ENST-CP1 2019/2020	**Algèbre 2**	Série 2 Espaces vectoriels

Exercice 1

Soit $E = \mathbb{R}_+^*$ muni de la loi de composition interne définie par :

$$\forall a, b \in E, \quad a \oplus b = ab,$$

et de la loi de composition externe définie par :

$$\forall a \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \otimes a = a^{\lambda}.$$

Montrer que $(E, \oplus, \otimes)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 2

Sur $E = \mathbb{R}^2$, on définit les deux lois suivantes :

$$\forall (x, y), (x', y') \in E, \quad (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y'),$$

$$\forall (x, y) \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \star (x, y) = (\lambda x, 0).$$

$(\mathbb{R}^2, +, \star)$ est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

Exercice 3

Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

- $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \leq y\}$
- $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, xy = 0\}$
- $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x = y\}$
- $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x + y = 1\}$

Exercice 4

Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

- $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x \leq y\}$
- $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, xyz > 0\}$
- $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, y = z\}$
- $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2x + y - 3z = 0\}$

Exercice 5

Dans chacun des cas suivants, montrer que E est un espace vectoriel.

1. $E = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(-1) = P(1)\}$
2. $E = \left\{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \mid \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = f(0)\right\}$
3. $E = \left\{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \mid \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = f(0)\right\}$
4. $E = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \lim\limits_{n \to +\infty} nu_n = 0\right\}$

Exercice 6

1. Dans $\mathbb{R}^3$,$(5, 5, 1)$ est-il combinaison linéaire de $(2, 3, 0)$ et $(3, 2, 0)$?
2. Dans $\mathbb{R}[X]$, $16X^3 - 7X^2 + 21X - 4$ est-il combinaison linéaire de $X^3 - 5X^2 + 1$ et $X^2 + 7X - 2$?
3. Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $x \longmapsto \cos^2 x$ est-elle combinaison linéaire de $x \longmapsto 1$ et $x \longmapsto \cos 2x$?
4. Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $x \longmapsto \sin 2x$ est-elle combinaison linéaire de sinus et cosinus ?

Exercice 7

Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose $u = (1, -1, 1)$ et $v = (0, 1, a)$. A quelle condition nécessaire et suffisante sur a le vecteur $(1, 1, 2)$ appartient-il à $Vect(u, v)$?

Exercice 8

Soient dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs

$$e_1 = (1, 2, 3, 4) \text{ et } e_2 = (1, -2, 3, -4)$$

1. Peut-on déterminer x et y pour que $(x, 1, 1, y) \in Vect(e_1, e_2)$
2. Peut-on déterminer x et y pour que $(x, 1, y, 1) \in Vect(e_1, e_2)$

Exercice 9

Dans $\mathbb{R}_2[X]$, on considère les polynômes :

$$P_1(X) = X^2 + 1, \quad P_2(X) = X^2 + X + 1, \quad P_3(X) = 1 - X$$

Déterminer $Vect(P_1, P_2, P_3)$.

Exercice 10

On considère dans les ensembles :

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x+y-z=0\} \text{ et } F = \{(a-b, a+b, a-3b) \,|\, a,b \in \mathbb{R}\}$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer $F \cap G$.

Exercice 11

Soit $m \in \mathbb{R}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur m pour que la famille

$$u_1 = (m,1,1), u_2 = (2m,-1,m), u_3 = (1,5,2)$$

soit libre dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 12

Parmi les familles suivantes, déterminer les familles génératrices de $\mathbb{R}^3$:

1. (u_1, u_2, u_3) avec $u_1 = (1,1,1), u_2 = (0,1,2), u_3 = (3,2,-1)$
2. (u_1, u_2) avec $u_1 = (1,2,3), u_2 = (2,1,0)$

Exercice 13

Soit E l'ensemble de $\mathbb{R}^4$ défini par les équations

$$x = 2y - z \quad \text{et} \quad t = x+y+z$$

1. Prouver que E est un s-ev de $\mathbb{R}^4$
2. Donner sa dimension , en donner une base.

Exercice 14

Soit F le sous-ensemble défini par l'équation

$$x + z = t + y$$

et G est défini par

$$y + t = x - y - z = 0$$

1. Déterminer la base ainsi que la dimension de F. Soit $a = (3,1,2,4)$, déterminer les coordonnées de a dans cette base.
2. Déterminer la base ainsi que la dimension de G. Soit $b = (4,1,3,-1)$, déterminer les coordonnées de b dans cette base.
3. Déterminer la dimension et une base de $F \cap G$.

Exercice 15

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. Soit H l'ensemble des polynômes P de E tels que $P(1) = P^{'}(1) = 0$.

1 Montrer que H est un sous-espace vectoriel de E.

2 Montrer que P appartient à H si et seulement si $(X-1)^2$ divise P.

3 Donner une base de H et déterminer sa dimension.

Exercice 16

On considère $\mathbb{R}_3[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels de degrés ≤ 3.

1 Donner la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ et la dimension de $\mathbb{R}_3[X]$.

2 Soit $E = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = P(1)\}$. Déterminer une base de E. Quelle est sa dimension ?

3 $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P^{'}(0) = P^{'}(1)\}$. Déterminer une base de F. Quelle est sa dimension ?

4 Déterminer une base de $E \cap F$. Quelle est sa dimension ?

5 Déterminer la dimension de $E + F$. La somme $E + F$ est-elle directe ?