

Exercice 1

Représenter les matrices $A = \left(\frac{1}{i+j+ij} \right)_{\substack{1 \leq i \leq 4 \\ 1 \leq j \leq 4}}$ et $B = \left(\frac{(i+j)!}{i!j!} \right)_{\substack{1 \leq i < 3 \\ 1 \leq j \leq 4}}$

Exercice 2

Calculer, lorsque c'est possible, tous les produits de deux matrices parmi l'ensemble des matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \\ 4 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3

Calculer les puissances des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4

Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui calculer leur inverse.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos a & 0 & -\sin a \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin a & 0 & \cos a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- 1 Montrer que $A^2 = A + 2I_3$.
- 2 En déduire que A est inversible et calculer A^{-1} .

Exercice 6

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- 1 Calculer A^2 et A^3 et trouver a, b, c tels que : $A^3 + aA^2 + bA + cI_3 = 0$.
- 2 En déduire que A est inversible et calculer A^{-1} .

Exercice 7

On définit la matrice M par

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 1 Vérifier que $(M - I_4)$ est nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe $p \geq 1$ tel que $(M - I_4)^p = 0$.
- 2 En déduire M^k , pour tout $k \geq 1$.

Exercice 8

On définit la matrice A par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- 1 Montrer que A est inversible et calculer A^{-1} par la méthode de Gauss-Jordan.
- 2 Calculer en détaillant la valeur de $A^2 - 3A + 2I_3$.
- 3 En déduire que A est inversible et donner son inverse à l'aide du polynôme annulateur.
- 4 Après avoir fait la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$, donner la valeur de A^n pour tout $n \geq 2$.

Exercice 9

Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- 1 Calculer J^2 et J^n pour tout $n > 2$.
- 2 Déterminer A^n pour tout entier n .
- 3 Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1} .

- 4 Soient u_n et v_n deux suites d'éléments de \mathbb{R} définies par $u_0 = 1, v_0 = 1$ et la relation

$$\begin{cases} 2u_n + v_n &= u_{n+1} \\ 2v_n &= v_{n+1} \end{cases}$$

Déterminer pour tout entier n , u_n, v_n en fonction de n .

Exercice 10

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

I) On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

- 1 Démontrer que P est inversible et donner son inverse.
- 2 Calculer $D = P^{-1}AP, D^n$ puis A^n .
- 3 Montrer que D est inversible et en déduire que A est inversible.
- 4 En déduire l'expression de A^{-n} .

II)

- 1 Soit $B = A - 2I$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer B^n en fonction de B .
- 2 En déduire A^n en fonction de n, A et I .

III)

- 1 Montrer que $A^2 - 3A + 2I = 0$.
- 2 Démontrer par récurrence qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n) telles que, pour tout entier n ,

$$A^n = a_n A + b_n I$$

Donner les relations de récurrence vérifiées par (a_n) et (b_n) et donner a_n et b_n en fonction de n .

INDICATION : Quelle relation de récurrence vérifie $(a_n + b_n)$?

En déduire l'expression de A^n en fonction de n, A et I .

- 3 Justifier que A est inversible et donner son inverse.