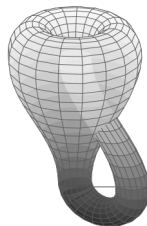
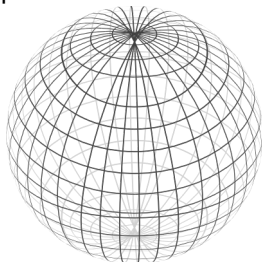
- M Teilmenge in höherdim. Raum mit Dimension m :
 M is eingebettet.



Mannigfaltigkeit

Eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit ist Menge M , die lokal die selbe Struktur wie \mathbb{R}^n .

Beispiel:



- ▶ M Teilmenge in höherdim. Raum mit Dimension m :
 M ist eingebettet.
- ▶ Dimension von M gleich $m - 1$:
 M ist eine Hyperfläche

Metrik

allgemeine Formulierung für einen Distanzbegriff
Entfernung zwischen zwei Punkten hängt von der „Form“ ab.

Metrik

allgemeine Formulierung für einen Distanzbegriff

Entfernung zwischen zwei Punkten hängt von der „Form“ ab.

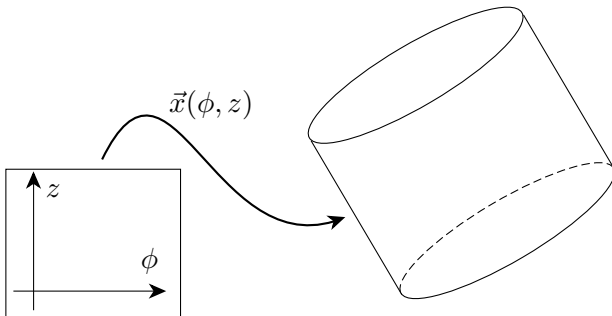
→ Charakterisierung mittels Metriktensors g :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1)$$

Länge einer Kurve:

$$\int ds = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{g_{\mu\nu} dx(t)^\mu dx(t)^\nu} \quad (2)$$

Beispiel: Zylinder



Metriktenor für diese Beispiel: $g = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Kovariante Ableitung

Betrachten Ableitungsbegriff für eingebettete Flächen in \mathbb{R}^3 :

- Benötigen Differentiationsbegriff, der die Deformiertheit der Mannigfaltigkeit berücksichtigt.

Kovariante Ableitung

Betrachten Ableitungsbegriff für eingebettete Flächen in \mathbb{R}^3 :

- ▶ Benötigen Differentiationsbegriff, der die Deformiertheit der Mannigfaltigkeit berücksichtigt.
- ▶ Für Skalarfelder ist die klassische Definition ausreichend. Für Vektoren und Tensoren aber nicht! → Wollen, dass Ableitung „nur in der Ebene wirkt“

Kovariante Ableitung

Betrachten Ableitungsbegriff für eingebettete Flächen in \mathbb{R}^3 :

- ▶ Benötigen Differentiationsbegriff, der die Deformiertheit der Mannigfaltigkeit berücksichtigt.
- ▶ Für Skalarfelder ist die klassische Definition ausreichend. Für Vektoren und Tensoren aber nicht! → Wollen, dass Ableitung „nur in der Ebene wirkt“

Tangentialraum ($T_p(M)$): Vektorraum an jedem Punkt der Mannigfaltigkeit

- ▶ Für eindimensionale Kurve: Alle Vielfache des Tangentenvektors
- ▶ Für Fläche: Linearkombinationen von 2 Tangentenvektoren

Tangentialraum ($T_p(M)$): Vektorraum an jedem Punkt der Mannigfaltigkeit

- ▶ Für eindimensionale Kurve: Alle Vielfache des Tangentenvektors
- ▶ Für Fläche: Linearkombinationen von 2 Tangentenvektoren

Wir wollen mit der Ableitung sozusagen nicht aus dem Tangentialraum ausbrechen:

→ Wähle Projektion der normalen Ableitung



Situation für zweidimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeiten:

- Ableiten eines Vektors $\vec{y} = a\vec{x}_u + b\vec{x}_v$ entlang Kurve

Situation für zweidimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeiten:

- ▶ Ableiten eines Vektors $\vec{y} = a\vec{x}_u + b\vec{x}_v$ entlang Kurve
- ▶ Identifizieren der Vektoren \vec{x}_{uu} , \vec{x}_{uv} und \vec{x}_{vv} :

$$\vec{x}_{uu} = \Gamma_{11}^1 \vec{x}_u + \Gamma_{11}^2 \vec{x}_v + L_1 \vec{n}$$

$$\vec{x}_{uv} = \Gamma_{12}^1 \vec{x}_u + \Gamma_{12}^2 \vec{x}_v + L_2 \vec{n}$$

$$\vec{x}_{vv} = \Gamma_{22}^1 \vec{x}_u + \Gamma_{22}^2 \vec{x}_v + L_3 \vec{n}$$

Situation für zweidimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeiten:

- ▶ Ableiten eines Vektors $\vec{y} = a\vec{x}_u + b\vec{x}_v$ entlang Kurve
- ▶ Identifizieren der Vektoren \vec{x}_{uu} , \vec{x}_{uv} und \vec{x}_{vv} :

$$\vec{x}_{uu} = \Gamma_{11}^1 \vec{x}_u + \Gamma_{11}^2 \vec{x}_v + L_1 \vec{n}$$

$$\vec{x}_{uv} = \Gamma_{12}^1 \vec{x}_u + \Gamma_{12}^2 \vec{x}_v + L_2 \vec{n}$$

$$\vec{x}_{vv} = \Gamma_{22}^1 \vec{x}_u + \Gamma_{22}^2 \vec{x}_v + L_3 \vec{n}$$

- ▶ In Ableitung einsetzen

Ignorieren der Normalkomponenten:

$$\begin{aligned} \frac{D\vec{y}(t)}{dt} = \nabla_{\vec{y}(t)} v(t) := & (\dot{a} + \Gamma_{11}^1 a^2 + \Gamma_{12}^1 ab + \Gamma_{22}^1 b^2) \vec{x}_u + \\ & + (\dot{b} + \Gamma_{11}^2 a^2 + \Gamma_{12}^2 ab + \Gamma_{22}^2 b^2) \vec{x}_v. \end{aligned}$$

Ignorieren der Normalkomponenten:

$$\begin{aligned} \frac{D\vec{y}(t)}{dt} = \nabla_{\vec{y}(t)} v(t) := & (\dot{a} + \Gamma_{11}^1 a^2 + \Gamma_{12}^1 ab + \Gamma_{22}^1 b^2) \vec{x}_u + \\ & + (\dot{b} + \Gamma_{11}^2 a^2 + \Gamma_{12}^2 ab + \Gamma_{22}^2 b^2) \vec{x}_v. \end{aligned}$$

oder in kompakter Notation mit Koordinatenachsen als
Ableitungsrichtungen:

$$\nabla_\mu v^\nu = \partial_\mu v^\nu + \Gamma_{\rho\mu}^\nu v^\rho.$$

Ignorieren der Normalkomponenten:

$$\begin{aligned}\frac{D\vec{y}(t)}{dt} = \nabla_{\vec{y}(t)} v(t) := & (\dot{a} + \Gamma_{11}^1 a^2 + \Gamma_{12}^1 ab + \Gamma_{22}^1 b^2) \vec{x}_u + \\ & + (\dot{b} + \Gamma_{11}^2 a^2 + \Gamma_{12}^2 ab + \Gamma_{22}^2 b^2) \vec{x}_v.\end{aligned}$$

oder in kompakter Notation mit Koordinatenachsen als
Ableitungsrichtungen:

$$\nabla_\mu v^\nu = \partial_\mu v^\nu + \Gamma_{\rho\mu}^\nu v^\rho.$$

Christoffelsymbole: $\Gamma_{\nu\rho}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} (\partial_\rho g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\sigma\rho} - \partial_\sigma g_{\nu\rho})$

Krümmung

Zwei zentrale Begriffe:

- **Intrinsische Krümmung:**

Unabhängig vom Einbettungsraum – Zylinder hat die selbe intrinsische Krümmung wie eine Ebene

Krümmung

Zwei zentrale Begriffe:

- ▶ **Intrinsische Krümmung:**

Unabhängig vom Einbettungsraum – Zylinder hat die selbe intrinsische Krümmung wie eine Ebene

- ▶ **Extrinsische Krümmung:**

Abhängig von der Wahl der Einbettung – Zylinder ist gekrümmte Fläche im \mathbb{R}^3 , aber einfache Ebene nicht

Krümmung

Zwei zentrale Begriffe:

- ▶ **Intrinsische Krümmung:**

Angegeben über $R^\rho_{\sigma\mu\nu} \rightarrow$ Riemannscher Krümmungstensor

- ▶ **Extrinsische Krümmung:**

intuitiv: „Wie stark ändert sich ein Normalenvektor n in einer Umgebung um einen Punkt“

n existiert *nur*, wenn die Mannigfaltigkeit eingebettet ist!

Intrinsische Krümmung:

Lässt sich über die (intrinsischen) Christoffelsymbole angeben:

$$R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma^{\rho}{}_{\nu\sigma} - \partial_{\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\rho}{}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\rho}{}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\sigma} \quad (3)$$

Keine Beteiligung von einbettungsbezogenen Größen (wie etwa Normalvektoren!)



Extrinsische Krümmung:

Definiert auf Hyperebenen mit Normalvektor n :

Definition

Extrinsische Krümmung K :

$$K : T_p(\Sigma) \times T_p(\Sigma) \rightarrow \mathbb{R} \quad (4)$$

$$(v, u) \mapsto -\langle v, L(u) \rangle.$$

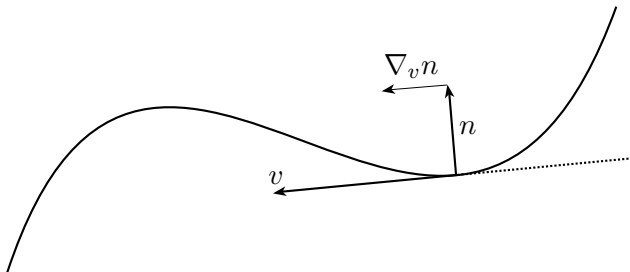
Wobei

$$L : T_p(\Sigma) \rightarrow T_p(\Sigma)$$

$$v \mapsto \nabla_v n$$

die Weingartenabbildung bezeichnet.

Extrinsische Krümmung:



Zusammenhang zwischen Größen der Hyperebene und des Umgebungsraumes (hier für 3-dimensionale Mannigfaltigkeit in 4-dimensionalem Umgebungsraum):

Gauss-Codazzi Gleichung:

$$P^\mu{}_\alpha P^\nu{}_\beta P^\gamma{}_\rho P^\sigma{}_\delta R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = {}^{(3)}R^\gamma{}_{\delta\alpha\beta} + K^\gamma{}_\alpha K_{\delta\beta} - K^\gamma{}_\beta K_{\alpha\delta} \quad (5)$$

Wobei P der Projektionsoperator auf den die Hyperfläche, R den Riemannschen Krümmungstensor des Umgebungsraumes und ${}^{(3)}R$ den Krümmungstensor der Hyperfläche bezeichnet.

A set of navigation icons typically found in Beamer presentations, including symbols for back, forward, search, and other slide controls.



Rückblick: klassische Feldtheorien

klassische Mechanik: generalisierte Koordinaten $q_i(t)$ beschreiben System

Feldtheorien: Anstatt den diskreten Indizes \rightarrow kontinuierliche Größen $\varphi(\vec{x}, t)$

Rückblick: klassische Feldtheorien

klassische Mechanik: generalisierte Koordinaten $q_i(t)$ beschreiben System

Feldtheorien: Anstatt den diskreten Indizes \rightarrow kontinuierliche Größen $\varphi(\vec{x}, t)$

Wirkung:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \mathcal{L} \quad (6)$$

\mathcal{L} ...Lagrangedichte

Aus dem Variationsprinzip ergibt sich **Euler-Lagrange**funktion für Felder:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0. \quad (7)$$

Aus dem Variationsprinzip ergibt sich **Euler-Lagrange**funktion für Felder:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0. \quad (7)$$

Hamiltondichte:

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\varphi} - \mathcal{L}, \quad (8)$$

mit generalisierter Impulsdichte: $\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}$

$$M = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \Sigma(t) \quad (9)$$

Ist nicht immer möglich: Hyperflächen müssen orientierbar sein und es dürfen keine Zeitzyklen auftreten

Metrik im ADM-Formalismus:

$$\begin{aligned} ds^2 &= - (\text{Zeitartiger Abstand})^2 + (\text{Raumartiger Abstand})^2 = \\ &= - N^2 dt^2 + q_{ij} (dx^i + N^i dt) (dx^j + N^j dt). \end{aligned} \quad (10)$$

Einstein-Hilbert Wirkung:

$$S_{EH} = \frac{1}{16\pi G} \int_M d^4x \sqrt{-g} R \quad (11)$$

Einstein-Hilbert Wirkung:

$$S_{EH} = \frac{1}{16\pi G} \int_M d^4x \sqrt{-g} R \quad (11)$$

Zusammen mit Gauss-Codazzi Gleichungen und der Metrik ergibt sich für den ADM-Formalismus:

$$S_{EH} = \frac{1}{16\pi G} \int_M d^4x N \sqrt{h} ({}^{(3)}R + \text{Tr}(K)^2 - K^{ij} K_{ij}) \quad (12)$$

Constraints: Mit den Definitionen

$$H_{\perp} := 16\pi G G_{ijkl} \pi^{ij} \pi^{kl} - \frac{1}{16\pi G} \sqrt{h} {}^{(3)}R = 0 \quad (13)$$

$$H^i := -2 {}^{(3)}\nabla_j \pi^{ij} = 0 \quad (14)$$

$$\pi_{ij} := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t h_{ij})} \quad (15)$$

ergibt sich

$$S_{EH} = \int dt \int_{\Sigma} d^3x (\pi^{ij} \partial_t h_{ij} - N H_{\perp} - N^i H_i)$$

wobei: $G_{ijkl} = \frac{1}{2\sqrt{h}} (h_{ik} h_{jl} + h_{jk} h_{il} - h_{ij} h_{kl})$

Die Constraints erfüllen:

$$H_{\perp} := 16\pi G G_{ijkl} \pi^{ij} \pi^{kl} - \frac{1}{16\pi G} \sqrt{h} {}^{(3)}R = 0 \quad (16)$$

$$H^i := -2 {}^{(3)}\nabla_j \pi^{ij} = 0 \quad (17)$$

und die Poissonklammerausdrücke:

$$\{H_i(\vec{x}), H_j(\vec{x}')\} = H_i(\vec{x}') \partial_j \delta(\vec{x} - \vec{x}') - H_j(\vec{x}) \partial_i \delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

$$\{H_i(\vec{x}), H_{\perp}(\vec{x}')\} = H_{\perp}(\vec{x}) \partial_i \delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

$$\begin{aligned} \{H_i(\vec{x}), H_{\perp}(\vec{x}')\} &= \\ &= h^{ij}(\vec{x}) H_i(\vec{x}) \partial'_j \delta(\vec{x} - \vec{x}') - h^{ij}(\vec{x}') H_i(\vec{x}') \partial_j \delta(\vec{x} - \vec{x}') \end{aligned}$$

Erstes Problem: h taucht explizit in Poissonklammerausdrücken auf!



Desweiteren besitzen die Constraints eine wichtige Eigenschaft:

Theorem

g erfüllt die Einsteingleichungen dann und nur dann wenn auf allen raumartigen Hyperflächen die Constraints (16-17) erfüllt sind.

Desweiteren besitzen die Constraints eine wichtige Eigenschaft:

Theorem

g erfüllt die Einsteingleichungen dann und nur dann wenn auf allen raumartigen Hyperflächen die Constraints (16-17) erfüllt sind.

super-Hamilton Constraint und super-Momentum Constraint besitzen vollständige dynamische Information des Systems!

Zusammenfassung:

- ▶ Bisher nur klassische Feldtheorie

Zusammenfassung:

- ▶ Bisher nur klassische Feldtheorie
- ▶ Wir haben einen Hamiltonformalismus der allgemein Relativitätstheorie abgeleitet



Zusammenfassung:

- ▶ Bisher nur klassische Feldtheorie
- ▶ Wir haben einen Hamiltonformalismus der allgemein Relativitätstheorie abgeleitet
- ▶ Der nächste Schritt: Quantisierung