

Exercice 1

Représenter les matrices  $A = \left( \frac{1}{i+j+ij} \right)_{\substack{1 \leq i \leq 4 \\ 1 \leq j \leq 4}}$  et  $B = \left( \frac{(i+j)!}{i!j!} \right)_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 4}}$

Exercice 2

Calculer, lorsque c'est possible, tous les produits de deux matrices parmi l'ensemble des matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \\ 4 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3

Calculer les puissances des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4

Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui calculer leur inverse.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos a & 0 & -\sin a \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin a & 0 & \cos a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1 Montrer que  $A^2 = A + 2I_3$ .

2 En déduire que  $A$  est inversible et calculer  $A^{-1}$ .

### Exercice 6

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- 1 Calculer  $A^2$  et  $A^3$  et trouver  $a, b, c$  tels que :  $A^3 + aA^2 + bA + cI_3 = 0$ .
- 2 En déduire que  $A$  est inversible et calculer  $A^{-1}$ .

### Exercice 7

On définit la matrice  $M$  par

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 1 Vérifier que  $(M - I_4)$  est nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe  $p \geq 1$  tel que  $(M - I_4)^p = 0$ .
- 2 En déduire  $M^k$ , pour tout  $k \geq 1$ .

### Exercice 8

On définit la matrice  $A$  par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- 1 Montrer que  $A$  est inversible et calculer  $A^{-1}$  par la méthode de Gauss-Jordan.
- 2 Calculer en détaillant la valeur de  $A^2 - 3A + 2I_3$ .
- 3 En déduire que  $A$  est inversible et donner son inverse à l'aide du polynôme annulateur.
- 4 Après avoir fait la division euclidienne de  $X^n$  par  $X^2 - 3X + 2$ , donner la valeur de  $A^n$  pour tout  $n \geq 2$ .

### Exercice 9

Soit  $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

- 1 Calculer  $J^2$  et  $J^n$  pour tout  $n > 2$ .
- 2 Déterminer  $A^n$  pour tout entier  $n$ .
- 3 Montrer que  $A$  est inversible et déterminer  $A^{-1}$ .

- 4 Soient  $u_n$  et  $v_n$  deux suites d'éléments de  $\mathbb{R}$  définies par  $u_0 = 1, v_0 = 1$  et la relation

$$\begin{cases} 2u_n + v_n &= u_{n+1} \\ 2v_n &= v_{n+1} \end{cases}$$

Déterminer pour tout entier  $n$ ,  $u_n, v_n$  en fonction de  $n$ .

### Exercice 10

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

I) On pose  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

- 1 Démontrer que  $P$  est inversible et donner son inverse.
- 2 Calculer  $D = P^{-1}AP$ ,  $D^n$  puis  $A^n$ .
- 3 Montrer que  $D$  est inversible et en déduire que  $A$  est inversible.
- 4 En déduire l'expression de  $A^{-n}$ .

II)

- 1 Soit  $B = A - 2I$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , calculer  $B^n$  en fonction de  $B$ .
- 2 En déduire  $A^n$  en fonction de  $n, A$  et  $I$ .

III)

- 1 Montrer que  $A^2 - 3A + 2I = 0$ .
- 2 Démontrer par récurrence qu'il existe deux suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  telles que, pour tout entier  $n$ ,

$$A^n = a_n A + b_n I$$

Donner les relations de récurrence vérifiées par  $(a_n)$  et  $(b_n)$  et donner  $a_n$  et  $b_n$  en fonction de  $n$ .  
INDICATION : Quelle relation de récurrence vérifie  $(a_n + b_n)$  ?  
En déduire l'expression de  $A^n$  en fonction de  $n, A$  et  $I$ .

- 3 Justifier que  $A$  est inversible et donner son inverse.