# Das Problem der Zeit in der Quantengravitation

Teil 1: Vorbereitungen und allgemeine Betrachtungen

25. Mai 2014

# Überblick

# Mathematische Konzepte der Differentialgeometrie

# Mannigfaltigkeit

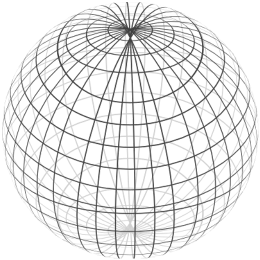
Eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit ist Menge $M$, die lokal die selbe Struktur wie $\mathbb{R}^n$.

Beispiel:

# Mannigfaltigkeit

Eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit ist Menge $M$, die lokal die selbe Struktur wie $\mathbb{R}^n$.

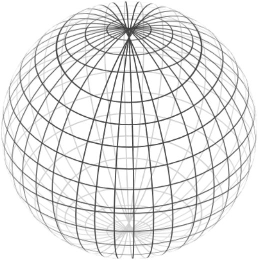
Beispiel:

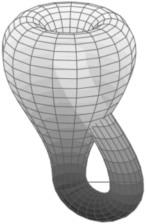


# Mannigfaltigkeit

Eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit ist Menge $M$, die lokal die selbe Struktur wie $\mathbb{R}^n$.

Beispiel:



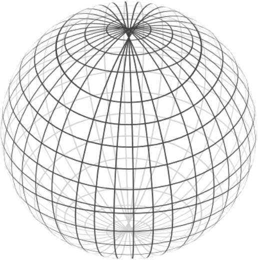


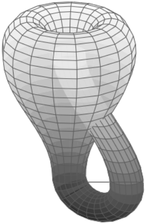
- $M$ Teilmenge in höherdim. Raum mit Dimension $m$: $M$ is eingebettet.

# Mannigfaltigkeit

Eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit ist Menge $M$, die lokal die selbe Struktur wie $\mathbb{R}^n$.

Beispiel:





- $M$ Teilmenge in höherdim. Raum mit Dimension $m$: $M$ is eingebettet.
- Dimension von $M$ gleich $m-1$: $M$ ist eine Hyperebene

# Metrik

allgemeine Formulierung für einen Distanzbegriff
Entfernung zwischen zwei Punkten hängt von der „Form“ ab.

# Metrik

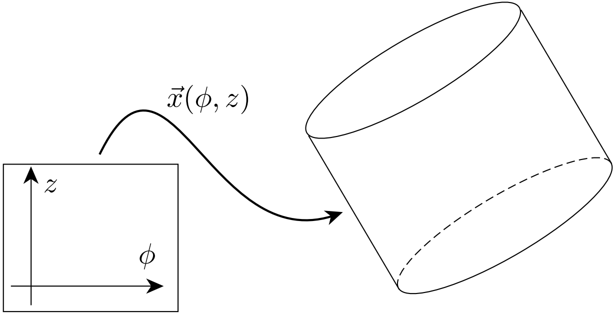
allgemeine Formulierung für einen Distanzbegriff
Entfernung zwischen zwei Punkten hängt von der „Form“ ab.
$\rightarrow$ Charakterisierung mittels Metriktensors $g$:

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu \tag{1}$$

Länge einer Kurve:

$$\int \mathrm{d}s = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \sqrt{g_{\mu\nu}\mathrm{d}x(t)^\mu \mathrm{d}x(t)^\nu} \tag{2}$$

# Beispiel: Zylinder




Metriktensor für diese Beispiel: $g = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

# Kovariante Ableitung

Betrachten Ableitungsbegriff für eingebettete Ebenen in $\mathbb{R}^3$:

- Benötigen Differentiatonsbegriff, der die Deformiertheit der Mannigfaltigkeit berücksichtigt.

# Kovariante Ableitung

Betrachten Ableitungsbegriff für eingebettete Ebenen in $\mathbb{R}^3$:

- Benötigen Differentiatonsbegriff, der die Deformiertheit der Mannigfaltigkeit berücksichtigt.
- Für Skalarfelder ist die klassische Definition ausreichend. Für Vektoren und Tensore aber nicht!$\rightarrow$ Wollen, dass Ableitung „nur in der Ebene wirkt“

# Kovariante Ableitung

Betrachten Ableitungsbegriff für eingebettete Ebenen in $\mathbb{R}^3$:

- Benötigen Differentiatonsbegriff, der die Deformiertheit der Mannigfaltigkeit berücksichtigt.
- Für Skalarfelder ist die klassische Definition ausreichend. Für Vektoren und Tensore aber nicht!$\rightarrow$ Wollen, dass Ableitung „nur in der Ebene wirkt“

Tangentialraum ($T_p(M)$): Vektorraum an jede Punkt der Mannigfaltigkeit

- Für eindimensionale Kurve: Alle vielfache des Tangentenvektors
- Für Fläche: Linearkombinationen von 2 Tangentenvektoren

Tangentialraum ($T_p(M)$): Vektorraum an jede Punkt der Mannigfaltigkeit

- Für eindimensionale Kurve: Alle vielfache des Tangentenvektors
- Für Fläche: Linearkombinationen von 2 Tangentenvektoren

Wir wollen mit der Ableitung sozusagen nicht aus dem Tangentialraum ausbrechen:

$\rightarrow$ Wähle Projektion der normalen Ableitung

Situation für zweidimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeiten:

- Ableiten eines Vektors $v = a\vec{x}_u + b\vec{x}_v$ entlang Kurve

Situation für zweidimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeiten:

- Ableiten eines Vektors $v = a\vec{x}_u + b\vec{x}_v$ entlang Kurve
- Identifzieren der Vektoren $\vec{x}_{uu},\ \vec{x}_{uv}$ und $\vec{x}_{vv}$:

$$\begin{aligned}
\vec{x}_{uu} &= \Gamma^1_{11}\vec{x}_u + \Gamma^2_{11}\vec{x}_v + L_1 n \\
\vec{x}_{uv} &= \Gamma^1_{12}\vec{x}_u + \Gamma^2_{12}\vec{x}_v + L_2 n \\
\vec{x}_{vv} &= \Gamma^1_{22}\vec{x}_u + \Gamma^2_{22}\vec{x}_v + L_3 n
\end{aligned}$$

Situation für zweidimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeiten:

- Ableiten eines Vektors $v = a\vec{x}_u + b\vec{x}_v$ entlang Kurve
- Identifzieren der Vektoren $\vec{x}_{uu},\ \vec{x}_{uv}$ und $\vec{x}_{vv}$:

$$\begin{aligned}
\vec{x}_{uu} &= \Gamma^1_{11}\vec{x}_u + \Gamma^2_{11}\vec{x}_v + L_1 n \\
\vec{x}_{uv} &= \Gamma^1_{12}\vec{x}_u + \Gamma^2_{12}\vec{x}_v + L_2 n \\
\vec{x}_{vv} &= \Gamma^1_{22}\vec{x}_u + \Gamma^2_{22}\vec{x}_v + L_3 n
\end{aligned}$$

- In Ableitung einsetzen

Ignorieren der Normalkomponenten:

$$\frac{\mathrm{D}v(t)}{\mathrm{d}t} = \nabla_{v(t)} v(t) := (\dot{a} + \Gamma^1_{11} a^2 + \Gamma^1_{12} ab + \Gamma^1_{22} b^2)\vec{x}_u + \\ + (\dot{b} + \Gamma^2_{11} a^2 + \Gamma^2_{12} ab + \Gamma^2_{22} b^2)\vec{x}_v.$$

Ignorieren der Normalkomponenten:

$$\frac{\mathrm{D}v(t)}{\mathrm{d}t} = \nabla_{v(t)} v(t) := (\dot{a} + \Gamma^1_{11} a^2 + \Gamma^1_{12} ab + \Gamma^1_{22} b^2)\vec{x}_u + \\ + (\dot{b} + \Gamma^2_{11} a^2 + \Gamma^2_{12} ab + \Gamma^2_{22} b^2)\vec{x}_v.$$

oder in kompakter Notation mit Koorinatenachsen als Ableitungsrichtungen:

$$\nabla_\mu v^\nu = \partial_\mu v^\nu + \Gamma^\nu_{\rho\mu} v^\rho.$$

Ignorieren der Normalkomponenten:

$$\frac{\mathrm{D}v(t)}{\mathrm{d}t} = \nabla_{v(t)}v(t) := (\dot{a} + \Gamma^1_{11}a^2 + \Gamma^1_{12}ab + \Gamma^1_{22}b^2)\vec{x}_u + \\ +(\dot{b} + \Gamma^2_{11}a^2 + \Gamma^2_{12}ab + \Gamma^2_{22}b^2)\vec{x}_v.$$

oder in kompakter Notation mit Koorinatenachsen als Ableitungsrichtungen:

$$\nabla_\mu v^\nu = \partial_\mu v^\nu + \Gamma^\nu_{\rho\mu} v^\rho.$$

Christoffelsymbole: $\Gamma^\mu_{\nu\rho} = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma}(\partial_\rho g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\sigma\rho} - \partial_\sigma g_{\nu\rho})$

# Krümmung

Zwei zentrale Begriffe:

- **Intrinsische Krümmung**:
  Unabhängig vom Einbettungsraum – Zylinder hat die selbe intrinsische Krümmung wie eine Fläche

# Krümmung

Zwei zentrale Begriffe:

- **Intrinsische Krümmung**:
  Unabhängig vom Einbettungsraum – Zylinder hat die selbe intrinsische Krümmung wie eine Fläche
- **Extrinisische Krümmung**:
  Abhängig von der Wahl der Einbettung – Zylinder ist gekrümmmte Fläche im $\mathbb{R}^3$, aber einfache Fläche nicht

# Krümmung

Zwei zentrale Begriffe:

- **Intrinsische Krümmung**:
  Angegeben über $R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu}$ $\rightarrow$ Riemannscher Krümmungstensor
- **Extrinisische Krümmung**:
  intuitiv: „Wie stark ändert sich ein Normalenvektor $n$ in einer Umgebung um einen Punkt"

  $n$ existiert *nur*, wenn die Manigfaltigkeit eingebettet ist!

**Intrinsische Krümmung**:
Lässt sich über die (intrinsischen) Christoffelsymbole angeben:

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho{}_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho{}_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho{}_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho{}_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\mu\sigma} \qquad (3)$$

Keine Beteiligung von einbettungsbezogenen Größen (wie etwa Normalvektoren!)

**Extrinisische Krümmung**:
Definiert auf Hyperebenen mit Normalvektor $n$:

### Definition

Extrinisische Krümmung K:

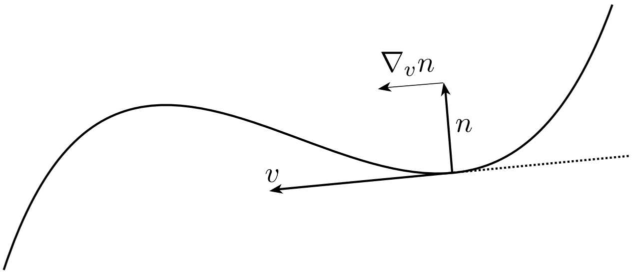
$$\begin{aligned} K:\ T_p(\Sigma)\times T_p(\Sigma) &\to \mathbb{R} \\ (v,u) &\mapsto -\langle v, L(u)\rangle. \end{aligned} \tag{4}$$

Wobei

$$\begin{aligned} L:\ T_p(\Sigma) &\to T_p(\Sigma) \\ v &\mapsto \nabla_v n \end{aligned}$$

die Weingartenabbildung bezeichnet.

# Extrinisische Krümmung:



Zusammenhang zwischen Größen der Hyperebene und des Umgebungsraumes:

**Gauss-Codazzi Gleichung:**

$$P^{\mu}{}_{\alpha}P^{\nu}{}_{\beta}P^{\gamma}{}_{\rho}P^{\sigma}{}_{\delta}R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = {}^{(3)}R^{\gamma}{}_{\delta\alpha\beta} + K^{\gamma}{}_{\alpha}K_{\delta\beta} - K^{\gamma}{}_{\beta}K_{\alpha\delta} \quad (5)$$

Wobei $P$ der Projektionsoperator auf den die Hyperebene bezeichnet.

# Feldtheorien und ADM-Formalismus

# Rückblick: klassische Feldtheorien

**klassischer Mechanik**: generalisierte Koordinaten $q_i(t)$ beschreiben System

**Feldtheorien**: Anstatt den diskreten Indizes $\rightarrow$ kontinuierliche Größen $\varphi(\vec{x}, t)$

# Rückblick: klassische Feldtheorien

**klassischer Mechanik**: generalisierte Koordinaten $q_i(t)$ beschreiben System
**Feldtheorien**: Anstatt den diskreten Indizes $\rightarrow$ kontinuierliche Größen $\varphi(\vec{x}, t)$
Wirkung:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 x \, \mathcal{L} \tag{6}$$

$\mathcal{L}$...Lagrangedichte

Aus dem Variationsprinzip ergibt sich **Euler-Lagrangefunktion** für Felder:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0. \tag{7}$$

Aus dem Variationsprinzip ergibt sich **Euler-Lagrangefunktion** für Felder:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0. \tag{7}$$

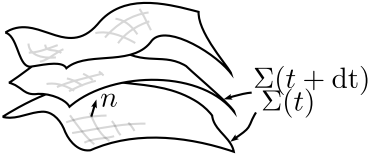
**Hamiltondichte:**

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\varphi} - \mathcal{L}, \tag{8}$$

mit generalisiertem Impuls: $\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}$

# ADM-Formalismus

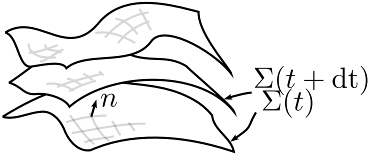
Zerteile Raumzeit in Schichten aus spacelike-Hyperebenen




$$M = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} \Sigma(t) \tag{9}$$

# ADM-Formalismus

Zerteile Raumzeit in Schichten aus spacelike-Hyperebenen




$$M = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \Sigma(t) \tag{9}$$

Ist nicht immer möglich: Hyperebenen müssen orientierbar sein und es dürfen keine Zeitzyklen auftreten

Metrik im ADM-Formalismus:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= -\,(\text{Zeitartiger Abstand})^2 + (\text{Raumartiger Abstand})^2 = \\ &= -\,N^2\mathrm{d}t^2 + q_{ij}(\mathrm{d}x^i + N^i\mathrm{d}t)(\mathrm{d}x^j + N^j\mathrm{d}t). \end{aligned} \tag{10}$$

Einstein-Hilbert Wirkung:

$$S_{EH} = \frac{1}{16\pi G} \int_M \mathrm{d}^4 x \sqrt{-g} R \tag{11}$$

Einstein-Hilbert Wirkung:

$$S_{EH} = \frac{1}{16\pi G} \int_M \mathrm{d}^4 x \sqrt{-g} R \tag{11}$$

Zusammen mit Gauss-Codazzi Gleichungen und der Metrik ergibt sich für den ADM-Formalismus:

$$S_{EH} = \frac{1}{16\pi G} \int_M \mathrm{d}^4 x N \sqrt{h} ({}^{(3)}R + \mathrm{Tr}(K)^2 - K^{ij} K_{ij}) \tag{12}$$

**Constraints:** Mit den Definitionen

$$H_\perp := 16\pi G G_{ijkl}\pi^{ij}\pi^{kl} - \frac{1}{16\pi G}\sqrt{h}^{(3)}R = 0 \tag{13}$$

$$H^i := -2^{(3)}\nabla_j \pi^{ij} = 0 \tag{14}$$

$$\pi_{ij} := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t h_{ij})} \tag{15}$$

ergibt sich

$$\boxed{S_{EH} = \int \mathrm{d}t \int_\Sigma \mathrm{d}^3x(\pi^{ij}\partial_t h_{ij} - NH_\perp - N^i H_i)}$$

wobei: $G_{ijkl} = \frac{1}{2\sqrt{h}}(h_{ik}h_{jl} + h_{jk}h_{il} - h_{ij}h_{kl})$

Die Constraints erfüllen:

$$H_\perp := 16\pi G G_{ijkl}\pi^{ij}\pi^{kl} - \frac{1}{16\pi G}\sqrt{h}^{(3)}R = 0 \tag{16}$$

$$H^i := -2^{(3)}\nabla_j \pi^{ij} = 0 \tag{17}$$

und die Poissonklammerausdrücke:

$$\{H_i(\vec{x}), H_j(\vec{x}\,')\} = H_i(\vec{x}\,')\partial_j\delta(\vec{x}-\vec{x}\,') - H_j(\vec{x})\partial\vec{x}_i'\delta(\vec{x}-\vec{x}\,')$$
$$\{H_i(\vec{x}), H_\perp(\vec{x}\,')\} = H_\perp(\vec{x})\partial_j\delta(\vec{x}-\vec{x}\,')$$
$$\{H_i(\vec{x}), H_\perp(\vec{x}\,')\} =$$
$$= h^{ij}(\vec{x})H_i(\vec{x})\partial_j'\delta(\vec{x}-\vec{x}\,') - h^{ij}(\vec{x}\,')H_i(\vec{x}\,')\partial_j\delta(\vec{x}-\vec{x}\,')$$

Erstes Problem: $h$ taucht explizit in Poissonklammerausdrücken auf!

Desweiteren besitzten die Constraints eine wichtige Eigenschaft:

**Theorem**

*$g$ erfüllt die Einsteingleichungen dann und nur dann wenn auf allen raumartigen Hyperebenen die Constraints (16-17) erfült sind.*

Desweiteren besitzten die Constraints eine wichtige Eigenschaft:

**Theorem**

*$g$ erfüllt die Einsteingleichungen dann und nur dann wenn auf allen raumartigen Hyperebenen die Constraints (16-17) erfült sind.*

**super-Hamilton Constraint und super-Momentum Constraint besitzen vollständige dynamische Information über System!**

## Zusammenfassung:

- Bisher nur klassische Feldtheorie

## Zusammenfassung:

- Bisher nur klassische Feldtheorie
- Wir haben einen Hamiltonformalismus der allgemein Relativitätstheorie abgeleitet

## Zusammenfassung:

- Bisher nur klassische Feldtheorie
- Wir haben einen Hamiltonformalismus der allgemein Relativitätstheorie abgeleitet
- Der nächste Schritt: die Quantisierung