Pascal Lainé

Nombres réels

Exercice 1 :

Si a et b sont des réels positifs ou nuls, montrer que

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}\leq\sqrt{2}\sqrt{a+b}$$

Allez à : Correction exercice 1 :

Exercice 2 :

Montrer que pour tous réels a et b strictement positifs

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leq\sqrt{ab}$$

Allez à : Correction exercice 2 :

Exercice 3 :

Déterminer les ensembles suivants, mettre ces ensemble sous la forme d'un intervalle de $\mathbb{R}$ ou une réunion d'intervalles.

$$A_1=\{x\in\mathbb{R},x^2<1\}$$
$$A_2=\{x\in\mathbb{R},x^3\leq 1\}$$
$$A_3=\left\{x\in\mathbb{R},-1<\frac{2x}{x^2+1}<1\right\}$$
$$A_4=\left\{x\in\mathbb{R}^*,\frac{1}{|x|}>1\right\}$$
$$A_5=\left\{x\in\mathbb{R},-1<\frac{1}{x^2-1}<1\right\}$$

Allez à : Correction exercice 3 :

Exercice 4 :

Trouver tous les réels x tels que $|x-1|+|x-2|=2$

Allez à : Correction exercice 4 :

Exercice 5 :

Résoudre l'équation

$$\sqrt{41-x}+\sqrt{41+x}=10$$

Indication :

Malgré les apparences il n'est pas nécessaire de connaitre la valeur de 41^2

Allez à : Correction exercice 5 :

Exercice 6 :

1. Résoudre

$$|u-1|+|u+1|=4$$

2. En déduire les solutions de

$$\left|\sqrt{x+1}-1\right|+\left|\sqrt{x+1}+1\right|=4$$

3. Puis les solutions de

$$\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}=4$$

Allez à : Correction exercice 6 :

Exercice 7 :

Démontrer que $\sqrt[3]{3+2\sqrt{6}}$ est un nombre irrationnel.

Allez à : Correction exercice 7 :

Exercice 8 :

Montrer que $\alpha = \sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}$ est un nombre entier.

Allez à : Correction exercice 8 :

Exercice 9 :

Soit

$$\alpha = \sqrt{4-2\sqrt{3}} + \sqrt{4+2\sqrt{3}}$$

Montrer que $\alpha \in \sqrt{3}\mathbb{N}$ (C'est-à-dire de la forme $\sqrt{3}$ multiplié par un entier naturel).

Allez à : Correction exercice 9 :

Exercice 10 :

Soit $\alpha = \sqrt{4-2\sqrt{3}} - \sqrt{4+2\sqrt{3}}$

Calculer α.

Allez à : Correction exercice 10 :

Exercice 11 :

On rappelle que $\sqrt{2}$ est irrationnel (c'est-à-dire que $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$).

1. Montrer que $\alpha = 6 + 4\sqrt{2}$ et $\beta = 6 - 4\sqrt{2}$ sont irrationnels.
2. Calculer $\sqrt{\alpha\beta}$.
3. Montrer que $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ est rationnel.

Allez à : Correction exercice 11 :

Exercice 12 :

On suppose que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ et $\sqrt{6}$ sont irrationnels. Montrer que

1. $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$
2. $\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^2 \notin \mathbb{Q}$
3. $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$
4. $\left(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6}\right)^2 \notin \mathbb{Q}$. On rappelle que $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

Allez à : Correction exercice 12 :

Exercice 13 :

Montrer que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$

Allez à : Correction exercice 13 :

Exercice 14 :

Soient a et b deux réels. On appelle $\alpha = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$

Montrer que α est une racine d'une équation du troisième degré à coefficients réels

Allez à : Correction exercice 14 :

Exercice 15 :

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{Z}, E(x)+E(-x)=0$
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}, E(x)+E(-x)=-1$

Allez à : Correction exercice 15 :

Exercice 16 :

1. Montrer que pour tout réels x et y on a :
$$E(x)+E(y)\leq E(x+y)\leq E(x)+E(y)+1$$
2. Montrer que pour tout entier relatif on a :
$$E\left(\frac{m+n}{2}\right)+E\left(\frac{n-m+1}{2}\right)=n$$
On pourra distinguer les cas $m+n$ pair et $m+n$ impairs.
3. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$
$$E\left(\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2\right)=4n+1$$

On pourra montrer que $E\left(2\sqrt{n(n+1)}\right)=2n$

Allez à : Correction exercice 16 :

Exercice 17 :

Montrer que pour tout x et y réels on a :
$$E(x)+E(y)+E(x+y)\leq E(2x)+E(2y)$$
On pourra distinguer les cas

$\left(E(x)\leq x<E(x)+\frac{1}{2}\right.$ ou $\left.E(x)+\frac{1}{2}\leq x<E(x)+1\right)$ et $\left(E(y)\leq y<E(y)+\frac{1}{2}\right.$ ou $\left.E(y)+\frac{1}{2}\leq y<E(y)+1\right)$.

Ce qui fait 4 cas (n'est-ce pas ?).

Allez à : Correction exercice 17 :

Exercice 18 :

Le but de cet exercice est de montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$
$$\sum_{k=0}^{n-1}E\left(x+\frac{k}{n}\right)=E(nx)\qquad(*)$$
Où $E(y)$ est la partie entière du réel y.

1. Montrer qu'il existe un unique $p\in\{0,1,\dots,n-1\}$ tel que
$$x+\frac{p}{n}<E(x)+1\leq x+\frac{p+1}{n}$$
On pourra appuyer son raisonnement en traçant la droite réelle et en plaçant
$$E(x),x,x+\frac{k}{n},k\in\{0,1,..,n-1\},E(x)+1\text{ et }x+\frac{p+1}{n}$$
2. En déduire que
$$nE(x)+n-p-1\leq nx<nE(x)+n-p$$
Et $E(nx)$ en fonction de n, $E(x)$ et p.
3. Calculer $E\left(x+\frac{k}{n}\right)$ pour tout $k\in\{0,\dots,p\}$ et calculer $E\left(x+\frac{k}{n}\right)$ pour tout $k\in\{p+1,\dots,n-1\}$.
4. En coupant la somme $\sum_{k=0}^{n-1}E\left(x+\frac{k}{n}\right)$ en 2, montrer l'égalité $(*)$.

Allez à : Correction exercice 18 :

Exercice 19 :

Soient p et q deux nombres réels non nuls et n un entier strictement positif.
Montrer que le polynôme $P(x) = x^n + px + q$ ne peut avoir plus que deux racines réelles si n est pair et plus que trois racines si n est impairs.

Allez à : Correction exercice 19 :

CORRECTIONS

Correction exercice 1 :

$$\left(\sqrt{2}\sqrt{a+b}\right)^2 - \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = 2(a+b) - \left(a + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b\right) = a - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b = \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geq 0$$

Ces deux expressions ($\sqrt{a}+\sqrt{b}$ et $\sqrt{2}\sqrt{a+b}$) sont positives donc

$$\left(\sqrt{2}\sqrt{a+b}\right)^2 \geq \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sqrt{a+b} \geq \sqrt{a}+\sqrt{b}$$

Allez à : Exercice 1 :

Correction exercice 2 :

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \Leftrightarrow \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{ab}}{a+b} \leq 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{ab} \leq a+b \Leftrightarrow 0 \leq a - 2\sqrt{ab} + b \Leftrightarrow 0 \leq \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2$$

La dernière assertion est vraie donc la première aussi.

Allez à : Exercice 2 :

Correction exercice 3 :

$$A_1 =]-1,1[$$
$$A_2 =]-\infty, 1]$$
$$1 - \left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^2 = \frac{(x^2+1)^2 - 4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4+2x^2+1-4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4-2x^2+1}{(x^2+1)^2} = \frac{(x^2-1)^2}{(x^2+1)^2}$$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, 1 - \left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^2 > 0 \Leftrightarrow \frac{(x^2-1)^2}{(x^2+1)^2} > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$$

On pouvait aussi étudier la fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

On en déduit que :

$$A_3 =]-\infty, -1[\cup]-1,1[\cup]1, +\infty[$$
$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \frac{1}{|x|} > 1 \Leftrightarrow |x| < 1$$
$$A_4 =]-1,0[\cup]0,1[$$

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$

$$1 - \left(\frac{1}{x^2-1}\right)^2 = \frac{(x^2-1)^2-1}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4-2x^2+1-1}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4-2x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-2)}{(x^2-1)^2} > 0$$

Comme $x^2 - 2$ est positif si et seulement si $x \in \left]-\infty, -\sqrt{2}\right[\cup \left]\sqrt{2}, +\infty\right[$

Donc

$$\left(\frac{1}{x^2-1}\right)^2 < 1 \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{1}{x^2-1}\right)^2 > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, -\sqrt{2}\right[\cup \left]\sqrt{2}, +\infty\right[$$

Par conséquent

$$A_5 =]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$$

Allez à : Exercice 3 :

Correction exercice 4 :

On pose $f(x) = |x-1| + |x-2|$

Pour $x \leq 1$, $x - 1 \leq 0$ et $x - 2 \leq -1 < 0$ donc

$$f(x) = -(x-1) - (x-2) = -2x + 3$$

Pour $1 \leq x \leq 2$, $x - 1 \geq 0$ et $x - 2 \leq 0$ donc

$$f(x) = |x-1| + |x-2| = x - 1 - (x-2) = 1$$

Pour $x \geq 2$, $x - 1 \geq 1 > 0$ et $x - 2 \geq 0$ donc

$$f(x) = |x-1| + |x-2| = x - 1 + x - 2 = 2x - 3$$

Puis on va résoudre $f(x) = 2$ sur chacun des trois intervalles.

$$\begin{cases} f(x) = 2 \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 3 = 2 \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x \leq 1 \end{cases}$$

$\frac{1}{2} \leq 1$ donc $\frac{1}{2}$ est solution.

$$\begin{cases} f(x) = 2 \\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 2 \\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Il n'y a pas de solution dans cet intervalle.

$$\begin{cases} f(x) = 2 \\ 2 \leq x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3 = 2 \\ 2 \leq x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ 2 \leq x \end{cases}$$

$2 \leq \frac{5}{2}$ donc $\frac{5}{2}$ est solution.

Les réels qui vérifient $|x-1| + |x-2| = 2$ sont $\left\{\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right\}$

Allez à : Exercice 4 :

Correction exercice 5 :

Les éventuelles solutions vérifient $41 - x \geq 0$ et $41 + x \geq 0$, autrement dit $-41 \leq x \leq 41$, ce sera bien le cas des deux solutions trouvées.

Comme ces deux expressions sont positives on a

$$\sqrt{41-x} + \sqrt{41+x} = 10 \Leftrightarrow \left(\sqrt{41-x} + \sqrt{41+x}\right)^2 = 100 \Leftrightarrow 41 - x + 2\sqrt{41-x}\sqrt{41+x} + 41 + x = 100$$
$$\Leftrightarrow 82 + 2\sqrt{41^2 - x^2} = 100 \Leftrightarrow 2\sqrt{41^2 - x^2} = 18 \Leftrightarrow \sqrt{41^2 - x^2} = 9 \Leftrightarrow 41^2 - x^2 = 9^2$$
$$\Leftrightarrow 41^2 - 9^2 = x^2 \Leftrightarrow x^2 = (41-9)(41+9) \Leftrightarrow x^2 = 32 \times 50 = 16 \times 100 = (4 \times 10)^2 \Leftrightarrow x = \pm 40$$

Allez à : Exercice 5 :

Correction exercice 6 :

1. On pose $f(u) = |u-1| + |u+1|$

   Si $u < -1$, $u - 1 < 0$ et $u + 1 < 0$ alors $f(u) = -(u-1) - (u+1) = -2u$

   $$\forall u < -1, f(u) = 4 \Leftrightarrow -2u = 4 \Leftrightarrow u = -2$$

   Si $-1 \leq u \leq 1$, , $u - 1 < 0$ et $u + 1 > 0$ alors $f(u) = -(u-1) + (u+1) = 2$

   $f(u) = 4$ n'a pas de solution

   Si $u > 1$, $u - 1 > 0$ et $u + 1 > 0$ alors $f(u) = (u-1) + (u+1) = 2u$

   $$\forall u > 1, f(u) = 4 \Leftrightarrow 2u = 4 \Leftrightarrow u = 2$$

   Il y a deux solutions -2 et 2.
2. D'après la première question il faut et il suffit de résoudre

$$\sqrt{x+1}=-2 \quad \text{et} \quad \sqrt{x+1}=2$$

$\sqrt{x+1}=-2$ n'a pas de solution réelle et $\sqrt{x+1}=2$ équivaut à $x+1=4$, c'est-à-dire à $x=3$.

3.

$$x+2-2\sqrt{x+1}=x+1-2\sqrt{x+1}+1=\left(\sqrt{x+1}-1\right)^2$$

Et

$$x+2+2\sqrt{x+1}=x+1\mp\sqrt{x+1}+1=\left(\sqrt{x+1}+1\right)^2$$

Par conséquent

$$\forall x\in\mathbb{R}, \sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}=4 \Leftrightarrow \sqrt{\left(\sqrt{x+1}-1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x+1}+1\right)^2}=4$$
$$\Leftrightarrow \left|\sqrt{x+1}-1\right|+\left|\sqrt{x+1}+1\right|=4 \Leftrightarrow x=3$$

Allez à : Exercice 6 :

Correction exercice 7 :

Supposons que $\sqrt[3]{3+2\sqrt{6}}$ soit un nombre rationnel, il existe $p\in\mathbb{Z}$ et $q\in\mathbb{Z}^*$, on peut supposer qu'ils sont positifs tous les deux
tels que

$$\sqrt[3]{3+2\sqrt{6}}=\frac{p}{q}$$

On élève au cube

$$3+2\sqrt{6}=\frac{p^3}{q^3}\Leftrightarrow 3+2\sqrt{6}=\frac{p^3}{q^3}\Leftrightarrow \sqrt{6}=\frac{1}{2}\left(\frac{p^3}{q^3}-3\right)$$

Ce qui signifie que $\sqrt{6}\in\mathbb{Q}$, il existe $p_1\in\mathbb{N}$ et $q_1\in\mathbb{N}^*$ tel que

$$\sqrt{6}=\frac{p_1}{q_1}$$

On peut supposer que p_1 et q_1 ne sont pas tous les deux pairs sinon on peut simplifier par 2.

$$\sqrt{6}=\frac{p_1}{q_1}\Leftrightarrow 6q_1^2=p_1^2 \quad (1)$$

Si p_1 est impair, son carré est aussi impair ce qui est impossible d'après (1) donc $p_1$est pair et donc q_1 est impair, il existe p_2 tel que $p_1=2p_2$ et q_2 tel que $q_1=2q_2+1$, ce que l'on remplace dan (1)

$$6(2q_2+1)^2=4p_2^2\Leftrightarrow 3(4q_2^2+4q_2+1)=2p_2^2\Leftrightarrow 3=2p_2^2-12q_2^2-12q_2$$

Ce qui est impossible, donc $\sqrt[3]{3+2\sqrt{6}}$ n'est pas un nombre rationnel.

Allez à : Exercice 7 :

Correction exercice 8 :

$$a^2=\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^2=7+4\sqrt{3}+2\sqrt{7+4\sqrt{3}}\sqrt{7-4\sqrt{3}}+7-4\sqrt{3}$$
$$=14+2\sqrt{\left(7+4\sqrt{3}\right)\left(7-4\sqrt{3}\right)}=14+2\sqrt{7^2-4^2\times 3}=14+2\sqrt{49-48}$$
$$=14+2\times 1=16$$

Les deux valeurs possibles de a sont $a=-4$ et $a=4$, comme $a>0$, on a

$$a=4\in\mathbb{Z}$$

Allez à : Exercice 8 :

Correction exercice 9 :

$$\alpha^2=4-2\sqrt{3}+2\sqrt{4-2\sqrt{3}}\sqrt{4+2\sqrt{3}}+4+2\sqrt{3}=8+2\sqrt{4^2-2^2\times 3}=8+2\sqrt{4}=12$$

Donc $\alpha=2\sqrt{3}$ car $\alpha>0$ et $2\in\mathbb{N}$

Allez à : Exercice 9 :

Correction exercice 10 :

$$\alpha^2=\left(\sqrt{4-2\sqrt{3}}-\sqrt{4+2\sqrt{3}}\right)^2=4-2\sqrt{3}-2\sqrt{4-2\sqrt{3}}\sqrt{4+2\sqrt{3}}+4+2\sqrt{3}=8-2\sqrt{4^2-2^2\times 3}$$
$$=8-2\sqrt{4}=8-4=4$$

Donc $\alpha=\pm 2$ or $4-2\sqrt{3}<4+2\sqrt{3}$ entraine que $\alpha=-2$

Allez à : Exercice 10 :

Correction exercice 11 :

1. Si α est rationnel alors
$$\sqrt{2}=\frac{\alpha-6}{4}$$
Est rationnel, ce qui est faux d'après le cours.
Si β est rationnel alors
$$\sqrt{2}=\frac{\beta-6}{-4}$$
Est rationnel, ce qui est faux d'après le cours.
Donc α et β sont irrationnel.
2.
$$\sqrt{\alpha\beta}=\sqrt{(6+4\sqrt{2})(6-4\sqrt{2})}=\sqrt{6^2-4^2\times 2}=\sqrt{36-32}=\sqrt{4}=2\in\mathbb{Q}$$
3.
$$\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)^2=\alpha+2\sqrt{\alpha\beta}+\beta=6+4\sqrt{2}+4+6-4\sqrt{2}=16$$
Comme $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}>0$, $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=4\in\mathbb{Q}$.

Allez à : Exercice 11 :

Correction exercice 12 :

1. Si $\sqrt{2}+\sqrt{3}\in\mathbb{Q}$ alors il existe $p\in\mathbb{Z}$ et $q\in\mathbb{N}^*$ tel que
$$\sqrt{2}+\sqrt{3}=\frac{p}{q}$$
Ce qui entraine que
$$\sqrt{2}=\frac{p}{q}-\sqrt{3}$$
Puis on élève au carré
$$2=\frac{p^2}{q^2}-\frac{2p}{q}\sqrt{3}+3$$
On isole $\sqrt{3}$
$$\sqrt{3}=-\frac{q}{2p}\left(-\frac{p^2}{q^2}-1\right)$$
Ce qui montre que $\sqrt{3}\in\mathbb{Q}$, il y a donc une contradiction, par conséquent
$$\sqrt{2}+\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$$
Je rappelle que le raisonnement suivant est faux

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \quad \text{et} \quad \sqrt{3} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$$

2. Si $\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^2 \in \mathbb{Q}$ alors il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tel que
$$\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^2 = \frac{p}{q}$$
On élève au carré
$$2 + 2\sqrt{6} + 3 = \frac{p^2}{q^2}$$
On isole $\sqrt{6}$
$$\sqrt{6} = \frac{1}{2}\left(-1 + \frac{p^2}{q^2}\right)$$
Ce qui montre que $\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$, il y a une contradiction donc
$$\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^2 \notin \mathbb{Q}$$
3. Si $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} \in \mathbb{Q}$ alors il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tel que
$$\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} = \frac{p}{q}$$
Ce qui entraine que
$$\sqrt{2} + \sqrt{3} = \frac{p}{q} - \sqrt{6}$$
Puis on élève au carré
$$2 + 2\sqrt{2}\sqrt{3} + 3 = \frac{p^2}{q^2} - \frac{2p}{q}\sqrt{6} + 6$$
Ce qui équivaut à
$$5 + 2\sqrt{6} + \frac{2p}{q}\sqrt{6} = 6 + \frac{p^2}{q^2}$$
Soit encore
$$\sqrt{6} = \frac{1 + \frac{p^2}{q^2}}{2 + \frac{2p}{q}}$$
Ce qui montre que $\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$, il y a donc une contradiction par conséquent
$$\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$$
4. Si $\left(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6}\right)^2 \in \mathbb{Q}$ alors il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tel que
$$\left(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2}$$
On développe le carré avec la formule $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$
$$3^2 \times 2 + 2^2 \times 3 + 6 + 2 \times 3 \times 2\sqrt{2}\sqrt{3} + 2 \times 3\sqrt{2}\sqrt{6} + 2 \times 2\sqrt{3}\sqrt{6} = \frac{p^2}{q^2}$$
Puis
$$36 + 12\sqrt{6} + 6\sqrt{12} + 4\sqrt{18} = \frac{p^2}{q^2}$$
En simplifiant et en arrangeant les choses
$$12\sqrt{6} + 6\sqrt{2^2 \times 3} + 4\sqrt{3^2 \times 2} = \frac{p^2}{q^2} - 36$$

$$12\sqrt{6}+12\sqrt{3}+12\sqrt{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{p^2}{q^2}-36\right)$$
$$\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}=\frac{1}{24}\left(\frac{p^2}{q^2}-36\right)$$

Ce qui entraine que $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}\in\mathbb{Q}$, ce qui est faux d'après la question 3. Il y a une contradiction donc

$$\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)^2\notin\mathbb{Q}$$

Allez à : Exercice 12 :

Correction exercice 13 :

Supposons qu'il existe p et q des entiers naturels, non tous les deux pairs tels que

$$\sqrt{3}=\frac{p}{q}$$

En élevant au carré on obtient

$$3=\frac{p^2}{q^2}\Leftrightarrow 3q^2=p^2\quad(*)$$

Si p est pair et q est impair, alors il existe k et l des entiers tels que $p=2k$ et $q=2l+1$, ce que l'on remplace dans $(*)$

$$3(4l^2+4l+1)=4k^2\Leftrightarrow 2(6l^2+6l+1)+1=2\times 2k^2$$

Le terme de gauche est impair et celui de droite est pair, ce n'est pas possible.

Si p est impair et q est pair, alors il existe k et l des entiers tels que $p=2k+1$ et $q=2l$, ce que l'on remplace dans $(*)$

$$3\times 4l^2=4k^2+4k+1\Leftrightarrow 2\times 6l^2=2(2k^2+2k)+1$$

Le terme de gauche est pair et celui de droite est impair, ce n'est pas possible.

Si p est impair et q est impair, alors il existe k et l des entiers tels que $p=2k+1$ et $q=2l+1$, ce que l'on remplace dans $(*)$

$$3\times(4l^2+4l+1)=4k^2+4k+1\Leftrightarrow 2(6l^2+6l+1)+1=2(2k^2+2k)+1\Leftrightarrow 2(6l^2+6l+1)$$
$$=2(2k^2+2k)\Leftrightarrow 6l^2+6l+1=2k^2+2k\Leftrightarrow 2(3l^2+3l)+1=2(k^2+k)$$

Le terme de gauche est impair et celui de droite est pair, ce n'est pas possible.

Donc $\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$

Allez à : Exercice 13 :

Correction exercice 14 :

$$\alpha^3=\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)^3=a+3\left(\sqrt[3]{a}\right)^2\sqrt[3]{b}+3\sqrt[3]{a}\left(\sqrt[3]{b}\right)^2+b=a+b+3\sqrt[3]{ab}\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)=a+b+3\sqrt[3]{ab}\alpha$$

Donc α vérifie

$$\alpha^3-3\sqrt[3]{ab}\alpha-a-b=0$$

Donc α est solution de

$$X^3-3\sqrt[3]{ab}X-a-b=0$$

Allez à : Exercice 14 :

Correction exercice 15 :

1. Pour tous les entiers relatifs $E(x)=x$ et donc $E(-x)=-x$, donc $E(x)+E(-x)=0$
2. Pour tous réels

$$E(x)\le x<E(x)+1$$

Si x n'est pas un entier, l'inégalité de gauche est stricte

$$E(x) < x < E(x) + 1$$

On multiplie cette inégalité par -1

$$-E(x) - 1 < -x < -E(x)$$

Cela montre que

$$E(-x) = -E(x) - 1$$

Par conséquent

$$E(x) + E(-x) = -1$$

Allez à : Exercice 15 :

Correction exercice 16 :

1. On a

$$\begin{cases} E(x) \leq x < E(x) + 1 \\ E(y) \leq y < E(y) + 1 \end{cases}$$

En faisant la somme

$$E(x) + E(y) \leq x + y < E(x) + E(y) + 2 \quad (*)$$

Donc

$$E(x+y) = E(x) + E(y) \quad \text{ou} \quad E(x+y) = E(x) + E(y) + 1$$

Car ce sont les deux seuls entiers dans l'intervalle

$$[E(x) + E(y), E(x) + E(y) + 2[$$

C'est bien ce que l'on voulait montrer.

Si dans $(*)$ on prend la partie entière, on obtient

$$E\big(E(x) + E(y)\big) \leq E(x+y) \leq E(E(x) + E(y) + 2)$$

On est obligé de changer le « $<$ » en « $\leq$ » dans la seconde égalité, à moins de préciser que $E(x) + E(y) + 2$ est un entier et alors l'inégalité reste stricte.

Puis comme $E(x) + E(y)$ et $E(x) + E(y) + 2$ sont des entiers

$$E\big(E(x) + E(y)\big) = E(x) + E(y) \quad \text{et} \quad E(E(x) + E(y) + 2) = E(x) + E(y) + 2$$

Et on obtient

$$E(x) + E(y) \leq E(x+y) \leq E(x) + E(y) + 2$$

Ce qui n'est exactement ce que l'on demandait.

Beaucoup d'entre vous semble croire que

$$E(E(x) + E(y) + 2) = E\big(E(x)\big) + E\big(E(y)\big) + E(2) = E(x) + E(y) + 2$$

C'est correct uniquement parce que $E(x)$, $E(y)$ et 2 sont des entiers, mais il est faux de penser que pour tout x et y, $E(x+y) = E(x) + E(y)$ (enfin ce n'est pas toujours vrai).

2. Si $m+n$ est pair alors il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $m + n = 2p$ alors

$$E\left(\frac{m+n}{2}\right) + E\left(\frac{n-m+1}{2}\right) = E\left(\frac{2p}{2}\right) + E\left(\frac{2p-m-m+1}{2}\right) = E(p) + E\left(\frac{2p-2m+1}{2}\right)$$
$$= p + E\left(p - m + \frac{1}{2}\right) = p + p - m = 2p - m = n$$

Si $m+n$ est impair alors il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $m + n = 2p + 1$

$$E\left(\frac{m+n}{2}\right) + E\left(\frac{n-m+1}{2}\right) = E\left(\frac{2p+1}{2}\right) + E\left(\frac{2p+1-m-m+1}{2}\right)$$
$$= E\left(p + \frac{1}{2}\right) + E\left(\frac{2p-2m+2}{2}\right) = p + E(p - m + 1) = p + p - m + 1$$
$$= 2p - m + 1 = n$$

Dans tous les cas on a

$$E\left(\frac{m+n}{2}\right) + E\left(\frac{n-m+1}{2}\right) = n$$

3.

$$E\left(\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2\right)=E\left(n+2\sqrt{n}\sqrt{n+1}+n+1\right)=E\left(2n+1+2\sqrt{n(n+1)}\right)$$
$$=2n+1+E\left(2\sqrt{n(n+1)}\right)$$
$$\left(2\sqrt{n(n+1)}\right)^2=4n(n+1)=4n^2+4n$$

Or

$$4n^2\le 4n^2+4n<4n^2+4n+1$$

Ce qui équivaut à

$$2n\le 2\sqrt{n(n+1)}<2n+1$$

Par conséquent

$$E\left(2\sqrt{n(n+1)}\right)=2n$$

On a donc pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$E\left(\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2\right)=4n+1$$

Allez à : Exercice 16 :

Correction exercice 17 :

- Premier cas :

$$E(x)\le x<E(x)+\frac{1}{2}\ (*)\quad \text{et}\quad E(y)\le y<E(y)+\frac{1}{2}\quad (**)$$

En faisant la somme de ces inégalités

$$E(x)+E(y)\le x+y<E(x)+E(y)+1$$

On en déduit que

$$E(x+y)=E(x)+E(y)$$

On multiplie $(*)$ et $(**)$ par 2.

$$2E(x)\le 2x<2E(x)+1\Rightarrow E(2x)=2E(x)$$
$$2E(y)\le 2y<2E(y)+1\Rightarrow E(2y)=2E(y)$$

Donc

$$E(x)+E(y)+E(x+y)=E(x)+E(y)+E(x)+E(y)=2E(x)+2E(y)=E(2x)+E(2y)$$
$$\le E(2x)+E(2y)$$

- Deuxième cas :

$$E(x)+\frac{1}{2}\le x<E(x)+1\ (*)\quad \text{et}\quad E(y)\le y<E(y)+\frac{1}{2}\quad (**)$$

En faisant la somme de ces inégalités

$$E(x)+E(y)+\frac{1}{2}\le x+y<E(x)+E(y)+\frac{3}{2}$$

On en déduit que

$$E(x)+E(y)\le E(x+y)\le E(x)+E(y)+1$$

On multiplie $(*)$ et $(**)$ par 2.

$$2E(x)+1\le 2x<2E(x)+2\Rightarrow E(2x)=2E(x)+1$$
$$2E(y)\le 2y<2E(y)+1\Rightarrow E(2y)=2E(y)$$

Donc

$$E(x)+E(y)+E(x+y)\le E(x)+E(y)+E(x)+E(y)+1=2E(x)+1+2E(y)=E(2x)+E(2y)$$
$$\le E(2x)+E(2y)$$

- Troisième cas :

$$E(x)\le x<E(x)+\frac{1}{2}(*)\quad \text{et}\quad E(y)+\frac{1}{2}\le y<E(y)+1\quad (**)$$

En faisant la somme de ces inégalités

$$E(x)+E(y)+\frac{1}{2}\leq x+y<E(x)+E(y)+\frac{3}{2}$$

On en déduit que

$$E(x)+E(y)\leq E(x+y)=E(x)+E(y)+1$$

On multiplie $(*)$ et $(**)$ par 2.

$$2E(x)\leq 2x<2E(x)+1\Rightarrow E(2x)=2E(x)$$
$$2E(y)+1\leq 2y<2E(y)+2\Rightarrow E(2y)=2E(y)+1$$

Donc

$$E(x)+E(y)+E(x+y)\leq E(x)+E(y)+E(x)+E(y)+1=2E(x)+2E(y)+1=E(2x)+E(2y)$$
$$\leq E(2x)+E(2y)$$

- quatrième cas :

$$E(x)+\frac{1}{2}\leq x<E(x)+1(*)\quad \text{et}\quad E(y)+\frac{1}{2}\leq y<E(y)+1\quad (**)$$

En faisant la somme de ces inégalités

$$E(x)+E(y)+1\leq x+y<E(x)+E(y)+2$$

On en déduit que

$$E(x+y)=E(x)+E(y)+1$$

On multiplie $(*)$ et $(**)$ par 2.

$$2E(x)+1\leq 2x\leq 2E(x)+2\Rightarrow E(2x)=2E(x)+1$$
$$2E(y)+1\leq 2y\leq 2E(y)+2\Rightarrow E(2y)=2E(y)+1$$

Donc

$$E(x)+E(y)+E(x+y)=E(x)+E(y)+E(x)+E(y)+1=2E(x)+2E(y)+1\leq 2E(x)+1+E(y)+1$$
$$=E(2x)+E(2y)$$

Allez à : Exercice 17 :

Correction exercice 18 :

1. Les ensembles $I_k=\left]x+\frac{k}{n},x+\frac{k+1}{n}\right]$, $k\in\{0,1,..,n-1\}$ sont disjoints deux à deux et la réunion de ces intervalles est $]x,x+1]$, comme $E(x)+1\in]x,x+1]$ et que ces ensembles sont disjoints, $E(x)+1$ appartient à un et un seul de ces ensembles, donc il existe un unique $p\in\{0,1,\dots,n-1\}$ tel que
$$x+\frac{p}{n}<E(x)+1\leq x+\frac{p+1}{n}\quad (**)$$
Remarque : l'ensemble des intervalle I_k, $k\in\{0,1,..,n-1\}$ forme une partition de $]x,x+1]$.
2. En prenant l'inégalité de droite dans $(**)$, on a les équivalences suivantes :
$$x+\frac{p}{n}<E(x)+1\Leftrightarrow nx+p<nE(x)+n\Leftrightarrow nx<nE(x)+n-p$$
En prenant l'inégalité de droite dans $(**)$, on a les équivalences suivantes :
$$E(x)+1\leq x+\frac{p+1}{n}\Leftrightarrow nE(x)+n\leq nx+p+1\Leftrightarrow nE(x)+n-p-1\leq nx$$
En réunissant ces deux inégalités on trouve l'encadrement demandé par l'énoncé.
Comme
$$nE(x)+n-p-1\leq nx<nE(x)+n-p\Leftrightarrow nE(x)+n-p-1\leq nx<nE(x)+n-p-1+1$$
On a
$$E(nx)=nE(x)+n-p-1$$
3. Pour tout $k\in\{0,\dots,p\}$,
$$E(x)\leq x+\frac{k}{n}\leq x+\frac{p}{n}<E(x)+1$$
Donc $E\left(x+\frac{k}{n}\right)=E(x)$
Pour tout $k\in\{p+1,\dots,n-1\}$,

$$E(x)+1\le x+\frac{p+1}{n}\le x+\frac{k}{n}\le x+\frac{n-1}{n}=x+1-\frac{1}{n}<x+1<E(x)+1+1=E(x)+2$$

Donc

$$E\left(x+\frac{k}{n}\right)=E(x)+1$$

4.

$$\sum_{k=0}^{n-1}E\left(x+\frac{k}{n}\right)=\sum_{k=0}^{p}E\left(x+\frac{k}{n}\right)+\sum_{k=p+1}^{n-1}E\left(x+\frac{k}{n}\right)=\sum_{k=0}^{p}E(x)+\sum_{k=p+1}^{n-1}(E(x)+1)$$
$$=(p+1)E(x)+(n-1-p)(E(x)+1)$$
$$=(p+1)E(x)+n(E(x)+1)-(1+p)E(x)-1-p=nE(x)+n-1-p=E(nx)$$

Allez à : Exercice 18 :

Correction exercice 19 :

Si n est pair, il existe $m\ge 1$ tel que $n=2m$

$$P'(x)=2mx^{2m-1}+p \quad \text{et} \quad P''(x)=2m(2m-1)x^{2m-2}$$

Comme $2m-2$ est pair pour tout $x\in\mathbb{R}$, $P''(x)>0$ donc P' est croissante sur $\mathbb{R}$.

Comme $2m-1$ est impair

$$\lim_{x\to-\infty}(2mx^{2m-1}+p)=-\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty}(2mx^{2m-1}+p)=+\infty$$

P' est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ donc il existe un unique $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $P'(\alpha)=0$ et tel que

$$x<\alpha\Rightarrow P'(x)<0 \quad \text{et} \quad x>\alpha\Rightarrow P'(x)>0$$
$$\lim_{x\to-\infty}(x^{2m}+px+q)=+\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty}(x^{2m}+px+q)=+\infty$$

Le tableau de variation de P est

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$P'(x)$		$-$	0	$+$	
$P(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$P(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

Si $P(\alpha)>0$ alors P n'a pas de solution.

Si $P(\alpha)=0$ alors P n'a qu'une solution : α.

Si $P(\alpha)<0$ alors P a deux solutions.

Si n est pair, il existe $m\ge 0$ tel que $n=2m+1$

$$P'(x)=(2m+1)x^{2m}+p \quad \text{et} \quad P''(x)=(2m+1)2mx^{2m-1}$$

Comme $2m-1$ est impair :

Si $x<0$ alors $P''(x)<0$ et $x>0$ alors $P''(x)>0$. De plus $P'(0)=p$. Comme $2m$ est pair les limites de P' en $\pm\infty$ sont $+\infty$.

On en déduit le tableau de variation de P'

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$P''(x)$		$-$	0	$+$	
$P'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	p	$\nearrow$	$+\infty$

Si $p\ge 0$ alors $\forall x\neq 0, P'(x)>0$ et $P'(0)=0$ ce qui montre que P est strictement croissante, comme $2m+1$ est impair

$$\lim_{x\to-\infty}P(x)=-\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty}P(x)=+\infty$$

Cela montre que P est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, donc il existe un unique $x_0\in\mathbb{R}$ tel que $P(x_0)=0$.

Si $p < 0$ alors il existe deux réels $\beta < 0$ et $\gamma > 0$ tels que $P'(\beta) = P'(\gamma) = 0$ et tels que le signe de P' soit strictement positif sur $]-\infty, \beta[\cup]\gamma, +\infty[$ et strictement négatif sur $]\beta, \gamma[$. comme $2m + 1$ est impair

$$\lim_{x \to -\infty} P(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} P(x) = +\infty$$

On en déduit le tableau de variation de P

x	$-\infty$		β		γ		$+\infty$
$P'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$P(x)$	$-\infty$	↗	$P(\beta)$	↘	$P(\gamma)$	↗	$+\infty$

Si $P(\beta)$ et $P(\beta)$ sont strictement positifs ou strictement négatifs $(P(\beta)P(\gamma) > 0)$ alors P n'a qu'une racine.

Si $P(\beta)$ ou $P(\beta)$ est nul $(P(\beta)P(\gamma) = 0)$, remarque les deux ne peuvent pas être nul en même temps alors P a deux racines.

Si $P(\alpha) > 0$ et $P(\beta) < 0$ alors P a trois racines.

Allez à : Exercice 19 :

Bornes supérieures et inférieures

Exercice 1 :

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, m \in \mathbb{N}^*$
$$0 < \frac{mn}{(m+n)^2} \leq \frac{1}{4}$$
2. En déduire que
$$A = \left\{\frac{mn}{(m+n)^2}, n \in \mathbb{N}^*, m \in \mathbb{N}^*\right\}$$
Admet une borne inférieure et une borne supérieure que l'on déterminera.

Allez à : Correction exercice 1 :

Exercice 2 :

Pour chacun des exercices suivants, déterminer s'il y a une borne inférieure, une borne supérieure, si oui, les déterminer.

$$A = \left\{\frac{2^n}{2^n - 1}, n \in \mathbb{N}^*\right\}; \qquad B = \left\{\frac{1}{1 - 2^{-n}}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$$
$$C = \left\{\frac{x^3}{|x^3 - 1|}, x \in]0,1[\cup]1, +\infty[\right\}; \quad D = \left\{\frac{x^n}{|x^n - 1|}, x \in]0,1[\cup]1, +\infty[, n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

Allez à : Correction exercice 2 :

Exercice 3 :

Soit
$$X = \left\{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}; p, q \in \mathbb{N}^*\right\}$$

1. Montrer que X est majoré et minoré.
2. En déduire que X possède une borne supérieure et une borne inférieure.

Allez à : Correction exercice 3 :

Exercice 4 :

Soit
$$X = \left\{\frac{(-1)^n}{n} + \frac{2}{n}; n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

1. Montrer que X est minoré et majoré.
2. Montrer que X admet un plus grand élément et le déterminer.
3. Montrer que X admet une borne supérieure et une borne inférieure et les déterminer.

Allez à : Correction exercice 4 :

Exercice 5 :

Soit
$$X = \left\{\frac{x+1}{x+2}; x \in \mathbb{R}, x \leq -3\right\}$$
Montrer que X admet une borne inférieure et une borne supérieure et les déterminer.

Allez à : Correction exercice 5 :

Exercice 6 :

Soit

$$X=\left\{\frac{2xy}{x^2+y^2}, x\in\mathbb{R}^*, y\in\mathbb{R}^*\right\}$$

1. Montrer que X admet une borne inférieure et la déterminer, est-ce un minimum ?
2. Montrer que X admet une borne supérieure et la déterminer, est-ce un maximum ?

Allez à : Correction exercice 6 :

Exercice 7 :

Soit

$$X=\left\{\frac{2p}{2pq+3}; p,q\in\mathbb{N}^*\right\}$$

1. Montrer que X est minoré et majoré.
2. En déduire que X admet une borne supérieure et une borne inférieure et les déterminer.

Allez à : Correction exercice 7 :

Exercice 8 :

On considère la partie $X=\left\{(-1)^n+\frac{1}{n}; n\in\mathbb{N}^*\right\}$

Démontrer que X possède une borne inférieure et une borne supérieure, déterminer chacune d'entre elle.

Allez à : Correction exercice 8 :

Exercice 9 :

Soient

$$X=\left\{\frac{(-1)^p}{p}+\frac{2}{p}; p\in\mathbb{N}^*\right\} \quad \text{et} \quad Y=\left\{\frac{(-1)^p}{p}+\frac{2}{q}; p\in\mathbb{N}^*; q\in\mathbb{N}^*\right\}$$

1. Montrer que X possède dans $\mathbb{R}$ une borne supérieure, une borne inférieure et les déterminer.
2. Montrer que Y possède dans $\mathbb{R}$ une borne supérieure, une borne inférieure et les déterminer.

Allez à : Correction exercice 9 :

Exercice 10 :

Soient $A\subset\mathbb{R}$ et $B=\{y=-x; x\in A\}$

1. Montrer que B est minoré si et seulement si A est majoré.
2. En supposant que A est majoré, démontrer que B admet une borne inférieure et que
$$\inf(B)=-\sup(A)$$

Allez à : Correction exercice 10 :

Exercice 11 :

On rappelle que si I est un intervalle ouvert, quel que soit $x\in I$, il existe $\epsilon>0$ tel que :
$$]x-\epsilon, x+\epsilon[\subset I$$
Plus généralement, un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété :
$$\forall x\in A, \exists\epsilon>0,]x-\epsilon, x+\epsilon[\subset A$$
est dit « ouvert ».

Soit I un intervalle ouvert. On veut démontrer qu'il n'existe pas de sous-ensemble ouverts non vides A et B de $\mathbb{R}$ tels que $I=A\cup B$ et $A\cap B=\emptyset$ (autrement dit tels que $\{A,B\}$ soit une partition de I). Pour cela on va supposer que de tels ensemble A et B existent pour aboutir à une contradiction. On considère pour cela $a\in A$ et $b\in B$ et l'ensemble
$$E=\{t\in[0,1]; a+t(b-a)\in A\}$$

1. Montrer que E admet une borne supérieure, que l'on appellera T. (On ne demande pas de trouver T).
2. Montrer (en utilisant le fait que A est ouvert) que $a+T(b-a)\notin A$.

3. En déduire (en utilisant le fait que I est un intervalle) que $a+T(b-a)\in B$.
4. Montrer (en utilisant le fait que B est ouvert) que ceci contredit le fait que T soit la borne supérieure de E.

Allez à : Correction exercice 11 :

CORRECTIONS

Correction exercice 1 :

1. m et n étant strictement positifs on a $0<\frac{mn}{(m+n)^2}$

$$\frac{1}{4}-\frac{mn}{(m+n)^2}=\frac{(m+n)^2-4mn}{(m+n)^2}=\frac{m^2+2mn+n^2-4mn}{(m+n)^2}=\frac{m^2-2mn+n^2}{(m+n)^2}=\frac{(m-n)^2}{(m+n)^2}\geq 0$$

Donc

$$\frac{mn}{(m+n)^2}\leq\frac{1}{4}$$

2. $\frac{mn}{(m+n)^2}$ est borné donc A admet une borne inférieure a telle que $0\leq a$ (car a est le plus grand des minorants) et une borne supérieure b telle que $b\leq\frac{1}{4}$ (car b le le plus petit des majorants).

Comme pour tout $m>0$ et $n>0$, $a\leq\frac{mn}{(m+n)^2}$, en prenant $m=1$ on a :

$$a\leq\frac{n}{(1+n)^2}\to 0$$

Ce qui implique que $a\leq 0$, on a donc $a=0$.

Comme pour tout $m>0$ et $n>0$, $\frac{mn}{(m+n)^2}\leq b$, en prenant $m=n$ on a :

$$\frac{n^2}{(n+n)^2}\leq b$$

Puis

$$\frac{n^2}{(n+n)^2}=\frac{n^2}{4n^2}=\frac{1}{4}$$

Montre que $\frac{1}{4}\leq b$ et finalement $b=\frac{1}{4}$.

Allez à : Exercice 1 :

Correction exercice 2 :

On pose $u_n=\frac{2^n}{2^n-1}$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est à valeur strictement positive

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{2^{n+1}}{2^{n+1}-1}}{\frac{2^n}{2^n-1}}=2\times\frac{2^n-1}{2^{n+1}-1}=\frac{2^{n+1}-2}{2^{n+1}-1}<1$$

Donc cette suite est strictement décroissante, on en déduit que

$$\sup(A)=u_1=\frac{2}{2-1}=2\qquad\text{et}\qquad\inf(A)=\lim_{n\to+\infty}\frac{2^n}{2^n-1}=1$$

Remarque : A admet un maximum 2 mais pas de minimum.

$\frac{1}{1-2^{-n}}=\frac{2^n}{2^n-1}$, par conséquent $A=B$ ces deux ensembles ont les mêmes bornes supérieures et inférieures.

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x\neq 1}}\frac{x^3}{|x^3-1|}=+\infty$$

Donc C n'admet pas de borne supérieure.

Il est évident que pour tout $x\in\,]0,1[\,\cup\,]1,+\infty[$, $\frac{x^3}{|x^3-1|}\geq 0$ donc 0 est un minorant de C par conséquent

$$0\leq\inf(C)$$

Puis remarquons que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{x^3}{|x^3-1|}=0$$

Donc

$$\inf(C)\leq 0$$

En conclusion

$$\inf(C)=0$$

Remarque : 0 n'est pas un minimum.

Remarque : on aurait pu étudier la fonction

$$]0,1[\,\cup\,]1,+\infty[\,\to \mathbb{R}$$

$$x\mapsto \frac{x^3}{|x^3-1|}$$

En faisant attention à distinguer les cas $x\in\,]0,1[$ (où $x^3-1<0$) et $x\in\,]1,+\infty[$ (où $x^3-1>0$).

Pour l'ensemble D on fait strictement le même raisonnement que pour l'ensemble C. D n'a pas de borne supérieure et sa borne inférieure est 0.

Allez à : Exercice 2 :

Correction exercice 3 :

1. Comme $p\geq 1$ et $q\geq 1$, $0<\frac{1}{p}\leq 1$ et $0<\frac{1}{q}\leq 1$, on a donc

$$0<\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\leq 1+1=2$$

Ce qui montre bien que X est majoré et minoré.

2. Pour $p=q=1$, on a

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=2$$

Donc 2 est le maximum, par conséquent sa borne supérieure.

0 est un minorant de X donc $0\leq \inf(X)$

Et

$$\lim_{\substack{p\to+\infty\\ q\to+\infty}}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)=0$$

Donc $\inf(X)\leq 0$ et finalement $\inf(X)=0$

Allez à : Exercice 3 :

Correction exercice 4 :

1. La première idée serait de montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $u_n=\frac{(-1)^n+2}{n}$ est croissante ou décroissante mais cela ne marche pas, vérifions le tout de même

$$u_{n+1}-u_n=\frac{(-1)^{n+1}+2}{n+1}-\frac{(-1)^n+2}{n}=\frac{((-1)^{n+1}+2)n-((-1)^n+2)(n+1)}{n(n+1)}$$
$$=\frac{n((-1)^{n+1}+2-(-1)^n-2)-((-1)^n+2)}{n(n+1)}=\frac{2(-1)^{n+1}n-(-1)^n-2}{n(n+1)}$$
$$=\frac{(-1)^{n+1}(2n+1)-2}{n(n+1)}$$

Selon la parité de n cette expression est positive ou négative, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas monotone, il faut faire autrement.

Pour voir ce qu'il se passe on va calculer les premiers termes de cette suite

$$u_1=1;\ \ u_2=\frac{3}{2};\ \ u_3=\frac{1}{3};\ \ u_4=\frac{3}{4};u_5=\frac{1}{5};u_6=\frac{1}{2}$$

Cela donne l'idée d'étudier les deux sous-suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général :

$$v_n = u_{2n} = \frac{3}{2n} \quad \text{et} \quad w_n = u_{2n+1} = \frac{1}{2n+1}$$

Ces deux suites sont manifestement positive, décroissante et tende vers 0, on en conclut que

$$0 < u_n < \max(v_1, w_0) = \frac{3}{2}$$

2. D'après l'étude précédente $\frac{3}{2} = u_2$ est le plus grand élément (le maximum)
3. $\frac{3}{2}$ est un maximum et donc la borne supérieure.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

Donc $\inf(X) \leq 0$,

Et comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$, 0 est un minorant donc on a $\inf(X) \geq 0$ et finalement

$$\inf(X) = 0$$

Allez à : Exercice 4 :

Correction exercice 5 :

Nous allons étudier la fonction

$$f :]-\infty, -3] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{x+1}{x+2}$$

f est définie, continue et dérivable sur $]-\infty, -3]$ (le seul problème de f est $x = -2$ qui est en dehors de l'intervalle d'étude)

$$f'(x) = \frac{1 \times (x+2) - (x+1) \times 1}{(x+2)^2} = \frac{1}{(x+2)^2} > 0$$

f est strictement croissante sur $]-\infty, -3]$, sa borne inférieure est

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{x+2} = 1$$

Et sa borne supérieure (qui est aussi un maximum) est

$$m = f(-3) = 2$$

Allez à : Exercice 5 :

Correction exercice 6 :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et pour tout $y \in \mathbb{R}^*$,

$$(x+y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy \geq 0 \Leftrightarrow -(x^2 + y^2) \leq 2xy \Leftrightarrow -1 \leq \frac{2xy}{x^2 + y^2} \quad (1)$$

On peut diviser car x (et y est non nul).

Ce qui signifie que X est une partie de $\mathbb{R}$ minorée et évidemment non vide, donc X admet une borne inférieure.

(1) montre que -1 est un minorant de X, la borne inférieure étant le plus petit des majorants donc

$$\inf(X) \geq -1$$

Si on pose $y = -x$

$$\frac{2xy}{x^2 + y^2} = \frac{-2x^2}{2x^2} = -1$$

Cela montre que

$$\inf(X) \leq 1$$

Par conséquent

$$\inf(X) = -1$$

Il s'agit d'un minimum car cette borne inférieure est dans X.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et pour tout $y \in \mathbb{R}^*$

$$(x-y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2+y^2-2xy \geq 0 \Leftrightarrow x^2+y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow 1 \geq \frac{2xy}{x^2+y^2} \quad (2)$$

Ce qui signifie que X est une partie de $\mathbb{R}$ majorée et évidemment non vide, donc X admet une borne supérieure.

(2) montre que 1 est un majorant de X, la borne supérieure étant le plus petit des majorants donc

$$\sup(X) \leq 1$$

Si on pose $y = x$

$$\frac{2xy}{x^2+y^2} = \frac{2x^2}{2x^2} = 1$$

Cela montre que

$$\sup(X) \geq 1$$

Par conséquent

$$\sup(X) = 1$$

Il s'agit d'un maximum car cette borne supérieure est dans X.

Allez à : Exercice 6 :

Correction exercice 7 :

1.

$$\frac{2p}{2pq+3} < \frac{2p}{2pq} = \frac{1}{q} \leq 1$$

Donc X est majoré.

$$\frac{2p}{2pq+3} > 0$$

Donc X est minoré.

2. Fixons $q = 1$ et faisons tendre p vers l'infini.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2p}{2pq+3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2p}{2p+3} = 1$$

Donc

$$\sup(X) \geq 1$$

D'autre part

$$\frac{2p}{2pq+3} < 1$$

Donc $\sup(X) \leq 1$ et finalement $\sup(X) = 1$.

Allez à : Exercice 7 :

Correction exercice 8 :

Manifestement la suite de terme général $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ est ni croissante ni décroissante, elle est même de signe alterné. Nous allons considérer les deux sous-suites $(v_n)_{n\geq 1}$ et $(w_n)_{n\geq 0}$ de nombres réels définies par

$$v_n = u_{2n} = 1 + \frac{1}{2n} \qquad et \qquad w_n = u_{2n+1} = -1 + \frac{1}{2n+1}$$

$$\forall n \geq 1, v_{n+1} - v_n = 1 + \frac{1}{2(n+1)} - \left(1 + \frac{1}{2n}\right) = \frac{2n - 2(n+1)}{2n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0$$

Donc la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est décroissante

$$v_1 = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} v_n = 1$$

$$\forall n \geq 1, w_{n+1} - w_n = -1 + \frac{1}{2(n+1)+1} - \left(-1 + \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{2n+1-(2n+3)}{(2n+3)(2n+1)}$$
$$= \frac{-2}{(2n+3)(2n+1)} < 0$$
$$w_0 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} w_n = -1$$
$$X = \left\{1 + \frac{1}{2n}; n \in \mathbb{N}^*\right\} \cup \left\{-1 + \frac{1}{2n+1}; n \in \mathrm{m}\right\}$$
$$\sup(X) = \max\left(sup\left(\left\{1 + \frac{1}{2n}; n \in \mathbb{N}^*\right\}\right), sup\left(\left\{-1 + \frac{1}{2n+1}; n \in \mathrm{m}\right\}\right)\right) = \max\left(\frac{3}{2}, 0\right) = \frac{3}{2}$$

Remarque : $\sup(X) = \max(X)$

$$\inf(X) = \min\left(\inf\left(\left\{1 + \frac{1}{2n}; n \in \mathbb{N}^*\right\}\right), \inf\left(\left\{-1 + \frac{1}{2n+1}; n \in \mathrm{m}\right\}\right)\right) = \min(1, -1) = -1$$

Allez à : Exercice 8 :

Correction exercice 9 :

1. On pose pour tout $p \geq 1$:

$$u_p = \frac{(-1)^p}{p} + \frac{2}{p}$$

Cette suite est ni croissante ni décroissante (à vérifier)

On pose

$$\forall p \geq 1, v_p = u_{2p} = \frac{1}{2p} + \frac{2}{2p} = \frac{3}{2p} \quad \text{et} \quad \forall p \geq 0, w_p = u_{2p+1} = -\frac{1}{2p+1} + \frac{2}{2p+1} = \frac{1}{2p+1}$$

Les suites $(v_p)_{p\geq 1}$ et $(w_p)_{p\geq 0}$ sont décroissantes, c'est évident.

$$v_1 = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{p\to+\infty} v_p = 0$$
$$w_0 = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{p\to+\infty} w_p = 0$$
$$\sup(X) = \max(v_p;\ p \geq 1, w_p; p \geq 0) = \max\left(\frac{3}{2}, 1\right) = \frac{3}{2}$$

Remarque cette borne supérieure est un maximum.

$$\inf(X) = \min(v_p;\ p \geq 1, w_p; p \geq 0) = \min(0; 0) = 0$$

Remarque : cette borne inférieure n'est pas un minimum.

2.

$$\sup(Y) = \sup\left(\left\{\frac{(-1)^p}{p}; p \in \mathbb{N}^*\right\}\right) + \sup\left(\left\{\frac{2}{q}; q \in \mathbb{N}^*\right\}\right)$$

En distinguant p pair et p impair, on voit que :

$$\sup\left(\left\{\frac{(-1)^p}{p}; p \in \mathbb{N}^*\right\}\right) = \frac{(-1)^2}{2} = \frac{1}{2}$$

Comme la suite de terme général de terme général $\frac{2}{q}$ est décroissante donc

$$\sup\left(\left\{\frac{2}{q}; q \in \mathbb{N}^*\right\}\right) = 2$$

On en déduit que

$$\sup(Y) = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$$

Remarque : cette borne supérieure est un maximum.

$$\inf(Y) = \inf\left(\left\{\frac{(-1)^p}{p}; p \in \mathbb{N}^*\right\}\right) + \inf\left(\left\{\frac{2}{q}; q \in \mathbb{N}^*\right\}\right)$$

En allant un peu vite et en distinguant p pair et p impair

$$\inf\left(\left\{\frac{(-1)^p}{p};p\in\mathbb{N}^*\right\}\right)=\frac{(-1)^1}{1}=-1$$

Comme la suite de terme général de terme général $\frac{2}{q}$ est décroissant et tend vers 0 donc

$$\inf\left(\left\{\frac{2}{q};q\in\mathbb{N}^*\right\}\right)=0$$

$$\inf(Y)=\inf\left(\left\{\frac{(-1)^p}{p};p\in\mathbb{N}^*\right\}\right)+\inf\left(\left\{\frac{2}{q};q\in\mathbb{N}^*\right\}\right)=-1+0=-1$$

Remarque : cette borne inférieure n'est pas un minimum.

Allez à : Exercice 9 :

Correction exercice 10 :

1. Si B est minoré alors il existe $m\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $y\in B$, $m\leq y$ alors il existe $m\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $y\in B$, $-y\leq -m$, comme tous les éléments de A sont de la forme $-y$, $y\in B$, cela montre qu'il existe $-m\in\mathbb{R}$ tel que pour tous $x\in A$, $x\leq -m$, autrement dit A est majoré.
   Réciproque :
   Si A est majoré, il existe $M\in\mathbb{R}$ tel que pour tous $x\in A$, $x\leq M$ alors il existe $M\in\mathbb{R}$ tel que pour tous $x\in A$, $-M\leq -x$, comme tous les éléments de B sont de la forme $-x$, $x\in A$, il existe $M\in\mathbb{R}$ tel que pour tous $y\in B$, $-M\leq y$, autrement dit B est minoré.
2. Si A est majoré, A admet une borne supérieure $\sup(A)$ et d'après le 1. B est minoré et donc admet une borne inférieure $\inf(B)$.
   Pour tout M un majorant de A : $\sup(A)\leq M$
   D'après 1. $-M$ est un minorant de B : $-M\leq\inf(B)$
   On en déduit que pour tout M, majorant de A : $-\inf(B)\leq M$, cela entraine que
   $$-\inf(B)\leq\sup(A)$$
   De même pour m un minorant de B : $m\leq\inf(B)$
   D'après 1. $-m$ est un majorant de A : $\sup(A)\leq -m$
   On en déduit que pour tout m, minorant de B : $\sup(A)\leq -m$, cela entraine que
   $$\sup(A)\leq -\inf(B)$$
   Donc
   $$\sup(A)=-\inf(B)\Leftrightarrow\inf(B)=-\sup(A)$$

Allez à : Exercice 10 :

Correction exercice 11 :

1. $E\subset[0,1]$, ce qui signifie que E est une partie de $\mathbb{R}$ bornée par 1 et non vide car $a=0\times(b-a)\in E$ donc E admet une borne supérieure.
2. Si $a+T(b-a)\in A$ alors il existe $\epsilon>0$ tel que
   $$]a+T(b-a)-\epsilon,a+T(b-a)+\epsilon[\in A$$
   Car A est un ouvert.
   Ce qui entraine que
   $$a+T(b-a)+\frac{\epsilon}{2}\in A$$
   Or
   $$a+T(b-a)+\frac{\epsilon}{2}=a+T(b-a)+\frac{1}{2}\times\frac{\epsilon}{b-a}(b-a)=a+\left(T+\frac{1}{2}\times\frac{\epsilon}{b-a}\right)(b-a)$$
   Donc
   $$a+\left(T+\frac{1}{2}\times\frac{\epsilon}{b-a}\right)(b-a)\in A$$
   Et par définition de E :

$$T+\frac{1}{2}\times\frac{\epsilon}{b-a}\in E$$

Ce qui n'est pas possible car

$$T<T+\frac{1}{2}\times\frac{\epsilon}{b-a}$$

Et T est supposer être la borne supérieure de E.

Par conséquent $a+T(b-a)\notin A$.

3. $T\in[0,1]$ donc

$$0\leq T(b-a)\leq b-a$$

Ce qui entraine que

$$a\leq a+T(b-a)\leq b$$

$a+T(b-a)\in[a,b]$ comme I est un intervalle $a+T(b-a)\in I$, de plus D'après 2.

$a+T(b-a)\notin A$ donc $a+T(b-a)\in B$ puisque $A\cup B=I$.

4. Comme B est ouvert et que $a+T(b-a)\in B$ il existe ϵ tel que

$$]a+T(b-a)-\epsilon,a+T(b-a)+\epsilon[\in B$$

Ce qui entraine que

$$a+T(b-a)-\frac{\epsilon}{2}\in B$$

Or

$$a+T(b-a)-\frac{\epsilon}{2}=a+T(b-a)-\frac{1}{2}\times\frac{\epsilon}{b-a}(b-a)=a+\left(T-\frac{1}{2}\times\frac{\epsilon}{b-a}\right)(b-a)$$

Donc

$$a+\left(T-\frac{1}{2}\times\frac{\epsilon}{b-a}\right)(b-a)\in B$$

Ce qui entraine que

$$a+\left(T-\frac{1}{2}\times\frac{\epsilon}{b-a}\right)(b-a)\notin A$$

Comme $T-\frac{1}{2}\times\frac{\epsilon}{b-a}<T\leq 1$, $T-\frac{1}{2}\times\frac{\epsilon}{b-a}\in[0,1]$ (quitte à diminuer ϵ pour que $T-\frac{1}{2}\times\frac{\epsilon}{b-a}$ reste positif) et par définition de E :

$$T-\frac{1}{2}\times\frac{\epsilon}{b-a}\notin E$$

Ce qui n'est pas possible car

$$T-\frac{1}{2}\times\frac{\epsilon}{b-a}<T$$

Comme pour tout $\epsilon'>0$, $T-\epsilon'\in E$, en prenant

$$\epsilon'=\frac{1}{2}\times\frac{\epsilon}{b-a}$$

Il y a une contradiction. Elle se situe dans l'implication

$$a+\left(T-\frac{1}{2}\times\frac{\epsilon}{b-a}\right)(b-a)\in B\Rightarrow a+\left(T-\frac{1}{2}\times\frac{\epsilon}{b-a}\right)(b-a)\notin A$$

C'est-à-dire dans le fait que $A\cap B=\emptyset$

Allez à : Exercice 11 :

Pascal Lainé

Calculs algébriques

Exercice 1 :

Si a et b sont des réels positifs ou nuls, montrer que

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}\leq\sqrt{2}\sqrt{a+b}$$

Allez à : Correction exercice 1 :

Exercice 2 :

Montrer que pour tous réels a et b strictement positifs

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leq\sqrt{ab}$$

Allez à : Correction exercice 2 :

Exercice 3 :

Montrer que pour tout réels non nuls x et y :

$$\frac{2|x||y|}{x^2+y^2}\leq 1$$

Allez à : Correction exercice 3 :

Exercice 4 :

Déterminer les ensembles suivants, mettre ces ensemble sous la forme d'un intervalle de $\mathbb{R}$ ou une réunion d'intervalles.

$$A_1=\{x\in\mathbb{R},x^2<1\}$$
$$A_2=\{x\in\mathbb{R},x^3\leq 1\}$$
$$A_3=\left\{x\in\mathbb{R},-1<\frac{2x}{x^2+1}<1\right\}$$
$$A_4=\left\{x\in\mathbb{R}^*,\frac{1}{|x|}>1\right\}$$
$$A_5=\left\{x\in\mathbb{R},-1<\frac{1}{x^2-1}<1\right\}$$

Allez à : Correction exercice 4 :

Exercice 5 :

Trouver tous les réels x tels que $|x-1|+|x-2|=2$

Allez à : Correction exercice 5 :

Exercice 6 :

Résoudre l'équation

$$\sqrt{41-x}+\sqrt{41+x}=10$$

Indication :

Malgré les apparences il n'est pas nécessaire de connaitre la valeur de 41^2

Allez à : Correction exercice 6 :

Exercice 7 :

1. Résoudre

$$|u-1|+|u+1|=4$$

2. En déduire les solutions de

$$\left|\sqrt{x+1}-1\right|+\left|\sqrt{x+1}+1\right|=4$$

3. Puis les solutions de

$$\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}=4$$

Allez à : Correction exercice 7 :

Exercice 8 :

Démontrer que $\sqrt[3]{3+2\sqrt{6}}$ est un nombre irrationnel.

Allez à : Correction exercice 8 :

Exercice 9 :

Montrer que $\alpha=\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ est un nombre entier.

Allez à : Correction exercice 9 :

Exercice 10 :

Soit

$$\alpha=\sqrt{4-2\sqrt{3}}+\sqrt{4+2\sqrt{3}}$$

Montrer que $\alpha\in\sqrt{3}\mathbb{N}$ (C'est-à-dire de la forme $\sqrt{3}$ multiplié par un entier naturel).

Allez à : Correction exercice 10 :

Exercice 11 :

Soit $\alpha=\sqrt{4-2\sqrt{3}}-\sqrt{4+2\sqrt{3}}$

Calculer α.

Allez à : Correction exercice 11 :

Exercice 12 :

On rappelle que $\sqrt{2}$ est irrationnel (c'est-à-dire que $\sqrt{2}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$).

1. Montrer que $\alpha=6+4\sqrt{2}$ et $\beta=6-4\sqrt{2}$ sont irrationnels.
2. Calculer $\sqrt{\alpha\beta}$.
3. Montrer que $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ est rationnel.

Allez à : Correction exercice 12 :

Exercice 13 :

On suppose que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ et $\sqrt{6}$ sont irrationnels. Montrer que

1. $\sqrt{2}+\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$
2. $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2\notin\mathbb{Q}$
3. $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}\notin\mathbb{Q}$
4. $\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)^2\notin\mathbb{Q}$. On rappelle que $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

Allez à : Correction exercice 13 :

Exercice 14 :

Montrer que $\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$

Allez à : Correction exercice 14 :

Exercice 15 :

Soient a et b deux réels. On appelle $\alpha = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$

Montrer que α est une racine d'une équation du troisième degré à coefficients réels

Allez à : Correction exercice 15 :

Exercice 16 :

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{Z}, E(x) + E(-x) = 0$
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, E(x) + E(-x) = -1$

Allez à : Correction exercice 16 :

Exercice 17 :

1. Montrer que pour tout réels x et y on a :
$$E(x) + E(y) \leq E(x + y) \leq E(x) + E(y) + 1$$
2. Montrer que pour tout entier relatif on a :
$$E\left(\frac{m+n}{2}\right) + E\left(\frac{n-m+1}{2}\right) = n$$
On pourra distinguer les cas $m + n$ pair et $m + n$ impairs.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$E\left(\left(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right)^2\right) = 4n + 1$$

On pourra montrer que $E\left(2\sqrt{n(n+1)}\right) = 2n$

Allez à : Correction exercice 17 :

Exercice 18 :

Montrer que pour tout x et y réels on a :
$$E(x) + E(y) + E(x + y) \leq E(2x) + E(2y)$$
On pourra distinguer les cas

$\left(E(x) \leq x < E(x) + \frac{1}{2} \text{ ou } E(x) + \frac{1}{2} \leq x < E(x) + 1\right)$ et $\left(E(y) \leq y < E(y) + \frac{1}{2} \text{ ou } E(y) + \frac{1}{2} \leq y < E(y) + 1\right)$.

Ce qui fait 4 cas (n'est-ce pas ?).

Allez à : Correction exercice 18 :

Exercice 19 :

Le but de cet exercice est de montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$
$$\sum_{k=0}^{n-1} E\left(x + \frac{k}{n}\right) = E(nx) \quad (*)$$
Où $E(y)$ est la partie entière du réel y.

1. Montrer qu'il existe un unique $p \in \{0,1, \ldots, n-1\}$ tel que
$$x + \frac{p}{n} < E(x) + 1 \leq x + \frac{p+1}{n}$$
On pourra appuyer son raisonnement en traçant la droite réelle et en plaçant
$$E(x), x, x + \frac{k}{n}, k \in \{0,1, .., n-1\}, E(x) + 1 \text{ et } x + \frac{p+1}{n}$$
2. En déduire que
$$nE(x) + n - p - 1 \leq nx < nE(x) + n - p$$
Et $E(nx)$ en fonction de n, $E(x)$ et p.

3. Calculer $E\left(x+\frac{k}{n}\right)$ pour tout $k \in \{0, \dots, p\}$ et calculer $E\left(x+\frac{k}{n}\right)$ pour tout $k \in \{p+1, \dots, n-1\}$.
4. En coupant la somme $\sum_{k=0}^{n-1} E\left(x+\frac{k}{n}\right)$ en 2, montrer l'égalité $(*)$.

Allez à : Correction exercice 19 :

Exercice 20 :

Soient p et q deux nombres réels non nuls et n un entier strictement positif.

Montrer que le polynôme $P(x) = x^n + px + q$ ne peut avoir plus que deux racines réelles si n est pair et plus que trois racines si n est impairs.

Allez à : Correction exercice 20 :

Exercice 21 :

1. Factoriser $a^n - b^n$ en $a - b$ et un autre facteur que l'on précisera.
2. Application : factoriser, en justifiant les réponses, les sommes suivantes. $n \in \mathbb{N}$

$$A = a^n - 1 \qquad B = a^{2n+1} + 1$$

Allez à : Correction exercice 21 :

Exercice 22 :

On rappelle que :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (k-1)k$$

2. On pose $v_k = k(k-1)(k-2)$
   a. Montrer que pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, $v_{k+1} - v_k = 3k(k-1)$
   b. Calculer alors

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} (v_{k+1} - v_k)$$

   En fonction de S_n.
   c. Que peut-on en déduire pour T_n ?

Allez à : Correction exercice 22 :

Exercice 23 :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

a. Montrer que

$$\sum_{1 \leq k, l \leq n} |k - l| = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{k-1} (k-l) + \sum_{l=k}^{n} (l-k) \right)$$

b. Montrer que

$$\sum_{l=1}^{k-1} (k-l) + \sum_{l=k}^{n} (l-k) = \sum_{p=1}^{k-1} p + \sum_{p=0}^{n-k} p$$

c. En déduire que

$$\sum_{l=1}^{k-1}(k-l)+\sum_{l=k}^{n}(l-k)=k^2-(n+1)k+\frac{n(n+1)}{2}$$

d. On rappelle que

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Déduire des questions précédentes que

$$\sum_{1\leq k,l\leq n}|k-l|=\frac{n(n+1)(n-1)}{3}$$

Allez à : Correction exercice 23 :

Exercice 24 :

1. Soit k un entier compris entre 2 et $n+1$. Montrer que :

$$k(k-1)\binom{n+1}{k}=(n+1)n\binom{n-1}{k-2}$$

2. En déduire la valeur de la somme

$$\sum_{k=2}^{n+1}k(k-1)\binom{n+1}{k}$$

Allez à : Correction exercice 24 :

Exercice 25 :

Soient $m,n\in\mathbb{N}$, $m\leq n$. Montrer sans calculs que

$$\binom{m}{m}+\binom{m+1}{m}+\cdots+\binom{n}{m}=\binom{n+1}{m+1}$$

En utilisant la formule pour tout $k\in\mathbb{N}$,

$$\binom{n-k+1}{m+1}=\binom{n-k}{m}+\binom{n-k}{m+1}$$

Allez à : Correction exercice 25 :

Exercice 26 :

Démontrer que pour tout $n,p,k\in\mathbb{N}$, $n\geq p\geq k$

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}=\binom{p}{k}\binom{n}{p}$$

Calculer

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$$

Allez à : Correction exercice 26 :

Exercice 27 :

Soient a et b deux réels et n un entier naturel.

1. Exprimer $(a+b)^n$ en fonction de $k\in\mathbb{Z}$.
2. Calculer, en justifiant les réponses :

$$A=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\quad \text{et}\quad B=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k$$

Allez à : Correction exercice 27 :

Exercice 28 :

1. Montrer que pour tout n et $k \in \mathbb{N}$,
$$(n+1)\binom{n}{k} = (k+1)\binom{n+1}{k+1}$$
En déduire que :
$$\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$$
2. Montrer, en détaillant les calculs que
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1)$$

Allez à : Correction exercice 28 :

Exercice 29 :

Calculer
$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$$

Allez à :

CORRECTIONS

Correction exercice 1 :
$$\left(\sqrt{2}\sqrt{a+b}\right)^2 - \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = 2(a+b) - \left(a+2\sqrt{a}\sqrt{b}+b\right) = a - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b = \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geq 0$$
Ces deux expressions ($\sqrt{a}+\sqrt{b}$ et $\sqrt{2}\sqrt{a+b}$) sont positives donc
$$\left(\sqrt{2}\sqrt{a+b}\right)^2 \geq \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sqrt{a+b} \geq \sqrt{a}+\sqrt{b}$$

Allez à : Exercice 1 :

Correction exercice 2 :
$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \Leftrightarrow \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{ab}}{a+b} \leq 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{ab} \leq a+b \Leftrightarrow 0 \leq a - 2\sqrt{ab} + b \Leftrightarrow 0 \leq \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2$$
La dernière assertion est vraie donc la première aussi.

Allez à : Exercice 2 :

Correction exercice 3 :
$$(|x|-|y|)^2 \geq 0 \Leftrightarrow |x|^2 - 2|x||y| + |y|^2 \geq 0 \Leftrightarrow |x|^2 + |y|^2 \geq 2|x||y| \Leftrightarrow x^2+y^2 \geq 2|x||y| \Leftrightarrow \frac{2|x||y|}{x^2+y^2} \leq 1$$
Car x et y non nul entraine que $x^2+y^2 \neq 0$

Allez à : Exercice 3 :

Correction exercice 4 :
$$A_1 =]-1,1[$$
$$A_2 =]-\infty, 1]$$

$$1-\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^2=\frac{(x^2+1)^2-4x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{x^4+2x^2+1-4x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{x^4-2x^2+1}{(x^2+1)^2}=\frac{(x^2-1)^2}{(x^2+1)^2}$$

Donc

$$\forall x\in\mathbb{R}, 1-\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^2>0\Leftrightarrow\frac{(x^2-1)^2}{(x^2+1)^2}>0\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$$

On pouvait aussi étudier la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$$

On en déduit que :

$$A_3=]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[$$

$$\forall x\in\mathbb{R}^*,\frac{1}{|x|}>1\Leftrightarrow|x|<1$$

$$A_4=]-1,0[\cup]0,1[$$

Pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$

$$1-\left(\frac{1}{x^2-1}\right)^2=\frac{(x^2-1)^2-1}{(x^2-1)^2}=\frac{x^4-2x^2+1-1}{(x^2-1)^2}=\frac{x^4-2x^2}{(x^2-1)^2}=\frac{x^2(x^2-2)}{(x^2-1)^2}>0$$

Comme x^2-2 est positif si et seulement si $x\in\left]-\infty,-\sqrt{2}\right[\cup\left]\sqrt{2},+\infty\right[$

Donc

$$\left(\frac{1}{x^2-1}\right)^2<1\Leftrightarrow1-\left(\frac{1}{x^2-1}\right)^2>0\Leftrightarrow x\in\left]-\infty,-\sqrt{2}\right[\cup\left]\sqrt{2},+\infty\right[$$

Par conséquent

$$A_5=\left]-\infty,-\sqrt{2}\right[\cup\left]\sqrt{2},+\infty\right[$$

Allez à : Exercice 4 :

Correction exercice 5 :

On pose $f(x)=|x-1|+|x-2|$

Pour $x\leq1$, $x-1\leq0$ et $x-2\leq-1<0$ donc

$$f(x)=-(x-1)-(x-2)=-2x+3$$

Pour $1\leq x\leq2$, $x-1\geq0$ et $x-2\leq0$ donc

$$f(x)=|x-1|+|x-2|=x-1-(x-2)=1$$

Pour $x\geq2$, $x-1\geq1>0$ et $x-2\geq0$ donc

$$f(x)=|x-1|+|x-2|=x-1+x-2=2x-3$$

Puis on va résoudre $f(x)=2$ sur chacun des trois intervalles.

$$\begin{cases}f(x)=2\\x\leq1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2x+3=2\\x\leq1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\x\leq1\end{cases}$$

$\frac{1}{2}\leq1$ donc $\frac{1}{2}$ est solution.

$$\begin{cases}f(x)=2\\1\leq x\leq2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1=2\\1\leq x\leq2\end{cases}$$

Il n'y a pas de solution dans cet intervalle.

$$\begin{cases}f(x)=2\\2\leq x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-3=2\\2\leq x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{5}{2}\\2\leq x\end{cases}$$

$2\leq\frac{5}{2}$ donc $\frac{5}{2}$ est solution.

Les réels qui vérifient $|x-1|+|x-2|=2$ sont $\left\{\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right\}$

Allez à : Exercice 5 :

Correction exercice 6 :

Les éventuelles solutions vérifient $41 - x \geq 0$ et $41 + x \geq 0$, autrement dit $-41 \leq x \leq 41$, ce sera bien le cas des deux solutions trouvées.

Comme ces deux expressions sont positives on a

$$\sqrt{41-x} + \sqrt{41+x} = 10 \Leftrightarrow \left(\sqrt{41-x}+\sqrt{41+x}\right)^2 = 100 \Leftrightarrow 41 - x + 2\sqrt{41-x}\sqrt{41+x} + 41 + x = 100$$
$$\Leftrightarrow 82 + 2\sqrt{41^2 - x^2} = 100 \Leftrightarrow 2\sqrt{41^2-x^2} = 18 \Leftrightarrow \sqrt{41^2-x^2} = 9 \Leftrightarrow 41^2 - x^2 = 9^2$$
$$\Leftrightarrow 41^2 - 9^2 = x^2 \Leftrightarrow x^2 = (41-9)(41+9) \Leftrightarrow x^2 = 32 \times 50 = 16 \times 100 = (4 \times 10)^2 \Leftrightarrow x = \pm 40$$

Allez à : Exercice 6 :

Correction exercice 7 :

1. On pose $f(u) = |u-1| + |u+1|$

   Si $u < -1$, $u - 1 < 0$ et $u + 1 < 0$ alors $f(u) = -(u-1) - (u+1) = -2u$
   $$\forall u < -1, f(u) = 4 \Leftrightarrow -2u = 4 \Leftrightarrow u = -2$$
   Si $-1 \leq u \leq 1$, , $u - 1 < 0$ et $u + 1 > 0$ alors $f(u) = -(u-1) + (u+1) = 2$

   $f(u) = 4$ n'a pas de solution

   Si $u > 1$, $u - 1 > 0$ et $u + 1 > 0$ alors $f(u) = (u-1) + (u+1) = 2u$
   $$\forall u > 1, f(u) = 4 \Leftrightarrow 2u = 4 \Leftrightarrow u = 2$$
   Il y a deux solutions -2 et 2.
2. D'après la première question il faut et il suffit de résoudre
   $$\sqrt{x+1} = -2 \quad \text{et} \quad \sqrt{x+1} = 2$$
   $\sqrt{x+1} = -2$ n'a pas de solution réelle et $\sqrt{x+1} = 2$ équivaut à $x + 1 = 4$, c'est-à-dire à $x = 3$.
3.
   $$x + 2 - 2\sqrt{x+1} = x + 1 - 2\sqrt{x+1} + 1 = \left(\sqrt{x+1} - 1\right)^2$$
   Et
   $$x + 2 + 2\sqrt{x+1} = x + 1 \mp \sqrt{x+1} + 1 = \left(\sqrt{x+1} + 1\right)^2$$
   Par conséquent
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{\left(\sqrt{x+1}-1\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{x+1}+1\right)^2} = 4$$
   $$\Leftrightarrow \left|\sqrt{x+1} - 1\right| + \left|\sqrt{x+1}+1\right| = 4 \Leftrightarrow x = 3$$

Allez à : Exercice 7 :

Correction exercice 8 :

Supposons que $\sqrt[3]{3 + 2\sqrt{6}}$ soit un nombre rationnel, il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$, on peut supposer qu'ils sont positifs tous les deux
tels que
$$\sqrt[3]{3+2\sqrt{6}} = \frac{p}{q}$$
On élève au cube
$$3 + 2\sqrt{6} = \frac{p^3}{q^3} \Leftrightarrow 3 + 2\sqrt{6} = \frac{p^3}{q^3} \Leftrightarrow \sqrt{6} = \frac{1}{2}\left(\frac{p^3}{q^3} - 3\right)$$
Ce qui signifie que $\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$, il existe $p_1 \in \mathbb{N}$ et $q_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que
$$\sqrt{6} = \frac{p_1}{q_1}$$

On peut supposer que p_1 et q_1 ne sont pas tous les deux pairs sinon on peut simplifier par 2.

$$\sqrt{6}=\frac{p_1}{q_1}\Leftrightarrow 6q_1^2=p_1^2\quad (1)$$

Si p_1 est impair, son carré est aussi impair ce qui est impossible d'après (1) donc $p_1$est pair et donc q_1 est impair, il existe p_2 tel que $p_1=2p_2$ et q_2 tel que $q_1=2q_2+1$, ce que l'on remplace dan (1)

$$6(2q_2+1)^2=4p_2^2\Leftrightarrow 3(4q_2^2+4q_2+1)=2p_2^2\Leftrightarrow 3=2p_2^2-12q_2^2-12q_2$$

Ce qui est impossible, donc $\sqrt[3]{3+2\sqrt{6}}$ n'est pas un nombre rationnel.

Allez à : Exercice 8 :

Correction exercice 9 :

$$\alpha^2=\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^2=7+4\sqrt{3}+2\sqrt{7+4\sqrt{3}}\sqrt{7-4\sqrt{3}}+7-4\sqrt{3}$$
$$=14+2\sqrt{(7+4\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})}=14+2\sqrt{7^2-4^2\times 3}=14+2\sqrt{49-48}$$
$$=14+2\times 1=16$$

Les deux valeurs possibles de α sont $\alpha=-4$ et $\alpha=4$, comme $\alpha>0$, on a

$$\alpha=4\in\mathbb{Z}$$

Allez à : Exercice 9 :

Correction exercice 10 :

$$\alpha^2=4-2\sqrt{3}+2\sqrt{4-2\sqrt{3}}\sqrt{4+2\sqrt{3}}+4+2\sqrt{3}=8+2\sqrt{4^2-2^2\times 3}=8+2\sqrt{4}=12$$

Donc $\alpha=2\sqrt{3}$ car $\alpha>0$ et $2\in\mathbb{N}$

Allez à : Exercice 10 :

Correction exercice 11 :

$$\alpha^2=\left(\sqrt{4-2\sqrt{3}}-\sqrt{4+2\sqrt{3}}\right)^2=4-2\sqrt{3}-2\sqrt{4-2\sqrt{3}}\sqrt{4+2\sqrt{3}}+4+2\sqrt{3}=8-2\sqrt{4^2-2^2\times 3}$$
$$=8-2\sqrt{4}=8-4=4$$

Donc $\alpha=\pm 2$ or $4-2\sqrt{3}<4+2\sqrt{3}$ entraine que $\alpha=-2$

Allez à : Exercice 11 :

Correction exercice 12 :

1. Si α est rationnel alors

$$\sqrt{2}=\frac{\alpha-6}{4}$$

Est rationnel, ce qui est faux d'après le cours.

Si β est rationnel alors

$$\sqrt{2}=\frac{\beta-6}{-4}$$

Est rationnel, ce qui est faux d'après le cours.

Donc α et β sont irrationnel.

2.

$$\sqrt{\alpha\beta}=\sqrt{(6+4\sqrt{2})(6-4\sqrt{2})}=\sqrt{6^2-4^2\times 2}=\sqrt{36-32}=\sqrt{4}=2\in\mathbb{Q}$$

3.

$$\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)^2=\alpha+2\sqrt{\alpha\beta}+\beta=6+4\sqrt{2}+4+6-4\sqrt{2}=16$$

Comme $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}>0$, $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=4\in\mathbb{Q}$.

Allez à : Exercice 12 :

Correction exercice 13 :

1. Si $\sqrt{2}+\sqrt{3}\in\mathbb{Q}$ alors il existe $p\in\mathbb{Z}$ et $q\in\mathbb{N}^*$ tel que
$$\sqrt{2}+\sqrt{3}=\frac{p}{q}$$
Ce qui entraine que
$$\sqrt{2}=\frac{p}{q}-\sqrt{3}$$
Puis on élève au carré
$$2=\frac{p^2}{q^2}-\frac{2p}{q}\sqrt{3}+3$$
On isole $\sqrt{3}$
$$\sqrt{3}=-\frac{q}{2p}\left(-\frac{p^2}{q^2}-1\right)$$
Ce qui montre que $\sqrt{3}\in\mathbb{Q}$, il y a donc une contradiction, par conséquent
$$\sqrt{2}+\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$$
Je rappelle que le raisonnement suivant est faux
$$\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}\quad\text{et}\quad\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}\Rightarrow\sqrt{2}+\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$$

2. Si $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2\in\mathbb{Q}$ alors il existe $p\in\mathbb{Z}$ et $q\in\mathbb{N}^*$ tel que
$$\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2=\frac{p}{q}$$
On élève au carré
$$2+2\sqrt{6}+3=\frac{p^2}{q^2}$$
On isole $\sqrt{6}$
$$\sqrt{6}=\frac{1}{2}\left(-1+\frac{p^2}{q^2}\right)$$
Ce qui montre que $\sqrt{6}\in\mathbb{Q}$, il y a une contradiction donc
$$\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2\notin\mathbb{Q}$$
3. Si $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}\in\mathbb{Q}$ alors il existe $p\in\mathbb{Z}$ et $q\in\mathbb{N}^*$ tel que
$$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}=\frac{p}{q}$$
Ce qui entraine que
$$\sqrt{2}+\sqrt{3}=\frac{p}{q}-\sqrt{6}$$
Puis on élève au carré
$$2+2\sqrt{2}\sqrt{3}+3=\frac{p^2}{q^2}-\frac{2p}{q}\sqrt{6}+6$$
Ce qui équivaut à
$$5+2\sqrt{6}+\frac{2p}{q}\sqrt{6}=6+\frac{p^2}{q^2}$$

Soit encore

$$\sqrt{6}=\frac{1+\frac{p^2}{q^2}}{2+\frac{2p}{q}}$$

Ce qui montre que $\sqrt{6}\in\mathbb{Q}$, il y a donc une contradiction par conséquent

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}\notin\mathbb{Q}$$

4. Si $\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)^2\in\mathbb{Q}$ alors il existe $p\in\mathbb{Z}$ et $q\in\mathbb{N}^*$ tel que

$$\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)^2=\frac{p^2}{q^2}$$

On développe le carré avec la formule $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

$$3^2\times 2+2^2\times 3+6+2\times 3\times 2\sqrt{2}\sqrt{3}+2\times 3\sqrt{2}\sqrt{6}+2\times 2\sqrt{3}\sqrt{6}=\frac{p^2}{q^2}$$

Puis

$$36+12\sqrt{6}+6\sqrt{12}+4\sqrt{18}=\frac{p^2}{q^2}$$

En simplifiant et en arrangeant les choses

$$12\sqrt{6}+6\sqrt{2^2\times 3}+4\sqrt{3^2\times 2}=\frac{p^2}{q^2}-36$$

$$12\sqrt{6}+12\sqrt{3}+12\sqrt{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{p^2}{q^2}-36\right)$$

$$\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}=\frac{1}{24}\left(\frac{p^2}{q^2}-36\right)$$

Ce qui entraine que $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}\in\mathbb{Q}$, ce qui est faux d'après la question 3. Il y a une contradiction donc

$$\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)^2\notin\mathbb{Q}$$

Allez à : Exercice 13 :

Correction exercice 14 :

Supposons qu'il existe p et q des entiers naturels, non tous les deux pairs tels que

$$\sqrt{3}=\frac{p}{q}$$

En élevant au carré on obtient

$$3=\frac{p^2}{q^2}\Leftrightarrow 3q^2=p^2\quad(*)$$

Si p est pair et q est impair, alors il existe k et l des entiers tels que $p=2k$ et $q=2l+1$, ce que l'on remplace dans $(*)$

$$3(4l^2+4l+1)=4k^2\Leftrightarrow 2(6l^2+6l+1)+1=2\times 2k^2$$

Le terme de gauche est impair et celui de droite est pair, ce n'est pas possible.

Si p est impair et q est pair, alors il existe k et l des entiers tels que $p=2k+1$ et $q=2l$, ce que l'on remplace dans $(*)$

$$3\times 4l^2=4k^2+4k+1\Leftrightarrow 2\times 6l^2=2(2k^2+2k)+1$$

Le terme de gauche est pair et celui de droite est impair, ce n'est pas possible.

Si p est impair et q est impair, alors il existe k et l des entiers tels que $p=2k+1$ et $q=2l+1$, ce que l'on remplace dans $(*)$

$$3\times(4l^2+4l+1)=4k^2+4k+1\Leftrightarrow 2(6l^2+6l+1)+1=2(2k^2+2k)+1\Leftrightarrow 2(6l^2+6l+1)=2(2k^2+2k)\Leftrightarrow 6l^2+6l+1=2k^2+2k\Leftrightarrow 2(3l^2+3l)+1=2(k^2+k)$$

Le terme de gauche est impair et celui de droite est pair, ce n'est pas possible.

Donc $\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$

Allez à : Exercice 14 :

Correction exercice 15 :

$$\alpha^3=\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)^3=a+3\left(\sqrt[3]{a}\right)^2\sqrt[3]{b}+3\sqrt[3]{a}\left(\sqrt[3]{b}\right)^2+b=a+b+3\sqrt[3]{ab}\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)=a+b+3\sqrt[3]{ab}\alpha$$

Donc α vérifie

$$\alpha^3-3\sqrt[3]{ab}\alpha-a-b=0$$

Donc α est solution de

$$X^3-3\sqrt[3]{ab}X-a-b=0$$

Allez à : Exercice 15 :

Correction exercice 16 :

1. Pour tous les entiers relatifs $E(x)=x$ et donc $E(-x)=-x$, donc $E(x)+E(-x)=0$
2. Pour tous réels

$$E(x)\le x<E(x)+1$$

Si x n'est pas un entier, l'inégalité de gauche est stricte

$$E(x)<x<E(x)+1$$

On multiplie cette inégalité par -1

$$-E(x)-1<-x<-E(x)$$

Cela montre que

$$E(-x)=-E(x)-1$$

Par conséquent

$$E(x)+E(-x)=-1$$

Allez à : Exercice 16 :

Correction exercice 17 :

1. On a

$$\begin{cases}E(x)\le x<E(x)+1\\E(y)\le y<E(y)+1\end{cases}$$

En faisant la somme

$$E(x)+E(y)\le x+y<E(x)+E(y)+2\quad(*)$$

Donc

$$E(x+y)=E(x)+E(y)\quad\text{ou}\quad E(x+y)=E(x)+E(y)+1$$

Car ce sont les deux seuls entiers dans l'intervalle

$$[E(x)+E(y),E(x)+E(y)+2[$$

C'est bien ce que l'on voulait montrer.

Si dans $(*)$ on prend la partie entière, on obtient

$$E\big(E(x)+E(y)\big)\le E(x+y)\le E\big(E(x)+E(y)+2\big)$$

On est obligé de changer le « $<$ » en « $\le$ » dans la seconde égalité, à moins de préciser que $E(x)+E(y)+2$ est un entier et alors l'inégalité reste stricte.

Puis comme $E(x)+E(y)$ et $E(x)+E(y)+2$ sont des entiers

$$E\big(E(x)+E(y)\big)=E(x)+E(y)\quad\text{et}\quad E\big(E(x)+E(y)+2\big)=E(x)+E(y)+2$$

Et on obtient

$$E(x)+E(y)\le E(x+y)\le E(x)+E(y)+2$$

Ce qui n'est exactement ce que l'on demandait.

Beaucoup d'entre vous semble croire que

$$E(E(x)+E(y)+2)=E\big(E(x)\big)+E\big(E(y)\big)+E(2)=E(x)+E(y)+2$$

C'est correct uniquement parce que $E(x)$, $E(y)$ et 2 sont des entiers, mais il est faux de penser que pour tout x et y, $E(x+y)=E(x)+E(y)$ (enfin ce n'est pas toujours vrai).

2. Si $m+n$ est pair alors il existe $p\in\mathbb{Z}$ tel que $m+n=2p$ alors

$$E\left(\frac{m+n}{2}\right)+E\left(\frac{n-m+1}{2}\right)=E\left(\frac{2p}{2}\right)+E\left(\frac{2p-m-m+1}{2}\right)=E(p)+E\left(\frac{2p-2m+1}{2}\right)$$
$$=p+E\left(p-m+\frac{1}{2}\right)=p+p-m=2p-m=n$$

Si $m+n$ est impair alors il existe $p\in\mathbb{Z}$ tel que $m+n=2p+1$

$$E\left(\frac{m+n}{2}\right)+E\left(\frac{n-m+1}{2}\right)=E\left(\frac{2p+1}{2}\right)+E\left(\frac{2p+1-m-m+1}{2}\right)$$
$$=E\left(p+\frac{1}{2}\right)+E\left(\frac{2p-2m+2}{2}\right)=p+E(p-m+1)=p+p-m+1$$
$$=2p-m+1=n$$

Dans tous les cas on a

$$E\left(\frac{m+n}{2}\right)+E\left(\frac{n-m+1}{2}\right)=n$$

3.

$$E\left(\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2\right)=E\left(n+2\sqrt{n}\sqrt{n+1}+n+1\right)=E\left(2n+1+2\sqrt{n(n+1)}\right)$$
$$=2n+1+E\left(2\sqrt{n(n+1)}\right)$$
$$\left(2\sqrt{n(n+1)}\right)^2=4n(n+1)=4n^2+4n$$

Or

$$4n^2\le 4n^2+4n<4n^2+4n+1$$

Ce qui équivaut à

$$2n\le 2\sqrt{n(n+1)}<2n+1$$

Par conséquent

$$E\left(2\sqrt{n(n+1)}\right)=2n$$

On a donc pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$E\left(\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2\right)=4n+1$$

Allez à : Exercice 17 :

Correction exercice 18 :

- Premier cas :

$$E(x)\le x<E(x)+\frac{1}{2}\ (*)\quad \text{et}\quad E(y)\le y<E(y)+\frac{1}{2}\quad (**)$$

En faisant la somme de ces inégalités

$$E(x)+E(y)\le x+y<E(x)+E(y)+1$$

On en déduit que

$$E(x+y)=E(x)+E(y)$$

On multiplie $(*)$ et $(**)$ par 2.

$$2E(x) \leq 2x < 2E(x) + 1 \Rightarrow E(2x) = 2E(x)$$
$$2E(y) \leq 2y < 2E(y) + 1 \Rightarrow E(2y) = 2E(y)$$

Donc

$$E(x) + E(y) + E(x+y) = E(x) + E(y) + E(x) + E(y) = 2E(x) + 2E(y) = E(2x) + E(2y)$$
$$\leq E(2x) + E(2y)$$

- Deuxième cas :

$$E(x) + \frac{1}{2} \leq x < E(x) + 1 \ (*) \quad \text{et} \quad E(y) \leq y < E(y) + \frac{1}{2} \quad (**)$$

En faisant la somme de ces inégalités

$$E(x) + E(y) + \frac{1}{2} \leq x + y < E(x) + E(y) + \frac{3}{2}$$

On en déduit que

$$E(x) + E(y) \leq E(x+y) \leq E(x) + E(y) + 1$$

On multiplie $(*)$ et $(**)$ par 2.

$$2E(x) + 1 \leq 2x < 2E(x) + 2 \Rightarrow E(2x) = 2E(x) + 1$$
$$2E(y) \leq 2y < 2E(y) + 1 \Rightarrow E(2y) = 2E(y)$$

Donc

$$E(x) + E(y) + E(x+y) \leq E(x) + E(y) + E(x) + E(y) + 1 = 2E(x) + 1 + 2E(y) = E(2x) + E(2y)$$
$$\leq E(2x) + E(2y)$$

- Troisième cas :

$$E(x) \leq x < E(x) + \frac{1}{2} (*) \quad \text{et} \quad E(y) + \frac{1}{2} \leq y < E(y) + 1 \quad (**)$$

En faisant la somme de ces inégalités

$$E(x) + E(y) + \frac{1}{2} \leq x + y < E(x) + E(y) + \frac{3}{2}$$

On en déduit que

$$E(x) + E(y) \leq E(x+y) = E(x) + E(y) + 1$$

On multiplie $(*)$ et $(**)$ par 2.

$$2E(x) \leq 2x < 2E(x) + 1 \Rightarrow E(2x) = 2E(x)$$
$$2E(y) + 1 \leq 2y < 2E(y) + 2 \Rightarrow E(2y) = 2E(y) + 1$$

Donc

$$E(x) + E(y) + E(x+y) \leq E(x) + E(y) + E(x) + E(y) + 1 = 2E(x) + 2E(y) + 1 = E(2x) + E(2y)$$
$$\leq E(2x) + E(2y)$$

- quatrième cas :

$$E(x) + \frac{1}{2} \leq x < E(x) + 1 (*) \quad \text{et} \quad E(y) + \frac{1}{2} \leq y < E(y) + 1 \quad (**)$$

En faisant la somme de ces inégalités

$$E(x) + E(y) + 1 \leq x + y < E(x) + E(y) + 2$$

On en déduit que

$$E(x+y) = E(x) + E(y) + 1$$

On multiplie $(*)$ et $(**)$ par 2.

$$2E(x) + 1 \leq 2x \leq 2E(x) + 2 \Rightarrow E(2x) = 2E(x) + 1$$
$$2E(y) + 1 \leq 2y \leq 2E(y) + 2 \Rightarrow E(2y) = 2E(y) + 1$$

Donc

$$E(x) + E(y) + E(x+y) = E(x) + E(y) + E(x) + E(y) + 1 = 2E(x) + 2E(y) + 1 \leq 2E(x) + 1 + E(y) + 1$$
$$= E(2x) + E(2y)$$

Allez à : Exercice 18 :

Correction exercice 19 :

1. Les ensembles $I_k = \left]x+\frac{k}{n}, x+\frac{k+1}{n}\right]$, $k \in \{0,1,..,n-1\}$ sont disjoints deux à deux et la réunion de ces intervalles est $]x, x+1]$, comme $E(x)+1 \in]x, x+1]$ et que ces ensembles sont disjoints, $E(x)+1$ appartient à un et un seul de ces ensembles, donc il existe un unique $p \in \{0,1,\dots,n-1\}$ tel que
$$x+\frac{p}{n} < E(x)+1 \leq x+\frac{p+1}{n} \quad (**)$$
Remarque : l'ensemble des intervalle I_k, $k \in \{0,1,..,n-1\}$ forme une partition de $]x, x+1]$.
2. En prenant l'inégalité de droite dans $(**)$, on a les équivalences suivantes :
$$x+\frac{p}{n} < E(x)+1 \Leftrightarrow nx+p < nE(x)+n \Leftrightarrow nx < nE(x)+n-p$$
En prenant l'inégalité de droite dans $(**)$, on a les équivalences suivantes :
$$E(x)+1 \leq x+\frac{p+1}{n} \Leftrightarrow nE(x)+n \leq nx+p+1 \Leftrightarrow nE(x)+n-p-1 \leq nx$$
En réunissant ces deux inégalités on trouve l'encadrement demandé par l'énoncé.
Comme
$$nE(x)+n-p-1 \leq nx < nE(x)+n-p \Leftrightarrow nE(x)+n-p-1 \leq nx < nE(x)+n-p-1+1$$
On a
$$E(nx) = nE(x)+n-p-1$$
3. Pour tout $k \in \{0,\dots,p\}$,
$$E(x) \leq x+\frac{k}{n} \leq x+\frac{p}{n} < E(x)+1$$
Donc $E\left(x+\frac{k}{n}\right) = E(x)$
Pour tout $k \in \{p+1,\dots,n-1\}$,
$$E(x)+1 \leq x+\frac{p+1}{n} \leq x+\frac{k}{n} \leq x+\frac{n-1}{n} = x+1-\frac{1}{n} < x+1 < E(x)+1+1 = E(x)+2$$
Donc
$$E\left(x+\frac{k}{n}\right) = E(x)+1$$
4.
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} E\left(x+\frac{k}{n}\right) &= \sum_{k=0}^{p} E\left(x+\frac{k}{n}\right) + \sum_{k=p+1}^{n-1} E\left(x+\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{p} E(x) + \sum_{k=p+1}^{n-1} (E(x)+1) \\ &= (p+1)E(x) + (n-1-p)(E(x)+1) \\ &= (p+1)E(x) + n(E(x)+1) - (1+p)E(x) - 1 - p = nE(x)+n-1-p = E(nx)\end{aligned}$$

Allez à : Exercice 19 :

Correction exercice 20 :

Si n est pair, il existe $m \geq 1$ tel que $n = 2m$
$$P'(x) = 2mx^{2m-1}+p \quad \text{et} \quad P''(x) = 2m(2m-1)x^{2m-2}$$
Comme $2m-2$ est pair pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P''(x) > 0$ donc P' est croissante sur $\mathbb{R}$.
Comme $2m-1$ est impair
$$\lim_{x\to-\infty}(2mx^{2m-1}+p) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty}(2mx^{2m-1}+p) = +\infty$$
P' est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ donc il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $P'(\alpha) = 0$ et tel que
$$x < \alpha \Rightarrow P'(x) < 0 \quad \text{et} \quad x > \alpha \Rightarrow P'(x) > 0$$
$$\lim_{x\to-\infty}(x^{2m}+px+q) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty}(x^{2m}+px+q) = +\infty$$

Le tableau de variation de P est

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$P'(x)$		$-$	0	$+$	
$P(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$P(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

Si $P(\alpha) > 0$ alors P n'a pas de solution.
Si $P(\alpha) = 0$ alors P n'a qu'une solution : α.
Si $P(\alpha) < 0$ alors P a deux solutions.
Si n est pair, il existe $m \geq 0$ tel que $n = 2m + 1$

$$P'(x) = (2m+1)x^{2m} + p \quad \text{et} \quad P''(x) = (2m+1)2mx^{2m-1}$$

Comme $2m - 1$ est impair :
Si $x < 0$ alors $P''(x) < 0$ et $x > 0$ alors $P''(x) > 0$. De plus $P'(0) = p$. Comme $2m$ est pair les limites de P' en $\pm\infty$ sont $+\infty$.
On en déduit le tableau de variation de P'

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$P''(x)$		$-$	0	$+$	
$P'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	p	$\nearrow$	$+\infty$

Si $p \geq 0$ alors $\forall x \neq 0, P'(x) > 0$ et $P'(0) = 0$ ce qui montre que P est strictement croissante, comme $2m + 1$ est impair

$$\lim_{x \to -\infty} P(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} P(x) = +\infty$$

Cela montre que P est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, donc il existe un unique $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $P(x_0) = 0$.
Si $p < 0$ alors il existe deux réels $\beta < 0$ et $\gamma > 0$ tels que $P'(\beta) = P'(\gamma) = 0$ et tels que le signe de P' soit strictement positif sur $]-\infty, \beta[\cup]\gamma, +\infty[$ et strictement négatif sur $]\beta, \gamma[$. comme $2m + 1$ est impair

$$\lim_{x \to -\infty} P(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} P(x) = +\infty$$

On en déduit le tableau de variation de P

x	$-\infty$		β		γ		$+\infty$
$P'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$P(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$P(\beta)$	$\searrow$	$P(\gamma)$	$\nearrow$	$+\infty$

Si $P(\beta)$ et $P(\beta)$ sont strictement positifs ou strictement négatifs ($P(\beta)P(\gamma) > 0$) alors P n'a qu'une racine.
Si $P(\beta)$ ou $P(\beta)$ est nul ($P(\beta)P(\gamma) = 0$), remarque les deux ne peuvent pas être nul en même temps alors P a deux racines.
Si $P(\alpha) > 0$ et $P(\beta) < 0$ alors P a trois racines.

Allez à : Exercice 20 :

Correction exercice 21 :

1.

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}) = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1}b^k$$

2. On reprend la formule ci-dessus avec $b = 1$

$$A = a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + a^{n-3} + \cdots + a^2 + a + 1) = (a-1)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1}$$

On reprend la formule du 1. en changeant n en $2n + 1$ et $b = -1$

$$B=a^{2n+1}+1=a^{2n+1}-(-1)^{2n+1}=\big(a-(-1)\big)\sum_{k=0}^{2n}a^{2n-k}(-1)^k=(a+1)\sum_{k=0}^{2n}a^{2n-k}(-1)^k$$
$$=(a+1)(a^{2n}-a^{2n-1}+a^{2n-2}-\cdots+a^2-a+1)$$

Allez à : Exercice 21 :

Correction exercice 22 :

1.

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(k-1)k=\sum_{k=1}^{n}(k^2-k)=\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=\frac{n(n+1)}{6}(2n+1-3)=\frac{n(n+1)}{6}(2n-2)=\frac{n(n+1)(n-1)}{3}$$

2.

a.

$$v_{k+1}-v_k=(k+1)(k+1-1)(k+1-2)-k(k-1)(k-2)$$
$$=(k+1)k(k-1)-k(k-1)(k-2)=k(k-1)\big(k+1-(k-2)\big)=3k(k-1)$$

b.

$$T_n=\sum_{k=1}^{n}(v_{k+1}-v_k)=\sum_{k=1}^{n}3k(k-1)=3\sum_{k=1}^{n}k(k-1)=3S_n=n(n+1)(n-1)$$

c. Donc

$$T_n=n(n+1)(n-1)$$

Allez à : Exercice 22 :

Correction exercice 23 :

a.

$$\sum_{1\le k,l\le n}|k-l|=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{n}|k-l|\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{k-1}|k-l|+\sum_{l=k}^{n}|k-l|\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{k-1}(k-l)+\sum_{l=k}^{n}\big(-(k-l)\big)\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{k-1}(k-l)+\sum_{l=k}^{n}(l-k)\right)$$

b.

$$\sum_{l=1}^{k-1}(k-l)+\sum_{l=k}^{n}(l-k)$$

Dans la première somme, on pose $p=k-l$

$$l=1\Rightarrow p=k-1$$
$$l=k-1\Rightarrow p=1$$

Donc

$$\sum_{l=1}^{k-1}(k-l)=\sum_{p=1}^{k-1}p$$

Autrement dit

$$\sum_{l=1}^{k-1}(k-l)=(k-1)+(k-2)+(k-3)+\cdots+3+2+1=\sum_{p=1}^{k-1}p$$

On fait la somme dans l'autre sens.

Dans la seconde somme, on pose $p = l - k$

$$l = k \Rightarrow p = 0$$
$$l = n \Rightarrow p = n - k$$

Donc

$$\sum_{l=k}^{n}(l-k) = \sum_{p=0}^{n-k} p$$

Alors

$$\sum_{l=1}^{k-1}(k-l) + \sum_{l=k}^{n}(l-k) = \sum_{p=1}^{k-1} p + \sum_{p=0}^{n-k} p$$

c. D'après b.

$$\sum_{l=1}^{k-1}(k-l) + \sum_{l=k}^{n}(l-k) = \sum_{p=1}^{k-1} p + \sum_{p=0}^{n-k} p = \sum_{p=1}^{k-1} p + \sum_{p=1}^{n-k} p$$
$$= \frac{(k-1)(k-1+1)}{2} + \frac{(n-k)(n-k+1)}{2} = \frac{k(k-1)}{2} + \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}$$
$$= \frac{k^2 - k + (n-k)^2 + n - k}{2} = \frac{k^2 - k + n^2 - 2kn + k^2 + n - k}{2}$$
$$= \frac{2k^2 - 2(n+1)k + n^2 + n}{2} = k^2 - (n+1)k + \frac{n(n+1)}{2}$$

d. D'après a.

$$\sum_{1 \le k, l \le n} |k-l| = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{k-1}(k-l) + \sum_{l=k}^{n}(l-k)\right)$$

D'après c.

$$\sum_{1 \le k, l \le n} |k-l| = \sum_{k=1}^{n}\left(k^2 - (n+1)k + \frac{n(n+1)}{2}\right) = \sum_{k=1}^{n} k^2 - (n+1)\sum_{k=1}^{n} k + \frac{n(n+1)}{2}\sum_{k=1}^{n} 1 =$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - (n+1)\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} n$$
$$= n(n+1)\left(\frac{2n+1}{6} - \frac{n+1}{2} + \frac{n}{2}\right) = n(n+1)\left(\frac{2n+1}{6} - \frac{1}{2}\right) = n(n+1)\left(\frac{n}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right)$$
$$= n(n+1)\left(\frac{n}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{n(n+1)(n-1)}{3}$$

Allez à : Exercice 23 :

Correction exercice 24 :

1.

$$(n+1)n\binom{n-1}{k-2} = (n+1)n\frac{(n-1)!}{(k-2)!\,\big(n-1-(k-2)\big)!} = \frac{(n+1)n(n-1)!}{(k-2)!\,(n-k+1)!}$$
$$= \frac{(n+1)!}{(k-2)!\,(n-k+1)!}$$

$$k(k-1)\binom{n+1}{k} = k(k-1)\frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!} = k(k-1)\frac{(n+1)!}{k(k-1)(k-2)!\,(n+1-k)!}$$
$$= \frac{(n+1)!}{(k-2)!\,(n+1-k)!}$$

Donc ces deux expressions sont égales

2.

$$\sum_{k=2}^{n+1} k(k-1)\binom{n+1}{k} = \sum_{k=2}^{n+1}(n+1)n\binom{n-1}{k-2} = (n+1)n\sum_{k=2}^{n+1}\binom{n-1}{k-2}$$

$$= (n+1)n\left(\binom{n-1}{0}+\binom{n-1}{1}+\binom{n-1}{3}+\cdots+\binom{n-1}{n-1}\right) = (n+1)n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}$$

$$= (n+1)n2^{n-1}$$

Allez à : Exercice 24 :

Correction exercice 25 :

$$\binom{n-k+1}{m+1} = \binom{n-k}{m} + \binom{n-k}{m+1} \quad (1)$$

Pour $k = 0$

$$\binom{n+1}{m+1} = \binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} \quad (2)$$

Pour $k = 1$

$$\binom{n+1}{m+1} = \binom{n}{m} + \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m+1}$$

Pour $k = 2$

$$\binom{n+1}{m+1} = \binom{n}{m} + \binom{n-1}{m} + \binom{n-2}{m} + \binom{n-2}{m+1}$$

Montrons par récurrence que pour $l \in \{0, \dots, n-m-1\}$ que :

$$\binom{n+1}{m+1} = \binom{n}{m} + \binom{n-1}{m} + \cdots + \binom{n-l}{m} + \binom{n-l}{m+1} \quad (3)$$

Pour $l = 0$ c'est l'égalité (2), (pour visualiser les choses on a écrit les formules pour $l = 1$ et $l = 2$).

Utilisons l'égalité (1) avec $k = l + 1$

$$\binom{n-l}{m+1} = \binom{n-l-1}{m} + \binom{n-l-1}{m+1}$$

Ce que l'on remplace dans le dernier terme de (3)

$$\binom{n+1}{m+1} = \binom{n}{m} + \binom{n-1}{m} + \cdots + \binom{n-l}{m} + \binom{n-l-1}{m} + \binom{n-l-1}{m+1} \quad (3)$$

Cela achève la récurrence puis on prend $l = n - m - 1 \Leftrightarrow n - l = m + 1$

$$\binom{n+1}{m+1} = \binom{n}{m} + \binom{n-1}{m} + \cdots + \binom{m+1}{m} + \binom{m+1}{m+1} = \binom{n}{m} + \binom{n-1}{m} + \cdots + \binom{m+1}{m} + \binom{m}{m}$$

Car $\binom{m+1}{m+1} = 1 = \binom{m}{m}$

Allez à : Exercice 25 :

Correction exercice 26 :

1.

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \times \frac{(n-k)!}{(p-k)!\,\big((n-k)-(p-k)\big)!} = \frac{n!}{k!} \times \frac{1}{(p-k)!\,(n-p)!}$$

Et

$$\binom{p}{k}\binom{n}{p} = \frac{p!}{k!\,(p-k)!} \times \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = \frac{1}{k!\,(p-k)!} \times \frac{n!}{(n-p)!}$$

Ce qui montre que pour tout $n, p, k \in \mathbb{N}$, $n \geq p \geq k$.

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}=\binom{p}{k}\binom{n}{p}$$

2.

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}=\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\binom{n}{p}=\binom{n}{p}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}=\binom{n}{p}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}1^k\times 1^{p-k}=\binom{n}{p}(1+1)^p=2^p\binom{n}{p}$$

Allez à : Exercice 26 :

Correction exercice 27 :

1. D'après la formule du binôme

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

2.

$$A=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k1^{n-k}=(1+1)^n=2^n$$

$$B=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k1^{n-k}=(-1+1)^n=0$$

Allez à : Exercice 27 :

Correction exercice 28 :

1. D'une part

$$(n+1)\binom{n}{k}=(n+1)\frac{n!}{k!\,(n-k)!}=\frac{(n+1)!}{k!\,(n-k)!}$$

D'autre part

$$(k+1)\binom{n+1}{k+1}=(k+1)\frac{(n+1)!}{(k+1)!\,\big(n+1-(k+1)\big)!}=(k+1)\frac{(n+1)!}{(k+1)k!\,(n-k)!}=\frac{(n+1)!}{k!\,(n-k)!}$$

Ce qui montre l'égalité demandée.

$$(n+1)\binom{n}{k}=(k+1)\binom{n+1}{k+1}$$

On divise cette égalité par $(n+1)(k+1)$ et on trouve que :

$$\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}=\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$$

2.

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}$$

On fait le changement d'indice $k'=k+1$

$$k=0\Rightarrow k'=1$$

$$k=n\Rightarrow k'=n+1$$

Donc

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}=\frac{1}{n+1}\sum_{k'=1}^{n+1}\binom{n+1}{k'}=\frac{1}{n+1}\left(\sum_{k'=0}^{n+1}\binom{n+1}{k'}-1\right)$$

$$=\frac{1}{n+1}\left(\sum_{k'=0}^{n+1}\binom{n+1}{k'}1^{k'}1^{n+1-k'}-1\right)=\frac{1}{n+1}\big((1+1)^{n+1}-1\big)=\frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1)$$

Grace à la formule du binôme.

Allez à : Exercice 28 :

Correction exercice 29 :

Première méthode :

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{kn!}{k!\,(n-k)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} = n\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,\big((n-1)-(k-1)\big)!}$$

On pose $k' = k-1$, si $k = 1$ alors $k' = 0$ et si $k = n$ alors $k' = n-1$

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n\sum_{k'=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k'!\,\big((n-1)-k'\big)!} = n\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!\,\big((n-1)-k\big)!} = n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k-1}$$

$$= n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k-1}1^k 1^{n-k} = n(1+1)^{n-1} = n2^{n-1}$$

Autre correction sans utiliser les sommes.

$$\sum_{k=1}^{n} kC_n^k = 1\times\binom{n}{1} + 2\times\binom{n}{2} + 3\times\binom{n}{3} + \cdots + (n-1)\binom{n}{n-1} + n\binom{n}{n}$$

$$= 1\times\frac{n!}{(n-1)!\,1!} + 2\times\frac{n!}{(n-2)!\,2!} + 3\times\frac{n!}{(n-3)!\,3!} + \cdots + (n-1) + n\frac{n!}{(n-n)!\,n!}$$

$$= n\frac{(n-1)!}{(n-1)!\,0!} + n\frac{(n-1)!}{\big((n-1)-1\big)!\,1!} + n\frac{(n-1)!}{\big((n-1)-2\big)!\,2!} + \cdots$$

$$+ n\frac{(n-1)!}{\big((n-1)-(n-2)\big)!\,(n-2)!} + n\frac{(n-1)!}{\big((n-1)-(n-1)\big)!\,(n-1)!}$$

$$= n\left[\frac{(n-1)!}{(n-1)!\,0!} + \frac{(n-1)!}{\big((n-1)-1\big)!\,1!} + \frac{(n-1)!}{\big((n-1)-2\big)!\,2!} + \cdots\right.$$

$$\left. + \frac{(n-1)!}{\big((n-1)-(n-2)\big)!\,(n-2)!} + \frac{(n-1)!}{\big((n-1)-(n-1)\big)!\,(n-1)!}\right]$$

$$= n\left[\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} + \cdots + \binom{n-1}{n-2} + \binom{n-1}{n-1}\right]$$

$$= n\left[\binom{n-1}{0}1^0 1^{(n-1)-0} + \binom{n-1}{1}1^1 1^{(n-1)-1} + \binom{n-1}{2}1^2 1^{(n-1)-2} + \cdots\right.$$

$$\left. + \binom{n-1}{n-2}1^{n-2}1^{(n-1)-(n-2)} + \binom{n-1}{n-1}1^{n-1}1^{(n-1)-(n-1)}\right] = n(1+1)^{n-1} = n2^{n-1}$$

Deuxième méthode :

$$f(x) = (x+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$$

On dérive ces deux expressions de f

$$n(x+1)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}kx^{k-1} \Leftrightarrow n(x+1)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}kx^{k-1}$$

On prend alors $x = 1$

$$n(1+1)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k1^{k-1} \Leftrightarrow n2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k$$

Suites

Exercice 1 :

Dans cet exercice toutes les récurrences devront être faites sans considérer qu'elles sont évidentes ;
Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite de nombres réels définie par $u_0 \in]0,1]$ et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{(u_n)^2}{4}$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 1$.
3. Montrer que la suite est monotone. En déduire que la suite est convergente.
4. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

Allez à : Correction exercice 1 :

Exercice 2 :

Dans cet exercice toutes les récurrences devront être faites sans considérer qu'elles sont évidentes ;
Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite de nombres réels définie par $u_0 \in]1,2]$ et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{(u_n)^2}{4} + \frac{3}{4}$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 1$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 2$.
3. Montrer que la suite est monotone. En déduire que la suite est convergente.
4. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

Allez à : Correction exercice 2 :

Exercice 3 :

Soient u_0, a et b trois réels. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de nombres réels définie par u_0 et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = au_n + b$$

1. Comment appelle-t-on la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ lorsque $a = 1$? Lorsque que $b = 0$ et $a \neq 1$?
2. Exprimer u_n dans les deux cas particulier de la question 1.
3. Dans le cas général, calculer u_1, u_2 et u_3 en fonction de u_0, a et b.
4. Démontrer par récurrence que le terme général de la suite est donné par :
$$u_n = a^n u_0 + b\sum_{k=1}^{n} a^{n-k}, n \in \mathbb{N}^*$$
5. On suppose que $a \neq 1$. Démontrer que
$$\sum_{k=1}^{n} a^{n-k} = \frac{a^n - 1}{a - 1}$$
6. Déduire de ce qui précède que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
$$u_n = \frac{a^n(u_1 - u_0) - b}{a - 1}$$
7. On suppose dans cette question que $a > 1$ et que $au_0 + b > u_0$. Montrer que la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $+\infty$.
8. On suppose dans cette question que $0 < a < 1$, montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge et que sa limite ne dépend pas de u_0.

Allez à : Correction exercice 3 :

Exercice 4 :

Soit (u_n) une suite définie par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$$

Et la donnée de u_0

1.
   1.1. Montrer que si $u_0 \leq 2$ alors pour tout $n \geq 0$, $u_n \leq 2$ et que la suite est monotone.
   1.2. En déduire que la suite est convergente et déterminer sa limite.
2.
   2.1. Montrer que si $u_0 \geq 2$ alors pour tout $n \geq 0$, $u_n \geq 2$ et que la suite est monotone.
   2.2. En déduire que la suite est convergente et déterminer sa limite.
3.
   3.1. On pose $v_n = u_n - 2$. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
   3.2. En déduire une expression de u_n en fonction de n et u_0. Retrouver le résultat des deux premières questions.
   3.3. En déduire

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} u_k}{n}$$

Allez à : Correction exercice 4 :

Exercice 5 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 8}{2u_n + 1}$$

Et soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 2}$$

1. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $-\frac{3}{5}$
2. Exprimer v_n en fonction de n.
3. Exprimer u_n en fonction de n.
4. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Allez à : Correction exercice 5 :

Exercice 6 :

1. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est défini par

$$u_n = \frac{2n + \sqrt{4n^2 + 1}}{n + \sqrt{n^2 + 1}}$$

2. En déduire la limite de la suite de terme général v_n défini par

$$v_n = \frac{2n - \sqrt{4n^2 + 1}}{n - \sqrt{n^2 + 1}}$$

Allez à : Correction exercice 6 :

Exercice 7 :

1. On pose que $u_n = \frac{E(\sqrt{n})}{n}$; pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

2. On pose que $v_n = \frac{\left(E(\sqrt{n})\right)^2}{n}$; pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

Allez à : Correction exercice 7 :

Exercice 8 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{1}{6}u_n^2 + \frac{3}{2}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$.
2. Calculer la limite éventuelle de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 3$.
4. Montrer que la suite est croissante, que peut-on en conclure ?

Allez à : Correction exercice 8 :

Exercice 9 :

On considère la suite de nombre réel définie par son premier terme $u_0 = 0$ et par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = 2u_n^2 + \frac{1}{8}$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Allez à : Correction exercice 9 :

Exercice 10 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence par $u_0 = \frac{3}{2}$ et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = (u_n - 1)^2 + 1$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 < u_n < 2$.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement monotone.
3. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Allez à : Correction exercice 10 :

Exercice 11 :

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général u_n définie par :

$$u_n = \frac{2n+1}{3n^2+1} + \frac{2n+1}{3n^2+2} + \cdots + \frac{2n+1}{3n^2+n}$$

Est convergente et déterminer sa limite.

Allez à : Correction exercice 11 :

Exercice 12 :

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général u_n définie par :

$$u_n = \frac{1\times 3\times \ldots \times (2n+1)}{3\times 6\times \ldots \times (3n+3)}$$

Est convergente et déterminer sa limite.

Allez à : Correction exercice 12 :

Exercice 13 :

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite réelle définie pour tout $n > 0$ par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

A l'aide de la question 1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

Allez à : Correction exercice 13 :

Exercice 14 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite à valeurs réelles définie par la donnée de u_0, u_1 et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 2u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n = 0$$

Soient $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suite à valeurs réelles définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$v_n = 3u_n - \frac{3}{2}u_{n+1} \quad \text{et} \quad w_n = -\frac{3}{4}u_n + \frac{3}{2}u_{n+1}$$

1. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$. En déduire une expression de v_n en fonction de n, de u_0 et de u_1.
2. Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 2. En déduire une expression de w_n en fonction de n, de u_0 et de u_1.
3. Calculer $v_n + w_n$ de deux façons différentes et en déduire u_n en fonction de n, de u_0 et de u_1.
4. Selon les valeurs de u_0 et de u_1 déterminer si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et le cas échéant déterminer sa limite.

Allez à : Correction exercice 14 :

Exercice 15 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la donnée de u_0 et de u_1 et la relation de récurrence

$$2u_{n+2} - u_{n+1} - u_n = 0$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$v_n = u_{n+1} - u_n \qquad \text{et} \qquad w_n = 2u_{n+1} + u_n$$

1. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$. On exprimera v_n en fonction de n, u_0 et u_1.
2. Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante. On exprimera w_n en fonction u_0 et u_1.
3. En calculant $-2v_n + w_n$ de deux façons différentes, exprimer u_n en fonction de n, u_0 et u_1.
4. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Calculer S_n en fonction de n, u_0 et u_1.

Pour quelles valeurs de u_0 et u_1 la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet-elle une limite finie et dans ce cas exprimer cette limite en fonction de u_0.

Allez à : Correction exercice 15 :

Exercice 16 :

On considère la suite de nombres réels définie par son premier terme $u_0 = \frac{11}{4}$ et par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{5}{2} + \sqrt{u_n - \frac{7}{4}}$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, convergente et déterminer sa limite.

Allez à : Correction exercice 16 :

Exercice 17 :

1. Calculer, si cette limite existe.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n} - n + 1}{2\sqrt{n} + n + 2}$$

2. Etudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels définie par la donnée de :

$$0 < u_0 < 1 \quad \text{et} \quad u_n = u_{n-1} - (u_{n-1})^2$$

Allez à : Correction exercice 17 :

Exercice 18 :

Calculer, si elle existe, la limite, lorsque n tend vers l'infini, de l'expression

$$\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1}$$

Allez à : Correction exercice 18 :

Exercice 19 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$u_n = \frac{n - \sqrt{n^2 + n}}{1 - \sqrt{n^2 + 1}}$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

Allez à : Correction exercice 19 :

Exercice 20 :

On considère les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ de nombres réels définies pour tout $n \geq 1$ par

$$u_n = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^3} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n^2}$$

Montrer que ces deux suites sont convergentes et ont la même limite (que l'on ne cherchera pas à calculer).

Allez à : Correction exercice 20 :

Exercice 21 :

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de nombres réels dont le terme général est défini par récurrence en posant :

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \sqrt{2u_n - 1}$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente et déterminer sa limite.

Allez à : Correction exercice 21 :

Exercice 22 :

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de nombres réels définie pour tout $n \geq 1$ par :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} E\left(\sqrt{n}\right)$$

Montrer qu'elle est convergente et préciser sa limite.

Allez à : Correction exercice 22 :

Exercice 23 :

1. Montrer que la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{1}{5}\left(1 - \sqrt{1 - u_n}\right)$ et la donnée initiale $u_0 = \frac{1}{5}$ permet de définir une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels appartement à l'intervalle $]0,1[$.
2. Montrer que la suite est décroissante.
3. Montrer que la suite est convergente et déterminer sa limite.

Allez à : Correction exercice 23 :

Exercice 24 :

Pour tout entier $n > 0$, on considère la fonction $f_n: [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^n - (1-x)^2$

1. Dans cette question, l'entier n est fixé.
   a) La fonction f_n est-elle strictement monotone ?
   b) Montrer qu'il existe un unique $\alpha_n \in]0,1[$ tel que $f_n(\alpha_n) = 0$.
   c) Quel est le signe de $f_{n+1}(\alpha_n)$?
2. On considère la suite de terme général $(\alpha_n)_{n\geq 1}$.
   a) Montrer à l'aide de la question précédente que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est croissante.
   b) En déduire que la suite est convergente, on notera α sa limite.
   c) supposons que $\alpha < 1$.
      i) Montrer qu'alors
      $$\lim_{n\to+\infty} (\alpha_n)^n = 0$$
      ii) A l'aide de la relation $f_n(\alpha_n) = 0$, en déduire que $1 - \alpha = 0$, conclure.

Allez à : Correction exercice 24 :

Exercice 25 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de nombres réels définie par

$$u_n = n\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1\right)$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et que sa limite est $\frac{1}{2}$.

Allez à : Correction exercice 25 :

Exercice 26 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de nombres réels définie par

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et que sa limite l vérifie
$$\frac{1}{2} \leq l \leq 1$$

Allez à : Correction exercice 26 :

Exercice 27 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de nombres réels définie par

$$u_n = \frac{1}{3+|\sin(1)|\sqrt{1}} + \frac{1}{3+|\sin(2)|\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{3+|\sin(n)|\sqrt{n}}$$

Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

Allez à : Correction exercice 27 :

Exercice 28 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels définie par la donnée de son premier terme $u_0 = 0$ et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{1}{16} + 4u_n^2$$

Montrer qu'elle est croissante, convergente et déterminer sa limite.

Allez à : Correction exercice 28 :

Exercice 29 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de nombres réels définie par

$$u_n = \left(\frac{(-1)^n}{n} + \frac{\sin(n^2)}{2}\right)^n$$

1. Montrer qu'il existe un entier naturel n_0, tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait :
$$\left|\frac{(-1)^n}{n} + \frac{\sin(n^2)}{2}\right| < \frac{3}{4}$$
2. Montrer que la suite converge et déterminer sa limite.

Allez à : Correction exercice 29 :

Exercice 30 :

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$ et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{n}{n^2+2} e^{-u_n}$$

Est convergente et déterminer sa limite.

Allez à : Correction exercice 30 :

Exercice 31 :

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = u_n - 3 + e^{u_n}$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.
3. Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$

Allez à : Correction exercice 31 :

Exercice 32 :

Pour chacune des assertions ci-dessus :

- Si vous estimez qu'elle est vraie, donner en justification.
- Si vous estimez qu'elle est fausse, justifiez-le en exhibant un contre-exemple.

1. Si une partie B de $\mathbb{R}$ est non vide et minorée, sa borne inférieure est un élément de B
2. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels telle que la limite de u_n en $+\infty$ est $+\infty$, alors elle est croissante à partir d'un certain rang.
3. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de nombres réels, alors est bornée.
4. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels ne vérifiant pas
$$\lim_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$$
Alors elle est bornée.

Allez à : Correction exercice 32 :

Exercice 33 :

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ la suite de nombres réels dont le terme général u_n est défini pour $n \geq 2$ par :
$$u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$
Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$
On pourra montrer que $(u_n)_{n\geq 2}$ n'est pas une suite de Cauchy.

Allez à : Correction exercice 33 :

Exercice 34 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :
$$u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$
1. Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite divergente.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :
$$v_n = \frac{1}{\sqrt{n}} u_n$$
   a) Montrer que,
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$
   b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$2\sqrt{n+1} - 2 \leq u_n \leq 2\sqrt{n} - 1$$
   c) Montrer que $(v_n)_{n\geq 1}$ est convergente et précisez sa limite.

Allez à : Correction exercice 34 :

Exercice 35 :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les suites définies par
$$u_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k^2} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k^2}$$
1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont strictement monotones.
2. Montrer que ces deux suites convergent vers la même limite.

Allez à : Correction exercice 35 :

Exercice 36 :

1. Soit (H_p) la proposition suivante.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}$$

Montrer (H_p) par récurrence sur p.

2. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente et on ne cherchera pas à déterminer la limite de cette suite. On pourra montrer que cette suite une suite de Cauchy.

Allez à : Correction exercice 36 :

CORRECTIONS

Correction exercice 1 :

1. Faisons un raisonnement par récurrence, $u_0 \in]0,1]$ donc $u_0 > 0$. Montrons que $u_n > 0$ entraine que $u_{n+1} > 0$.

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{(u_n)^2}{4} > 0$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

2. Faisons un raisonnement par récurrence, $u_0 \in [0,1]$ donc $u_0 \leq 1$. Montrons que $u_n \leq 1$ entraine que $u_{n+1} \leq 1$.

$$0 < u_n < 1 \Rightarrow u_n^2 < 1$$

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{(u_n)^2}{4} \leq \frac{1}{2} + \frac{(1)^2}{4} = \frac{3}{4} \leq 1$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 1$.

3. Calculons

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{2} + \frac{(u_n)^2}{4} - u_n = -\frac{u_n}{2} + \frac{(u_n)^2}{4} = \frac{u_n}{4}(-2 + u_n)$$

Comme $0 < u_n \leq 1$, on a $-2 \leq -2 + u_n \leq -1 < 0$, par conséquent

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{4}(-2 + u_n) < 0$$

Ce qui montre que la suite est strictement décroissante.

Autre méthode, comme la suite est à valeur strictement positive, on peut regarder le quotient de u_{n+1} par u_n :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{u_n}{2} + \frac{(u_n)^2}{4}}{u_n} = \frac{1}{2} + \frac{u_n}{4} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} < 1$$

Ce qui montre aussi que la suite est strictement décroissante.

4. La suite est strictement décroissante et minorée par 0 donc elle converge vers une limite notée l, cette limite appartient à $[0,1]$ et cette valeur vérifie

$$l = \frac{l}{2} + \frac{l^2}{4} \Leftrightarrow 0 = -\frac{l}{2} + \frac{l^2}{4} \Leftrightarrow -2l + l^2 = 0 \Leftrightarrow l(-2 + l) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} l = 0 \\ \text{ou} \\ l = 2 \end{cases}$$

Par conséquent $l = 0$.

Allez à : Exercice 1 :

Correction exercice 2 :

1. Faisons un raisonnement par récurrence, $u_0 \in]1,2]$ donc $u_0 \geq 1$. Montrons que $u_n > 1$ entraine que $u_{n+1} > 1$.

$$u_{n+1} = \frac{(u_n)^2}{4} + \frac{3}{4} > \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.

2. Faisons un raisonnement par récurrence, $u_0 \in]1,2]$ donc $u_0 \leq 2$. Montrons que $u_n \leq 2$ entraine que $u_{n+1} \leq 2$.

$$u_{n+1} = \frac{(u_n)^2}{4} + \frac{3}{4} \leq \frac{(2)^2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{7}{4} \leq 2$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 2$.

3. Calculons

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n)^2}{4} + \frac{3}{4} - u_n = \frac{1}{4}(u_n^2 - 4u_n + 3) = \frac{1}{4}(u_n - 1)(u_n - 3)$$

Comme $1 < u_n \leq 2$, on a $u_n - 1 > 0$ et $u_n - 2 \leq -1 < 0$, par conséquent

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4}(u_n - 1)(u_n - 3) < 0$$

Ce qui montre que la suite est strictement décroissante. De plus elle est minorée par 1 donc elle converge.
Autre méthode, comme la suite est à valeur strictement positive, on peut regarder le quotient de u_{n+1} par u_n :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(u_n)^2}{4} + \frac{3}{4}}{u_n} = \frac{u_n}{4} + \frac{3}{4u_n}$$

Il faut alors étudier la fonction $f:]1,2] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x}{4} + \frac{3}{4x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{4} - \frac{3}{4x^2} = \frac{x^2 - 3}{4}$$

x	1		$\sqrt{3}$		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$\frac{7}{8}$

Cela montre que

$$\forall u_n \in]1,2], f(u_n) < 1$$

Et que donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$$

Ce qui montre aussi que la suite est strictement décroissante. De plus elle est minorée par 1 donc elle converge.

4. On note l cette limite, elle appartient à $[1,2]$ et cette valeur vérifie

$$l = \frac{l^2}{4} + \frac{3}{4} \Leftrightarrow 0 = \frac{l^2}{4} - l + \frac{3}{4} \Leftrightarrow l^2 - 4l + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} l = 1 \\ \text{ou} \\ l = 2 \end{cases}$$

Par conséquent $l = 1$

Allez à : Exercice 2 :

Correction exercice 3 :

1. Lorsque $a = 1$ alors $u_{n+1} = u_n + b$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison b.
   Lorsque $b = 0$ et $a \neq 1$ alors $u_{n+1} = au_n$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison a,
2. Lorsque $a = 1$ alors $u_n = u_0 + nb$
   Lorsque $b = 0$ et $a \neq 1$ alors $u_n = a^n u_0$(remarque, si $a = 1$ cela ne change rien).
3. $$u_1 = au_0 + b$$
   $$u_2 = au_1 + b = a(au_0 + b) + b = a^2u_0 + (a+1)b$$
   $$u_3 = au_2 + b = a(a^2u_0 + (a+1)b + b = a^3u_0 + (a^2 + a + 1)b$$
4. Pour $n = 1$ l'égalité est vérifiée (c'est même la définition de u_1), on peut aussi remarqué que la relation est aussi vérifiée pour $n = 2$ et $n = 3$ d'après 3.
   Montrer que l'égalité au rang n entraine celle au rang $n = 1$
   $$u_{n+1} = au_n + b = a\left(a^n u_0 + b\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}\right) + b = a\big(a^n u_0 + b(a^n + a^{n-1} + \cdots + a + 1)\big) + b$$
   $$= a^{n+1}u_0 + b(a^{n+1} + a^n + \cdots + a^2 + a) + b$$
   $$= a^{n+1}u_0 + b(a^{n+1} + a^n + \cdots + a^2 + a + 1) = a^{n+1}u_0 + b\sum_{k=0}^{n+1} a^{n+1-k}$$
   Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
   $$u_n = a^n u_0 + b\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}$$
5. $$\sum_{k=1}^{n} a^{n-k} = a^{n-1} + a^{n-1} + \cdots + a + 1 = 1 + a + \cdots + a^{n-1} = \frac{1-a^n}{1-a} = \frac{a^n - 1}{a - 1}$$
   Autre méthode, on pose $k' = n - k$, si $k = 1$ alors $k' = n - 1$ et si $k = n$ alors $k' = 0$
   $$\sum_{k=1}^{n} a^{n-k} = \sum_{k'=0}^{n-1} a^{k'} = \frac{1-a^n}{1-a} = \frac{a^n-1}{a-1}$$
6. D'après 4. Pour tout $n \geq 1$
   $$u_n = a^n u_0 + b\sum_{k=0}^{n} a^{n-k} = a^n u_0 + b\frac{a^n - 1}{a - 1} = \frac{a^n u_0(a-1) + b(a^n - 1)}{a - 1}$$
   $$= \frac{a^n(u_0 a - u_0 + b) - b}{a - 1} = \frac{a^n(u_1 - u_0) - b}{a - 1}$$
7. Comme $a > 1$, $a^n \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$ et $au_0 + b > u_0$ équivaut à $u_1 - u_0 > 0$, on reprend l'expression du 7. Il est clair que $u_n \to +\infty$
8. Comme $0 < a < 1$, $a^n \to 0$ donc $a^n(u_1 - u_0) - b \to -b$ lorsque $n \to +\infty$ par conséquent
   $$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\frac{b}{a-1}$$
   Et effectivement cette limite ne dépend pas de u_0.

Allez à : Exercice 3 :

Correction exercice 4 :

1.
   1.1. Par récurrence $u_0 \leq 2$ et montrons que $u_n \leq 2$ entraine $u_{n+1} \leq 2$

$$u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+1\le\frac{1}{2}\times 2+1=2$$

Donc pour tout $n\ge 0$, $u_n\le 2$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2}u_n+1-u_n=1-\frac{1}{2}u_n=\frac{2-u_n}{2}\ge 0$$

Donc la suite (u_n) est croissante.

1.2. La suite est croissante et majorée par 2 donc elle converge vers une limite l qui vérifie

$$l=\frac{1}{2}l+1\Leftrightarrow\frac{1}{2}l=1\Leftrightarrow l=2$$

2.

2.1 Par récurrence $u_0\ge 2$ et montrons que $u_n\ge 2$ entraine $u_{n+1}\ge 2$

$$u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+1\ge\frac{1}{2}\times 2+1=2$$

Donc pour tout $n\ge 0$, $u_n\ge 2$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2}u_n+1-u_n=1-\frac{1}{2}u_n=\frac{2-u_n}{2}\le 0$$

Donc la suite (u_n) est décroissante.

2.2 La suite est décroissante et minorée par 2 donc elle converge vers une limite l qui vérifie

$$l=\frac{1}{2}l+1\Leftrightarrow\frac{1}{2}l=1\Leftrightarrow l=2$$

3.

3.1

$$v_{n+1}=u_{n+1}-2=\frac{1}{2}u_n+1-2=\frac{1}{2}u_n-1=\frac{1}{2}(u_n-2)=\frac{1}{2}v_n$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

3.2

On déduit de 3.1. que pour tout $n\ge 0$:

$$v_n=\frac{1}{2^n}v_0=\frac{1}{2^n}(u_0-2)$$

Alors pour tout $n\ge 0$:

$$u_n=v_n+2=\frac{u_0}{2^n}-\frac{1}{2^{n-1}}+2$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{u_0}{2^n}-\frac{1}{2^{n-1}}\right)=0\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}u_n=2$$

3.3

$$\sum_{k=0}^{n}u_k=\sum_{k=0}^{n}(v_k+2)=(v_0+2)+(v_1+2)+\cdots+(v_n+2)=v_0+v_1+\cdots+v_n+2(n+1)$$

$$=v_0+\frac{1}{2}v_0+\frac{1}{2^2}v_0+\cdots+\frac{1}{2^n}v_0+2(n+1)$$

$$=v_0\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)+2(n+1)=v_0\frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}+2(n+1)$$

$$=2v_0\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)+2(n+1)=2v_0-\frac{v_0}{2^n}+2(n+1)$$

Ce qui entraine que

$$\frac{\sum_{k=0}^{n} u_k}{n}=\frac{2v_0-\frac{v_0}{2^n}+2(n+1)}{n}=\frac{2v_0-\frac{v_0}{2^n}}{n}+\frac{2(n+1)}{n}\to 0+2=2$$

Allez à : Exercice 4 :

Correction exercice 5 :

1.

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-2}{u_{n+1}+2}=\frac{\frac{u_n+8}{2u_n+1}-2}{\frac{u_n+8}{2u_n+1}+2}=\frac{u_n+8-2(2u_n+1)}{u_n+8+2(2u_n+1)}=\frac{-3u_n+6}{5u_n+10}=-\frac{3}{5}\times\frac{u_n-2}{u_n+2}=-\frac{3}{5}v_n$$

Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $-\frac{3}{5}$

2.

$$v_n=\left(-\frac{3}{5}\right)^n v_0=\left(-\frac{3}{5}\right)^n\times\frac{u_0-2}{u_0+2}=\left(-\frac{3}{5}\right)^n\times\frac{1-2}{1+2}=-\frac{1}{3}\times\left(-\frac{3}{5}\right)^n$$

3. Pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$v_n=\frac{u_n-2}{u_n+2}\Leftrightarrow v_n(u_n+2)=u_n-2\Leftrightarrow v_nu_n+2v_n=u_n-2\Leftrightarrow v_nu_n-u_n=-2-2v_n$$

$$\Leftrightarrow u_n(v_n-1)=-2-2v_n\Leftrightarrow u_n=-\frac{2+2v_n}{v_n-1}=-\frac{2-\frac{2}{3}\times\left(-\frac{3}{5}\right)^n}{-\frac{1}{3}\times\left(-\frac{3}{5}\right)^n-1}$$

4.

Comme $-1<-\frac{3}{5}<1$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{3}{5}\right)^n=0$$

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=-\frac{2}{-1}=2$$

Allez à : Exercice 5 :

Correction exercice 6 :

1. Le numérateur et le dénominateur tendent tous les deux vers $+\infty$, il s'agit donc d'une forme indéterminée.
   Première méthode
   On va multiplier en haut et en bas par la quantité conjuguée

$$u_n=\frac{2n+\sqrt{4n^2+1}}{n+\sqrt{n^2+1}}=\frac{\left(2n+\sqrt{4n^2+1}\right)\left(2n-\sqrt{4n^2+1}\right)\left(n-\sqrt{n^2+1}\right)}{\left(n+\sqrt{n^2+1}\right)\left(n-\sqrt{n^2+1}\right)\left(2n-\sqrt{4n^2+1}\right)}$$

$$=\frac{\left(4n^2-(4n^2+1)\right)\left(n-\sqrt{n^2+1}\right)}{\left(n^2-(n^2+1)\right)\left(2n-\sqrt{4n^2+1}\right)}=\frac{-\left(n-\sqrt{n^2+1}\right)}{-\left(2n-\sqrt{4n^2+1}\right)}=\frac{-n+\sqrt{n^2+1}}{-2n+\sqrt{4n^2+1}}$$

   Il s'agit d'une forme encore plus indéterminée que la précédente, il s'agit donc d'une mauvaise idée.
   Deuxième méthode

$$u_n=\frac{2n+\sqrt{4n^2+1}}{n+\sqrt{n^2+1}}=\frac{2n+\sqrt{4n^2\left(1+\frac{1}{4n^2}\right)}}{n+\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}}=\frac{2n+2n\sqrt{1+\frac{1}{4n^2}}}{n+n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=\frac{2n\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{4n^2}}\right)}{n\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)}$$
$$=2\frac{1+\sqrt{1+\frac{1}{4n^2}}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$$

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}2\frac{1+\sqrt{1+\frac{1}{4n^2}}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=2$$

2. Le numérateur est une forme indéterminée $+\infty-\infty$ et le dénominateur est une forme indéterminée $+\infty-\infty$, donc v_n est une forme indéterminée.
   Première méthode
   On va multiplier en haut et en bas par la quantité conjuguée
   $$v_n=\frac{2n-\sqrt{4n^2+1}}{n-\sqrt{n^2+1}}=\frac{\left(2n-\sqrt{4n^2+1}\right)\left(2n+\sqrt{4n^2+1}\right)\left(n+\sqrt{n^2+1}\right)}{\left(n-\sqrt{n^2+1}\right)\left(n+\sqrt{n^2+1}\right)\left(2n+\sqrt{4n^2+1}\right)}$$
   $$=\frac{\left(4n^2-(4n^2+1)\right)\left(n+\sqrt{n^2+1}\right)}{\left(n^2-(n^2+1)\right)\left(2n+\sqrt{4n^2+1}\right)}=\frac{-\left(n+\sqrt{n^2+1}\right)}{-\left(2n+\sqrt{4n^2+1}\right)}=\frac{n+\sqrt{n^2+1}}{2n+\sqrt{4n^2+1}}=\frac{1}{u_n}$$
   Donc la limite de v_n est $\frac{1}{2}$
   Deuxième méthode
   $$u_n=\frac{2n-\sqrt{4n^2+1}}{n-\sqrt{n^2+1}}=\frac{2n-\sqrt{4n^2\left(1+\frac{1}{4n^2}\right)}}{n-\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}}=\frac{2n-2n\sqrt{1+\frac{1}{4n^2}}}{n-n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=\frac{2n\left(1-\sqrt{1+\frac{1}{4n^2}}\right)}{n\left(1-\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)}$$
   $$=2\frac{1-\sqrt{1+\frac{1}{4n^2}}}{1-\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$$
   Le numérateur et le dénominateur tendent vers 0 donc il s'agit d'une forme indéterminée, c'est une mauvaise idée.

Allez à : Exercice 6 :

Correction exercice 7 :

1. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ il existe un unique $p=E\left(\sqrt{n}\right)$ tel que
   $$p\le\sqrt{n}<p+1$$
   Donc
   $$p^2\le n<(p+1)^2$$
   D'où l'on déduit que
   $$\frac{1}{(p+1)^2}<\frac{1}{n}\le\frac{1}{p^2}$$
   On multiplie ces dernières inégalités par $p=E\left(\sqrt{n}\right)>0$, car $n\ge1$

$$\frac{p}{(p+1)^2}<\frac{p}{n}\leq\frac{p}{p^2}\Leftrightarrow\frac{E(\sqrt{n})}{\left(E(\sqrt{n})+1\right)^2}<\frac{E(\sqrt{n})}{n}\leq\frac{1}{E(\sqrt{n})^2}$$

Lorsque $n\to+\infty$, $E(\sqrt{n})\to+\infty$ donc

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{E(\sqrt{n})}{n}=0$$

Puisque les limites des expressions de gauche et de droite tendent vers 0.

2. Avec les mêmes notations on multiplie les inégalités

$$\frac{1}{(p+1)^2}<\frac{1}{n}\leq\frac{1}{p^2}$$

Par $p^2=E(\sqrt{n})^2\geq 0$

$$\frac{p^2}{(p+1)^2}<\frac{p^2}{n}\leq\frac{p^2}{p^2}\Leftrightarrow\frac{E(\sqrt{n})^2}{\left(E(\sqrt{n})+1\right)^2}<\frac{E(\sqrt{n})^2}{n}\leq 1$$

Lorsque $n\to+\infty$, $E(\sqrt{n})\to+\infty$ donc

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{E(\sqrt{n})^2}{n}=1$$

Puisque les limites des expressions de gauche et de droite tendent vers 1.

Allez à : Exercice 7 :

Correction exercice 8 :

1. $u_1=\frac{1}{6}u_0^2+\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$

On va montrer que pour tout $n\geq 1$, $u_n>0$ entraine que $u_{n+1}>0$.

$$u_{n+1}=\frac{1}{6}u_n^2+\frac{3}{2}>\frac{3}{2}>0$$

C'est bien le cas. Donc pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n>0$

2. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite l alors

$$l=\frac{1}{6}l^2+\frac{3}{2}\Leftrightarrow l^2-6l+9=0\Leftrightarrow(l-3)^2=0\Leftrightarrow l=3$$

3. Encore une fois, faisons un raisonnement par récurrence, $u_0=0<3$, montrons que $u_n<3$ entraine que $u_{n+1}<3$.

$$u_{n+1}=\frac{1}{6}u_n^2+\frac{3}{2}<\frac{1}{6}\times 9+\frac{3}{2}=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=3$$

Donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n<3$.

4. Calculons $u_{n+1}-u_n$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{6}u_n^2+\frac{3}{2}-u_n=\frac{1}{6}(u_n^2-6u_n+9)=\frac{1}{6}(u_n-3)^2>0$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante, comme elle est bornée par 3, elle convergente vers la seule valeur qui vérifie $l=\frac{1}{6}l^2+\frac{3}{2}$, c'est-à-dire $l=3$.

Allez à : Exercice 8 :

Correction exercice 9 :

On va d'abord voir si la suite est monotone :

$$u_{n+1}-u_n=2u_n^2-u_n+\frac{1}{8}$$

L'équation $2X^2 - X + \frac{1}{8}$ a pour discriminant $\Delta = 1 - 4 \times 2 \times \frac{1}{8} = 0$, il s'agit donc, à un coefficient près d'une identité remarquable

$$2X^2 - X + \frac{1}{8} = 2\left(X^2 - \frac{1}{2}X + \frac{1}{16}\right) = 2\left(X - \frac{1}{4}\right)^2$$

Donc

$$u_{n+1} - u_n = 2u_n^2 - u_n + \frac{1}{8} = 2\left(u_n - \frac{1}{4}\right)^2 \geq 0$$

La suite est croissante, montrons par récurrence, qu'elle est majorée par $\frac{1}{4}$

$$u_0 = 0 < \frac{1}{4}$$

Montrons que $u_n < \frac{1}{4}$ entraine que $u_{n+1} < \frac{1}{4}$

$$u_{n+1} = 2u_n^2 + \frac{1}{8} < 2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{8} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

La suite est croissante et majorée, elle converge vers une limite l qui vérifie

$$l = 2l^2 + \frac{1}{8} \Leftrightarrow 2l^2 - l + \frac{1}{8} = 0 \Leftrightarrow 2\left(l - \frac{1}{4}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow l = \frac{1}{4}$$

Allez à : Exercice 9 :

Correction exercice 10 :

1. Notons (H_n) $1 < u_n < 2$.

$$u_0 = \frac{3}{2} \in]1,2[$$

Donc (H_0) est vraie.

Montrons que (H_n) entraine (H_{n+1}) est vraie

$$1 < u_n < 2 \Rightarrow 0 < u_n - 1 < 1 \Rightarrow 0 < (u_n - 1)^2 < 1 \Rightarrow 1 < (u_n - 1)^2 + 1 < 2 \Rightarrow 1 < u_{n+1} < 2$$

C'est bien le cas donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 < u_n < 2$.

2.

$$u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)^2 + 1 - u_n = u_n^2 - 2u_n + 2 - u_n = u_n^2 - 3u_n + 2 = (u_n - 1)(u_n - 2)$$

D'après la première question $u_n - 1 > 0$ et $u_n - 2 < 0$ donc $u_{n+1} - u_n < 0$, la suite est donc strictement décroissante.

3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 1 donc elle converge vers $l \in \mathbb{R}$. l vérifie

$$l = (l - 1)^2 + 1 = l^2 - 2l + 2 \Leftrightarrow l^2 - 3l + 2 = 0$$

Il y a deux solutions, $l = 1$ ou $l = 2$, or $u_0 = \frac{3}{2}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante donc $l = 1$

Allez à : Exercice 10 :

Correction exercice 11 :

Il suffit d'imaginer la tête de u_{n+1} pour être décourager à l'avance de calculer $u_{n+1} - u_n$ pour essayer de montrer la monotonie de cette suite. On va faire autrement, pour tout $k \in \{1,2, \dots, n\}$

$$\frac{1}{3n^2 + n} \leq \frac{1}{3n^2 + k} \leq \frac{1}{3n^2 + 1}$$

Donc

$$\frac{2n+1}{3n^2+n} + \frac{2n+1}{3n^2+n} + \cdots + \frac{2n+1}{3n^2+n} \leq \frac{2n+1}{3n^2+1} + \frac{2n+1}{3n^2+2} + \cdots + \frac{2n+1}{3n^2+n}$$
$$\leq \frac{2n+1}{3n^2+1} + \frac{2n+1}{3n^2+1} + \cdots + \frac{2n+1}{3n^2+1}$$

Les n termes dans le premier membre sont tous égaux à $\frac{2n+1}{3n^2+n}$. Les n termes dans le dernier membre sont tous égaux à $\frac{2n+1}{3n^2+1}$, on en déduit que

$$n \times \frac{2n+1}{3n^2+n} \leq u_n \leq n \times \frac{2n+1}{3n^2+1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} n \times \frac{2n+1}{3n^2+n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2+n}{3n^2+n} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{n\to+\infty} n \times \frac{2n+1}{3n^2+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2+n}{3n^2+1} = \frac{2}{3}$$

On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{2}{3}$$

Allez à : Exercice 11 :

Correction exercice 12 :

Ce genre d'exercice ce traite toujours de la même façon, il faut « sentir » que l'on peut exprimer u_{n+1} en fonction de u_n :

$$u_{n+1} = \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n+1) \times (2n+3)}{3 \times 6 \times \dots \times (3n+3)(3n+6)} = \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n+1)}{3 \times 6 \times \dots \times (3n+3)} \times \frac{2n+3}{3n+6} = u_n \times \frac{2n+3}{3n+6}$$

S'il y a une limite l elle vérifie

$$l = l \times \frac{2}{3} \Leftrightarrow \left(1 - \frac{2}{3}\right) l = 0 \Leftrightarrow l = 0$$

Il reste à montrer que la suite de terme général u_n converge.

Il est plus que clair que $u_n > 0$, la suite est minorée, de plus il suffit de regarder le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ pour savoir si la suite est monotone (décroissante nous arrangerait bien)

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+3}{3n+6} < \frac{2n+4}{3n+6} = \frac{2(n+2)}{3(n+2)} = \frac{2}{3} < 1$$

Donc la suite de terme général u_n est décroissante et minorée donc elle converge, comme on l'a vu plus haut la seule limite possible est 0.

Allez à : Exercice 12 :

Correction exercice 13 :

1.

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$$

2. Première méthode

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}$$

Dans la seconde somme on pose $k' = k+1$, alors $k = 1 \Rightarrow k' = 2$ et $k = n \Rightarrow k' = n+1$

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k'=2}^{n+1} \frac{1}{k'}$$

Ensuite on change k' en k

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Car tous les autres termes se simplifient

Par conséquent $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et sa limite est 1.

Deuxième méthode

$$u_n=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=1-\frac{1}{n+1}$$

Car tous les autres termes se simplifient

Par conséquent $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et sa limite est 1.

Allez à : Exercice 13 :

Correction exercice 14 :

1.
$$v_{n+1}=3u_{n+1}-\frac{3}{2}u_{n+2}=3u_{n+1}-\frac{3}{2}\left(\frac{5}{2}u_{n+1}-u_n\right)=\left(3-\frac{15}{4}\right)u_{n+1}+\frac{3}{2}u_n=-\frac{3}{4}u_{n+1}+\frac{3}{2}u_n$$
$$=\frac{1}{2}\left(3u_n-\frac{3}{2}u_{n+1}\right)=\frac{1}{2}v_n$$

Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$

Donc
$$v_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n v_0=\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(3u_0-\frac{3}{2}u_1\right)$$

2.
$$w_{n+1}=-\frac{3}{4}u_{n+1}+\frac{3}{2}u_{n+2}=-\frac{3}{4}u_{n+1}+\frac{3}{2}\left(\frac{5}{2}u_{n+1}-u_n\right)=\left(\frac{15}{4}-\frac{3}{4}\right)u_{n+1}-\frac{3}{2}u_n$$
$$=3u_{n+1}-\frac{3}{2}u_n=2\left(\frac{3}{2}u_{n+1}-\frac{3}{4}u_n\right)=2w_n$$

Donc $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 2

Donc
$$w_n=2^n w_0=2^n\left(-\frac{3}{4}u_0+\frac{3}{2}u_1\right)$$

3. D'une part
$$v_n+w_n=3u_n-\frac{3}{2}u_{n+1}-\frac{3}{4}u_n+\frac{3}{2}u_{n+1}=\frac{9}{4}u_n$$

D'autre part
$$v_n+w_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(3u_0-\frac{3}{2}u_1\right)+2^n\left(-\frac{3}{4}u_0+\frac{3}{2}u_1\right)$$

Donc
$$u_n=\frac{4}{9}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(3u_0-\frac{3}{2}u_1\right)+2^n\left(-\frac{3}{4}u_0+\frac{3}{2}u_1\right)\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{4}{3}u_0-\frac{1}{3}u_1\right)+2^n\left(-\frac{1}{3}u_0+\frac{2}{3}u_1\right)$$

4. Comme 2^n tend vers l'infini si $-\frac{1}{3}u_0+\frac{2}{3}u_1\neq 0$ alors u_n tend vers l'infini donc ne converge pas.

Supposons que $-\frac{1}{3}u_0+\frac{2}{3}u_1=0$, comme $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ tend vers 0, alors pour toutes valeurs de $\frac{4}{3}u_0-\frac{1}{3}u_1$ u_n tend vers 0.

Allez à : Exercice 14 :

Correction exercice 15 :

1.

$$v_{n+1}=u_{n+2}-u_{n+1}=\frac{1}{2}u_{n+1}+\frac{1}{2}u_n-u_{n+1}=-\frac{1}{2}u_{n+1}+\frac{1}{2}u_n=-\frac{1}{2}(u_{n+1}-u_n)=-\frac{1}{2}v_n$$

Par conséquent

$$v_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^n v_0=\left(-\frac{1}{2}\right)^n(u_1-u_0)$$

2.

$$w_{n+1}=2u_{n+2}+u_{n+1}=2\left(\frac{1}{2}u_{n+1}+\frac{1}{2}u_n\right)+u_{n+1}=2u_{n+1}+u_n=w_n=w_0=2u_1+u_0$$

3.

$$-2v_n+w_n=-2(u_{n+1}-u_n)+2u_{n+1}+u_n=3u_n$$

Et

$$-2v_n+w_n=-2\left(-\frac{1}{2}\right)^n(u_1-u_0)+2u_1+u_0$$

Donc

$$u_n=\frac{1}{3}\left(-2\left(-\frac{1}{2}\right)^n(u_1-u_0)+2u_1+u_0\right)=-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n(u_1-u_0)+\frac{2}{3}u_1+\frac{1}{3}u_0$$

4.

$$\begin{aligned}S_n=\sum_{k=0}^{n}u_k&=u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n\\
&=\left(-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^0(u_1-u_0)+\frac{2}{3}u_1+\frac{1}{3}u_0\right)+\left(-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^1(u_1-u_0)+\frac{2}{3}u_1+\frac{1}{3}u_0\right)\\
&+\left(-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^2(u_1-u_0)+\frac{2}{3}u_1+\frac{1}{3}u_0\right)+\cdots+\left(-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n(u_1-u_0)+\frac{2}{3}u_1+\frac{1}{3}u_0\right)\\
&=-\frac{2}{3}(u_1-u_0)\left(1+\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)+(n+1)\left(\frac{2}{3}u_1+\frac{1}{3}u_0\right)\\
&=-\frac{2}{3}(u_1-u_0)\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}+\frac{1}{3}(n+1)(2u_1+u_0)\\
&=-\frac{2}{3}(u_1-u_0)\times\frac{2}{3}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)+\frac{1}{3}(n+1)(2u_1+u_0)\\
&=-\frac{4}{9}(u_1-u_0)\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)+\frac{1}{3}(n+1)(2u_1+u_0)\end{aligned}$$

Comme $-1<-\frac{1}{2}<1$, $\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\to 0$

$(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, admet une limite finie si et seulement si $2u_1+u_0=0$, soit $u_1=-\frac{u_0}{2}$

Et

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=-\frac{4}{9}(u_1-u_0)=-\frac{4}{9}\left(-\frac{u_0}{2}-u_0\right)=-\frac{4}{9}\times\left(-\frac{3}{2}\right)u_0=\frac{2}{3}u_0$$

Allez à : Exercice 15 :

Correction exercice 16 :

Si la suite de terme général u_n converge vers une limite l alors

$$l=\frac{5}{2}+\sqrt{l-\frac{7}{4}}$$

Il est clair qu'il va falloir élever au carré quelque chose, mais si on élève au carré ces deux expressions on va avoir un double produit où il y aura encore une racine alors il faut modifier légèrement cette égalité

$$l-\frac{5}{2}=\sqrt{l-\frac{7}{4}}$$

On y va

$$\left(l-\frac{5}{2}\right)^2=l-\frac{7}{4}$$

Mais attention, il faudra faire une réciproque des fois que $l-\frac{5}{2}$ soit négatif.

$$l^2-5l+\frac{25}{4}=l-\frac{7}{4}\Leftrightarrow l^2-6l+8=0$$

Cette équation du second degré a pour discriminant

$$\Delta=36-4\times 8=4$$

Et donc comme racines

$$l_1=\frac{6-2}{2}=2\quad \text{et}\quad l_2=\frac{6+2}{2}=4$$

La solution $l=2$ ne convient pas car

$$2-\frac{5}{2}\neq\sqrt{2-\frac{7}{4}}$$

La solution $l=4$ est la seule possible.

Comme $u_0<4$, ce qui nous arrangerait maintenant c'est que la suite de terme général u_n soit croissante et majorée par 4, on pourrait alors conclure que la suite de terme général u_n est convergente et de limite 4. Montrons ce résultat par récurrence.

Pour $u_0=\frac{11}{4}$ c'est clair $\frac{11}{4}<4$.

Montrons que $u_n<4$ entraine que $u_{n+1}<4$

$$u_{n+1}=\frac{5}{2}+\sqrt{u_n-\frac{7}{4}}<\frac{5}{2}+\sqrt{4-\frac{7}{4}}=\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{5}{2}+\frac{3}{2}=4$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 4.

Pour montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante on aura besoin de montrer, au préalable que pour tout $\in\mathbb{N}$ $u_n>\frac{5}{2}$, pour ce genre de récurrence on peut dire que c'est trivial, on vérifie au passage que la suite de terme général u_n est définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ car $u_n>\frac{5}{2}\Rightarrow u_n-\frac{7}{4}>0$

Regardons maintenant si la suite est monotone :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{5}{2}+\sqrt{u_n-\frac{7}{4}}-u_n=\frac{5}{2}-u_n+\sqrt{u_n-\frac{7}{4}}=\frac{\left(\frac{5}{2}-u_n+\sqrt{u_n-\frac{7}{4}}\right)\left(\frac{5}{2}-u_n-\sqrt{u_n-\frac{7}{4}}\right)}{\frac{5}{2}-u_n-\sqrt{u_n-\frac{7}{4}}}$$

$$=\frac{\left(\frac{5}{2}-u_n\right)^2-\left(u_n-\frac{7}{4}\right)}{\frac{5}{2}-u_n-\sqrt{u_n-\frac{7}{4}}}=\frac{u_n^2-6u_n+8}{\frac{5}{2}-u_n-\sqrt{u_n-\frac{7}{4}}}=\frac{(u_n-2)(u_n-4)}{\frac{5}{2}-u_n-\sqrt{u_n-\frac{7}{4}}}$$

$$\frac{5}{2}<u_n\Rightarrow u_n-2>0$$

$$u_n<4\Rightarrow u_n-4<0$$

$$\frac{5}{2}<u_n\Rightarrow\frac{5}{2}-u_n<0\Rightarrow\frac{5}{2}-u_n-\sqrt{u_n-\frac{7}{4}}<0$$

Par conséquent $u_{n+1}-u_n>0$, la suite est croissante

C'est fait, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée donc elle converge vers la seule limite possible $l=4$.

Allez à : Exercice 16 :

Correction exercice 17 :

1. Il s'agit d'une forme indéterminée, on mettre en facteur, au numérateur et au dénominateur les termes qui tendent le plus vite vers l'infini

$$\frac{\sqrt{n}-n+1}{2\sqrt{n}+n+2}=\frac{n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-1+\frac{1}{n}\right)}{n\left(\frac{2}{\sqrt{n}}+1+\frac{2}{n}\right)}=\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}-1+\frac{1}{n}}{\frac{2}{\sqrt{n}}+1+\frac{2}{n}}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}-n+1}{2\sqrt{n}+n+2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}-1+\frac{1}{n}}{\frac{2}{\sqrt{n}}+1+\frac{2}{n}}=-\frac{1}{1}=-1$$

2. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite l, celle-ci vérifie

$$l=l-l^2\Leftrightarrow l=0$$

Regardons si la suite est monotone, pour tout $n\geq 1$

$$u_n-u_{n-1}=-(u_{n-1})^2\leq 0$$

Donc la suite est décroissante.

Montrons par récurrence que pour tout $n\geq 0$. $0<u_0<1$, puis montrons que pour tout $n\geq 1$ $0<u_{n-1}<1$ entraine que $0<u_n<1$.

$$u_n=u_{n-1}-(u_{n-1})^2=u_{n-1}(1-u_{n-1})$$

$0<u_{n-1}<1$ entraine que $0<1-u_{n-1}<1$ et le produit de deux nombres compris entre 0 et 1 est compris entre 0 et 1, donc $0<u_n<1$. En particulier $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0, comme elle est décroissante, elle converge vers la seule limite possible $l=0$.

Allez à : Exercice 17 :

Correction exercice 18 :

$$\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}=\frac{n^2+n+1-(n^2-n+1)}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}}=\frac{2n}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}+\sqrt{n^2\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}}$$

$$=\frac{2n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+n\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}=\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}$$

Donc cette expression admet une limite et

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}=\frac{2}{2}=1$$

Allez à : Exercice 18 :

Correction exercice 19 :

Première méthode

$$u_n=\frac{n-\sqrt{n^2+n}}{1-\sqrt{n^2+1}}=u_n=\frac{n-n\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{1-n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=\frac{n\left(1-\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)}{n\left(\frac{1}{n}-\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)}=\frac{1-\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}-\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$

Deuxième méthode (moins bonne)

$$u_n=\frac{n-\sqrt{n^2+n}}{1-\sqrt{n^2+1}}=\frac{n-\sqrt{n^2+n}}{1}\times\frac{1}{1-\sqrt{n^2+1}}=\frac{n^2-(n^2+n)}{n+\sqrt{n^2+n}}\times\frac{1+\sqrt{n^2+1}}{1^2-(n^2+1)}$$
$$=\frac{-n}{n+\sqrt{n^2+n}}\times\frac{1+\sqrt{n^2+1}}{-n^2}=\frac{1}{n}\times\frac{1+\sqrt{n^2+1}}{n+\sqrt{n^2+n}}=\frac{1}{n}\times\frac{1+\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}}{n+\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}}$$
$$=\frac{1}{n}\times\frac{1+n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{n+n\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=\frac{1}{n}\times\frac{n\left(\frac{1}{n}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)}{n\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)}=\frac{1}{n}\times\frac{\frac{1}{n}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$

Allez à : Exercice 19 :

Correction exercice 20 :

Nous allons utiliser le théorème sur les suites adjacentes

$$u_{n+1}-u_n=1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{(n+1)^3}-\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{n^3}\right)=\frac{1}{(n+1)^3}>0$$

Donc la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante

$$v_{n+1}-v_n=u_{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}-u_n-\frac{1}{n^2}=\frac{1}{(n+1)^3}+\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{n^2}=\frac{n^2+n^2(n+1)-(n+1)^3}{(n+1)^3n^2}$$
$$=\frac{n^2+n^3+n^2-(n^3+3n^2+3n+1)}{(n+1)^3n^2}=-\frac{n^2+3n+1}{(n+1)^3n^2}<0$$

Donc la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est décroissante

$$v_n-u_n=\frac{1}{n^2}\to 0$$

Donc les deux suites convergent vers une même limite.

Allez à : Exercice 20 :

Correction exercice 21 :

1. $1<u_0$, montrons que $1<u_n$ entraine que $1<u_{n+1}$
$$u_{n+1}=\sqrt{2u_n-1}>\sqrt{2\times 1-1}=1$$
Cela montre que la suite est bien définie car si $u_n<\frac{1}{2}$ alors u_{n+1} n'est pas défini.
2.
$$u_{n+1}-u_n=\sqrt{2u_n-1}-u_n=\frac{2u_n-1-u_n^2}{\sqrt{2u_n-1}+u_n}=-\frac{u_n^2+2u_n+1}{\sqrt{2u_n-1}+u_n}-\frac{(u_n+1)^2}{\sqrt{2u_n-1}+u_n}<0$$
Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. La suite est décroissante et minorée par 1 donc elle converge vers une limite l qui vérifie
$$l=\sqrt{2l-1}$$
$l>0$ et $\sqrt{2l-1}>0$ donc
$$l=\sqrt{2l-1}\Leftrightarrow l^2=2l-1\Leftrightarrow l^2-2l+1=0\Leftrightarrow (l-1)^2=0\Leftrightarrow l=1$$

Allez à : Exercice 21 :

Correction exercice 22 :

On a

$$E(\sqrt{n}) \leq \sqrt{n} < E(\sqrt{n}) + 1$$

Donc

$$\sqrt{n} - 1 < E(\sqrt{n}) \leq \sqrt{n}$$

On divise par $\sqrt{n} > 0$

$$\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}} < \frac{E(\sqrt{n})}{\sqrt{n}} \leq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{E(\sqrt{n})}{\sqrt{n}} \leq 1$$

D'après le théorème des gendarmes

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{E(\sqrt{n})}{\sqrt{n}} = 1$$

Allez à : Exercice 22 :

Correction exercice 23 :

1. Montrons par récurrence que $\forall n \geq 0,\ 0 < u_n < 1$, cela montrer au passage que la suite u_n est bien définie pour tout n (en effet si $u_n \notin [0,1]$ u_{n+1} n'est pas défini.
   $u_0 \in]0,1[$, montrons maintenant que $u_n \in]0,1[$ entraine que $u_{n+1} \in]0,1[$
   $$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < 1 \Leftrightarrow 0 < 1 - u_n < 1 \Leftrightarrow 0 < \sqrt{1-u_n} < 1 \Leftrightarrow 0 < 1 - \sqrt{1-u_n} < 1$$
   $$\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{5}\left(1 - \sqrt{1-u_n}\right) < \frac{1}{5} \Rightarrow 0 < u_{n+1} < 1$$
   Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]0,1[$.
2. Nous allons employer la méthode « normale »
   $$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5}\left(1 - \sqrt{1-u_n}\right) - u_n = \frac{1}{5} - u_n - \frac{1}{5}\sqrt{1-u_n}$$
   $$= \frac{\left(\frac{1}{5} - u_n - \frac{1}{5}\sqrt{1-u_n}\right)\left(\frac{1}{5} - u_n + \frac{1}{5}\sqrt{1-u_n}\right)}{\frac{1}{5} - u_n + \frac{1}{5}\sqrt{1-u_n}} = \frac{\left(\frac{1}{5} - u_n\right)^2 - \frac{1}{25}(1-u_n)}{\frac{1}{5} - u_n + \frac{1}{5}\sqrt{1-u_n}}$$
   $$= \frac{\frac{1}{25} - \frac{2}{5}u_n + u_n^2 - \frac{1}{25} + \frac{1}{25}u_n}{\frac{1}{5} - u_n + \frac{1}{5}\sqrt{1-u_n}} = \frac{u_n^2 - \frac{9}{25}u_n}{\frac{1}{5} - u_n + \frac{1}{5}\sqrt{1-u_n}} = \frac{u_n\left(u_n - \frac{9}{25}\right)}{\frac{1}{5} - u_n + \frac{1}{5}\sqrt{1-u_n}}$$
   Et là cela coince, au numérateur, on connait bien le signe de u_n mais pas celui de $u_n - \frac{9}{25}$ et au dénominateur, rien ne nous permet d'affirmer que $\frac{1}{5} - u_n \geq 0$ (cela nous aurait arranger parce que dans ce cas on aurait pu conclure que le dénominateur est positif). Bref il doit y avoir un « truc ».
   $$u_{n+1} = \frac{1}{5}\left(1 - \sqrt{1-u_n}\right) = \frac{1}{5}\frac{\left(1 - \sqrt{1-u_n}\right)\left(1 + \sqrt{1-u_n}\right)}{1 + \sqrt{1-u_n}} = \frac{1}{5} \times \frac{1 - (1-u_n)}{1 + \sqrt{1-u_n}}$$
   $$= \frac{1}{5} \times \frac{u_n}{1 + \sqrt{1-u_n}} < \frac{1}{5} \times \frac{u_n}{1+0} < u_n$$
   Et voilà le travail, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. La suite est décroissante et minorée par 0 donc elle est convergente vers une limite l qui vérifie
   $$l = \frac{1}{5}\left(1 - \sqrt{1-l}\right) \Leftrightarrow 5l = 1 - \sqrt{1-l} \Leftrightarrow 5l - 1 = -\sqrt{1-l}$$

Maintenant on peut élever au carré mais on n'aura qu'une implication parce que rien ne garantit que $5l-1$ soit du même signe que $-\sqrt{1-l}$, c'est-à-dire négatif (en fait si parce que $u_0=\frac{1}{5}$ et la suite est décroissante donc $l<\frac{1}{5}$, mettons que l'on ait rien vu).

$$(5l-1)^2=1-l \Leftrightarrow 25l^2-10l+1=1-l \Leftrightarrow 25l^2-9l=0 \Leftrightarrow 25l\left(l-\frac{9}{25}\right)=0$$

Il y a deux limites possibles, $l=0$ convient car $5\times 0-1=-\sqrt{1-0}$, par contre $l=\frac{9}{25}$ ne convient pas car $5\times\frac{9}{25}-1=\frac{4}{5}$ et $-\sqrt{1-\frac{9}{25}}=-\sqrt{\frac{16}{25}}=-\frac{4}{5}$

Finalement la suite est décroissante, minorée par 0, elle converge vers la seule limite possible $l=0$.

Allez à : Exercice 23 :

Correction exercice 24 :

1. a) f_n est définie, continue et dérivable à dérivée continue sur $[0,1]$.

$$f_n'(x)=nx^{n-1}-2(1-x)(-1)=nx^{n-1}+2(1-x)$$

Pour $x\in\,]0,1[$, $x^{n-1}>0$ et $1-x>0$ donc f_n est strictement croissante. On pourrait vérifier que $f_n'(0)>0$ et que $f_n'(1)>0$ mais même si ces dérivées avaient été nulle cela n'aura pas changer la conclusion.

b) $f_n(0)=-1$ et $f_n(1)=1$, d'après 1.a) f_n est une bijection croissante de $]0,1[$ sur $]-1,1[$, donc $0\in\,]-1,1[$ admet un unique antécédent $\alpha_n\in\,]0,1[$, c'est-à-dire tel que $f_n(\alpha_n)=0$.

c)

$$f_n(\alpha_n)=0 \Leftrightarrow \alpha_n^n-(1-\alpha_n)^2=0 \Leftrightarrow \alpha_n^n=(1-\alpha_n)^2$$
$$f_{n+1}(\alpha_n)=\alpha_n^{n+1}-(1-\alpha_n)^2=\alpha_n^{n+1}-\alpha_n^n=\alpha_n^n(\alpha_n-1)<0$$

Car $\alpha_n^n>0$ et $1-\alpha_n<0$.

2. a) La fonction f_{n+1} est une bijection croissante donc

$$0=f_{n+1}(\alpha_{n+1})>f_{n+1}(\alpha_n) \Leftrightarrow \alpha_{n+1}>\alpha_n$$

Par conséquent la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

b) la suite est croissante et majorée par 1, donc elle converge.

c) i) La suite est croissante alors

$$0<\alpha_n\leq\alpha$$

Cela entraine que

$$0<\alpha_n^n\leq\alpha^n$$

Or, si $0\leq\alpha<1$ alors la limite de α^n est nulle, on en déduit, d'après le théorème des gendarmes que

$$\lim_{n\to+\infty}\alpha_n^n=0$$

ii) On a vu au 1. c) que

$$f_n(\alpha_n)=0 \Leftrightarrow \alpha_n^n=(1-\alpha_n)^2$$

Ce qui entraine, d'après 2. c) i) que

$$\lim_{n\to+\infty}(1-\alpha_n)^2=0$$

Autrement dit que

$$\lim_{n\to+\infty}\alpha_n=1$$

Ce qui signifie que $\alpha=1$, (comme $0<\alpha_n<1$ et que $(\alpha_n)_{n\to+\infty}$ admet une limite α entraine que $0\leq\alpha\leq 1$), il y a une contradiction avec l'hypothèse $\alpha<1$, par conséquent $\alpha=1$.

Allez à : Exercice 24 :

Correction exercice 25 :

$$u_n=\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=f\left(\frac{1}{n}\right)$$

Avec

$$f(x)=\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$$

Si f admet une limite lorsque $x\to 0$, avec $x\neq 0$ alors cette limite est la même que celle de u_n.
Il s'agit d'une forme indéterminée.
Première méthode
Règle de L'Hospital, on pose

$$g(x)=\sqrt{1+x}-1 \quad \text{et} \quad h(x)=x$$

Alors

$$g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1+x}} \quad \text{et} \quad h'(x)=1$$

$$\frac{g'(x)}{h'(x)}=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{g'(x)}{h'(x)}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{1}{2\sqrt{1+x}}=\frac{1}{2}$$

On en déduit que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{g'(x)}{h'(x)}=\frac{1}{2}$$

Et alors

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\frac{1}{2}$$

Deuxième méthode
On pose

$$g(x)=\sqrt{1+x}$$

$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\frac{g(x)-g(0)}{x-0}$$

Il s'agit du taux de variation, en 0, de la fonction g, sa limite est $g'(0)$. Comme $g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}$:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=g'(0)=\frac{1}{2}$$

Et alors

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\frac{1}{2}$$

Troisième méthode

$$n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)=n\frac{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=n\frac{1+\frac{1}{n}-1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=n\frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$$

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{2}$$

Allez à : Exercice 25 :

Correction exercice 26 :

1.

$$u_{n+1}-u_n$$
$$=\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+4}+\cdots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}$$
$$=\frac{2(n+1)+2n+1-2(2n+1)}{2(2n+1)(n+1)}=\frac{1}{2(2n+1)(n+1)}<0$$

Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

2. $\forall k\in\{1,2,\dots,n\}$

$$\frac{1}{2n}\le\frac{1}{n+k}<\frac{1}{n+1}$$

Donc

$$\underbrace{\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}}_{\times n}\le\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}<\underbrace{\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+1}}_{\times n}$$

Autrement dit

$$\frac{n}{2n}\le u_n<\frac{n}{n+1}$$

Ce qui entraine que

$$\frac{1}{2}\le u_n<1$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 1 et croissante donc elle converge vers une limite l.

Et on a $\frac{1}{2}\le l\le 1$.

Allez à : Exercice 26 :

Correction exercice 27 :

On va minorer u_n par une suite qui tend vers $+\infty$

$$\forall k\in\{1,\dots,n\},3+|\sin(k)|\sqrt{k}<3+\sqrt{k}\le 3+\sqrt{n}$$

Ce qui entraine que

$$\forall k\in\{1,\dots,n\},\frac{1}{3+|\sin(k)|\sqrt{k}}\ge\frac{1}{3+\sqrt{n}}$$

Donc

$$u_n\ge\underbrace{\frac{1}{3+\sqrt{n}}+\cdots+\frac{1}{3+\sqrt{n}}}_{\times n}=\frac{n}{3+\sqrt{n}}\to+\infty$$

On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=+\infty$$

Allez à : Exercice 27 :

Correction exercice 28 :

$$u_{n+1}-u_n=4u_n^2-u_n+\frac{1}{16}$$

Transformons le polynôme $4X^2-X+\frac{1}{16}$

Son discriminant est

$$\Delta = 1 - 4 \times 4 \times \frac{1}{16} = 0$$

Donc, à un coefficient près, il s'agit d'une identité remarquable

$$4X^2 - X + \frac{1}{16} = 4\left(X^2 - \frac{1}{4}X + \frac{1}{64}\right) = 4\left(X - \frac{1}{8}\right)^2$$

Alors

$$u_{n+1} - u_n = 4u_n^2 - u_n + \frac{1}{16} = 4\left(u_n - \frac{1}{8}\right)^2 \geq 0$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Montrons par récurrence qu'elle est majorée par $\frac{1}{8}$.

Pour $u_0 = 0$ c'est vrai. Montrons que $u_n < \frac{1}{8}$ entraine que $u_{n+1} < \frac{1}{8}$.

$$u_{n+1} = \frac{1}{16} + 4u_n^2 < \frac{1}{16} + 4 \times \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1}{16} + \frac{4}{64} = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{8}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < \frac{1}{8}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par $\frac{1}{8}$ donc elle converge vers une limite l qui vérifie

$$l = \frac{1}{16} + 4l^2 \Leftrightarrow 4l^2 - l + \frac{1}{16} = 0 \Leftrightarrow 4\left(l - \frac{1}{8}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow l = \frac{1}{8}$$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la seule limite possible $\frac{1}{8}$.

Allez à : Exercice 28 :

Correction exercice 29 :

1.

$$\left|\frac{(-1)^n}{n} + \frac{\sin(n^2)}{2}\right| \leq \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| + \left|\frac{\sin(n^2)}{2}\right| = \frac{1}{n} + \left|\frac{\sin(n^2)}{2}\right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{2}$$

La suite de terme général $\frac{1}{n}$ est décroissante et pour tout $n \geq 5$

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{5} < \frac{1}{4}$$

Donc pour tout $n \geq 5$

$$\left|\frac{(-1)^n}{n} + \frac{\sin(n^2)}{2}\right| \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

2. Pour tout $n \geq 5$

$$0 < u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n \to 0$$

Donc d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

Allez à : Exercice 29 :

Correction exercice 30 :

$$u_1 = \frac{1}{3}e^{-u_0} > 0$$

Montrons par récurrence que pour tout $n \geq 1$ que $u_n > 0$

Pour $n = 1$ c'est vrai. Montrons que $u_n > 0$ entraine que $u_{n+1} > 0$

$$u_{n+1} = \frac{n}{n^2 + 2}e^{-u_n} > 0$$

C'est une grosse évidence.
On en déduit que pour tout $n \geq 1$

$$0 < u_{n+1} = \frac{n}{n^2+2} e^{-u_n} < \frac{n}{n^2+2}$$

Comme

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n^2+2} = 0$$

D'après le théorème des gendarmes

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

Allez à : Exercice 30 :

Correction exercice 31 :

1.

$$u_{n+1} - u_n = -3 + e^{u_n}$$

Pour montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante il va falloir montrer que

$$-3 + e^{u_n} < 0 \Leftrightarrow e^{u_n} < 3 \Leftrightarrow u_n < \ln(3)$$

Montrons cela par récurrence que $u_n < \ln(3)$

$e < 3 \Rightarrow \ln(e) < \ln(3) \Rightarrow u_0 = 1 < \ln(3)$ pour $n = 0$ c'est vrai.

Montrons que $u_n < \ln(3)$ entraine que $u_{n+1} < \ln(3)$

$$u_{n+1} = u_n - 3 + e^{u_n} < \ln(3) - 3 + e^{\ln(3)} = \ln(3) - 3 + 3 = \ln(3)$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < \ln(3)$

Cela montre que $u_{n+1} - u_n < 0$ et que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

2. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers une limite l alors

$$l = l - 3 + e^l \Leftrightarrow 0 = -3 + e^l \Leftrightarrow e^l = 3 \Leftrightarrow l = \ln(3)$$

Or la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $u_0 < \ln(3)$ donc elle ne peut pas converger vers $\ln(3)$.

3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, si cette suite est minorée, elle converge or ce n'est pas le cas, donc elle n'est pas minorée. Une suite décroissante et non minorée tend vers $-\infty$.

Allez à : Exercice 31 :

Correction exercice 32 :

1. C'est faux, par exemple $B =]0,1]$ est minorée, sa borne inférieure est 0 et $0 \notin]0,1]$.
2. C'est faux, par exemple la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite de nombres réels définit par :

$$u_n = n + (-1)^n\sqrt{n}$$

En transformant u_n, pour $n > 0$:

$$u_n = n\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$$

Il est clair que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

$$u_{n+1} - u_n = n + 1 + (-1)^{n+1}\sqrt{n+1} - \left(n + (-1)^n\sqrt{n}\right) = 1 + (-1)^{n+1}\left(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right)$$

Donc pour $n = 2p$, $u_{2p+1} < u_{2p}$, ce qui montre que la suite n'est pas croissante même à partir d'un certain rang. En fait la suite augmente entre u_{2p-1} et u_{2p} et elle diminue un peu moins entre u_{2p} et u_{2p+1}.

3. Une suite de Cauchy à valeurs réelle converge vers une limite l donc

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, |u_n - l| < \epsilon$$

Prenons $\epsilon = 1$ (n'importe quelle valeur convient) alors $|u_n - l| < 1$ ce qui équivaut à

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, -1 < u_n - l < 1$$

Ou encore à

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, l - 1 < u_n < l + 1$$

Ensuite l'ensemble $\{u_0, u_1, \dots, u_N\}$ est un ensemble fini, il admet donc un minimum et un maximum, notons les respectivement u_{n_0} et u_{n_1}, ce qui signifie que

$$\forall n \in \{0,1, \dots, N\}, u_{n_0} \leq u_n \leq u_{n_1}$$

Par conséquent

$$\forall n \in \mathbb{N}, \min(l - 1, u_{n_0}) \leq u_n \leq \max(l + 1, u_{n_1})$$

Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Remarque : cela signifie nullement que l'ensemble $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ admet un maximum et un minimum, cela peut être le cas ou pas.

4. On fait comme si on n'avait rien vu.

Commençons par écrire ce que signifie :

$$\lim_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$$

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n > N \Rightarrow |u_n| > A$$

Puis écrivons la négation de cette proposition, attention, il y a un piège, la négation de «$n > N, |u_n| > A$ » est « $n \leq N$ ou $|u_n| \leq A$ »

$$\exists A \in \mathbb{R}, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, n > N \text{ et } |u_n| \leq A \quad (1)$$

Car la négation de $(P) \Rightarrow (Q)$ est : (P) et $\text{non}(Q)$

Là, il ne faut pas s'enthousiasmer en se disant que $|u_n| \leq A$ veut bien dire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Rappelons ce que signifie qu'une suite est bornée

$$\exists A \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq A \quad (2)$$

Ou strictement inférieure à A si on veut.

Dans (1) il y a un « $\exists n \in \mathbb{N}$ » et dans (2) il y a un « $\forall n \in \mathbb{N}$ », cela pose problème parce que l'on ne voit pas bien comment on pourrait faire pour transformer le « il existe » en « pour tout ». Il y a sans doute un truc que l'on a pas vu, et si la proposition 4 était fausse malgré les apparences trompeuses. Si par exemple $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admettait une sous-suite tendant vers l'infini et que les autres termes restent bornés, on serait dans le cadre de la proposition 4 et pourtant la suite n'est pas bornée, donnons un exemple d'une telle suite : pour tout $p \in \mathbb{N}$

$$u_{2p} = p \quad \text{et} \quad u_{2p+1} = 0$$

La limite de la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cette suite n'est pas $+\infty$ car il existe une sous-suite constante (et égale à 0) et pourtant $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée car il existe une sous-suite tendant vers l'infini. Et voilà !

Allez à : Exercice 32 :

Correction exercice 33 :

On rappelle qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy si elle vérifie

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, m \geq n \geq N \Rightarrow |u_m - u_n| < \epsilon$$

Ou encore

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, n \geq N \text{ et } p \geq 0 \Rightarrow |u_{n+p} - u_n| < \epsilon$$

Nions cette proposition

$$\exists \epsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}, n \geq N \text{ et } p \geq 0 \text{ et } |u_{n+p} - u_n| > \epsilon \quad (1)$$

$$u_{n+p} - u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p}$$

$$|u_{n+p} - u_n| = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p} > \underbrace{\frac{1}{n+p} + \cdots + \frac{1}{n+p}}_{\times p} = \frac{p}{n+p}$$

Ensuite on choisit p de façon à ce que $|u_{n+p}-u_n|$ ne tende pas vers 0, $p=n$ convient

Revenons à (1), prenons $\epsilon=\frac{1}{2}$, n quelconque (ici il n'y a pas besoin d'en prendre un en particulier, cela marche avec tous !) et $p=n$, cela montre que (1) est vrai, autrement dit que $(u_n)_{n\geq 2}$ n'est pas une suite de Cauchy.

Malheureusement cela ne suffit pas pour montrer que $(u_n)_{n\geq 2}$ tend vers l'infini, par exemple la suite de terme général $(-1)^n$ n'est pas une suite de Cauchy et elle ne tend pas vers ∞.

Il faut rajouter que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est croissante. Pour tout $n\geq 2$

$$u_{n+1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}=u_n+\frac{1}{n+1}$$

Ce qui entraine que

$$u_{n+1}>u_n$$

La suite est croissante et elle n'est pas de Cauchy donc elle tend vers $+\infty$.

Remarque :

Si ce résultat ne vous parait pas évident, démontrons-le, nous savons que si $(u_n)_{n\geq 2}$ est croissante et majorée alors elle converge, donc c'est une suite de Cauchy.

La contraposée de cette phrase mathématique est

Si $(u_n)_{n\geq 2}$ n'est pas de Cauchy alors elle n'est pas croissante ou elle n'est pas majorée.

Comme elle est croissante, elle n'est pas majorée.

Allez à : Exercice 33 :

Correction exercice 34 :

1. Nous allons montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ n'est pas une suite de Cauchy.
   Pour montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ n'est pas une suite de Cauchy on va montrer

$$\exists\epsilon>0,\forall N\in\mathbb{N},\exists n\in\mathbb{N},\exists p\in\mathbb{N},n\geq N \text{ et } p\geq 0 \text{ et } |u_{n+p}-u_n|>\epsilon \quad (1)$$

$$|u_{n+p}-u_n|=\left|1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+p}}-\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right|$$
$$=\left|\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+p}}\right|=\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+p}}>\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n+p}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+p}}}_{\times p}$$
$$=\frac{p}{\sqrt{n+p}}$$

Ensuite on choisit p de façon à ce que $|u_{n+p}-u_n|$ ne tende pas vers 0, $p=n$ convient

$$|u_{n+p}-u_n|>\frac{n}{\sqrt{n+n}}=\sqrt{\frac{n}{2}}>\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Revenons à (1), prenons $\epsilon=\frac{1}{\sqrt{2}}$, n quelconque (ici il n'y a pas besoin d'en prendre un en particulier, cela marche avec tous !) et $p=n$, cela montre que (1) est vrai, autrement dit que $(u_n)_{n\geq 1}$ n'est pas une suite de Cauchy. Par conséquent

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=+\infty$$

2.
   a)

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

D'autre part

$$\sqrt{n} < \sqrt{n+1} \Rightarrow 2\sqrt{n} < \sqrt{n+1} + \sqrt{n} < 2\sqrt{n+1} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

Ce qui entraine que

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

b) On applique le 2.a pour tout $k \in \{1,2,\dots,n\}$

Première méthode

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) < \frac{1}{\sqrt{k}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+1}} < 2\left(\sqrt{1+1}-\sqrt{1}\right) < \frac{1}{\sqrt{1}}$$
$$\frac{1}{\sqrt{2+1}} < 2\left(\sqrt{2+1}-\sqrt{2}\right) < \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\vdots$$
$$\frac{1}{\sqrt{(n-1)+1}} < 2\left(\sqrt{(n-1)+1}-\sqrt{n-1}\right) < \frac{1}{\sqrt{n-1}}$$
$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Puis on fait la somme de ces n lignes

$$u_n - 1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{1}\right) < u_n$$

En simplifiant tous les termes qui se simplifient

L'inégalité de droite donne l'inégalité de gauche demandée $2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{1}\right) < u_n$

Et l'inégalité de gauche

$$u_n - 1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{1}\right) \Leftrightarrow u_n < 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} + 2\sqrt{n+1} - 2$$
$$= \frac{-1+2(n+1)}{\sqrt{n+1}} - 1 = \frac{2n+1}{\sqrt{n+1}} - 1$$

Il faudrait montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{2n+1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n} \Leftrightarrow 2n+1 < 2\sqrt{n(n+1)} \Leftrightarrow (2n+1)^2 < 4n^2 + 4n$$

Seulement voilà, c'est faux !

Alors au lieu de faire la somme des n premières lignes on va faire la somme des $n-1$ premières lignes en ne gardant que l'inégalité de gauche.

$$u_n - 1 < 2\left(\sqrt{n}-1\right)$$

Ce qui entraine que

$$u_n < 2\sqrt{n} - 1$$

Et voilà. On a bien pour tout $n \geq 1$.

$$2\sqrt{n+1} - 2 \leq u_n \leq 2\sqrt{n} - 1$$

c) On divise ces inégalités par $\sqrt{n}$

$$\frac{2\sqrt{n+1}-2}{\sqrt{n}} \leq \frac{u_n}{\sqrt{n}} \leq \frac{2\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}}$$

Ce qui entraine que

$$2\sqrt{\frac{n+1}{n}}-\frac{2}{\sqrt{n}}\le v_n\le 2-\frac{1}{\sqrt{n}}$$

D'après le théorème des gendarmes

$$\lim_{n\to+\infty} v_n=2$$

Allez à : Exercice 34 :

Correction exercice 35 :

1.

$$u_{n+1}-u_n=\sum_{k=1}^{2n+2}\frac{(-1)^k}{k^2}-\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{k^2}=\frac{(-1)^{2n+2}}{(2n+2)^2}+\frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)^2}=\frac{1}{(2n+2)^2}-\frac{1}{(2n+1)^2}$$
$$=\frac{(2n+1)^2-(2n+2)^2}{(2n+2)^2(2n+1)^2}=\frac{4n^2+4n+1-(4n^2+8n+4)}{(2n+2)^2(2n+1)^2}=\frac{-4n-3}{(2n+2)^2(2n+1)^2}$$
$$<0$$

Remarque : dès la ligne $\frac{1}{(2n+2)^2}-\frac{1}{(2n+1)^2}$, il est clair que cette expression est négative.

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante.

$$v_{n+1}-v_n=\sum_{k=1}^{2n+3}\frac{(-1)^k}{k^2}-\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{(-1)^k}{k^2}=\frac{(-1)^{2n+3}}{(2n+3)^2}+\frac{(-1)^{2n+2}}{(2n+2)^2}=\frac{-1}{(2n+3)^2}+\frac{1}{(2n+2)^2}$$
$$=\frac{-(2n+2)^2-(2n+3)^2}{(2n+3)^2(2n+2)^2}=\frac{-(4n^2+8n+4)+(4n^2+12n+9)}{(2n+3)^2(2n+2)^2}$$
$$=\frac{4n+5}{(2n+3)^2(2n+2)^2}>0$$

Remarque : dès la ligne $\frac{-1}{(2n+3)^2}+\frac{1}{(2n+2)^2}$, il est clair que cette expression est positive.

Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

2.

$$u_n-v_n=-\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{k^2}-\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{(-1)^k}{k^2}=-\frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)^2}=\frac{1}{(2n+1)^2}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$

Par conséquent ces deux suites sont adjacentes et elles convergent vers la même limite.

Allez à : Exercice 35 :

Correction exercice 36 :

1. Pour $p=1$,

$$(H_1)\quad \forall n\in\mathbb{N},\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

Pour montrer cela on va calculer

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{(n+1)^2-n(n+1)-n}{n(n+1)^2}=\frac{n^2+2n+1-n^2-n-n}{n(n+1)^2}=\frac{1}{n(n+1)^2}>0$$

Ce qui montre que

$$\forall n\in\mathbb{N},\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

Montrons que (H_p) entraine (H_{p+1})

$$\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}+\frac{1}{(n+p+1)^2}<\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}+\frac{1}{(n+p+1)^2}$$

Il faut montrer que cette expression est majorée par

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p+1}$$

Pour cela nous allons calculer la différence

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p+1}-\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}+\frac{1}{(n+p+1)^2}\right)=-\frac{1}{n+p+1}+\frac{1}{n+p}-\frac{1}{(n+p+1)^2}$$

$$=\frac{-(n+p+1)(n+p)+(n+p+1)^2-(n+p)}{(n+p)(n+p+1)^2}$$

$$=\frac{(n+p+1)[-(n+p)+(n+p+1)]-(n+p)}{(n+p)(n+p+1)^2}=\frac{(n+p+1)-(n+p)}{(n+p)(n+p+1)^2}$$

$$=\frac{1}{(n+p)(n+p+1)^2}>0$$

Donc

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}+\frac{1}{(n+p+1)^2}<\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p+1}$$

En fait on aurait pu utiliser (H_1) en changeant n en $(n+p)$

Par conséquent

$$\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}+\frac{1}{(n+p+1)^2}<\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p+1}$$

Ce qui montre que (H_p) entraine (H_{p+1}),

Et finalement

$$\forall n\in\mathbb{N},\forall p\in\mathbb{N}^*,\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}<\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}$$

2.

On rappelle que $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy si

$$\forall\epsilon>0,\exists N\in\mathbb{N},\forall n\in\mathbb{N},\forall p\in\mathbb{N},n\geq N \text{ et } p\geq 0\Rightarrow |u_{n+p}-u_n|<\epsilon$$

On choisit un $\epsilon>0$ quelconque, et N tel que $\frac{1}{N}<\epsilon$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $n\geq N$ et pour tout $p\in\mathbb{N}^+$

$$|u_{n+p}-u_n|=\left|1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}-\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)\right|$$

$$=\left|\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}\right|=\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}\leq\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}\leq\frac{1}{N}<\epsilon$$

Ce qui montre que cette est une suite de Cauchy, comme il s'agit d'une suite réelle elle converge.

On verra en L2 que sa limite est $\frac{\pi^2}{6}$.

Allez à : Exercice 36 :

Fonctions élémentaires

Exercice 1.

Déterminer les limites de x^n lorsque $n \to +\infty$ selon les valeurs de x.

Aller à : Correction exercice 1

Exercice 2.

Déterminer les limites de $(\ln(x))^n$, avec $n \in \mathbb{N}$, lorsque $n \to +\infty$

Aller à : Correction exercice 2

Exercice 3.

Résoudre

$$x^y = y^x$$

Lorsque x et y sont des entiers strictement positifs.

Aller à : Correction exercice 3

Exercice 4.

Déterminer la limite quand x tend vers 0^+ (avec $x \neq 0$) de :

$$\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}$$

(On pourra utiliser une variable auxiliaire bien choisie tendant vers $+\infty$).

Aller à : Correction exercice 4

Exercice 5.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) e^{-x^2}$

1. Déterminer les limites de f à l'infini.
2. Etudier les variations de f.
3. Tracer la courbe représentative de f.

Aller à : Correction exercice 5

Exercice 6.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (2x - 1)e^{x-1} + 4$$

1. Etudier les variation de f sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer les limites de f en $\pm\infty$.
3. Tracer sommairement le graphe de f.

Aller à : Correction exercice 6

Exercice 7.

Soient f et g les fonctions définies par

$$f(x) = e^{-x} + (1 - e^{-x})\ln(1 - e^{-x}) \qquad \text{et} \qquad g(x) = \ln(1 - e^{-x})\, e^{x}$$

1. Montrer que f et g sont définies pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$.
2. Calculer les variations de f et en déduire que pour tout $x > 0$, $f(x) > 0$.
3. Montrer que $g'(x) = \frac{e^x}{1-e^{-x}} f(x)$.
4. En déduire les variations de g

5. Calculer la limite de g en 0^+, puis calculer la limite de g en $+\infty$ (on pourra poser $X = -e^{-x}$)
6. Tracer le graphe de g.

Allez à : Correction exercice 7

Exercice 8.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $f'(x)$ et en déduire les variations de f.
3. Calculer les limites de f en $\pm\infty$. Puis les limites en $\pm\infty$ de $f(x) - x$, en déduire que le graphe de f admet une asymptote en $\pm\infty$.
4. Tracer sommairement le graphe de f.

Aller à : Correction exercice 8

Exercice 9.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

1. Vérifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $f'(x)$. On exprimera $f'(x)$ sous la forme $\left(u(x)\right)^\alpha$ où u est un polynôme et α un réel.
3. Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

Aller à : Correction exercice 9

Exercice 10.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

1. Déterminer l'ensemble sur lequel f est définie et continue.
2. Calculer $f'(x)$. On exprimera $f'(x)$ sous la forme $\beta\left(u(x)\right)^\alpha$ où u est un polynôme et α et β sont des réels.
3. Calculer la limite de f en $+\infty$.

Aller à : Correction exercice 10

Exercice 11.

Soit $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$. Résoudre

$$\ln(\operatorname{ch}(x)) = a$$

Allez à : Correction exercice 11

Exercice 12.

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = 2\sin(x) + \sin(2x)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f, sa période et sa parité. En déduire un ensemble d'étude.
2. Calculer la dérivée de f et déterminer son signe.
3. Dresser le tableau de variation.
4. Tracer la courbe représentative de f.

Aller à : Correction exercice 12

Exercice 13.

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = 2\cos(x) + \sin(2x)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f, sa période et sa parité. En déduire un ensemble d'étude.
2. Calculer la dérivée de f et déterminer son signe sur $[-\pi, \pi]$.
3. Dresser le tableau de variation.
4. Tracer la courbe représentative de f sur $[-\pi, \pi]$.

Allez à : Correction exercice 13

Exercice 14.

Soit f la fonction définie sur $I = \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sin^2(x) + \frac{1}{2}\cos(x)$$

1. Etudier la parité de f et sa périodicité, en déduire un intervalle d'étude.
2. Etudier les variations de f sur $[0, \pi]$.
3. Dresser le tableau de variation de f et tracer le graphe de f.

Allez à : Correction exercice 14

Exercice 15.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{3}\cos(3x) - \frac{3}{4}\cos(2x)$$

1. Déterminer la période de f, sa parité et en déduire un intervalle d'étude I.
2. Exprimer $\sin(3x)$ et $\sin(2x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.
3. Etudier les variation de f sur I.
4. Calculer $f(0)$, $f(x_0)$ et $f(\pi)$ sous forme rationnelle. Où x_0 est l'unique valeur dans $]0, \pi[$ annulant $f'(x)$.
5. Dresser le tableau de variation. Tracer sommairement le graphe de f sur trois périodes.

Aller à : Correction exercice 15

Exercice 16.

Soit $f: [-\pi, \pi] \to R$ définie par $f(x) = 4x - 5\sin(x)$

1. Etudier les variations de f sur $[0, \pi]$.
2. Montrer que f' dans l'intervalle $[0, \pi]$ s'annule pour une valeur comprise entre $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{4}$.
3. Dresser le tableau de variation de f sur $[0, \pi]$.
4. Tracer la courbe sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

Aller à : Correction exercice 16

Exercice 17.

Soit f la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \cos(x) + \frac{2}{3}x$

1. Montrer que $\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{\sqrt{2}}{2}$, en déduire un encadrement de $\arcsin\left(\frac{2}{3}\right)$.
2. Etudier les variations de f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,
3. On donnera un encadrement de $f\left(\arcsin\left(\frac{2}{3}\right)\right)$.
4. Tracer le graphe de f.

Allez à : Correction exercice 17

Exercice 18.

On rappelle que $\text{th}: \mathbb{R} \to]-1,1[$ est une bijection.

Déterminer g sa bijection réciproque.

Allez à : Correction exercice 18

Exercice 19.

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x}\left(\text{ch}^3(x) - \text{sh}^3(x)\right)$$
$$\lim_{x\to+\infty} \left(x - \ln(\text{ch}(x))\right)$$

Aller à : Correction exercice 19

Exercice 20.

Calculer

$$A(x) = 1 + \text{ch}(x) + \text{ch}(2x) + \cdots + \text{ch}(nx) = \sum_{k=0}^{n} \text{ch}(kx)$$

Aller à : Correction exercice 20

Exercice 21.

Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$3\,\text{ch}(x) - \text{sh}(x) - 3 = 0$$

Aller à : Correction exercice 21

Exercice 22.

1. Résoudre
$$\text{sh}(x) - 3\,\text{ch}(x) + 3 = 0$$
2. Déterminer le signe de $\text{sh}(x) - 3\,\text{ch}(x) + 3$ selon les valeurs de x, on justifiera précisément la réponse.

Allez à : Correction exercice 22

Exercice 23.

1. Calculer
$$\text{ch}\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right) \quad \text{et} \quad \text{sh}\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right)$$
2. A l'aide de la formule $\text{ch}(a+b) = \text{ch}(a)\,\text{ch}(b) + \text{sh}(a)\,\text{sh}(b)$
Déterminer les solutions de l'équation :
$$2\,\text{ch}(x) + \text{sh}(x) = \sqrt{3}\,\text{ch}(5x)$$

Aller à : Correction exercice 23

Exercice 24.

1. Montrer que
$$0 < \arccos\left(\frac{3}{4}\right) < \frac{\pi}{4}$$
2. Résoudre
$$\arccos(x) = 2\arccos\left(\frac{3}{4}\right)$$

Allez à : Correction exercice 24

Exercice 25.

1. Montrer que $2\arctan\left(\frac{1}{3}\right) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
2. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
$$\sin(2t) = \frac{2\tan(t)}{1 + \tan^2(t)}$$
3. En déduire que
$$\arcsin\left(\frac{3}{5}\right) = 2\arctan\left(\frac{1}{3}\right)$$

Allez à : Correction exercice 25

Exercice 26.

1. Montrer que pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$
$$\sin(x) = \frac{\tan(x)}{\sqrt{1 + \tan^2(x)}} \quad \text{et} \quad \cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(x)}}$$
2. Montrer que :
$$0 < \arctan\left(\frac{3}{4}\right) + \arctan\left(\frac{5}{12}\right) < \frac{\pi}{2}$$
3. Résoudre
$$\arcsin(x) = \arctan\left(\frac{3}{4}\right) + \arctan\left(\frac{5}{12}\right)$$
On rappelle que $\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$

Allez à : Correction exercice 26

Exercice 27.

1. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$
$$\cos(2t) = \frac{1 - \tan^2(t)}{1 + \tan^2(t)}$$
2. Montrer que
$$\arccos\left(\frac{4}{5}\right) = 2\arctan\left(\frac{1}{3}\right)$$

Allez à : Correction exercice 27

Exercice 28.

Soit f la fonction définie par
$$f(x) = x^x$$

1. Sur quel ensemble cette fonction est-elle définie et continue ?
2. Montrer que f est prolongeable par continuité sur $[0, +\infty[$.
3. Calculer la dérivée de f partout où cela ne pose pas de problème. Sur quel ensemble f est-elle dérivable, que peut-on en déduire sur le graphe de f en 0 ?
4. Etudier les variations de f sur $]0, +\infty[$. Puis calculer la limite de f en $+\infty$.
5. Tracer sommairement le graphe de f. (On tracera clairement les tangente(s) et demi-tangente(s) remarquable, ainsi que les asymptotes si nécessaire).

Allez à : Correction exercice 28

Exercice 29.

Soit f la fonction définie par :

$$f(x)=\frac{8\,\mathrm{ch}(x)}{4e^x-3}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Calculer les limites de f au bord de l'ensemble de définition.
3. Etudier les variations de f.
4. Dresser le tableau de variation de f.
5. Tracer le graphe de f.

Aller à : Correction exercice 29

Exercice 30.

Soit f la fonction d'une variable réelle définie par :

$$f(u)=\frac{3+4\,\mathrm{sh}(u)}{\mathrm{ch}(u)}$$

1. Préciser son domaine de définition.
2. Préciser ses limites quand u tend vers $+\infty$ et $-\infty$.
3. Etudier les variations de f. On veillera à fournir une expression très simple de la valeur u_0 pour laquelle $f'(u_0)=0$ (l'expression attendue n'utilise pas de fonctions hyperboliques réciproque (Hors programme)).
4. Tracer le graphe de f.

Aller à : Correction exercice 30

Exercice 31.

Soit f la fonction définie par

$$f(x)=\frac{\mathrm{ch}(x)+4\mathrm{sh}(x)+2}{\mathrm{ch}(x)-1}$$

1. Sur quel ensemble la fonction est-elle définie et continue ?
2. Montrer que
   a.
   $$f'(x)=\frac{-3\,\mathrm{sh}(x)-4\,\mathrm{ch}(x)+4}{(\mathrm{ch}(x)-1)^2}$$
   b. Puis que
   $$f'(x)=-\frac{14e^x\left(e^x-\frac{1}{7}\right)}{(e^x-1)^3}$$
3. En déduire les variations de f
4. Calculer les limites au bord de son ensemble de définition.

Allez à : Correction exercice 31

Exercice 32.

Soit f la fonction définie par :

$$f(x)=\frac{\mathrm{ch}(x)+\mathrm{sh}(x)+1}{\mathrm{ch}(x)-1}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Calculer les limites de f au bord de l'ensemble de définition.
3. Etudier les variations de f.
4. Dresser le tableau de variation de f.

5. Tracer le graphe de f.

Aller à : Correction exercice 32

Exercice 33. (Hors programme)

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = \operatorname{argth}\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)$$

1. Préciser l'ensemble de définition de f puis l'ensemble des points où elle est dérivable.
2. Aux points où f est dérivable, calculer $f'(x)$.
3. Dresser le tableau de variation de f. Tracer le graphe de f.

Aller à : Correction exercice 33

Exercice 34.

Soit $\theta \in [\pi, 2\pi]$,

1. Montrer que $0 \leq 2\pi - \theta \leq \pi$
2. Calculer $\arccos(\cos(\theta))$

Allez à : Correction exercice 34

Exercice 35.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \arcsin\left(\frac{1}{x}\right)$

1. Montrer que f est définie et continue sur $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.
2. Calculer les limites de f au bord de l'ensemble de définition.
3. Pour les valeurs où cela ne pose pas de problème calculer $f'(x)$, en déduire les variation de f.
4. Calculer

$$\lim_{x \to -1^-} f'(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 1^+} f'(x)$$

Que peut-on en déduire sur le graphe de f en $x = -1$ et $x = 1$?

5. Tracer le graphe de f.

Allez à : Correction exercice 35

Exercice 36.

Soient les fonctions $f: x \to \arcsin(\sin(x))$ et $g: x \to \arctan\left(\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}}\right)$

1. Simplifier les expressions de $f(x)$ et $g(x)$.
2. Construire les graphes de f et g.

Aller à : Correction exercice 36

Exercice 37.

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \arcsin(x) - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

1. Sur quel ensemble cette fonction est-elle définie et continue ? (Soyez précis sur les justifications).
2. Calculer la dérivée de f partout où cela ne pose pas de problème, sur quel ensemble est-elle dérivable ?
3. Déterminer le signe de f sur son ensemble de définition.

Allez à : Correction exercice 37

Exercice 38.

$$f(x) = \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$$

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer la dérivée de f en tout point où cela ne pose pas de problème. Sur quel ensemble f est-elle dérivable ?
3. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
4. Dresser le tableau de variation et dresser sommairement le graphe de f.
5. Donner une expression plus simple de f pour $x < 0$, puis pour $x > 0$.

Aller à : Correction exercice 38

Exercice 39.

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \arcsin\left(\sqrt{1 - x^2}\right)$$

1. Sur quel ensemble cette fonction est-elle définie et continue ?
2. Calculer la dérivée $f'(x)$ pour tous les réels pour lesquels cela ne posent pas de problème.
3. Calculer les limites de $f'(x)$ en -1^+, 1^-, ainsi qu'en 0^- et 0^+. Préciser la nature des demi-tangentes en ces points.
4. Déterminer les variations de f.
5. Tracer le graphe de f.

Allez à : Correction exercice 39

Exercice 40.

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \arccos(1 - 2x^2)$$

1. Déterminer l'ensemble de définition et préciser l'ensemble où f est continue.
2. Calculer la dérivée de f et préciser l'ensemble où f est dérivable.
3. Dresser le tableau de variation de f et tracer son graphe.
4. Sur chaque ensemble où f est dérivable, donner une expression plus simple de f.

Aller à : Correction exercice 40

Exercice 41.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \arcsin(1 - 2x^4)$

Montrer que f est dérivable sur $]-1,1[$

Aller à : Correction exercice 41

Exercice 42.

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \arcsin(1 - 2\cos^4(x))$

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est 2π périodique, quelle est la parité de f ? En déduire un intervalle d'étude I.
3. Partout où cela ne pose pas de problème, calculer la dérivée de f. On l'exprimera sous la forme la plus simple possible.
4. Sur quel sous-ensemble de I la fonction f est-elle dérivable ?
   Préciser la valeur des limites de $f'(x)$ à droite au point d'abscisse 0 et à gauche au point d'abscisse π.
5. Dresser le tableau de variation de f
6. Tracer son graphe sur trois périodes

Allez à : Correction exercice 42

Exercice 43. (Hors programme)

1. Montrer qu'il existe un polynôme P du quatrième degré tel que pour tout réel x :
$$16x^6+24x^4+9x^2+1=(x^2+1)P(x)$$
et expliciter ce polynôme.
2. Soit f la fonction numérique définie par :
$$f(x)=\operatorname{argsh}(3x+4x^3)$$
a) Préciser l'ensemble de définition de f, puis l'ensemble des points où elle est dérivable.
b) Aux points où f est dérivable, calculer $f'(x)$. En déduire une expression plus simple de $f(x)$.

Aller à : Correction exercice 43

Exercice 44.

Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\arcsin(\operatorname{th}(x))=\arctan(\operatorname{sh}(x))$

On pourra poser
$$f(x)=\arcsin(\operatorname{th}(x))-\arctan(\operatorname{sh}(x))$$

Aller à : Correction exercice 44

Exercice 45.

1. Écrire sous la forme $\frac{m}{n}$ avec $\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{N}$, $|m|$ et n premiers entre eux, $\arccos(\cos(\alpha))$, $\arcsin(\sin(\alpha))$ et $\arctan(\tan(\alpha))$ dans les cas : $\alpha=\frac{118}{10}\pi$, $\alpha=\frac{252}{15}\pi$ et $\alpha=\frac{76}{5}\pi$
2. Calculer
$$\arccos\left(\cos\left(\frac{76}{5}\pi\right)\right)$$

Aller à : Correction exercice 45

Exercice 46.

Résoudre les équations suivantes :

1. $\arctan(2x)+\arctan(x)=\frac{\pi}{4}$.
2. $\arcsin(2x)-\arcsin(\sqrt{3}x)=\arcsin(x)$

Aller à : Correction exercice 46

Exercice 47.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :
$$\arctan(x)+\arctan(\sqrt{3}x)=\frac{7\pi}{12}$$

Aller à : Correction exercice 47

Exercice 48.
$$\arctan(2x)=\frac{\pi}{4}-\arctan(x)$$

1. Montrer que s'il y a des solutions alors elles sont positives.
2. Résoudre cette équation.

On rappelle que
$$\tan(a-b)=\frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$$

Aller à : Correction exercice 48

Exercice 49. (Hors programme)

Donner une expression plus simple de :

$$f(x)=\operatorname{argch}\left(\sqrt{\frac{1+\operatorname{ch}(x)}{2}}\right)$$
$$g(x)=\operatorname{argsh}\left(2x\sqrt{1+x^2}\right)$$
$$h(x)=\operatorname{argth}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$$

Aller à : Correction exercice 49

Exercice 50.

Soit f la fonction définie pour tout $x\in\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=2\arctan\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)+\arctan(x)$$

1. Calculer $f(0)$.
2. Pour tout x réel, calculer la valeur $f'(x)$ de la dérivée de f au point x.
3. Que dire de f.

Aller à : Correction exercice 50

Exercice 51.

Calculer

$$\arccos\left[\cos\left(\frac{89\pi}{15}\right)\right]$$

(On explicitera avec soin le raisonnement qui a conduit à la réponse donnée).

Aller à : Correction exercice 51

Exercice 52.

Soit f la fonction définie sur R par : $f(x)=\arctan(\operatorname{sh}(x))$

Calculer $f'(x)$, on simplifiera cette dérivée au maximum.

Aller à : Correction exercice 52

Exercice 53.

Soit f la fonction définie par :

$$f(x)=\arcsin\left(\frac{1}{\operatorname{ch}(x)}\right)$$

Et g la fonction définie par

$$g(x)=\arctan(e^x)$$

1. Déterminer sur quel ensemble f est définie et continue.
2. Calculer $f'(x)$ et déterminer sur quel ensemble f est dérivable.
3. Calculer $g'(x)$
4. Pour tout $x>0$ trouver une relation entre $f(x)$ et $g(x)$.

Aller à : Correction exercice 53

Exercice 54.

Le but de cet exercice est de montrer la formule de John MACHIN (1680-1751) :

$$\frac{\pi}{4}=4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)-\arctan\left(\frac{1}{239}\right)$$

On rappelle que $\tan(a+b)=\frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$

1. On pose $\theta=\arctan\left(\frac{1}{5}\right)$, calculer $\tan(2\theta)$, puis $\tan(4\theta)$.

2. Montrer que $0 \leq \arctan\left(\frac{1}{5}\right) \leq \frac{\pi}{6}$ en déduire un encadrement de $4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \frac{\pi}{4}$.
3. En déduire la formule de MACHIN.

Aller à : Correction exercice 54

Exercice 55.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(u) = 3\operatorname{ch}(u) - 4$ et soit g la fonction définie par
$$g(u) = \arcsin(3\operatorname{ch}(u) - 4)$$

1. Montrer que pour tout réel u :
$$u \in [-\ln(3), \ln(3)] \Leftrightarrow f(u) \in [-1,1]$$
2. Déterminer l'ensemble de définition de g, et préciser l'ensemble des points où g est continue.
3. En précisant son domaine de validité, montrer la formule :
$$g'(u) = \frac{3\operatorname{sh}(u)}{\sqrt{3(\operatorname{ch}(u) - 1)(5 - 3\operatorname{ch}(u))}}$$
4. Déterminer les limites de cette expression aux bornes de son domaine de validité.

(Suggestion : pour l'un des calculs de cette question, on remarquera que $\operatorname{sh}^2(u) = \operatorname{ch}^2(u) - 1$.

5. Déterminer l'ensemble des points où g est dérivable.
6. Dresser le tableau de variations de g puis tracer sommairement son graphe.

Aller à : Correction exercice 55

Corrections

Correction exercice 1.

Si $x < -1$ alors x^n n'a pas de limite mais $\lim_{n\to+\infty} |x|^n = +\infty$

Si $x = -1$ alors $x^n = (-1)^n$ n'a pas de limite.

Si $|x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} x^n = 0$

Si $x = 1$ alors $x^n = 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} x^n = 1$

Si $x > 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} x^n = +\infty$

Profitons de ce petit exercice pour rappeler les équivalences très importantes suivantes :

$-1 < x < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow 1 - x^2 > 0$

Aller à : Exercice 1

Correction exercice 2.
$$-1 < \ln(x) < 1 \Leftrightarrow e^{-1} < x < e \Leftrightarrow \frac{1}{e} < x < e$$

Donc

Evidemment $x > 0$.

Si $0 < x \leq \frac{1}{e}$ alors $\ln(x) < -1$ et $(\ln(x))^n$ n'a pas de limite.

Si $\frac{1}{e} < x < e$ alors $-1 < \ln(x) < 1$ et $(\ln(x))^n \to 0$

Si $x = e$ alors $\ln(x) = 1$ et $(\ln(x))^n = 1 \to 1$

Si $x > e$ alors $\ln(x) > 1$ et $(\ln(x))^n \to +\infty$

Aller à : Exercice 2

Correction exercice 3.
$$x^y = y^x \Leftrightarrow e^{y\ln(x)} = e^{x\ln(y)} \Leftrightarrow y\ln(x) = x\ln(y) \Leftrightarrow \frac{\ln(x)}{x} = \frac{\ln(y)}{y} \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

Si on pose $f(t)=\frac{\ln(t)}{t}$

$$f'(t)=\frac{\frac{1}{t}t-\ln(t)\times 1}{t^2}=\frac{1-\ln(t)}{t^2}$$

Les variations de cette fonction sont résumées dans le tableau ci-dessous

t	0		1		e		$+\infty$
$f'(t)$	$\|\|$	$+$			0	$-$	
$f(t)$	$\|\|$	$-\infty$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

Si $x\le 1$, il y a une unique solution (x,x).
Si $1<x<e$, il y a deux couples de solutions (x,x) et (x,y) avec $y>e$.
Si $x=e$, il y a une unique solution (e,e)
Si $x>e$, il y a deux couples de solutions (x,x) et (x,y) avec $y<e$.
Maintenant cherchons les solutions dans $(\mathbb{N}^*)^2$:
$x=n=1$ donne la solution $(1,1)$.
$x=n=2\in]1,e[$, on cherche l'unique $y=m>e$ tel que $2^m=m^2$ (s'il existe).
$m=3$ ne marche pas, $m=4$ est solution (c'est donc la seule).

Aller à : Exercice 3

Correction exercice 4.

On pose $X=\frac{1}{x}$, si $x\to 0^+$ alors $X\to+\infty$

$$\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}=X^3e^{-X^2}$$

Il s'agit d'une forme indéterminée puisque X^3 tend vers l'infini et e^{-X^2} tend vers 0.
La fonction exponentielle l'emporte sur les fonctions puissances (lors d'une forme indéterminée)

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}=\lim_{X\to+\infty}X^3e^{-X^2}=0$$

Aller à : Exercice 4

Correction exercice 5.

1. Si $x<0$ on pose $x^2=X\Leftrightarrow x=-\sqrt{X}$, donc $f(x)=(-\sqrt{X}+\frac{1}{2})e^{-X}\xrightarrow[X\to+\infty]{}0$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$$

Si $x>0$ on pose $x^2=X\Leftrightarrow x=\sqrt{X}$, donc $f(x)=(\sqrt{X}+\frac{1}{2})e^{-X}\xrightarrow[X\to+\infty]{}0$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$$

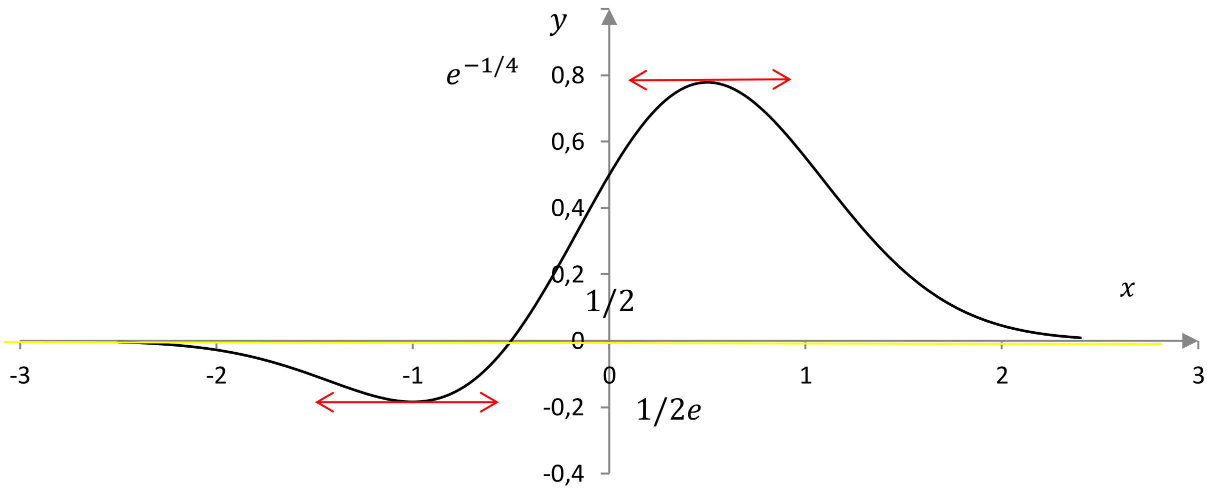
Ceci dit dans ce cas les limites sont presque évidentes.

2. $f'(x)=e^{-x^2}+\left(x+\frac{1}{2}\right)(-2x)e^{-x^2}=(-2x^2-x+1)e^{-x^2}$

Le polynôme $-2X^2-X+1$ admet $X_1=-1$ et $X_2=\frac{1}{2}$ comme racines donc
$-2X^2-X+1=-2(X+1)(X-\frac{1}{2})$
Donc $f'(x)=-2(x+1)(x-\frac{1}{2})e^{-x^2}$
On en déduit le tableau de variation de f

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\frac{-1}{2e}$	$\nearrow$	$e^{-\frac{1}{4}}$	$\searrow$	0

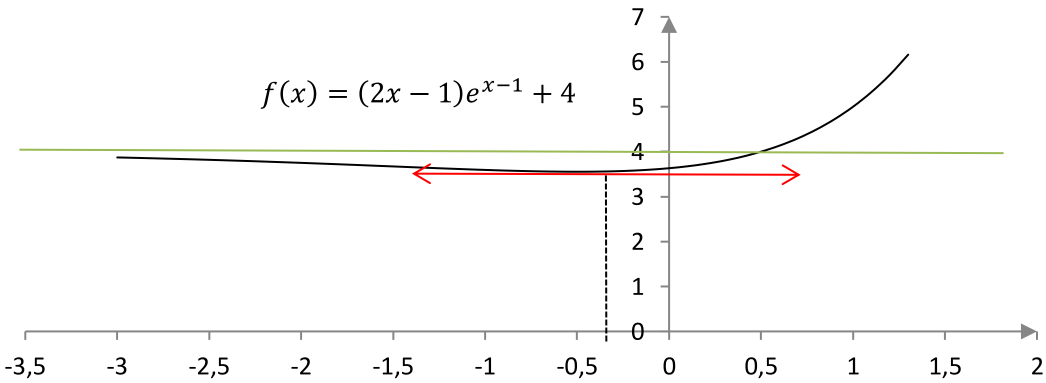
3. $\frac{-1}{2e} \approx -0{,}2$ en gros et $e^{-\frac{1}{4}} \approx 0{,}8$ en gros.



Aller à : Exercice 5

Correction exercice 6.

1. f est évidemment définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Comme $e^{x-1} = e^x \times e^{-1} = \frac{1}{e}e^x$ on a
$$f(x) = (2x-1)e^{x-1} + 4 = \frac{1}{e}(2x-1)e^x + 4$$
$$f'(x) = 2e^{x-1} + (2x-1)e^{x-1} = e^{x-1}(2+2x-1) = e^{x-1}(2x+1)$$
Comme $e^{x-1} > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $2x+1$
Si $x < -\frac{1}{2}$ alors $f'(x)$ est négative et f est décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[$.
Si $x > -\frac{1}{2}$ alors $f'(x)$ est positive et f est croissante sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$.
2. L'exponentielle l'emporte sur les fonction polynômes donc
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 4 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$
3.



Aller à : Exercice 6

Correction exercice 7.

1.
$$x>0\Leftrightarrow -x<0\Leftrightarrow e^{-x}<1\Leftrightarrow 1-e^{-x}>0$$
Donc f et g sont définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

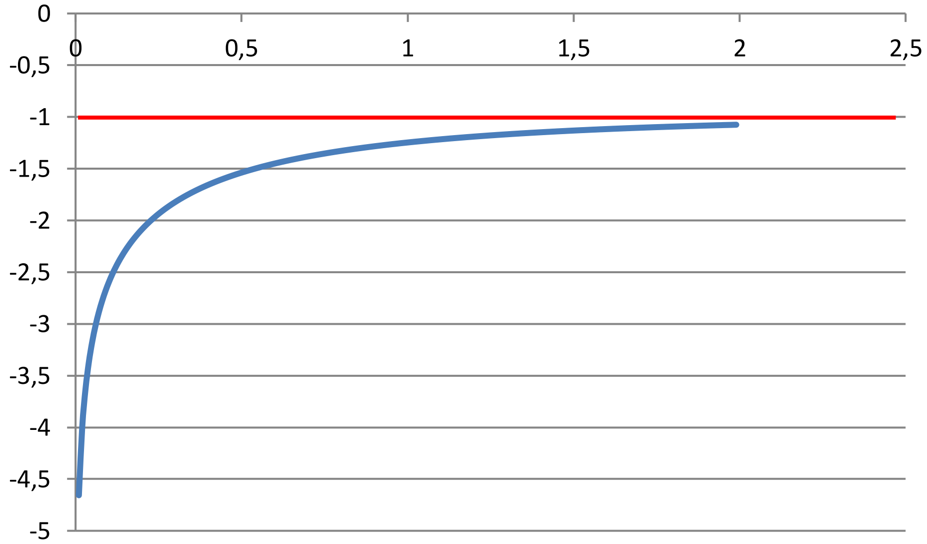
2.
$$f'(x)=-e^{-x}+e^{-x}\ln(1-e^{-x})+(1-e^{-x})\times\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}=-e^{-x}+e^{-x}\ln(1-e^{-x})+e^{-x}$$
$$=e^{-x}\ln(1-e^{-x})$$
Le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $\ln(1-e^{-x})$, comme $e^{-x}>0$, on a $1-e^{-x}<0$, donc $\ln(1-e^{-x})<0$, on en déduit que f est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Pour montrer que pour tout $x>0$, $f(x)>0$ il faut et il suffit de montrer que la limite de $f(x)$ en $+\infty$ est positive, comme la limite de e^{-x} en $+\infty$ est nulle, la limite de $f(x)$ est $0+1\times\ln(1)=0$, ce qui achève la démonstration.

3.
$$g'(x)=\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\times e^{x}+\ln(1-e^{-x})\,e^{x}=\frac{e^{x}}{1-e^{-x}}\left(e^{-x}+(1-e^{-x})\ln(1-e^{-x})\right)=\frac{e^{x}}{1-e^{-x}}f(x)$$
$$>0$$
Car $1-e^{-x}>0$ et $f(x)>0$ pour tout $x>0$.

4. Pour tout $x>0$, $g'(x)>0$ donc g est croissante

5.
$$\lim_{x\to 0^+} g(x)=-\infty$$
$$g(x)=\ln(1+X)\times\frac{1}{-X}=-\ln\left(\frac{1+X}{X}\right)\xrightarrow[X\to 0]{}-1$$
Car
$$\lim_{x\to+\infty}(-e^{-x})=0$$

6.



Allez à : Exercice 7

Correction exercice 8.

1. Si $x\neq 0$ f est la composée et le produit de fonction continue et dérivable, donc f est dérivable.
$$\lim_{x\to 0}\frac{-1}{x^2}=-\infty\Rightarrow\lim_{x\to 0}e^{-\frac{1}{x^2}}=0$$

$$\lim_{x\to 0} xe^{-\frac{1}{x^2}} = 0 = f(0)$$

f est continue en 0.

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = e^{-\frac{1}{x^2}}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$$

f est dérivable en 0 et $f'(0)=0$.

2. Pour tout $x\neq 0$

La dérivée de $-\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$ est $-(-2)x^{-3} = \frac{2}{x^3}$,

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} + x\times\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}} = \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^2}(x^2+2) > 0$$

Comme $f'(0)=0$, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-1}{x^2} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 1$$

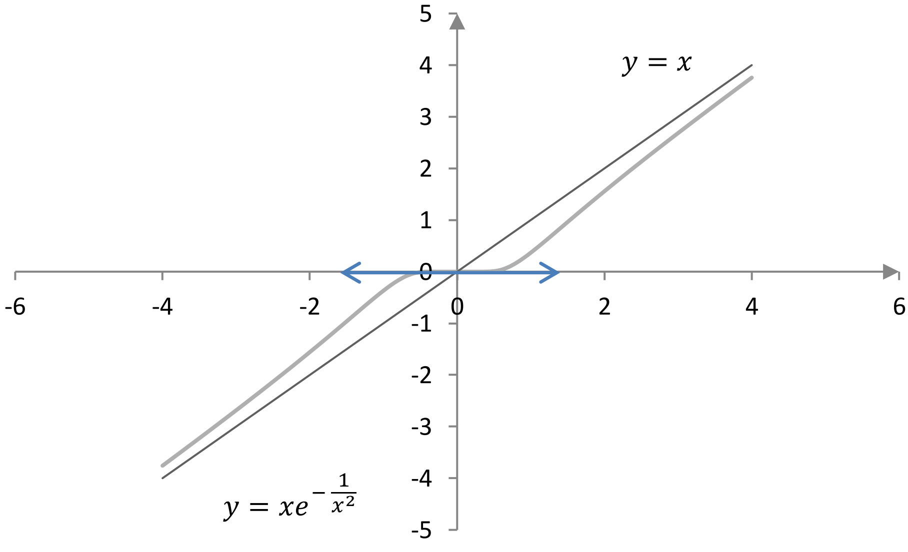
$$\lim_{x\to-\infty} xe^{-\frac{1}{x^2}} = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-\frac{1}{x^2}} = +\infty$$
$$f(x)-x = xe^{-\frac{1}{x^2}} - x = x\left(e^{-\frac{1}{x^2}}-1\right) = \frac{1}{X}\left(e^{-X^2}-1\right) = \frac{e^{-X^2}-1}{X-0}$$

Il s'agit du taux de variation de la fonction $\varphi: X\to e^{-X^2}$ en 0, sa limite est $\varphi'(0)$

$$\varphi'(X) = -2Xe^{-X^2} \Rightarrow \varphi'(0) = 0$$
$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-x) = \lim_{X\to 0}\frac{e^{-X^2}-1}{X-0} = \varphi'(0) = 0$$

La droite d'équation $y=x$ est asymptote à la courbe en $\pm\infty$.

4.



Aller à : Exercice 8

Correction exercice 9.

1.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -x \le |x| \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad -x \le \sqrt{x^2} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad -x < \sqrt{x^2+1}$$
$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 < x + \sqrt{x^2+1}$$

Ce qui montre que f est définie sur $\mathbb{R}$. (et même continue et dérivable sur $\mathbb{R}$).

2. La dérivée de $g: x \to x + \sqrt{x^2+1} = x + (x^2+1)^{\frac{1}{2}}$ est

$$g'(x) = 1 + \frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \times 2x = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$f'(x) = \frac{\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = (x^2+1)^{-\frac{1}{2}}$$

C'est bien la forme que suggérait l'énoncé.

3. Si $x \to +\infty$ alors $x + \sqrt{x^2+1} \to +\infty$ et $f(x) \to +\infty$

$$x + \sqrt{x^2+1} = \frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)}{x-\sqrt{x^2+1}} = \frac{x^2-(x^2+1)}{x-\sqrt{x^2+1}} = \frac{-1}{x-\sqrt{x^2+1}}$$

Si $x \to -\infty$ alors $x - \sqrt{x^2+1} \to -\infty$ et alors

$$\frac{-1}{x-\sqrt{x^2+1}} \to 0^+$$

Donc

$$f(x) = \ln\left(\frac{-1}{x-\sqrt{x^2+1}}\right) \to -\infty$$

Aller à : Exercice 9

Correction exercice 10.

1. Nécessairement $x^2 \ge 1$, soit $x \le -1$, soit $x \ge 1$, mais si $x \le -1$ alors $x - \sqrt{x^2-1} < 0$ donc f n'est pas définie.
   Si $x > 1$

$$x^2 - 1 \le x^2 \Rightarrow \sqrt{x^2-1} \le |x| = x \Rightarrow x - \sqrt{x^2-1} > 0$$

f est définie et continue sur $[1, +\infty[$.

Remarque :

Un raisonnement qui ressemble plus ou moins à çà est faux

$$x - \sqrt{x^2-1} > 0 \Leftrightarrow x > \sqrt{x^2-1} \Leftrightarrow x^2 > x^2 - 1$$

Il a deux problèmes majeurs, d'abord on oublie que $x^2 - 1$ doit être positif et je rappelle que $a = b \Rightarrow a^2 = b^2$ et que si l'on veut qu'il y ait équivalence il faut que a et b soit de même signe. Dans notre exercice $x > \sqrt{x^2-1}$ est évidemment faux pour un $x < 0$.

2. La dérivée de $g: x \to x - \sqrt{x^2-1} = x + (x^2-1)^{-\frac{1}{2}}$ est

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{2}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}} \times 2x = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{x^2-1}-x}{\sqrt{x^2-1}}$$
$$f'(x) = \frac{\frac{\sqrt{x^2-1}-x}{\sqrt{x^2-1}}}{x-\sqrt{x^2-1}} = \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}} = -(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}$$

C'est bien la forme que suggérait l'énoncé.

3. Si $x \to +\infty$ alors $\sqrt{x^2-1} \to +\infty$
   Il s'agit d'une forme indéterminée

$$x-\sqrt{x^2-1}=\frac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{x+\sqrt{x^2-1}}=\frac{x^2-(x^2-1)}{x+\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$$

Si $x\to+\infty$ alors $x+\sqrt{x^2-1}\to+\infty$ et alors

$$\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\to 0^+$$

Donc

$$f(x)=\ln\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)\to-\infty$$

Aller à : Exercice 10

Correction exercice 11.

$$\ln(\operatorname{ch}(x))=a\Leftrightarrow \operatorname{ch}(x)=e^a\Leftrightarrow\frac{e^x+e^{-x}}{2}=e^a\Leftrightarrow e^x+\frac{1}{e^x}=2e^a$$

On pose $X=e^x$

$$\ln(\operatorname{ch}(x))=a\Leftrightarrow X+\frac{1}{X}=2e^a\Leftrightarrow X^2+1=2Xe^a\Leftrightarrow X^2-2e^aX+1=0$$

Le discriminant vaut

$$\Delta=4e^{2a}-4=4(e^{2a}-1)>0$$

Les racines sont

$$X_1=\frac{2e^a-2\sqrt{e^{2a}-1}}{2}=e^a-\sqrt{e^{2a}-1}\qquad\text{et}\qquad X_2=e^a+\sqrt{e^{2a}-1}$$

On notera que $e^{2a}>e^{2a}-1$ et que donc $e^a>\sqrt{e^{2a}-1}$, ce qui montre que $X_1>0$, pour X_2 c'est évident.
Donc les solutions de $\ln(\operatorname{ch}(x))=a$ sont :

$$x_1=\ln\left(e^a-\sqrt{e^{2a}-1}\right)\qquad\text{et}\qquad x_2=\ln\left(e^a+\sqrt{e^{2a}-1}\right)$$

Allez à : Exercice 11

Correction exercice 12.

1. f est définie (continue et dérivable) sur $\mathbb{R}$, 2π périodique et impaire (ce sont des évidences qu'il n'est pas nécessaire de développer), on étudiera f sur l'intervalle $[0,\pi]$, par parité on connaitra les variation de f sur $[0,2\pi]$, puis par périodicité sur $\mathbb{R}$.
2.
$$f'(x)=2\cos(x)+2\cos(2x)=2(\cos(\mathrm{x})+2\cos^2(x)-1)=2(2\cos^2(x)+\cos(x)-1)$$
Le polynôme $2X^2+X-1$ admet $X_1=-1$ et $X_2=\frac{1}{2}$ comme racine donc
$2X^2+X-1=2(X+1)(X-\frac{1}{2})$, on en déduit que $f'(x)=4(\cos(x)+1)(\cos(x)-\frac{1}{2})$
Dressons un tableau de signe :

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$\cos(x)+1$		$+$		$+$	0
$\cos(x)+\frac{1}{2}$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0

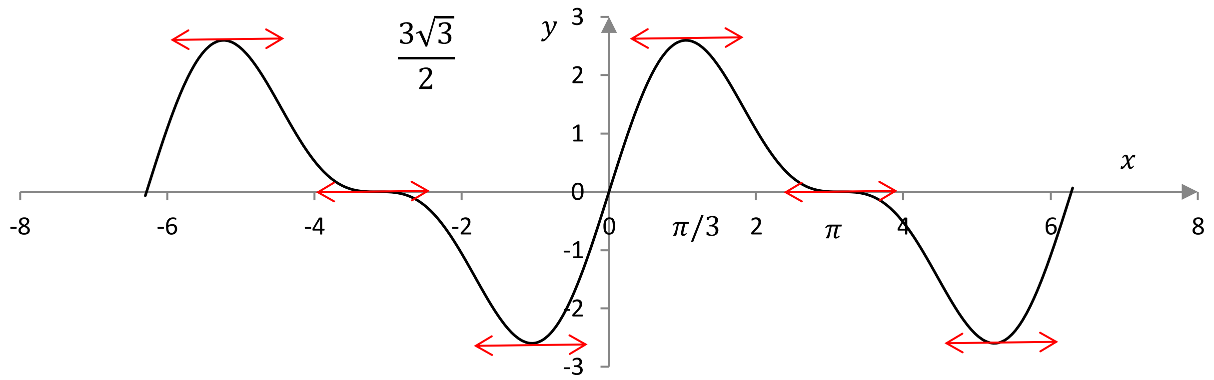
f est croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$.

3. On en déduit le tableau de variation de f.

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=2\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0

4°)



Aller à : Exercice 12

Correction exercice 13.

1. f est définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique mais elle est ni paire ni impaire. On l'étudiera sur $[-\pi,\pi]$.
2. $f'(x)=-2\sin(x)+2\cos(2x)=-2\sin(x)+2(1-2\sin^2(x))=-4\left(\sin^2(x)+\frac{1}{2}\sin(x)-\frac{1}{2}\right)$

   Le polynôme $X^2-\frac{1}{2}X+\frac{1}{2}$ admet -1 et $\frac{1}{2}$ comme racine donc $X^2-\frac{1}{2}X+\frac{1}{2}=(X+1)\left(X-\frac{1}{2}\right)$, on en déduit que :

$$f'(x)=-4(\sin(x)+1)\left(\sin(x)-\frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{cases}\sin(x)+1=0\\ x\in[-\pi,\pi]\end{cases}\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}$$

Et pour tout $x\in[-\pi,\pi]$ avec $x\neq-\frac{\pi}{2}$, $\sin(x)+1>0$

$$\begin{cases}\sin(x)-\frac{1}{2}=0\\ x\in[-\pi,\pi]\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}\text{ ou }x=\frac{5\pi}{6}$$

Si $x\in\left[-\pi,\frac{\pi}{6}\right[$, $\sin(x)-\frac{1}{2}<0$

Si $x\in\left]\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right[$, $\sin(x)-\frac{1}{2}>0$

Si $x\in\left]\frac{5\pi}{6},\pi\right]$, $\sin(x)<0$

On en déduit le signe de $f'(x)$ sur $[-\pi,\pi]$

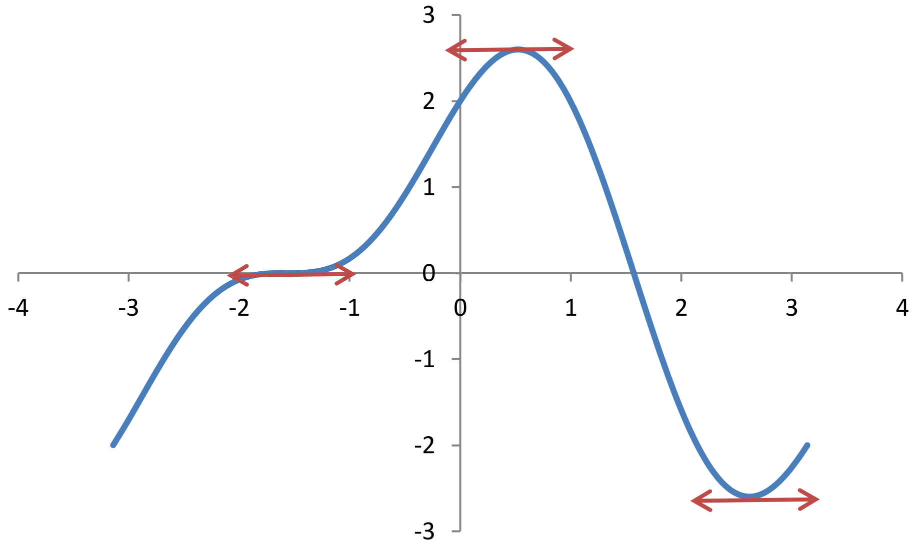
x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

3.

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$				$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$			-2	

	-2	$\nearrow$ 0	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$

4.



Allez à : Exercice 13

Correction exercice 14.

1. f est paire et 2π périodique, on étudie f sur $[0,\pi]$
2. $f'(x) = 2\cos(x)\sin(x) - \frac{1}{2}\sin(x) = 2\sin(x)\left(\cos(x) - \frac{1}{4}\right)$

$$\forall x \in [0,\pi], \qquad f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x) = 0 \\ \cos(x) = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Il y a deux valeurs qui annulent $\sin(x)$ dans $[0,\pi]$, ce sont 0 et π.

Pour $x \in [0,\pi]$ $\cos(x) = \frac{1}{4}$ équivaut à $x = \arccos\left(\frac{1}{4}\right)$, la fonction $\cos$ étant décroissante sur $[0,\pi]$ le signe de $\cos(x) - \frac{1}{4}$ est positif sur $\left[0, \arccos\left(\frac{1}{4}\right)\right]$ et négatif sur $\left[\arccos\left(\frac{1}{4}\right), \pi\right]$.

x	0		$\arccos\left(\frac{1}{4}\right)$		π
$\sin(x)$	0	$+$		$+$	0
$\cos(x) - \frac{1}{4}$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0

f est croissante sur $\left[0, \arccos\left(\frac{1}{4}\right)\right]$

f est décroissante sur $\left[\arccos\left(\frac{1}{4}\right), \pi\right]$

3.

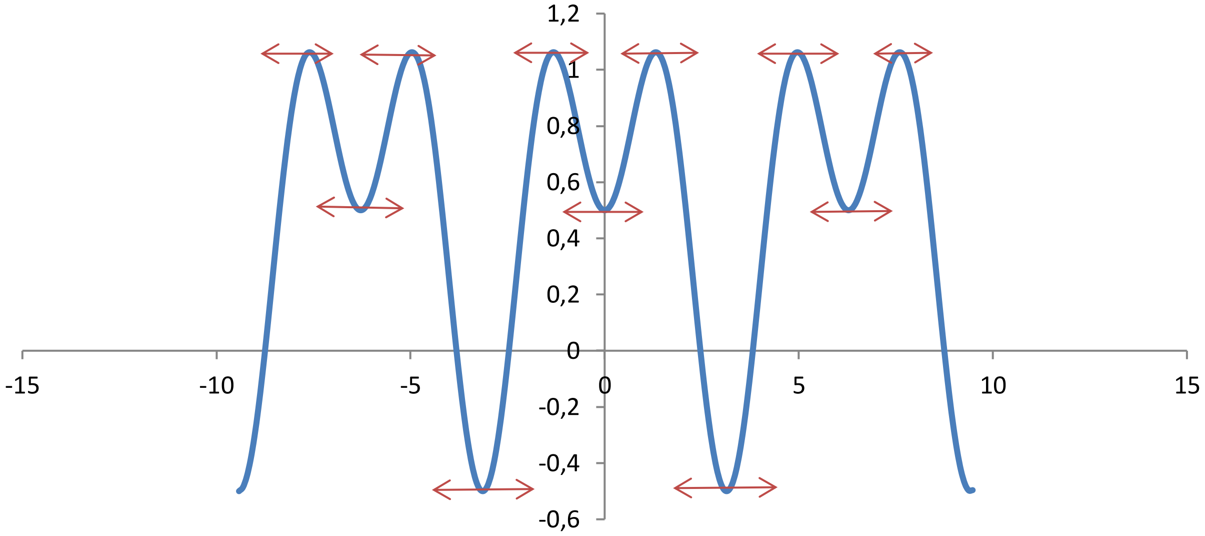
$$f(0) = \frac{1}{2}$$

$$f\left(\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\right) = \sin^2\left(\arccos\left(\frac{1}{4}\right)\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\arccos\left(\frac{1}{4}\right)\right) = 1 - \cos^2\left(\arccos\left(\frac{1}{4}\right)\right) + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$$

$$= 1 - \frac{1}{16} + \frac{1}{8} = \frac{16 - 1 + 2}{16} = \frac{17}{16}$$

$$f(\pi) = -\frac{1}{2}$$

x	0		$\arccos\left(\frac{1}{4}\right)$		π
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{17}{16}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$



Allez à : Exercice 14

Correction exercice 15.

1.

$$f(x+2\pi)=\frac{1}{3}\cos\big(3(x+2\pi)\big)-\frac{3}{4}\cos\big(2(x+2\pi)\big)=\frac{1}{3}\cos(3x+6\pi)-\frac{3}{4}\cos(2x+4\pi)$$
$$=\frac{1}{3}\cos(3x)-\frac{3}{4}\cos(2x)=f(x)$$

f est 2π périodique.

$$f(-x)=\frac{1}{3}\cos(-3x)-\frac{3}{4}\cos(-2x)=\frac{1}{3}\cos(3x)-\frac{3}{4}\cos(2x)=f(x)$$

f est paire (et 2π périodique) donc on étudie f sur $[0,\pi]$.

2.

$$\cos(3x)+i\sin(3x)=e^{3ix}=\left(e^{ix}\right)^3=(\cos(x)+i\sin(x))^3$$
$$=\cos^3(x)+3i\cos^2(x)\sin(x)-3\cos(x)\sin^2(x)-i\sin^3(x)$$
$$=\cos^3(x)-3\cos(x)\sin^2(x)+i(3\cos^2(x)\sin(x)-\sin^3(x))$$

Voir cours pour plus de détails. Puis on égalise les parties réelle et imaginaire

$$\begin{cases}\cos(3x)=\cos^3(x)-3\cos(x)\sin^2(x)\\ \sin(3x)=3\cos^2(x)\sin(x)-\sin^3(x)\end{cases}$$
$$\sin(2x)=2\sin(x)\cos(x)$$

C'est une formule connue.

3.

$$\begin{aligned} f'(x) = -\sin(3x) + \frac{3}{2}\sin(2x) &= -(3\cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x)) + 3\sin(x)\cos(x) \\ &= \sin(x)\,(-3\cos^2(x) + \sin^2(x) + 3\cos(x)) \\ &= \sin(x)\,(-3\cos^2(x) + 1 - \cos^2(x) + 3\cos(x)) \\ &= \sin(x)\,(-4\cos^2(x) + 3\cos(x) + 1) \end{aligned}$$

Soit P le polynôme $P = -4X^2 + 3X + 1$, il admet 1 et $-\frac{1}{4}$ comme racine. On déduit que

$$P = -4(X-1)\left(X + \frac{1}{4}\right)$$

Et que

$$-4\cos^2(x) + 3\cos(x) + 1 = -4(\cos(x) - 1)\left(\cos(x) + \frac{1}{4}\right)$$

Et la dérivée vaut

$$f'(x) = -4\sin(x)(\cos(x) - 1)\left(\cos(x) + \frac{1}{4}\right)$$

La fonction cos étant décroissante sur $[0, \pi]$, $\cos(x) + \frac{1}{4}$ est positif sur $\left[0, \arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\right]$ et négatif sur $\left[\arccos\left(-\frac{1}{4}\right), \pi\right]$.

Faisons un tableau de signe pour trouver le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de $x \in [0, \pi]$

x	0		x_0		π
$\sin(x)$	0	$+$		$+$	0
$\cos(x) - 1$	0	$-$		$-$	
$\cos(x) + \frac{1}{4}$		$+$	0	$-$	
$\sin(x)(\cos(x) - 1)\left(\cos(x) + \frac{1}{4}\right)$	0	$-$	0	$+$	0
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0

f est croissante sur $\left[0, \arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\right]$ et décroissante sur $\left[\arccos\left(-\frac{1}{4}\right), \pi\right]$

4.

$$f(0) = \frac{1}{3}\cos(0) - \frac{3}{4}\cos(0) = -\frac{5}{12}$$

$$f(\pi) = \frac{1}{3}\cos(3\pi) - \frac{3}{4}\cos(2\pi) = -\frac{1}{3} - \frac{3}{4} = -\frac{13}{12}$$

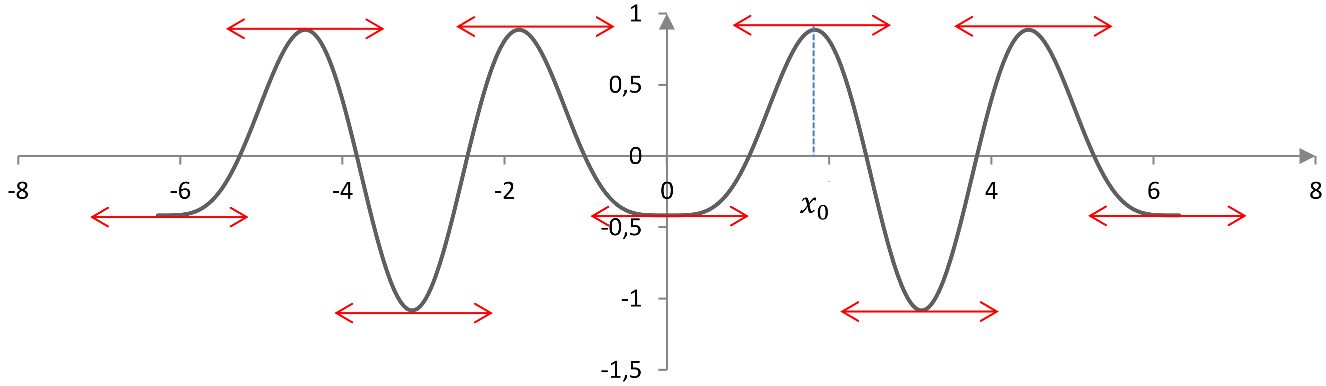
$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{3}\cos(3x) - \frac{3}{4}\cos(2x) &= \frac{1}{3}(\cos^3(x) - 3\cos(x)\sin^2(x)) - \frac{3}{4}(2\cos^2(x) - 1) \\ &= \frac{1}{3}(\cos^3(x) - 3\cos(x)\,(1 - \cos^2(x)) - \frac{3}{4}(2\cos^2(x) - 1) \\ &= \frac{4}{3}\cos^3(x) - \frac{3}{2}\cos^2(x) - \cos(x) + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Sachant que $\cos(x_0) = -\frac{1}{4}$

$$\begin{aligned} f(x_0) = \frac{4}{3}\cos^3(x_0) - \frac{3}{2}\cos^2(x_0) - \cos(x_0) + \frac{3}{4} &= \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{4}\right)^3 - \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = -\frac{1}{48} - \frac{3}{32} + 1 \\ &= \frac{-2 - 9 + 96}{96} = \frac{85}{96} \end{aligned}$$

5.

x	0		x_0		π
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	$-\frac{5}{12}$	$\nearrow$	$\frac{85}{96}$	$\searrow$	$-\frac{13}{12}$



Aller à : Exercice 15

Correction exercice 16.

1. $f'(x) = 4 - 5\cos(x)$

   $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \arccos\left(\frac{4}{5}\right)$ car $x \in [0, \pi]$, cos est une fonction décroissante donc

   Si $x \in \left[0, \arccos\left(\frac{4}{5}\right)\right[$, $f'(x) < 0$ et f est décroissante.

   Si $x \in \left]\arccos\left(\frac{4}{5}\right), \pi\right]$, $f'(x) > 0$ et f est croissante.

2. $\frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{4}{5} < \frac{\sqrt{3}}{2}$, c'est trivial en élevant au carré. Comme arccos est une fonction décroissante :

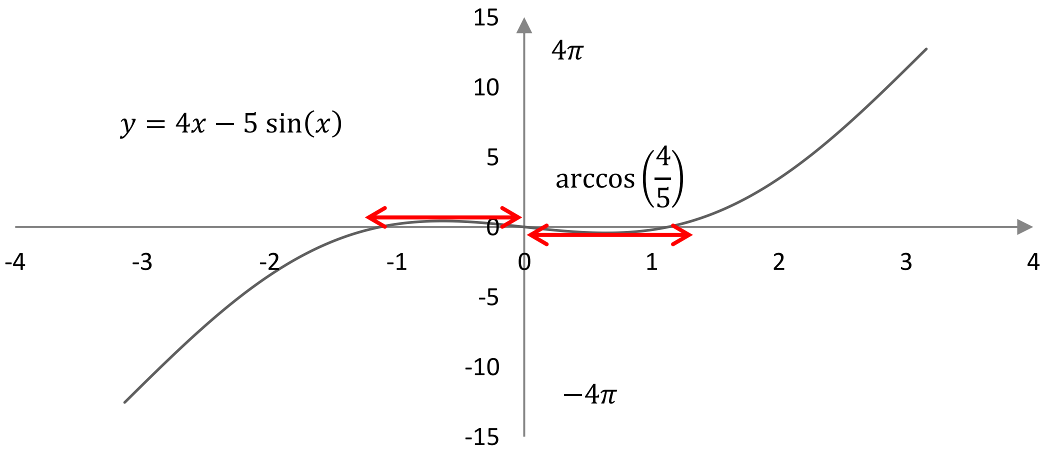
$$\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) > \arccos\left(\frac{4}{5}\right) > \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} > \arccos\left(\frac{4}{5}\right) > \frac{\pi}{6}$$

3.

x	0		$\arccos\left(\frac{4}{5}\right)$		π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$4\arccos\left(\frac{4}{5}\right) - 3$	$\nearrow$	4π

$$f\left(\arccos\left(\frac{4}{5}\right)\right) = 4\arccos\left(\frac{4}{5}\right) - 5\sin\left(\arccos\left(\frac{4}{5}\right)\right) = 4\arccos\left(\frac{4}{5}\right) - 5\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = 4\arccos\left(\frac{4}{5}\right) - 3$$

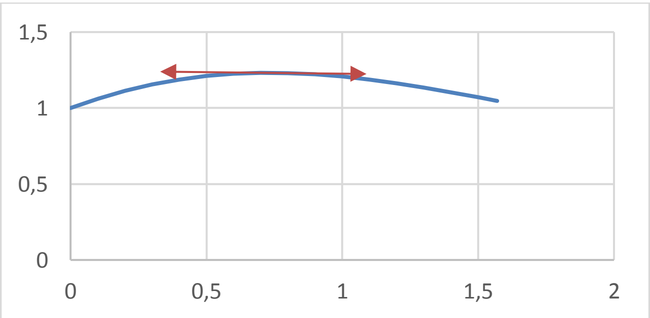
4. f est impaire donc la courbe est symétrique par rapport à l'origine.



Aller à : Exercice 16

Correction exercice 17.

1. Ces trois nombres sont positifs, ces deux inégalités équivalent à
$$\left(\frac{1}{2}\right)^2<\left(\frac{2}{3}\right)^2<\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\Leftrightarrow \frac{1}{4}<\frac{4}{9}<\frac{1}{2}$$
Ce qui est vrai.
2. arcsin est strictement croissante donc
$$\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)<\arcsin\left(\frac{2}{3}\right)<\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\Leftrightarrow\frac{\pi}{6}<\arcsin\left(\frac{2}{3}\right)<\frac{\pi}{4}$$
3.
$$f'(x)=-\sin(x)+\frac{2}{3}$$
$$f'(x)=0\Leftrightarrow\sin(x)=\frac{2}{3}$$
Dans l'intervalle $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ $f'(x)=0$ admet une unique solution $x=\arcsin\left(\frac{2}{3}\right)$
Comme arcsin est strictement croissante,
$\forall x\in\left[0,\arcsin\left(\frac{2}{3}\right)\right[, f'(x)>0$ donc f est strictement croissante
$\forall x\in\left]\arcsin\left(\frac{2}{3}\right),\frac{\pi}{2}\right], f'(x)<0$ donc f est strictement décroissante
$$\frac{\pi}{6}<\arcsin\left(\frac{2}{3}\right)<\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow\frac{2}{3}\times\frac{\pi}{6}<\frac{2}{3}\arcsin\left(\frac{2}{3}\right)<\frac{2}{3}\times\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow\frac{\pi}{9}<\frac{2}{3}\arcsin\left(\frac{2}{3}\right)<\frac{\pi}{6}$$
Comme
$$\cos\left(\arcsin\left(\frac{2}{3}\right)\right)=\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{9-4}{3^2}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$
Et que
$$f\left(\arcsin\left(\frac{2}{3}\right)\right)=\cos\left(arcsin\left(\frac{2}{3}\right)\right)+\frac{2}{3}$$
$$\frac{\pi}{9}+\frac{\sqrt{5}}{3}<f\left(\arcsin\left(\frac{2}{3}\right)\right)<\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{5}}{3}$$
4.



Allez à : Exercice 17

Correction exercice 18.
$$y=\operatorname{th}(x)\Leftrightarrow y=\frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}=\frac{\frac{e^x-e^{-x}}{2}}{\frac{e^x+e^{-x}}{2}}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=\frac{X^2-1}{X^2+1}$$
En posant $X=e^x$

$$y=\operatorname{th}(x)\Leftrightarrow y=\frac{X^2-1}{X^2+1}\Leftrightarrow y(X^2+1)=X^2-1\Leftrightarrow yX^2+y=X^2-1\Leftrightarrow yX^2-X^2=-1-y$$
$$\Leftrightarrow X^2(y-1)=-(1+y)\Leftrightarrow X^2=-\frac{1+y}{y-1}=\frac{1+y}{1-y}\Leftrightarrow e^x=X=\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}\Leftrightarrow x$$
$$=\ln\left(\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}\right)\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$$

$g:]-1,1[\to\mathbb{R}$ est définie par

$$g(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Allez à : Exercice 18

Correction exercice 19.

$$e^{-x}(\operatorname{ch}^3(x)-\operatorname{sh}^3(x))=e^{-x}\left(\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^3-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^3\right)$$
$$=\frac{e^{-x}}{8}\left(e^{3x}+3e^x+3e^{-x}+e^{-3x}-(e^{3x}-3e^x+3e^{-x}-e^{-3x})\right)$$
$$=\frac{e^{-x}}{8}(6e^x+2e^{-3x})=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}e^{-4x}$$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty}e^{-x}(\operatorname{ch}^3(x))-\operatorname{sh}^3(x))=\frac{3}{4}$$

$$x-\ln(\operatorname{ch}(x))=x-\ln\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)=x-\ln\left(e^x\frac{1+e^{-2x}}{2}\right)=x-\ln(e^x)-\ln\left(\frac{1+e^{-2x}}{2}\right)$$
$$=-\ln\left(\frac{1+e^{-2x}}{2}\right)$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+e^{-2x}}{2}=\frac{1}{2}$$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\ln(\operatorname{ch}(x)))=-\ln\left(\frac{1}{2}\right)=\ln(2)$$

Aller à : Exercice 19

Correction exercice 20.

Pour $x\neq 0\Leftrightarrow e^x\neq 1\Leftrightarrow e^{-x}\neq 1$

$$\begin{aligned}
A(x) &= 1 + \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x} + e^{2x} + e^{-2x} + \cdots + e^{nx} + e^{-nx}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left(1 + e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}\right) + \left(1 + e^{-x} + e^{-2x} + \cdots + e^{-nx}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1 - e^{(n+1)x}}{1 - e^x} + \frac{1 - e^{-(n+1)x}}{1 - e^{-x}}\right) \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{\left(1 - e^{(n+1)x}\right)(1 - e^{-x}) - \left(1 - e^{-(n+1)x}\right)(1 - e^x)}{(1 - e^x)(1 - e^{-x})} \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1 - e^{-x} - e^{(n+1)x} + e^{nx} - \left(1 - e^x - -e^{-(n+1)x} + e^{-nx}\right)}{1 - e^{-x} - e^x + 1} \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{e^x - e^{-x} - \left(e^{(n+1)x} - e^{-(n+1)x}\right) + e^{nx} - e^{-nx}}{2 - (e^x + e^{-x})} \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{\mathrm{sh}(x) - \mathrm{sh}\big((n+1)x\big) + \mathrm{sh}(nx)}{1 - \mathrm{ch}(x)}
\end{aligned}$$

Si $x = 0$, $A(0) = n + 1$

Aller à : Exercice 20

Correction exercice 21.

On pose $X = e^x$

$$3\,\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow 3\frac{X + \frac{1}{X}}{2} - \frac{X - \frac{1}{X}}{2} - 3 = 0 \Leftrightarrow 3(X^2 + 1) - (X^2 - 1) - 6X = 0$$

$$\Leftrightarrow 2X^2 - 6X + 4 = 0 \Leftrightarrow X^2 - 3X + 2 = 0 \Leftrightarrow X = 1 \quad \text{ou} \quad X = 2 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \ln(2)$$

Aller à : Exercice 21

Correction exercice 22.

1. On pose $X = e^x$

$$\mathrm{sh}(x) - 3\,\mathrm{ch}(x) + 3 = \frac{X - \frac{1}{X}}{2} - \frac{3\left(X + \frac{1}{X}\right)}{2} + 3 = \frac{1}{2X}\left((X^2 - 1) - 3(X^2 + 1) + 6X\right) = \frac{1}{2X}(-2X^2 + 6X - 4)$$

$$= -\frac{1}{X}(X^2 - 3X + 2)$$

Les racines de $X^2 - 3X + 2 = 0$ sont 1 et 2 donc

$$\mathrm{sh}(x) - 3\,\mathrm{ch}(x) + 3 = -\frac{1}{X}(X - 1)(X - 2)$$

Les valeurs de x qui annulent cette expressions vérifient

$$e^x = 1 \quad \text{ou} \quad e^x = 2$$

C'est-à-dire $x = 0$ ou $x = \ln(2)$

2. Reprenons l'identité

$$\mathrm{sh}(x) - 3\,\mathrm{ch}(x) + 3 = -\frac{1}{X}(X - 1)(X - 2) = -e^{-x}(e^x - 1)(e^x - 2)$$

x	$-\infty$		0		$\ln(2)$		$+\infty$
$e^x - 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$e^x - 2$		$-$		$-$	0	$-$	
$-e^{-x}(e^x - 1)(e^x - 2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Allez à : Exercice 22

Correction exercice 23.

1.

$$\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right)=\frac{e^{\frac{1}{2}\ln(3)}+e^{-\frac{1}{2}\ln(3)}}{2}=\frac{e^{\sqrt{3}}+e^{-\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}}{2}=\frac{3+1}{2\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right)=\frac{e^{\frac{1}{2}\ln(3)}-e^{-\frac{1}{2}\ln(3)}}{2}=\frac{e^{\sqrt{3}}-e^{-\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}}{2}=\frac{3-1}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

2.

$$2\operatorname{ch}(x)+\operatorname{sh}(x)=\sqrt{3}\operatorname{ch}(5x)\Leftrightarrow\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{ch}(x)+\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{sh}(x)=\frac{\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{3}\operatorname{ch}(5x)$$

$$\Leftrightarrow\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right)\operatorname{ch}(x)+\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right)\operatorname{sh}(x)=\operatorname{ch}(5x)\Leftrightarrow\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\ln(3)+x\right)=\operatorname{ch}(5x)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{2}\ln(3)+x=5x\\ \frac{1}{2}\ln(3)+x=-5x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x=\frac{1}{2}\ln(3)\\ 6x=-\frac{1}{2}\ln(3)\end{cases}$$

$$S=\left\{\frac{1}{8}\ln(3),-\frac{1}{12}\ln(3)\right\}$$

Aller à : Exercice 23

Correction exercice 24.

1. $1>\frac{3}{4}>\frac{\sqrt{2}}{2}$, comme arccos est décroissante,

$$\arccos(1)<\arccos\left(\frac{3}{4}\right)<\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

ce qui équivaut à

$$0<\arccos\left(\frac{3}{4}\right)<\frac{\pi}{4}$$

2. D'après la première question

$$0<2\arccos\left(\frac{3}{4}\right)<\frac{\pi}{2}$$

Donc

$$2\arccos\left(\frac{3}{4}\right)\in[0,\pi]$$

Et bien sûr

$$\arccos(x)\in[0,\pi]$$

On en déduit que

$$\arccos(x)=2\arccos\left(\frac{3}{4}\right)\Leftrightarrow x=\cos\left(2\arccos\left(\frac{3}{4}\right)\right)=2\cos^2\left(\arccos\left(\frac{3}{4}\right)\right)-1=2\left(\frac{3}{4}\right)^2-1$$
$$=\frac{9}{8}-1=\frac{1}{8}$$

Allez à : Exercice 24

Correction exercice 25.

1.

$$0<\frac{1}{3}<1\Rightarrow \arctan(0)<\arctan\left(\frac{1}{3}\right)<\arctan(1)$$

Car arctan est strictement croissante, donc

$$0<\arctan\left(\frac{1}{3}\right)<\frac{\pi}{4}$$

Ce qui entraine que $0<2\arctan\left(\frac{1}{3}\right)<\frac{\pi}{2}$

2. Pour tout $t\in\mathbb{R}$

$$\frac{2\tan(t)}{1+\tan^2(t)}=\frac{2\sin(t)}{\cos(t)}\times\cos^2(t)=2\sin(t)\cos(t)=\sin(2t)$$

3.

$$\sin\left(2\arctan\left(\frac{1}{3}\right)\right)=\frac{2\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{3}\right)\right)}{1+\tan^2\left(\arctan\left(\frac{1}{3}\right)\right)}=\frac{\frac{2}{3}}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{\frac{2}{3}}{1+\frac{1}{9}}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{10}{9}}=\frac{2}{3}\times\frac{9}{10}=\frac{3}{5}$$

Comme $\arcsin\left(\frac{3}{5}\right)$ et $2\arctan\left(\frac{1}{3}\right)$ sont dans $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, on a

$$\arcsin\left(\frac{3}{5}\right)=2\arctan\left(\frac{1}{3}\right)$$

Allez à : Exercice 25

Correction exercice 26.

1.

$$\frac{\tan(x)}{\sqrt{1+\tan^2(x)}}=\frac{\sin(x)}{\cos(x)\sqrt{1+\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}}}=\frac{\sin(x)}{\cos(x)\sqrt{\frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)}}}=\frac{\sin(x)\,|\cos(x)|}{\cos(x)}=\sin(x)$$

Car $\cos(x)>0$ pour tout $x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

Comme $x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ on peut appliquer la formule précédente, en particulier $x\neq 0$ donc on peut diviser par $\tan(x)$

$$\cos(x)=\frac{\sin(x)}{\tan(x)}=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(x)}}$$

2.

$$0<\frac{3}{4}<1\Rightarrow 0=\arctan(0)<\arctan\left(\frac{3}{4}\right)<\arctan(1)=\frac{\pi}{4}$$

Car arctan est strictement croissante.

$$0<\frac{5}{12}<1\Rightarrow 0=\arctan(0)<\arctan\left(\frac{5}{12}\right)<\arctan(1)=\frac{\pi}{4}$$

Car arctan est strictement croissante.

En additionnant ces deux inégalités on trouve que

$$0<\arctan\left(\frac{3}{4}\right)+\arctan\left(\frac{5}{12}\right)<\frac{\pi}{2}$$

3.

Comme $\arcsin(x)$ et $\arctan\left(\frac{3}{4}\right)+\arctan\left(\frac{5}{12}\right)$ sont dans $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

$$\begin{aligned}
\arcsin(x) = \arctan\left(\frac{3}{5}\right) + \arctan\left(\frac{5}{12}\right) &\Leftrightarrow x = \sin\left(\arctan\left(\frac{3}{4}\right) + \arctan\left(\frac{5}{12}\right)\right)\\
&= \sin\left(\arctan\left(\frac{3}{4}\right)\right)\cos\left(\arctan\left(\frac{5}{12}\right)\right) + \cos\left(\arctan\left(\frac{3}{4}\right)\right)\sin\left(\arctan\left(\frac{5}{12}\right)\right)\\
&= \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}} \times \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{5}{12}\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}} \times \frac{\frac{5}{12}}{\sqrt{1+\left(\frac{5}{12}\right)^2}}\\
&= \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{\frac{16+9}{4^2}}} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{144+25}{12^2}}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{16+9}{4^2}}} \times \frac{\frac{5}{12}}{\sqrt{\frac{144+25}{12^2}}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}} \times \frac{1}{\frac{13}{12}} + \frac{1}{\frac{5}{4}} \times \frac{\frac{5}{12}}{\frac{13}{12}}\\
&= \frac{3}{5} \times \frac{12}{13} + \frac{4}{5} \times \frac{5}{13} = \frac{36+20}{65} = \frac{56}{65}
\end{aligned}$$

Allez à : Exercice 26

Correction exercice 27.

1.

$$\frac{1-\tan^2(t)}{1+\tan^2(t)} = \frac{1-\frac{\sin^2(t)}{\cos^2(t)}}{1+\frac{\sin^2(t)}{\cos^2(t)}} = \frac{\cos^2(t)-\sin^2(t)}{\cos^2(t)+\sin^2(t)} = \cos^2(t)-\sin^2(t) = \cos(2t)$$

2.

$$\cos\left(2\arctan\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{1-\tan^2\left(\arctan\left(\frac{1}{3}\right)\right)}{1+\tan^2\left(\arctan\left(\frac{1}{3}\right)\right)} = \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{9-1}{9+1} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

Comme

$$0 < \frac{1}{3}$$

Et comme arctan est croissante

$$\arctan(0) < \arctan\left(\frac{1}{3}\right) < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \arctan\left(\frac{1}{3}\right) < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < 2\arctan\left(\frac{1}{3}\right) < \pi$$

On en déduit alors que

$$\cos\left(2\arctan\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{4}{5} \Rightarrow 2\arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \arccos\left(\frac{4}{5}\right)$$

Allez à : Exercice 27

Correction exercice 28.

1.

$$f(x) = x^x = e^{x\ln(x)}$$

Donc f est définie et continue sur $]0,+\infty[$

2. On a

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$$

Donc

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = e^0 = 1$$

Autrement dit f est prolongeable par continuité en 0, par $f(0) = 1$.

3.

$$f'(x) = \left(\ln(x) + x \times \frac{1}{x}\right) e^{x\ln(x)} = (\ln(x) + 1)e^{x\ln(x)}$$

f est dérivable sur $]0, +\infty[$.

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty$$

Donc f n'est pas dérivable en 0 et le graphe admet une demi-tangente verticale en 0.

4. Le signe de la dérivée est le même que celui de $\ln(x) + 1$.

$$\ln(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$0 < x < \frac{1}{e} \Leftrightarrow \ln(x) < \ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1 \Leftrightarrow \ln(x) + 1 < 0$$

De même

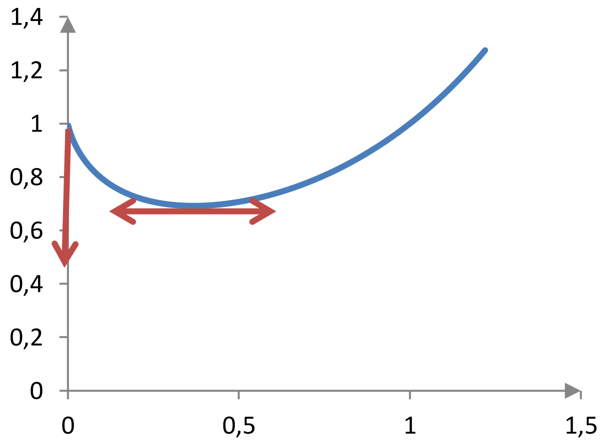
$$x > \frac{1}{e} \Leftrightarrow \ln(x) + 1 > 0$$

En résumé f est décroissante sur $\left]0, \frac{1}{e}\right[$ et croissante sur $\left]\frac{1}{e}, +\infty\right[$.

Clairement

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

5. $f\left(\frac{1}{e}\right) = f(e^{-1}) = e^{-e^{-1}} = e^{\frac{1}{e}}$ et $f(0) = 1$



Allez à : Exercice 28

Correction exercice 29.

1. f est définie, continue et dérivable si et seulement si $4e^x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow e^x \neq \frac{3}{4} \Leftrightarrow x \neq \ln\left(\frac{3}{4}\right)$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right\}$$

2.

En $-\infty$,

$$\lim_{x\to-\infty} (4e^x - 3) = -3$$

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{ch}(x) = +\infty$$

Donc

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{8\operatorname{ch}(x)}{4e^x - 3} = -\infty$$

En $+\infty$

On pose $X = e^x$

$$f(x) = \frac{8\operatorname{ch}(x)}{4e^x - 3} = \frac{8\frac{X + \frac{1}{X}}{2}}{4X - 3} = \frac{8(X^2 + 1)}{2X(4X - 3)} = \frac{8X^2 + 8}{8X^2 - 6X}$$
$$\lim_{x \to +\infty} X = +\infty$$

Donc

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{X \to +\infty} \frac{8X^2 + 8}{8X^2 - 6X} = \lim_{X \to +\infty} \frac{8X^2}{8X^2} = 1$$
$$\lim_{x \to +\infty} X = +\infty$$

En $\ln\left(\frac{3}{4}\right)^-$, $\operatorname{ch}\left(\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right) > 1 > 0$

$$\lim_{x \to \ln\left(\frac{3}{4}\right)^-} (4e^x - 3) = 0^-$$
$$\lim_{x \to \ln\left(\frac{3}{4}\right)^-} \frac{\operatorname{ch}(x)}{4e^x - 3} = -\infty$$

En $\ln\left(\frac{3}{4}\right)^+$, $\operatorname{ch}\left(\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right) > 1 > 0$

$$\lim_{x \to \ln\left(\frac{3}{4}\right)^+} (4e^x - 3) = 0^+$$
$$\lim_{x \to \ln\left(\frac{3}{4}\right)^+} \frac{\operatorname{ch}(x)}{4e^x - 3} = +\infty$$

3.

$$f'(x) = 8\frac{\operatorname{sh}(x)(4e^x - 3) - 4\operatorname{ch}(x)e^x}{(4e^x - 3)^2} = 8\frac{4e^x(\operatorname{sh}(x) - \operatorname{ch}(x)) - 3\operatorname{sh}(x)}{(4e^x - 3)^2}$$

On pose $X = e^x$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4e^x(\operatorname{sh}(x) - \operatorname{ch}(x)) - 3\operatorname{sh}(x) = 0 \Leftrightarrow 4X\left(\frac{X - \frac{1}{X}}{2} - \frac{X + \frac{1}{X}}{2}\right) - 3\frac{X - \frac{1}{X}}{2} = 0$$
$$\Leftrightarrow 4X\big((X^2 - 1) - (X^2 + 1)\big) - 3(X^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow 8X(-2) - 3X^2 + 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow -3X^2 - 8X + 3 = 0$$

Le discriminant de cette équation est :

$$\Delta = (-8)^2 + 4 \times 3 \times 3 = 64 + 36 = 100$$

Les racines sont

$$X_1 = \frac{8 - 10}{-6} = \frac{1}{3}$$

Et

$$X_2 = \frac{8 + 10}{-6} = -3$$

Or $X = e^x > 0$ donc $f'(x) = 0$ n'a qu'une solution $e^x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{1}{3}\right) = -\ln(3)$

Il reste à déterminer le signe de $4e^x(\operatorname{sh}(x) - \operatorname{ch}(x)) - 3\operatorname{sh}(x)$, cette fonction est continue et ne s'annule qu'en $-\ln(3)$, on prends une valeur simple 0, $4e^0(\operatorname{sh}(0) - \operatorname{ch}(0)) - 3\operatorname{sh}(0) = -4 < 0$

Donc pour tout $x < -\ln(3)$ $4e^x(\operatorname{sh}(x) - \operatorname{ch}(x)) - 3\operatorname{sh}(x) < 0$ et pour tout $x > -\ln(3)$, $4e^x(\operatorname{sh}(x) - \operatorname{ch}(x)) - 3\operatorname{sh}(x) > 0$, il faut quand même faire attention au fait que f n'est pas définie en $\ln\left(\frac{3}{4}\right)$

Comme $\frac{1}{3} < \frac{3}{4}$ alors $\ln\left(\frac{1}{3}\right) < \ln\left(\frac{3}{4}\right)$, on déduit de tout cela que :

Pour tout $x \in \left]-\infty, \ln\left(\frac{1}{3}\right)\right[$, f est décroissante.

Pour tout $x \in \left]\ln\left(\frac{1}{3}\right), \ln\left(\frac{3}{4}\right)\right[$, f est croissante.

Pour tout $x \in \left]\ln\left(\frac{3}{4}\right), +\infty\right[$, f est croissante.

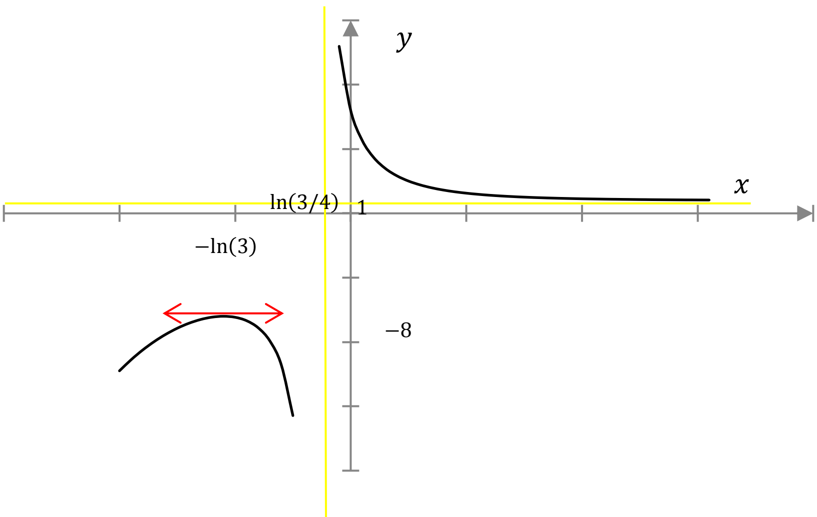
4.

x	$-\infty$		$\ln\left(\frac{1}{3}\right)$		$\ln\left(\frac{3}{4}\right)$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-8	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	1

Car

$$f\left(\ln\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{8\,\mathrm{ch}\left(\frac{1}{3}\right)}{4e^{\ln\left(\frac{1}{3}\right)} - 3} = 4\frac{e^{\ln\left(\frac{1}{3}\right)} + e^{-\ln\left(\frac{1}{3}\right)}}{\frac{4}{3} - 3} = 4\frac{\frac{1}{3} + 3}{-\frac{5}{3}} = \frac{40}{-5} = -8$$

5.



Aller à : Exercice 29

Correction exercice 30.

1. $u \to 3 + 4\,\mathrm{sh}(u)$ est définie sur $\mathbb{R}$. $\mathrm{ch}(u) \neq 0$ pour tout $u \in \mathbb{R}$ et ch est définie sur $\mathbb{R}$ donc f est définie sur $\mathbb{R}$.
2.

Première méthode

$$f(u) = \frac{3 + 4\,\mathrm{sh}(u)}{\mathrm{ch}(u)} = \frac{3}{\mathrm{ch}(u)} + 4\,\mathrm{th}(u)$$

$\lim\limits_{u\to+\infty} \mathrm{ch}(u) = +\infty$ donc $\lim\limits_{u\to+\infty} \frac{3}{\mathrm{ch}(u)} = 0$ et $\lim\limits_{u\to+\infty} \mathrm{th}(u) = 1$ donc $\lim\limits_{u\to+\infty} f(u) = 4$

$\lim\limits_{u\to-\infty} \mathrm{ch}(u) = +\infty$ donc $\lim\limits_{u\to-\infty} \frac{3}{\mathrm{ch}(u)} = 0$ et $\lim\limits_{u\to-\infty} \mathrm{th}(u) = -1$ donc $\lim\limits_{u\to+\infty} f(u) = -4$

Deuxième méthode

$$f(u) = \frac{3 + 4\,\mathrm{sh}(u)}{\mathrm{ch}(u)} = \frac{3 + 4\frac{e^u - e^{-u}}{2}}{\frac{e^u + e^{-u}}{2}} = \frac{6 + 4(e^u - e^{-u})}{e^u + e^{-u}} = \frac{6e^u + 4(e^{2u} - 1)}{e^{2u} + 1}$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur par 2, puis par e^u.

On pose $X = e^u$,

$$f(u) = \frac{6X + 4(X^2 - 1)}{X^2 + 1} = \frac{4X^2 + 6X - 4}{X^2 + 1}$$

si $u \to +\infty$ alors $X \to +\infty$

$$\lim_{u \to +\infty} f(u) = \lim_{X \to +\infty} \frac{4X^2 + 6X - 4}{X^2 + 1} = \lim_{X \to +\infty} \frac{4X^2}{X^2} = 4$$

si $u \to -\infty$ alors $X \to 0$

$$\lim_{u \to -\infty} f(u) = \lim_{X \to 0} \frac{4X^2 + 6X - 4}{X^2 + 1} = -4$$

3.

Première méthode

$$f'(u) = \frac{4\,\mathrm{ch}(u)\,\mathrm{ch}(u) - (3 + 4\,\mathrm{sh}(u))\,\mathrm{sh}(u)}{\mathrm{ch}^2(u)} = \frac{4\,\mathrm{ch}^2(u) - 3\,\mathrm{sh}(u) - 4\,\mathrm{sh}^2(u)}{\mathrm{ch}^2(u)}$$

$$= \frac{4(\mathrm{ch}^2(u) - \mathrm{sh}^2(u)) - 3\,\mathrm{sh}(u)}{\mathrm{ch}^2(u)} = \frac{4 - 3\,\mathrm{sh}(u)}{\mathrm{ch}^2(u)}$$

$$f'(u_0) = 0 \Leftrightarrow 4 - 3\,\mathrm{sh}(u_0) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{sh}(u_0) = \frac{4}{3} \Leftrightarrow u_0 = \mathrm{argsh}\left(\frac{4}{3}\right) = \ln\left(\frac{4}{3} + \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 1}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{4}{3} + \sqrt{\frac{16}{9} + 1}\right) = \ln\left(\frac{4}{3} + \sqrt{\frac{25}{9}}\right) = \ln\left(\frac{4}{3} + \frac{5}{3}\right) = \ln(3)$$

Deuxième méthode

$$\mathrm{sh}(u_0) = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{e^{u_0} - e^{-u_0}}{2} = \frac{4}{3}$$

On pose $X_0 = e^{u_0}$

$$\mathrm{sh}(u_0) = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{X_0 - \frac{1}{X_0}}{2} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow X_0 - \frac{1}{X_0} = \frac{8}{3} \Leftrightarrow X_0^2 - 1 = \frac{8}{3}X_0 \Leftrightarrow X_0^2 - \frac{8}{3}X_0 - 1 = 0$$

Le discriminant vaut

$$\Delta = \frac{64}{9} + 4 = \frac{100}{9} = \left(\frac{10}{3}\right)^2$$

$$X_{0,1} = \frac{\frac{8}{3} - \frac{10}{3}}{2} = -\frac{1}{3} < 0$$

$$X_{0,2} = \frac{\frac{8}{3} + \frac{10}{3}}{2} = 3$$

Donc

$$e^{u_0} = 3 \Leftrightarrow u_0 = \ln(3)$$

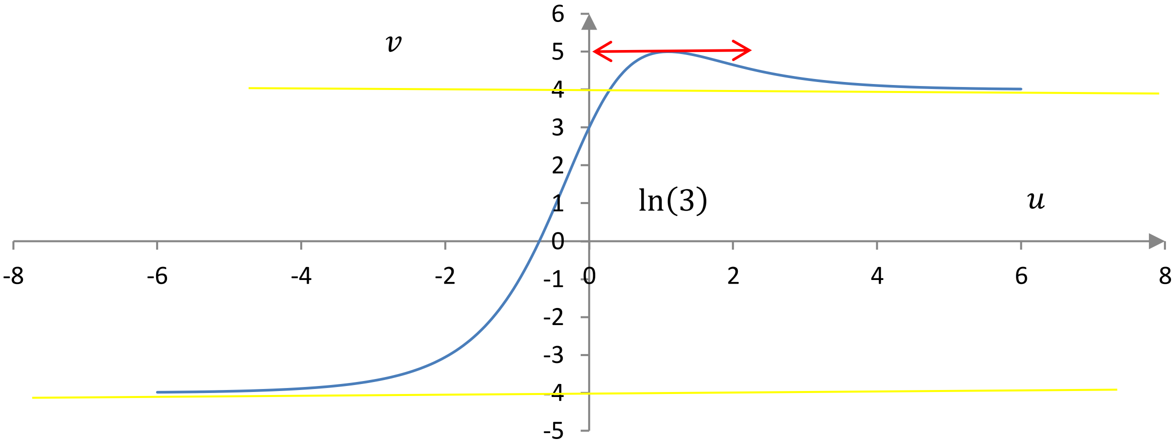
u	$-\infty$		$\ln(3)$		$+\infty$
$f'(u)$		$+$	0	$-$	
$f(u)$	-4	$\nearrow$	5	$\searrow$	4

$$\mathrm{ch}(\ln(3)) = \frac{e^{\ln(3)} + e^{-\ln(3)}}{2} = \frac{3 + \frac{1}{3}}{2} = \frac{5}{3}$$

$$f(\ln(3))=\frac{3+4\times\frac{4}{3}}{\frac{5}{3}}=5$$

4.

Graphe de $v=f(u)$



Aller à : Exercice 30

Correction exercice 31.

1. f est définie et continue si et seulement si $\operatorname{ch}(x)-1\neq 0$, autrement dit si et seulement si $x\neq 0$.
2.
   a.

$$f'(x)=\frac{\big(\operatorname{sh}(x)+4\operatorname{ch}(x)\big)(\operatorname{ch}(x)-1)-(\operatorname{ch}(x)+4\operatorname{sh}(x)+2)\operatorname{sh}(x)}{(\operatorname{ch}(x)-1)^2}$$
$$=\frac{\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(x)-\operatorname{sh}(x)+4\operatorname{ch}^2(x)-4\operatorname{ch}(x)-\operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(x)-4\operatorname{sh}^2(x)-2\operatorname{sh}(x)}{(\operatorname{ch}(x)-1)^2}$$
$$=\frac{-3\operatorname{sh}(x)-4\operatorname{ch}(x)+4\big(\operatorname{ch}^2(x)-\operatorname{sh}^2(x)\big)}{(\operatorname{ch}(x)-1)^2}=\frac{-3\operatorname{sh}(x)-4\operatorname{ch}(x)+4}{(\operatorname{ch}(x)-1)^2}$$

   b. On pose $X=e^x$

$$-3\operatorname{sh}(x)-4\operatorname{ch}(x)+4=-3\frac{X-\frac{1}{X}}{2}-4\frac{X+\frac{1}{X}}{2}+4=\frac{-3(X^2-1)-4(X^2+1)+8X}{2X}$$
$$=\frac{-7X^2+8X-1}{2X}=-\frac{7(X-1)\left(X-\frac{1}{7}\right)}{2X}=-\frac{7(e^x-1)\left(e^x-\frac{1}{7}\right)}{2e^x}$$
$$(\operatorname{ch}(x)-1)^2=\left(\frac{X+\frac{1}{X}}{2}-1\right)^2=\left(\frac{X^2-2X+1}{2X}\right)^2=\frac{(X-1)^4}{4X^2}=\frac{(e^x-1)^4}{4e^{2x}}$$

Donc

$$f'(x)=\frac{-\frac{7(e^x-1)\left(e^x-\frac{1}{7}\right)}{2e^x}}{\frac{(e^x-1)^4}{4e^{2x}}}=-\frac{14e^x(e^x-1)\left(e^x-\frac{1}{7}\right)}{(e^x-1)^4}=-\frac{14e^x\left(e^x-\frac{1}{7}\right)}{(e^x-1)^3}$$

3.

x	$-\infty$		$\ln\left(\frac{1}{7}\right) = -\ln(7)$		0		$+\infty$
$-14e^x$		$-$		$-$		$-$	
$e^x - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
$(e^x - 1)^3$		$-$		$-$	0	$+$	
$e^x - \frac{1}{7}$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

Donc f est décroissante sur $]-\infty, -\ln(7)]$, croissante sur $[-\ln(7), 0[$, puis décroissante sur $]0, +\infty[$

4. On pose $X = e^x$

$$f(x) = \frac{\operatorname{ch}(x) + 4\operatorname{sh}(x) + 2}{\operatorname{ch}(x) - 1} = \frac{\frac{X + \frac{1}{X}}{2} + \frac{4\left(X - \frac{1}{X}\right)}{2} + 2}{\frac{X + \frac{1}{X}}{2} - 1} = \frac{X^2 + 1 + 4(X^2 - 1) + 4X}{X^2 + 1 - 2X} = \frac{5X^2 + 4X - 3}{(X - 1)^2}$$

Si $x \to +\infty$ alors $X \to +\infty$ donc $f(x) \to 5$

Si $x \to -\infty$ alors $X \to 0$ donc $f(x) \to -3$

Si $x \to 0^-$ ou si $x \to 0^+$ alors $X \to 1^-$ ou $X \to 1^+$ donc $f(x) \to +\infty$, car le numérateur tend vers 6 et le dénominateur vers 0^+.

Autre méthode que x tende vers 0^+ ou 0^-, $\operatorname{ch}(x) - 1 \to 0^+$ et $\operatorname{ch}(x) + 4\operatorname{sh}(x) + 2 \to 3$ donc ces deux limites tendent vers $+\infty$

Allez à : Exercice 31

Correction exercice 32.

1. f est définie, continue et dérivable si et seulement si $\operatorname{ch}(x) - 1 \neq 0$, autrement dit si et seulement si $x \neq 0$.

$$Df = \mathbb{R}*$$

2. On pose $X = e^x$

$$f(x) = \frac{\operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x) + 1}{\operatorname{ch}(x) - 1} = \frac{\frac{X + \frac{1}{X}}{2} + \frac{X - \frac{1}{X}}{2} + 1}{\frac{X + \frac{1}{X}}{2} - 1} = \frac{X^2 + 1 + X^2 - 1 + 2X}{X^2 + 1 - 2X} = \frac{2X^2 + 2X}{X^2 - 2X + 1} = \frac{2X(X + 1)}{(X - 1)^2}$$

$$\lim_{x \to -\infty} X = 0$$

Donc

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{X \to 0} \frac{2X^2 + 2X}{X^2 - 2X + 1} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} X = +\infty$$

Donc

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{X \to +\infty} \frac{2X^2 + 2X}{X^2 - 2X + 1} = \lim_{X \to +\infty} \frac{2X^2}{X^2} = 2$$

$$\lim_{x \to 0} (\operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x) + 1) = 2$$

$$\lim_{x \to 0^\pm} (\operatorname{ch}(x) - 1) = 0^+$$

Donc

$$\lim_{x \to 0^\pm} f(x) = +\infty$$

3.

$$f'(x)=\frac{(\operatorname{sh}(x)+\operatorname{ch}(x))(\operatorname{ch}(x)-1)-(\operatorname{ch}(x)+\operatorname{sh}(x)+1)\operatorname{sh}(x)}{(\operatorname{ch}(x)-1)^2}$$
$$=\frac{\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(x)-\operatorname{sh}(x)+\operatorname{ch}^2(x)-\operatorname{ch}(x)-\operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(x)-\operatorname{sh}^2(x)-\operatorname{sh}(x)}{(\operatorname{ch}(x)-1)^2}$$
$$=\frac{1-\operatorname{ch}(x)-2\operatorname{sh}(x)}{(\operatorname{ch}(x)-1)^2}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\begin{cases}1-\operatorname{ch}(x)-2\operatorname{sh}(x)=0\\ \operatorname{ch}(x)-1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1-\dfrac{\mathrm{X}+\frac{1}{\mathrm{X}}}{2}-\left(X-\dfrac{1}{X}\right)=0\\ x\neq 0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}2X-(X^2+1)-2(X^2-1)=0\\ \mathrm{X}\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3X^2+2X+1=0\\ \mathrm{X}\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow X=-\frac{1}{3}$$

Or $X=e^x>0$ donc il n'y a pas de solution à $f'(x)=0$.

$1-\operatorname{ch}(x)-2\operatorname{sh}(x)$ a le même signe que

$$-3X^2+2X+1=-3(X-1)\left(X+\frac{1}{3}\right)=-3(e^x-1)\left(e^x+\frac{1}{3}\right)$$

Si $x<0$, $e^x-1<0$ donc $1-\operatorname{ch}(x)-2\operatorname{sh}(x)>0$, Si $x>0$, $e^x-1>0$ donc

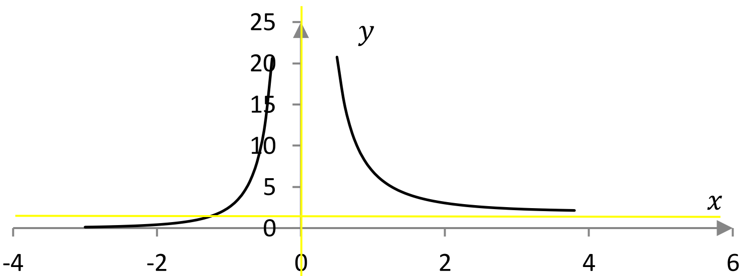
$$1-\operatorname{ch}(x)-2\operatorname{sh}(x)<0$$

Sur $]-\infty,0[$, f est croissante, sur $]0,+\infty[$, f est décroissante.

4.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$-$	
$f(x)$	0 $\nearrow$	$+\infty$	$\|\|$	$+\infty$	$\searrow$ 2

5.



Aller à : Exercice 32

Correction exercice 33. (Hors programme)

1. On pose $X=\frac{2x}{x^2+1}$

$$1-X^2=1-\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^2=\frac{(x^2+1)^2-4x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{x^4+2x^2+1-4x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{x^4-2x^2+1}{(x^2+1)^2}=\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2$$

argth(X) est définie pour

$$-1<X<1\Leftrightarrow X^2<1\Leftrightarrow 1-X^2>0\Leftrightarrow\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2>0$$

Ce qui est toujours le cas sauf pour $x^2=1\Leftrightarrow x=\pm 1$

$$D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$$

Comme argth est continue et dérivable sur son ensemble de définition, f est continue et dérivable sur

$$\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$$

2. Si $f(x)=\operatorname{argth}\big(u(x)\big)$ alors $f'(x)=\frac{u'(x)}{1-(u(x))^2}$

   Ici $u(x)=\frac{2x}{x^2+1}$ donc $u'(x)=\frac{2(x^2+1)-2x\times 2x}{(x^2+1)^2}=2\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ et $1-\big(u(x)\big)^2=\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2$, voir calcul ci-dessus.

   Donc pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$

$$f'(x)=\frac{2\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}}{\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2}=2\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}\times\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^2=\frac{2(1-x^2)}{(1-x^2)^2}=\frac{2}{1-x^2}$$

3. Pour tout $x\neq\pm1$, $-1<\frac{2x}{x^2+1}<1$

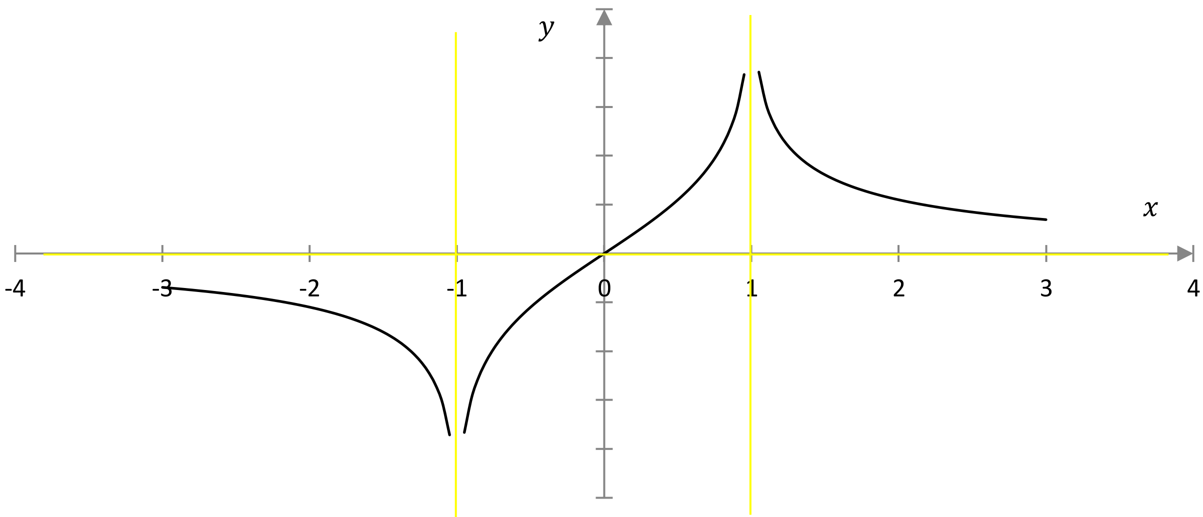
   donc

$$\lim_{x\to-1^-}\frac{2x}{x^2+1}=-1^+\Rightarrow\lim_{x\to-1^-}\operatorname{argth}\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)=-\infty$$
$$\lim_{x\to-1^+}\frac{2x}{x^2+1}=-1^+\Rightarrow\lim_{x\to-1^-}\operatorname{argth}\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)=-\infty$$
$$\lim_{x\to1^-}\frac{2x}{x^2+1}=1^-\Rightarrow\lim_{x\to1^-}\operatorname{argth}\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)=+\infty$$
$$\lim_{x\to1^+}\frac{2x}{x^2+1}=1^-\Rightarrow\lim_{x\to1^+}\operatorname{argth}\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)=+\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x^2+1}=0\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\operatorname{argth}\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)=\operatorname{argth}(0)=0$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x^2+1}=0\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\operatorname{argth}\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)=\operatorname{argth}(0)=0$$

   $f'(x)=\frac{2}{1-x^2}<0$ si $x<-1$ ou si $x>1$ et $f'(x)=\frac{2}{1-x^2}>0$ si $-1<x<1$.

   On en déduit le tableau de variation

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	‖	$-$	
$f(x)$	0 ↘	$-\infty$	‖	$-\infty$ ↗ $+\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0



Aller à : Exercice 33

Correction exercice 34.

1.

$$\pi\leq\theta\leq2\pi\Leftrightarrow-2\pi\leq-\theta\leq-\pi\Leftrightarrow0\leq2\pi-\theta\leq\pi$$

2. D'après 1.

$$\arccos(\cos(2\pi-\theta))=2\pi-\theta$$

Car $2\pi-\theta\in[0,\pi]$. D'autre part

$$\cos(2\pi-\theta)=\cos(-\theta)=\cos(\theta)$$

Par conséquent

$$\arccos(\cos(\theta))=2\pi-\theta$$

Allez à : Exercice 34

Correction exercice 35.

1. f est définie et continue si et seulement si $-1\le\frac{1}{x}\le 1$

Or

$$-1\le\frac{1}{x}\le 1\Leftrightarrow\frac{1}{x^2}\le 1\Leftrightarrow x^2\ge 1\Leftrightarrow x\in]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$$

2.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}\arcsin\left(\frac{1}{x}\right)=\arcsin(0)=0$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\arcsin\left(\frac{1}{x}\right)=\arcsin(0)=0$$
$$\lim_{x\to-1^-}\frac{1}{x}=-1\Rightarrow\lim_{x\to-1^-}\arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2}$$
$$\lim_{x\to1^+}\frac{1}{x}=1\Rightarrow\lim_{x\to1^+}\arcsin(1)=\frac{\pi}{2}$$

3.

$$f'(x)=\frac{-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\frac{-1}{x^2\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}}=\frac{-1}{\frac{x^2\sqrt{x^2-1}}{|x|}}=\frac{-|x|}{x^2\sqrt{x^2-1}}<0$$

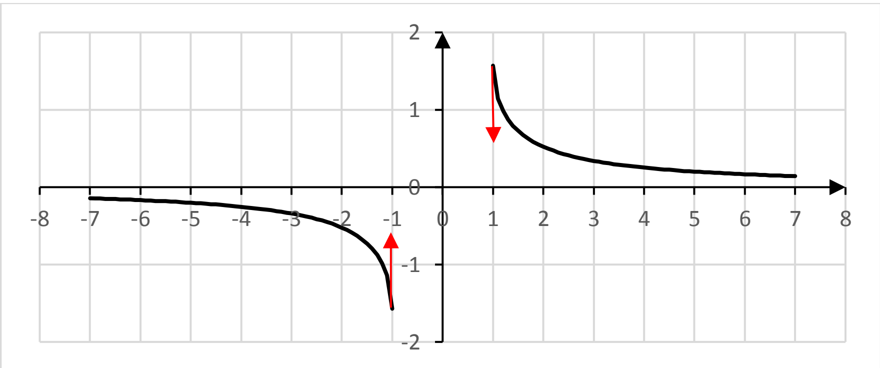
f est décroissante sur $]-\infty,-1]$ et f est décroissante sur $[1,+\infty[$.

4.

$$\lim_{x\to-1^-}f'(x)=\lim_{x\to-1^-}\frac{-|x|}{x^2\sqrt{x^2-1}}=-\infty$$
$$\lim_{x\to1^+}f'(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{-|x|}{x^2\sqrt{x^2-1}}=-\infty$$

Le graphe de f admet des demi-tangente verticales en $x=-1$ et en $x=1$.

5.



Allez à : Exercice 35

Correction exercice 36.

1. Si $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$ alors $\arcsin(\sin(x))=x$,

Donc si $-\frac{\pi}{2}+2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2}+2k\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq x-2k\pi \leq \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.
Alors $\sin(x)=\sin(x-2k\pi)$ donc $\arcsin(\sin(x))=\arcsin(\sin(x-2k\pi))=x-2k\pi$
Si $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{3\pi}{2} \leq -x \leq -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \pi-x \leq \frac{\pi}{2}$, comme $\sin(x)=\sin(\pi-x)$
Alors $\arcsin(\sin(x))=\arcsin(\sin(\pi-x))=\pi-x$
Si $\frac{\pi}{2}+2k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}+2k\pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \leq x-2k\pi \leq \frac{3\pi}{2}$ alors
$\sin(x)=\sin(x-2k\pi)$ donc $\arcsin(\sin(x))=\arcsin(\sin(x-2k\pi))=\pi-(x-2k\pi)=-x+(2k+1)\pi$
Remarque (inutile), pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x \in [-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi]$ ou $x \in [\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi]$
g est 2π périodique et paire, on étudie g sur $[0,\pi]$.
g est définie, continue si et seulement si $1+\cos(x) \neq 0$, c'est-à-dire si et seulement si $x \neq \pi$,

$$g(x)=\arctan\big(u(x)\big)$$

Avec $u(x)=\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}}=\sqrt{v(x)}$ avec $v(x)=\frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}$

$$v'(x)=\frac{\sin(x)\,(1+\cos(x))-(1-\cos(x))(-\sin(x))}{(1+\cos(x))^2}=\frac{2\sin(x)}{(1+\cos(x))^2}$$

$$u'(x)=\frac{v'(x)}{2\sqrt{v(x)}}=\frac{2\sin(x)}{(1+\cos(x))^2}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{1-\cos(x)}}=\frac{\sin(x)}{(1+\cos(x))^2}\times\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{1-\cos(x)}}$$

$$1+\big(u(x)\big)^2=1+\frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}=\frac{1+\cos(x)+1-\cos(x)}{1+\cos(x)}=\frac{2}{1+\cos(x)}$$

$$g'(x)=\frac{u'(x)}{1+\big(u(x)\big)^2}=\frac{\sin(x)}{(1+\cos(x))^2}\times\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{1-\cos(x)}}\times\frac{1+\cos(x)}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}\times\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{1-\cos(x)}}=\frac{1}{2}\times\frac{\sin(x)}{\sqrt{1+\cos(x)}\times\sqrt{1-\cos(x)}}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{\sin(x)}{\sqrt{1-\cos^2(x)}}=\frac{1}{2}\times\frac{\sin(x)}{\sqrt{\sin^2(x)}}=\frac{1}{2}\times\frac{\sin(x)}{|\sin(x)|}$$

En 0 g n'est pas dérivable.
Sur $]0,\pi[$, $\sin(x)>0$ et donc $|\sin(x)|=\sin(x)$ entraine que $g'(x)=\frac{1}{2}$
Sur $]0,\pi[$, $g(x)=\frac{x}{2}+K$, comme g est continue en 0 :

$$g(0)=\lim_{x\to 0^+} g(x) \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x}{2}+K\right)=\frac{0}{2}+K \qquad (1)$$

La formule est donc vraie en 0 donc sur $[0,\pi[$.
On reprends (1) pour trouver K. $g(0)=\arctan\left(\sqrt{\frac{1-\cos(0)}{1+\cos(0)}}\right)=\arctan(0)=0$ donc $K=0$.

$$g(x)=\frac{x}{2}$$

g est paire, donc pour $x \in]-\pi,0]$, $g(x)=g(-x)=\frac{-x}{2}$ car $-x \in [0,\pi[$.
Pour arranger les choses

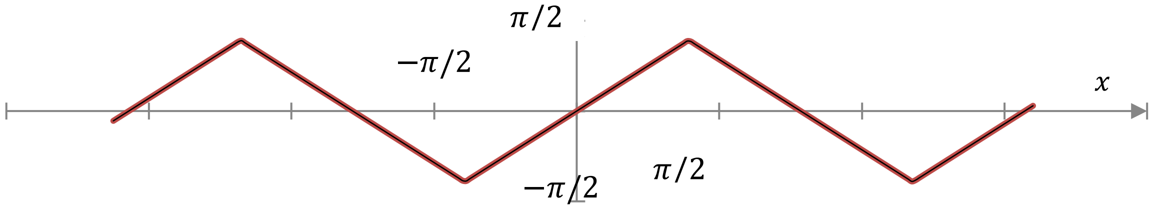
$$\forall x \in]-\pi,\pi[, \qquad g(x)=\left|\frac{x}{2}\right|$$

Ensuite on remarque que g est 2π périodique donc $(x)=g(x-2k\pi)$ $k \in \mathbb{Z}$.

Si $x \in]-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi[$, $x - 2k\pi \in]-\pi, \pi[$,

$$g(x) = g(x - 2k\pi) = \left|\frac{x - 2k\pi}{2}\right|$$

2. Graphe de f



Graphe de g, c'est le même à la différence près que sur l'axe des abscisses on divise par deux le « x ».

Aller à : Exercice 36

Correction exercice 37.

1. arcsin est définie et continue sur $[-1,1]$, $x \to \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ est définie et continue sur $]-1,1[$ donc f est définie et continue sur $]-1,1[$.
2.

$$f(x) = \arcsin(x) - x(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} - (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} - x\left(-\frac{1}{2}\right)(-2x)(1 - x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} - x^2(1 - x^2)^{-\frac{3}{2}} = -x^2(1 - x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

f est dérivable sur $]-1,1[$.

3. $\forall x \in]-1,1[$, $f'(x) < 0$, donc f est décroissante sur $]-1,1[$. Comme $f(0) = \arcsin(0) - \frac{0}{\sqrt{1-0^2}} = 0$

Si $x < 0$ alors $f(x) > f(0) = 0$ et si $x > 0$ alors $f(x) < f(0) = 0$.

Allez à : Exercice 37

Correction exercice 38.

1.

$$1 - \left(\frac{1 - x^2}{1 + x^2}\right)^2 = \frac{(1 + x^2)^2 - (1 - x^2)^2}{(1 + x^2)^2} = \frac{1 + 2x^2 + x^4 - (1 - 2x^2 + x^4)}{(1 + x^2)^2} = \frac{4x^2}{(1 + x^2)^2} \geq 0$$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \frac{1 - x^2}{1 + x^2} \leq 1$$

f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2. On pose $u(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$

$$u'(x) = \frac{(-2x)(1 + x^2) - (1 - x^2)(2x)}{(1 + x^2)^2} = -\frac{4x}{(1 + x^2)^2}$$

$$\sqrt{1 - \left(u(x)\right)^2} = \sqrt{\frac{4x^2}{(1 + x^2)^2}} = \frac{2|x|}{1 + x^2}$$

$$f'(x) = \frac{-u'(x)}{\sqrt{1 - \left(u(x)\right)^2}} = \frac{4x}{(1 + x^2)^2} \times \frac{1 + x^2}{2|x|} = \frac{2x}{|x|(1 + x^2)}$$

f est dérivable pour tout $x \neq 0$.
En 0^-. $x < 0$ donc $|x| = -x$ et

$$f'(x) = \frac{-2}{1+x^2}$$
$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = -2$$

En 0^+, $x > 0$ donc $|x| = x$ et

$$f'(x) = \frac{2}{1+x^2}$$
$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = 2$$

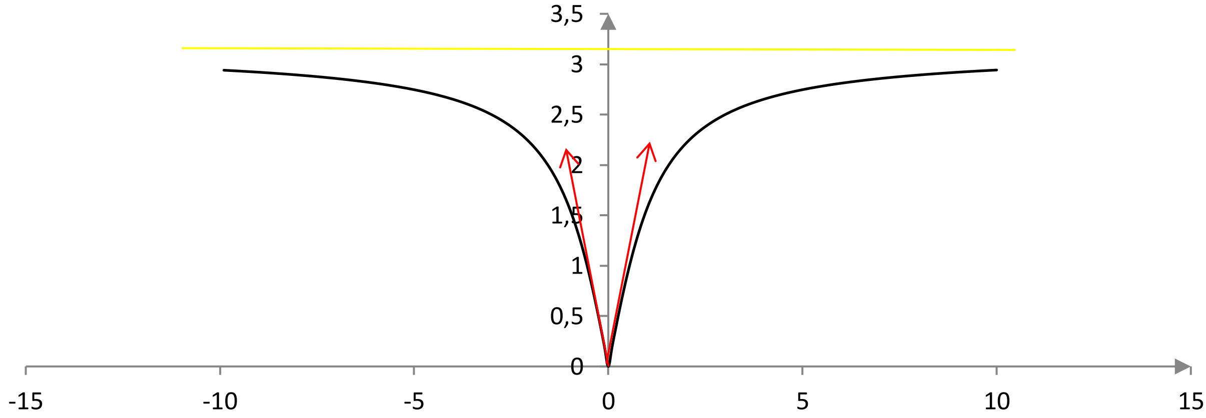
f n'est pas dérivable en 0.

3.

$$\lim_{x \to -\infty} u(x) = -1 \Rightarrow \lim_{x \to -\infty} f(x) = \arccos(-1) = \pi$$
$$\lim_{x \to +\infty} u(x) = -1 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = \arccos(-1) = \pi$$

4.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-2 \,\|\|\, 2$	$+$	
$f(x)$	π	$\searrow$	0	$\nearrow$	π



5. Si $x < 0$

$$f'(x) = -\frac{2}{1+x^2} \Rightarrow \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = f(x) = -2\arctan(x) + K_1$$

On prend $x = -1$

$$\arccos(0) = -2\arctan(-1) + K_1 \Rightarrow \frac{\pi}{2} + 2 \times \left(-\frac{\pi}{4}\right) = K_1 \Rightarrow K_1 = 0$$

Et

$$f(x) = -2\arctan(x)$$

Si $x > 0$

$$f'(x) = \frac{2}{1+x^2} \Rightarrow \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = f(x) = 2\arctan(x) + K_2$$

On prend $x = 1$

$$\arccos(0) = 2\arctan(1) + K_1 \Rightarrow \frac{\pi}{2} - 2 \times \frac{\pi}{4} = K_2 \Rightarrow K_2 = 0$$

Et

$$f(x)=2\arctan(x)$$

Aller à : Exercice 38

Correction exercice 39.

1. f est définie et continue si et seulement

$$\begin{cases}\sqrt{1-x^2}\in[-1,1]\\ 1-x^2\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1-\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2\geq 0\\ x^2\leq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1-(1-x^2)\geq 0\\ x\in[-1,1]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2\geq 0\\ x\in[-1,1]\end{cases}\Leftrightarrow x\in[-1,1]$$

2.

$$f'(x)=\frac{-\frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-(1-x^2)}}=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\times\frac{1}{\sqrt{x^2}}=-\frac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}}$$

3.

Il y a deux demi-tangentes verticales

Pour $x<0$, $|x|=-x$ et

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\lim_{x\to-1^+}f'(x)=+\infty$$

Il y a une demi-tangente verticale

$$\lim_{x\to 0^-}f'(x)=1$$

Il y a une demi-tangente oblique

Pour $x>0$, $|x|=x$ et

$$f'(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\lim_{x\to 0^+}f'(x)=-1$$

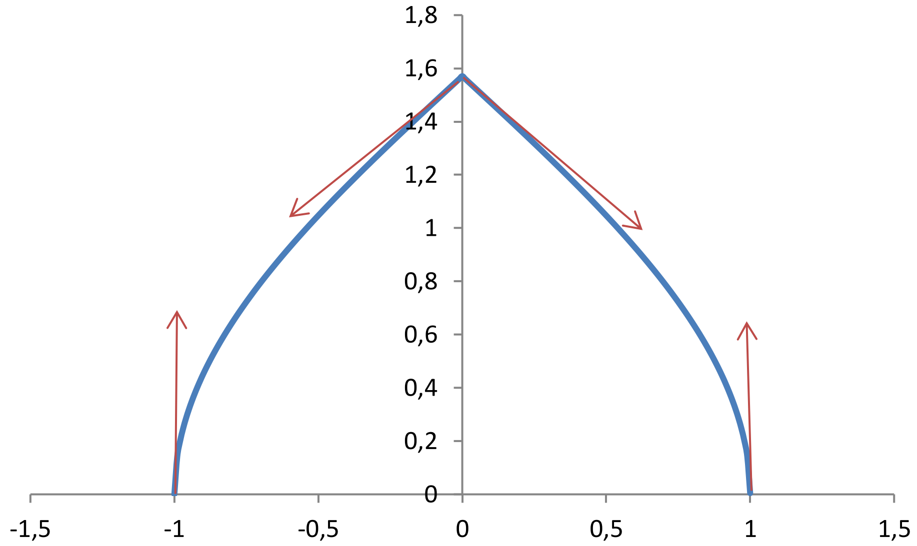
Il y a une demi-tangente oblique

$$\lim_{x\to 1^-}f'(x)=-\infty$$

Il y a une demi-tangente verticale

4. Si $x\in[0,1]$ la fonction est croissante, si $x\in[0,1]$ la fonction est décroissante.
5.

x	-1		0		1
$f'(x)$	$\|\| +\infty$	$+$	$1 \|\| -1$	$-$	$-\infty$ $\|\|$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	0



Allez à : Exercice 39

Correction exercice 40.

1. On pose $X=1-2x^2$
$$1-X^2=1-(1-2x^2)^2=1-(1-4x^2+4x^4)=4x^2-4x^4=4x^2(1-x^2)$$
f est définie et continue si et seulement si
$$-1\le 1-2x^2\le 1\Leftrightarrow (1-2x^2)^2\le 1\Leftrightarrow 1-X^2\ge 0\Leftrightarrow 4x^2(1-x^2)\ge 0\Leftrightarrow 1-x^2\ge 0$$
Bref f est définie et continue sur $D_f=[-1,1]$
2. Si $f(x)=\arccos\big(u(x)\big)$ alors $f'(x)=-\frac{u'(x)}{\sqrt{1-(u(x))^2}}$
$u'(x)=-4x$ et $1-\big(u(x)\big)^2=1-X^2=4x^2(1-x^2)$ donc
$$f'(x)=-\frac{-4x}{\sqrt{4x^2(1-x^2)}}=\frac{4x}{2|x|\sqrt{1-x^2}}=\frac{2x}{|x|\sqrt{1-x^2}}$$
Si $|x|\sqrt{1-x^2}\neq 0$, c'est-à-dire si $x\in]-1,0[\cup]0,1[$, f est dérivable.
$$\lim_{x\to -1^+}f'(x)=\lim_{x\to -1}\frac{-2}{\sqrt{1-x^2}}=-\infty$$
$$\lim_{x\to 1^-}f'(x)=\lim_{x\to -1}\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}=+\infty$$
f n'est pas dérivable en ± 1.
$$\lim_{x\to 0^-}f'(x)=\lim_{x\to -1}\frac{-2}{\sqrt{1-x^2}}=-2$$
$$\lim_{x\to 0^+}f'(x)=\lim_{x\to -1}\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}=2$$
f n'est pas dérivable en 0.
3. Si $x\in]-1,0[$ alors $|x|=-x$ donc $f'(x)=\frac{-2}{\sqrt{1-x^2}}<0$
Si $x\in]0,1[$ alors $|x|=x$ donc $f'(x)=\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}>0$
$$f(-1)=\arccos(1-2(-1)^2)=\arccos(-1)=\pi$$
$$f(1)=\arccos(1-2\times 1^2)=\arccos(-1)=\pi$$
$$f(0)=\arccos(1-2\times 0^2)=\arccos(1)=0$$
$$\lim_{x\to -1^+}f'(x)=\lim_{x\to -1}\frac{-2}{\sqrt{1-x^2}}=-\infty$$

Il y a donc une demi-tangente verticale en -1.

$$\lim_{x\to 1-} f'(x) = \lim_{x\to -1} \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty$$

Il y a donc une demi-tangente verticale en 1.

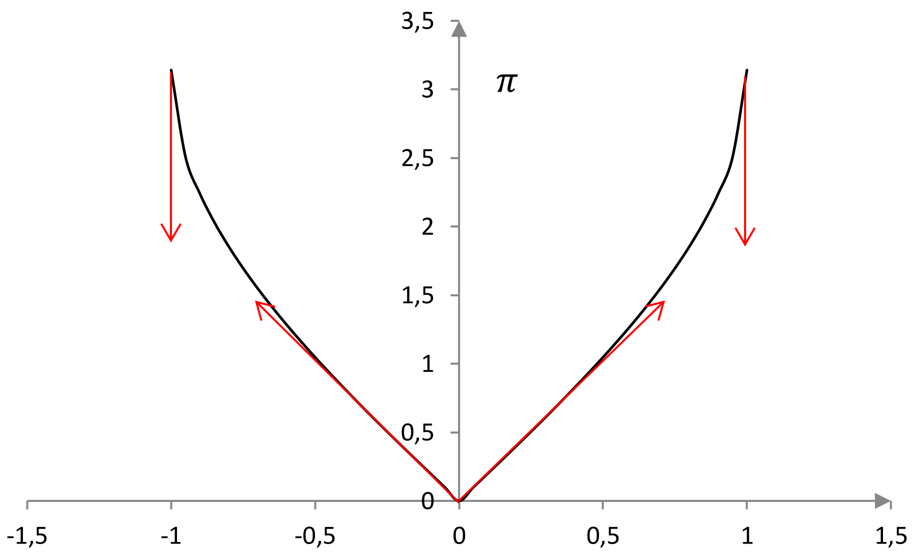
$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to -1} \frac{-2}{\sqrt{1-x^2}} = -2$$

Il y a donc une demi-tangente oblique en 0^-.

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to -1} \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} = 2$$

Il y a donc une demi-tangente oblique en 0^+.

x	-1		0		1
$f'(x)$	$\Vert$ $-\infty$		-2 $\Vert$ 2		$+\infty$ $\Vert$
$f(x)$	π	$\searrow$	0	$\nearrow$	π



4. Sur $]-1,0[$, $f'(x) = -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$ donc $f(x) = 2\arccos(x) + K_1$

A priori on ne peut pas prendre la valeur -1, ni la valeur 0 car cette relation n'est valable que sur $]-1,0[$.

On peut prendre la valeur $x = -\frac{1}{2}$. On peut faire autrement, comme f est continue en 0 (ou en -1), on écrit :

$$f(-1) = \lim_{x\to -1^+} f(x)$$

Or pour $x > -1$ $f(x) = 2\arccos(x) + K_1$ donc

$$\arccos(1 - 2\times 1^2) = \lim_{x\to -1^+} (2\arccos(x) + K_1) \Leftrightarrow \arccos(-1) = 2\arccos(-1) + K_1$$

$$\Leftrightarrow K_1 = -\arccos(-1) = -\pi$$

La continuité en 0 permet de conclure que :

$$\forall x \in [-1,0],\quad f(x) = 2\arccos(x) - \pi$$

Remarque : on aurait pu utiliser que $\int -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} dx = -2\arcsin(x) + K$ et on trouve alors $K = 0$.

Sur $]0,1[$, $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$ donc $f(x) = 2\arcsin(x) + K_2$

Pour changer de méthode, je prends $x = \frac{1}{2} \in [0,1]$. $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) + K_2$, donc

$$K_2 = \arccos\left(1 - 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) - 2\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) - 2 \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 0$$

La continuité de f en 0 et 1 permet d'affirmer que :

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = 2\arcsin(x)$$

Aller à : Exercice 40

Correction exercice 41.

f est définie et continue si et seulement si

$$-1 \le 1 - 2x^4 \le 1 \Leftrightarrow 1 - (1 - 2x^4)^2 \ge 0 \Leftrightarrow 1 - (1 - 4x^4 + 4x^8) \ge 0 \Leftrightarrow 4x^4(1 - x^4) \ge 0 \Leftrightarrow x^4 \le 1 \Leftrightarrow -1 \le x \le 1$$

$$f'(x) = -\frac{8x^3}{\sqrt{1 - (1 - 2x^4)^2}} = -\frac{8x^3}{\sqrt{4x^4(1 - x^4)}} = -\frac{8x^3}{2x^2\sqrt{1 - x^4}} = -\frac{4x}{\sqrt{1 - x^4}}$$

f' est définie sur $]-1,1[$ et f est continue sur cette intervalle donc f est dérivable sur $]-1,1[$

Remarque :

J'ai mis cet exercice parce que l'on pourrait croire que f est dérivable si et seulement si $-1 < 1 - 2x^4 < 1 \Leftrightarrow 1 - (1 - 2x^4)^2 > 0 \Leftrightarrow 1 - (1 - 4x^4 + 4x^8) > 0 \Leftrightarrow 4x^4(1 - x^4) > 0 \Leftrightarrow x \in]-1,0[\cup]0,1[$, mais c'est faux, f est bien dérivable en 0. Ce qui est vrai c'est :

Si $-1 < 1 - 2x^4 < 1$ alors f est dérivable, la réciproque peut-être fausse.

Je rappelle qu'une fonction est dérivable en x_0 si et seulement si la limite du taux de variation existe, dans tous les exercices avec les fonctions réciproques qui ne sont pas dérivables en une valeur où elles sont définies, on utilise le théorème suivant :

Si f est continue en x_0 et si $f'(x)$ admet une limite en x_0 alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0)$ est la limite de $f'(x)$ en x_0.

Aller à : Exercice 41

Correction exercice 42.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$0 \le \cos^4(x) \le 1 \Leftrightarrow -2 \le -2\cos^4(x) \le 0 \Leftrightarrow -1 \le 1 - 2\cos^4(x) \le 1$$

Donc f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$.

2.

$$f(x) = \arcsin(1 - 2\cos^4(x + 2\pi)) = \arcsin(1 - 2\cos^4(x)) = f(x)$$

Donc f est 2π périodique.

Remarque : en fait f est même π-périodique.

$$f(-x) = \arcsin(1 - 2\cos^4(-x)) = \arcsin(1 - 2\cos^4(x)) = f(x)$$

Donc f est paire.

Par conséquent on étudiera f sur $I = [0, \pi]$.

3. On pose $u(x) = 1 - 2\cos^4(x)$

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{1 - (u(x))^2}}$$

$$u'(x) = 8\cos^3(x)\sin(x)$$

$$\begin{aligned} 1 - (u(x))^2 &= 1 - (1 - 2\cos^4(x))^2 = 1 - (1 - 4\cos^4(x) + 4\cos^8(x)) = 4\cos^4(x) - 4\cos^8(x) \\ &= 4\cos^4(x)\,(1 - \cos^4(x)) = 4\cos^4(x)\,(1 - \cos^2(x))(1 + \cos^2(x)) \\ &= 4\cos^4(x)\sin^2(x)\,(1 + \cos^2(x)) \end{aligned}$$

$$f'(x)=\frac{8\cos^3(x)\sin(x)}{\sqrt{4\cos^4(x)\sin^2(x)\left(1+\cos^2(x)\right)}}=\frac{8\cos^3(x)\sin(x)}{2\cos^2(x)\,|\sin(x)|\sqrt{1+\cos^2(x)}}$$
$$=\frac{8\cos(x)\sin(x)}{2|\sin(x)|\sqrt{1+\cos^2(x)}}$$

Il y aura évidemment un problème en 0^+ et en π^-. Et sur $]0,\pi[$, $\sin(x)>0$ donc $|\sin(x)|=\sin(x)$

Finalement pour tout $x\in\,]0,\pi[$

$$f'(x)=\frac{4\cos(x)}{\sqrt{1+\cos^2(x)}}$$

4.

$$f'(x)=\frac{4\cos(x)}{\sqrt{1+\cos^2(x)}}\xrightarrow[x\to 0^+]{}\frac{4}{\sqrt{1+1^2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$
$$f'(x)=\frac{4\cos(x)}{\sqrt{1+\cos^2(x)}}\xrightarrow[x\to \pi^-]{}\frac{-4}{\sqrt{1+1^2}}=-\frac{4}{\sqrt{2}}=-2\sqrt{2}$$

Pour toutes les autres valeurs de I, f est dérivable, par conséquent f est dérivable sur $]0,\pi[$.

5. Sur $]0,\pi[$, $\sin(x)>0$ et pour tout $x\in I$, $\sin(x)=0\Leftrightarrow x=0$ ou $x=\pi$

D'après l'expression

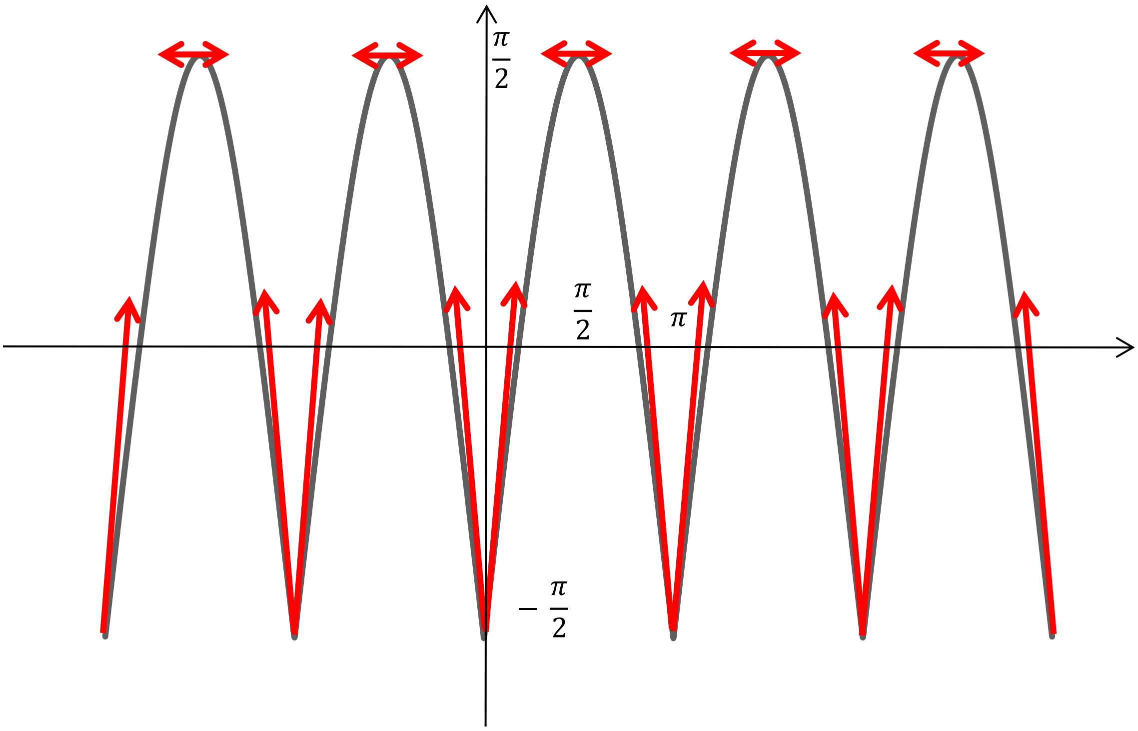
$$f'(x)=\frac{4\cos(x)}{\sqrt{1+\cos^2(x)}}$$

$f'(x)$ a le même signe que $\cos(x)$, c'est-à-dire strictement positif sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et strictement négatif sur $\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$.

$$f(0)=\arcsin\left(1-2\cos^4(0)\right)=\arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2}$$
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\arcsin\left(1-2\cos^4\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=\arcsin(1)=\frac{\pi}{2}$$
$$f(\pi)=\arcsin\left(1-2\cos^4(\pi)\right)=\arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2}$$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$
$f(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	$-\frac{\pi}{2}$

6.



Allez à : Exercice 42

Correction exercice 43.

1. $P(x) = (x^2+1)(16x^4+8x^2+1) = (x^2+1)(4x^2+1)^2$ en faisant une division euclidienne par exemple.
2.
   a) argsh est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   b) Si $f(x) = \operatorname{argsh}\big(u(x)\big)$ alors $f'(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{1+(u(x))^2}}$ sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

   Ici $u(x) = 3x + 4x^3$ donc $u'(x) = 3 + 12x^2 = 3(1+4x^2)$

$$1 + \big(u(x)\big)^2 = 1 + (3x+4x^3)^2 = 1 + 9x^2 + 24x^4 + 16x^6 = P(x)$$

$$f'(x) = \frac{3(1+4x^2)}{\sqrt{(x^2+1)(4x^2+1)^2}} = \frac{3(1+4x^2)}{(4x^2+1)\sqrt{(x^2+1)}} = \frac{3}{\sqrt{(x^2+1)}}$$

$$f(x) = 3\operatorname{argsh}(x) + K$$

$$f(0) = \operatorname{argsh}(3\times 0 + 4\times 0^3) = \operatorname{argsh}(0) = 0$$

   Donc

$$f(x) = 3\operatorname{argsh}(x)$$

Aller à : Exercice 43

Correction exercice 44.

$-1 < \operatorname{th}(x) < 1$ donc f esr définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2(x)}} - \frac{\operatorname{ch}(x)}{1+\operatorname{sh}^2(x)} = \frac{\frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}}{\sqrt{\frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}}} - \frac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{ch}^2(x)} = \frac{|\operatorname{ch}(x)|}{\operatorname{ch}^2(x)} - \frac{1}{\operatorname{ch}(x)} = 0$$

Car $\operatorname{ch}(x) > 0$ entraine $|\operatorname{ch}(x)| = \operatorname{ch}(x)$.

Une fonction dont la dérivée est nulle sur un intervalle est constante.

Et $f(0) = \arcsin(\mathrm{th}(0)) - \arctan(\mathrm{sh}(0)) = \arcsin(0) - \arctan(0) = 0 - 0 = 0$

Donc $\arcsin(\mathrm{th}(x)) - \arctan(\mathrm{sh}(x) = 0 \Leftrightarrow \arcsin(\mathrm{th}(x)) = \arctan(\mathrm{sh}(x)$

Aller à : Exercice 44

Correction exercice 45.

1.
$$\alpha = \frac{118}{10}\pi = \frac{59}{5}\pi = \frac{60-1}{5}\pi = 12\pi - \frac{\pi}{5}$$

Donc
$$\arccos\left(\cos\left(\frac{118}{10}\pi\right)\right) = \arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right) = \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\right) = \frac{\pi}{5}$$

Car cos est paire et $\frac{\pi}{5} \in [0,\pi]$
$$\arcsin\left(\sin\left(\frac{118}{10}\pi\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right) = -\frac{\pi}{5}$$

Car $-\frac{\pi}{5} \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$
$$\arctan\left(\tan\left(\frac{118}{10}\pi\right)\right) = \arctan\left(\tan\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right) = -\frac{\pi}{5}$$

Car $-\frac{\pi}{5} \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$
$$\alpha = \frac{252}{15}\pi = \frac{84}{5}\pi = \frac{80+4}{5}\pi = 16\pi + \frac{4\pi}{5}$$

Donc
$$\arccos\left(\cos\left(\frac{252}{15}\pi\right)\right) = \arccos\left(\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right) = \frac{4\pi}{5}$$

Car $\frac{4\pi}{5} \in [0,\pi]$
$$\arcsin\left(\sin\left(\frac{252}{15}\pi\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right) = \frac{\pi}{5}$$

Car $\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\frac{\pi}{5} \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$
$$\arctan\left(\tan\left(\frac{252}{15}\pi\right)\right) = \arctan\left(\tan\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right) = \arctan\left(\tan\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right) = -\frac{\pi}{5}$$

Car $\tan\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \tan\left(\frac{4\pi}{5} - \pi\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{5}\right)$ et $-\frac{\pi}{5} \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$
$$\frac{76}{5}\pi = \frac{80-4}{5}\pi = 16\pi - \frac{4\pi}{5}$$

Donc
$$\arccos\left(\cos\left(\frac{76}{5}\pi\right)\right) = \arccos\left(\cos\left(-\frac{4\pi}{5}\right)\right) = \arccos\left(\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right) = \frac{4\pi}{5}$$

Car cos est paire et $\frac{4\pi}{5} \in [0,\pi]$
$$\arcsin\left(\sin\left(\frac{76}{5}\pi\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(-\frac{4\pi}{5}\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right) = \frac{\pi}{5}$$

Car $\sin\left(-\frac{4\pi}{5}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)$ et $\frac{\pi}{5} \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$
$$\arctan\left(\tan\left(\frac{76}{5}\pi\right)\right) = \arctan\left(\tan\left(-\frac{4\pi}{5}\right)\right) = \arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)\right) = \frac{\pi}{5}$$

Car $\tan\left(-\frac{4\pi}{5}\right) = \tan\left(-\frac{4\pi}{5} + \pi\right) = \tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\frac{\pi}{5} \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

2.
$$\frac{76\pi}{5} = \frac{80\pi - 4\pi}{5} = 16\pi - \frac{4\pi}{5}$$
$$\arccos\left(\cos\left(\frac{76}{5}\pi\right)\right) = \arccos\left(\cos\left(-\frac{4\pi}{5}\right)\right) = \arccos\left(\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right) = \frac{4\pi}{5}$$

Aller à : Exercice 45

Correction exercice 46.

1.

$$\arctan(2x)+\arctan(x)=\frac{\pi}{4}\Rightarrow \tan(\arctan(2x)+\arctan(x))=\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Il n'y a pas équivalence car $\tan(A)=\tan(B)$ n'entraine pas que $A=B$ sauf si on peut montrer à l'avance que A et B sont tous les deux dans un intervalle du type $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

Or

$$\tan(a+b)=\frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}\quad \text{et}\quad \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$$

Donc

$$\arctan(2x)+\arctan(x)=\frac{\pi}{4}\Rightarrow\frac{\tan(\arctan(2x)+\tan(\arctan(x))}{1-\tan(\arctan(2x))\tan(\arctan(x))}=1$$

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\tan(\arctan(x))=x$ et donc $\tan(\arctan(2x))=2x$.

$$\arctan(2x)+\arctan(x)=\frac{\pi}{4}\Rightarrow\frac{2x+x}{1-2x\times x}=1\Rightarrow\frac{3x}{1-2x^2}=1\Rightarrow 3x=1-2x^2\Rightarrow 2x^2+3x-1=0$$

Le discriminant est $\Delta=9+8=17$, et les racines sont $x_1=\frac{-3-\sqrt{17}}{4}$ et $x_2=\frac{-3+\sqrt{17}}{4}$

Il est clair que $\arctan(2x_1)+\arctan(x_1)<0$ car $x_1=\frac{-3-\sqrt{17}}{4}<0$, donc x_1 n'est pas solution.

Par contre pour x_2, je ne vois pas bien comment vérifier si $\arctan(2x_2)+\arctan(x_2)=\frac{\pi}{4}$

Deuxième méthode :

On remarque que $x>0$ sinon $\arctan(2x)+\arctan(x)<0$, d'où $\arctan(x)>0$

$$\arctan(2x)+\arctan(x)=\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow\arctan(2x)=\frac{\pi}{4}-\arctan(x)$$

$$\arctan(2x)\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$$

$$0<\arctan(x)<\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow-\frac{\pi}{2}<-\arctan(x)<0\Leftrightarrow-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}-\arctan(x)<\frac{\pi}{4}$$

Donc

$$\frac{\pi}{4}-\arctan(x)\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$$

Par conséquent :

$$\arctan(2x)=\frac{\pi}{4}-\arctan(x)\Leftrightarrow\tan(2x)=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\arctan(x)\right)$$

$$\Leftrightarrow\arctan(2x)=\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)-\tan(\arctan(x))}{1+\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\tan(\arctan(x))}\Leftrightarrow 2x=\frac{1-x}{1+x}\Leftrightarrow 2x(1+x)=1-x\Leftrightarrow 2x^2+3x-1=0$$

On retombe sur les mêmes solutions, on ne garde que la solution positive :

$$x=\frac{-3+\sqrt{17}}{4}$$

2. $\arcsin(2x)-\arcsin(\sqrt{3}x)=\arcsin(x)$

Si x est solution alors $-x$ est aussi solution car arcsin est impaire. On peut se contenter de rechercher les solutions positives ou nulle. (D'ailleurs $x=0$ est évidemment solution).

Par conséquent :

$$0\le\arcsin(2x)\le\frac{\pi}{2}$$

$$0\le\arcsin(\sqrt{3}x)\le\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow-\frac{\pi}{2}\le-\arcsin(\sqrt{3}x)\le 0$$

Donc

$$-\frac{\pi}{2}\le\arcsin(2x)-\arcsin(\sqrt{3}x)\le\frac{\pi}{2}$$

Et bien sur

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin(x) \leq \frac{\pi}{2}$$

D'où l'on tire l'équivalence :

$$\arcsin(2x) - \arcsin(\sqrt{3}x) = \arcsin(x) \Leftrightarrow \sin(\arcsin(2x) - \arcsin(\sqrt{3}x)) = \sin(\arcsin(x))$$

Comme $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$

$$\arcsin(2x) - \arcsin(\sqrt{3}x) = \arcsin(x)$$
$$\Leftrightarrow \sin(\arcsin(2x))\cos(\arcsin(\sqrt{3}x)) - \cos(\arcsin(2x))\sin(\arcsin(\sqrt{3}x)) = x$$
$$\Leftrightarrow 2x\sqrt{1-(\sqrt{3}x)^2} - \sqrt{1-(2x)^2}\sqrt{3}x = x \Leftrightarrow 2x\sqrt{1-3x^2} - \sqrt{1-4x^2}\sqrt{3}x = x$$

On simplifie par x et on n'oubliera pas la solution $x = 0$.

$$\arcsin(2x) - \arcsin(\sqrt{3}x) = \arcsin(x) \Leftrightarrow 2\sqrt{1-3x^2} - \sqrt{1-4x^2}\sqrt{3} = 1$$
$$\Leftrightarrow 2\sqrt{1-3x^2} - 1 = \sqrt{1-4x^2}\sqrt{3}$$

Là, je vais élever au carré, mais il faudra faire une réciproque parce que $A = B \Rightarrow A^2 = B^2$ la réciproque est fausse à moins de vérifier que les deux expressions sont de mêmes signes.

$$2\sqrt{1-3x^2} - 1 = \sqrt{1-4x^2}\sqrt{3} \Rightarrow 4(1-3x^2) - 4\sqrt{1-3x^2} + 1 = 3(1-4x^2) \Rightarrow 2 = 4\sqrt{1-3x^2}$$
$$\Rightarrow 1 = 2\sqrt{1-3x^2} \Rightarrow 1 = 4(1-3x^2) \Rightarrow 12x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Puisque j'ai pris $x > 0$ au début.

Réciproque :

$$\arcsin\left(2 \times \frac{1}{2}\right) - \arcsin\left(\sqrt{3} \times \frac{1}{2}\right) = \arcsin(1) - \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$$

J'aurais pu faire la réciproque dans l'expression : $2\sqrt{1-3x^2} - \sqrt{1-4x^2}\sqrt{3} = 1$.

L'ensemble des solutions est :

$$S = \left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\}$$

Aller à : Exercice 46

Correction exercice 47.

La première idée est de prendre la tangente de ces deux expressions, mais on va avoir un problème de réciproque et puis on ne connait pas $\tan\left(\frac{7\pi}{12}\right)$. Alors on tente autre chose

$$\arctan(x) + \arctan(\sqrt{3}x) = \frac{7\pi}{12} \Leftrightarrow \arctan(\sqrt{3}x) = \frac{7\pi}{12} - \arctan(x)$$

Et on tente de prendre la tangente de ces deux expressions, là l'ennui c'est que l'on ne connait toujours pas $\tan\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

On peut être malin et s'apercevoir que $\frac{7\pi}{12} = \frac{(4+3)\pi}{12} = \frac{4\pi}{12} + \frac{3\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$, puis utiliser la formule $\tan(a+b)$, mais bon, il faut être malin.

Pour résoudre cet exercice il est indispensable d'avoir déjà remarqué que $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$ et que donc $\arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$ (dans le même genre $\frac{\sqrt{3}}{3} = \arctan\left(\frac{\pi}{6}\right)$).

On voit alors que $\arctan(1) + \arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{12}$

On étudie alors la fonction :

$$f(x) = \arctan(x) + \arctan(\sqrt{3}x)$$

Cette fonction est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{\sqrt{3}}{1+3x^2} > 0$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\pi$$

Et

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pi$$

f est donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-\pi,\pi[$, comme $\frac{7\pi}{12} \in]-\pi,\pi[$, $\frac{7\pi}{12}$ admet un unique antécédent or $x = 1$ est solution, c'est donc le seul.

Aller à : Exercice 47

Correction exercice 48.

1. Si $x \leq 0$, $\arctan(2x) \leq 0$ et $\frac{\pi}{4} - \arctan(x) \geq \frac{\pi}{4}$ donc il n'y a pas de solution négative.
2.

$$0 < \arctan(x) < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < -\arctan(x) < 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4} - \arctan(x) < \frac{\pi}{4}$$

Donc

$$\frac{\pi}{4} - \arctan(x) \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$$

Par conséquent :

$$\arctan(2x) = \frac{\pi}{4} - \arctan(x) \Leftrightarrow \tan(2x) = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \arctan(x)\right)$$

$$\Leftrightarrow \arctan(2x) = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - \tan(\arctan(x))}{1 + \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\tan(\arctan(x))} \Leftrightarrow 2x = \frac{1-x}{1+x} \Leftrightarrow 2x(1+x) = 1 - x \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}$$

Comme $x > 0$

$$x = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4}$$

Aller à : Exercice 48

Correction exercice 49. (Hors programme)

$\frac{1+\operatorname{ch}(x)}{2} \geq \frac{1+1}{2} = 1$, f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \operatorname{argch}(u(x)) \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{(u(x))^2 - 1}}$$

Avec

$$u(x) = \sqrt{\frac{1 + \operatorname{ch}(x)}{2}} = \sqrt{v(v)} \Rightarrow u'(x) = \frac{v'(x)}{2\sqrt{v(x)}}$$

Avec

$$v(x) = \frac{1 + \operatorname{ch}(x)}{2}$$

$$u'(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{2} \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+\operatorname{ch}(x)}{2}}} = \frac{\sqrt{2}\operatorname{sh}(x)}{4\sqrt{1+\operatorname{ch}(x)}}$$

$$(u(x))^2 - 1 = \frac{1 + \operatorname{ch}(x)}{2} - 1 = \frac{\operatorname{ch}(x) - 1}{2}$$

Donc

$$f'(x) = \frac{\frac{\sqrt{2}\operatorname{sh}(x)}{4\sqrt{1+\operatorname{ch}(x)}}}{\sqrt{\frac{\operatorname{ch}(x)-1}{2}}} = \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sh}(x)}{\sqrt{1+\operatorname{ch}(x)} \times \sqrt{\operatorname{ch}(x)-1}} = \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sh}(x)}{\sqrt{\operatorname{ch}^2(x) - 1}} = \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sh}(x)}{\sqrt{\operatorname{sh}^2(x)}} = \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sh}(x)}{|\operatorname{sh}(x)|}$$

Si $x = 0$ f n'est pas dérivable.
Si $x > 0$ alors $\mathrm{sh}(x) > 0$ et donc $|\mathrm{sh}(x)| = \mathrm{sh}(x)$ d'où

$$f'(x) = \frac{1}{2}$$

Ce qui entraine que $f(x) = \frac{1}{2}x + K$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
f est continue en 0 donc

$$f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{2}x + K\right) = K$$

Or $f(0) = \mathrm{argch}\left(\sqrt{\frac{1+\mathrm{ch}(x)}{2}}\right) = \mathrm{argch}(1) = 0$ d'où $K = 0$ et $f(x) = \frac{1}{2}x$
Si $x < 0$ alors $\mathrm{sh}(x) < 0$ et donc $|\mathrm{sh}(x)| = -\mathrm{sh}(x)$ d'où

$$f'(x) = -\frac{1}{2}$$

Ce qui entraine que $f(x) = -\frac{1}{2}x + K'$ sur l'intervalle $]-\infty, 0[$
f est continue en 0 donc

$$f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (-\frac{1}{2}x + K') = K'$$

Or $f(0) = \mathrm{argch}\left(\sqrt{\frac{1+\mathrm{ch}(x)}{2}}\right) = \mathrm{argch}(1) = 0$ d'où $K' = 0$ et $f'(x) = -\frac{1}{2}x$
Pour faire plus joli

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ f(x) = \left|\frac{x}{2}\right|$$

$$g(x) = \mathrm{argsh}\left(2x\sqrt{1+x^2}\right) = \mathrm{argsh}\big(u(x)\big)$$

g est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ car $2x\sqrt{1+x^2}$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ ainsi que argsh .

$$g'(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{1+\big(u(x)\big)^2}}$$

$$u'(x) = 2\sqrt{1+x^2} + 2x \times \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = 2\frac{1+x^2+x^2}{\sqrt{1+x^2}} = 2\frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\sqrt{1+\big(u(x)\big)^2} = \sqrt{1+4x^2(1+x^2)} = \sqrt{4x^4+4x^2+1} = \sqrt{(2x^2+1)^2} = |2x^2+1| = 2x^2+1$$

$$g'(x) = 2\frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}} \times \frac{1}{2x^2+1} = \frac{2}{\sqrt{1+x^2}}$$

$\mathbb{R}$ est un intervalle donc

$$g(x) = 2\,\mathrm{argsh}(x) + K$$

$$g(0) = \mathrm{argsh}\left(2\times 0\times\sqrt{1+0^2}\right) = \mathrm{argsh}(0) = 0$$

Donc $K = 0$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ g(x) = 2\,\mathrm{argsh}(x)$$

$$h(x) = \mathrm{argth}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = \mathrm{argth}\big(u(x)\big)$$

$$1-\left(u(x)\right)^2=1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2=\frac{(1+x^2)^2-(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}=\frac{1+2x^2+x^4-(1-2x^2+x^4)}{(1+x^2)^2}$$
$$=\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}$$

Donc h est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$ car $1-\left(u(x)\right)^2>0\Leftrightarrow\left(u(x)\right)^2<1$

$$u'(x)=\frac{(-2x)(1+x^2)-(1-x^2)(2x)}{(1+x^2)^2}=-\frac{4x}{(1+x^2)^2}$$
$$h'(x)=\frac{u'(x)}{1-\left(u(x)\right)^2}=-\frac{4x}{(1+x^2)^2}\times\frac{(1+x^2)^2}{4x^2}=-\frac{1}{x}$$

Sur l'intervalle $]0,+\infty[$, $h(x)=-\ln(x)+K$

$$h(1)=\operatorname{argth}(0)=0$$

Et

$$h(1)=-\ln(1)+K=K$$

donc $K=0$ et $h(x)=-\ln(x)$

Sur l'intervalle $]-\infty,0[$, $h(x)=-\ln(-x)+K'$

$$h(1)=\operatorname{argth}(0)=0$$

Et

$$h(1)=-\ln(1)+K'=K'$$

donc $K'=0$ et $h(x)=-\ln(-x)$

Soit encore

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad h(x)=-\ln|x|$$

Aller à : Exercice 49

Correction exercice 50.

1. $f(0)=2\arctan\left(\sqrt{1+0^2}-0\right)+\arctan(0)=2\arctan(1)=2\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$
2.

$$f'(x)=2\times\frac{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}-1}{1+\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^2}+\frac{1}{1+x^2}=2\times\frac{\frac{x-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}}{1+(1+x^2-2x\sqrt{1+x^2}+x^2)}+\frac{1}{1+x^2}$$
$$=2\times\frac{x-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}(2+2x^2-2x\sqrt{1+x^2})}+\frac{1}{1+x^2}$$
$$=\frac{x-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}(1+x^2-x\sqrt{1+x^2})}+\frac{1}{1+x^2}=\frac{x-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+x^2}(\sqrt{1+x^2}-x)}+\frac{1}{1+x^2}$$
$$=-\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+x^2}=0$$

3. Sur l'intervalle $\mathbb{R}$:

$$f(x)=K$$

Or $f(0)=\frac{\pi}{2}$ donc $f(x)=\frac{\pi}{2}$.

Aller à : Exercice 50

Correction exercice 51.

$90=6\times15-1$ donc $\frac{89\pi}{15}=6\pi-\frac{\pi}{15}$ alors $\cos\left(\frac{89\pi}{15}\right)=\cos\left(6\pi-\frac{\pi}{15}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{15}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{15}\right)$

Or $\frac{\pi}{15}\in[0,\pi]$ donc $\arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{15}\right)\right)=\frac{\pi}{15}$

Par suite

$$\arccos\left[\cos\left(\frac{89\pi}{15}\right)\right]=\arccos\left[\cos\left(\frac{\pi}{15}\right)\right]=\frac{\pi}{15}$$

Aller à : Exercice 51

Correction exercice 52.

$$f'(x)=\frac{\mathrm{ch}(x)}{1+\mathrm{sh}^2(x)}=\frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{ch}^2(x)}=\frac{1}{\mathrm{ch}(x)}$$

Aller à : Exercice 52

Correction exercice 53.

1. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x)\geq 1$ donc $0<\frac{1}{\mathrm{ch}(x)}\leq 1$, par conséquent f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Si $f(x)=\arcsin\big(u(x)\big)$ alors $f'(x)=\frac{u'(x)}{\sqrt{1-(u(x))^2}}$ avec $u(x)=\frac{1}{\mathrm{ch}(x)}$

$$u'(x)=-\frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^2(x)}$$

$$\sqrt{1-\left(\frac{1}{\mathrm{ch}(x)}\right)^2}=\sqrt{\frac{\mathrm{ch}^2(x)-1}{\mathrm{ch}^2(x)}}=\sqrt{\frac{\mathrm{sh}^2(x)}{\mathrm{ch}^2(x)}}=\frac{|\mathrm{sh}(x)|}{|\mathrm{ch}(x)|}=\frac{|\mathrm{sh}(x)|}{\mathrm{ch}(x)}$$

Car $\mathrm{ch}(x)>0$.

$$f'(x)=-\frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^2(x)}\times\frac{\mathrm{ch}(x)}{|\mathrm{sh}(x)|}=\frac{\mathrm{sh}(x)}{|\mathrm{sh}(x)|}\times\frac{-1}{\mathrm{ch}(x)}$$

f n'est pas dérivable en 0. f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

C'est une manière rapide de dire que pour que f soit dérivable en un point, il faut et il suffit que f soit continue en ce point et que f' existe, ici, pour que f soit dérivable, il faut et il suffit que f' existe (car f est définie sur $\mathbb{R}$) et que manifestement la limite à gauche et à droite de 0 n'est pas la même.

Donc le raisonnement suivant :

f est dérivable si et seulement si $-1<\frac{1}{\mathrm{ch}(x)}<1\Leftrightarrow x\neq 0$ n'est pas correct.

3. $g'(x)=\frac{e^x}{1+e^{2x}}$
4. Si $x>0$ alors $\mathrm{sh}(x)>0$ et donc

$$f'(x)=-\frac{1}{\mathrm{ch}(x)}=-\frac{2}{e^x+e^{-x}}=-\frac{2e^x}{e^{2x}+1}=-2g'(x)$$

Sur l'intervalle $]0,+\infty[$,

$$f(x)=-2g(x)+K$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\arcsin(0)=0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{X\to+\infty}\arctan(X)=\frac{\pi}{2}$$

Donc

$$K=\pi$$

Et

$$\forall x>0,\quad \arcsin\left(\frac{1}{\mathrm{ch}(x)}\right)=-2\arctan(e^x)+\pi$$

Aller à : Exercice 53

Correction exercice 54.

1.

$$\tan(2\theta)=\frac{2\tan(\theta)}{1-\tan^2(\theta)}=\frac{\frac{2}{5}}{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2}=\frac{10}{24}=\frac{5}{12}$$

$$\tan(4\theta)=\frac{2\tan(2\theta)}{1-\tan^2(2\theta)}=\frac{2\frac{5}{12}}{1-\left(\frac{5}{12}\right)^2}=\frac{120}{144-25}=\frac{120}{119}$$

2. $0<\frac{1}{5}<\frac{1}{\sqrt{3}}$, c'est trivial en élevant au carré.
   arctan est une fonction croissante donc :
   $\arctan(0)<\arctan\left(\frac{1}{5}\right)<\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\Leftrightarrow 0<\arctan\left(\frac{1}{5}\right)<\frac{\pi}{6}$
   En multipliant cette inégalité par 4 et en enlevant $\frac{\pi}{4}$ on trouve :
$$-\frac{\pi}{4}<4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)-\frac{\pi}{4}<\frac{4\pi}{6}-\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{12}<\frac{\pi}{2}$$
3.
$$\tan\left(4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan(4\theta)-\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1+\tan(4\theta)\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\frac{120}{119}-1}{1+\frac{120}{119}}=\frac{1}{119+120}=\frac{1}{239}$$
   $4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)-\frac{\pi}{4}$ est dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$
   D'où
$$4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)-\frac{\pi}{4}=\arctan\left(\frac{1}{239}\right)\Leftrightarrow\frac{\pi}{4}=4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)-\arctan\left(\frac{1}{239}\right)$$

Aller à : Exercice 54

Correction exercice 55.

1.
$$u\in[-\ln(3),\ln(3)]\Leftrightarrow\ln\left(\frac{1}{3}\right)\le u\le\ln(3)\Leftrightarrow 1\le\operatorname{ch}(u)\le\operatorname{ch}(\ln(3))=\frac{e^{\ln(3)}+e^{-\ln(3)}}{2}=\frac{3+\frac{1}{3}}{2}$$
$$=\frac{5}{3}\Leftrightarrow 3\le 3\operatorname{ch}(u)\le 5\Leftrightarrow -1\le 3\operatorname{ch}(u)-4\le 1\Leftrightarrow -1\le f(u)\le 1$$
2. g est définie et continue si et seulement si $-1\le 3\operatorname{ch}(u)-4\le 1$, donc g est définie et continue si et seulement si $u\in[-\ln(3),\ln(3)]$.
3. Si $g(u)=\arcsin\big(f(u)\big)$ alors $g'(u)=\frac{f'(u)}{\sqrt{1-(f(u))^2}}$, $f'(u)=3\operatorname{sh}(u)$ et
$$1-\big(f(u)\big)^2=1-(3\operatorname{ch}(u)-4)^2=1-(9\operatorname{ch}^2(u)-24\operatorname{ch}(u)+16)$$
$$=-9\operatorname{ch}^2(u)+24\operatorname{ch}(u)-15=3(-3\operatorname{ch}^2(u)+8\operatorname{ch}(u)-5)$$
   $-3X^2+8X-5=0$ a pour discriminant $\Delta=64-4\times(-3)\times(-5)=4$
   Ses racines sont :
$$X_1=\frac{-8-2}{-6}=\frac{5}{3}$$
   Et
$$X_2=\frac{-8+2}{-6}=1$$
   Donc $-3X^2+8X-5=-3\left(X-\frac{5}{3}\right)(X-1)$

Par conséquent $-3\operatorname{ch}^2(u)+8\operatorname{ch}(u)-5=-3(\operatorname{ch}(u)-1)\left(\operatorname{ch}(u)-\frac{5}{3}\right)=(\operatorname{ch}(u)-1)(5-3\operatorname{ch}(u))$

On en déduit que :

$$g'(u)=\frac{3\operatorname{sh}(u)}{\sqrt{3(\operatorname{ch}(u)-1)(5-3\operatorname{ch}(u))}}$$

4. D'après la première question $\operatorname{ch}(3)=\frac{5}{3}$ donc $\operatorname{ch}(u)=\frac{5}{3}$ admet deux solutions $u=\ln(3)$ et $u=-\ln(3)$

et $\operatorname{ch}(u)=1$ a une unique solution $u=0$.

$$(\operatorname{ch}(u)-1)(5-3\operatorname{ch}(u))>0\Leftrightarrow 1<\operatorname{ch}(u)<\ln(3)\Leftrightarrow u\in]-\ln(3),0[\cup]0,\ln(3)[$$

On doit donc calculer les limites de $g'(u)$ en $-\ln(3)$, 0 et $\ln(3)$.

En $-\ln(3)^+$.

$\operatorname{sh}(-\ln(3))<0$ et $3(\operatorname{ch}(u)-1)(5-3\operatorname{ch}(u))\to 0^+$ (sinon cela veut dire que l'on s'est trompé et que le terme sous la racine carrée est négatif).

$$\lim_{u\to-\ln(3)^+} g'(u)=-\infty$$

Il y a donc une tangente verticale en $x=-\ln(3)$.

En 0^-.

$$\operatorname{sh}(u)=-\sqrt{\operatorname{ch}^2(u)-1}=-\sqrt{\operatorname{ch}(u)-1}\times\sqrt{\operatorname{ch}(u)+1}$$

Donc

$$g'(u)=\frac{-3\sqrt{\operatorname{ch}(u)-1}\times\sqrt{\operatorname{ch}(u)+1}}{\sqrt{3(\operatorname{ch}(u)-1)(5-3\operatorname{ch}(u))}}=\frac{-3\sqrt{\operatorname{ch}(u)+1}}{\sqrt{3(5-3\operatorname{ch}(u))}}$$

$$\lim_{u\to0^-} g'(u)=\frac{-3\sqrt{\operatorname{ch}(0)+1}}{\sqrt{3(5-3\operatorname{ch}(0))}}=-\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3(5-3)}}=-\sqrt{3}$$

En 0^+.

$$\operatorname{sh}(u)=+\sqrt{\operatorname{ch}^2(u)-1}=\sqrt{\operatorname{ch}(u)-1}\times\sqrt{\operatorname{ch}(u)+1}$$

De même

$$\lim_{u\to0^-} g'(u)=\frac{3\sqrt{\operatorname{ch}(0)+1}}{\sqrt{3(5-3\operatorname{ch}(0))}}=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3(5-3)}}=\sqrt{3}$$

En $\ln(3)^-$.

Comme en $-\ln(3)^+$ ou presque.

$$\lim_{u\to-\ln(3)^-} g'(u)=+\infty$$

En fait la fonction est paire et la dérivée est impaire.

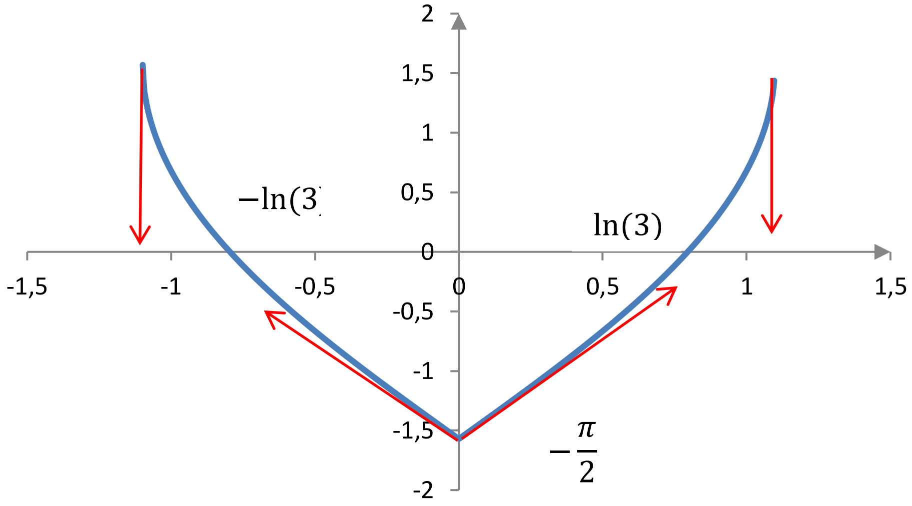
5. g est continue sur $[-\ln(3),\ln(3)]$ et g' est définie sur $]-\ln(3),0[\cup]0,\ln(3)[$ donc g est dérivable sur $]-\ln(3),0[\cup]0,\ln(3)[$.

6.

u	$-\ln(3)$	0	$\ln(3)$
$g'(u)$	$\Vert\ -\infty$	$-\sqrt{3}\ \Vert\ \sqrt{3}$	$+\infty\ \Vert$
$g(u)$	$\frac{\pi}{2}$ ↘	$-\frac{\pi}{2}$	↗ $\frac{\pi}{2}$

Car $g(0)=\arcsin(3\operatorname{ch}(0)-4)=\arcsin(3-4)=\arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2}$ et $g(\ln(3))=\arcsin(1)=\frac{\pi}{2}$

Et $g'(u)$ est du signe de $\operatorname{sh}(u)$ lorsqu'elle est dérivable.



Aller à : Exercice 55

Limite, continuité, théorème des valeurs intermédiaires, dérivabilité, théorèmes de Rolle et des accroissements finis

I Limites Continuités

Exercice 1 :

Soit $f :]-1,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}$$

Déterminer les limites de f, si elle existent, en 0 et en $+\infty$.

Allez à : Correction exercice 1 :

Exercice 2 :

Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x)=xE\left(x-\frac{1}{x}\right)$$

Montrer que f admet une limite en 0 et déterminer cette limite.

Allez à : Correction exercice 2 :

Exercice 3 :

Déterminer les limites suivantes

$$a)\ \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}\ ;\qquad b)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}{x^2}\ ;$$

$$c)\ \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{\ln(1+x^2)}{\sin^2(x)}\ ;\qquad d)\ \lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x-1}$$

Allez à : Correction exercice 3 :

Exercice 4 :

Calculer

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{E(\ln(x))}{x}$$

Allez à : Correction exercice 4 :

Exercice 5 :

Calculer, si elles existent les limites

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{E\left(\ln\left(\sqrt{x}\right)\right)}{\sqrt{x}}\quad \text{et}\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$$

Allez à : Correction exercice 5 :

Exercice 6 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(0)=0\quad \text{et}\quad f(x)=x+\frac{\sqrt{x^2}}{x}\quad \text{si } x\neq 0$$

Déterminer l'ensemble des points où elle est continue.

Allez à : Correction exercice 6 :

Exercice 7 :

Calculer si elles existent

1.
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^{2x})}{x}$$

2.
$$\lim_{x\to 0} x^{-\frac{7}{2}}e^{-\frac{1}{x^2}}$$

Allez à : Correction exercice 7 :

Exercice 8 :

Soit $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $n\in\mathbb{N}$, par :
$$f_n(x)=\ln(1+x^n)+x-1$$

1. Montrer qu'il existe $c_n\in[0,1]$ tel que $f_n(c_n)=0$.
2. Montrer que f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, en déduire que c_n est unique.

Allez à : Correction exercice 8 :

Exercice 9 :

Soit f la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $f_n(x)=x^n-x-1$, avec $n\geq 2$.

1. Montrer qu'il existe un unique $x_n>1$ tel que $f_n(x_n)=0$
2. Montrer que $f_{n+1}(x_n)>0$.
3. En déduire que la suite (x_n) est décroissante et quelle converge vers une limite l.
4. Déterminer l.

Allez à : Correction exercice 9 :

Exercice 10 :

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soit f_n une fonction définie sur $[0,1]$ par :
$$f_n(x)=1-\frac{x}{2}-x^n$$

1. Montrer qu'il existe un unique $x_n\in[0,1]$ telle que $f_n(x_n)=0$.
2. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $f_{n+1}(x_n)>0$,
3. En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone et qu'elle converge vers une limite l.
4. Supposons qu'il existe $M\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ $0\leq x_n\leq M<1$
   a. Calculer la limite de x_n^n lorsque n tend vers l'infini.
   b. Montrer qu'il y a une contradiction et en déduire la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Allez à : Correction exercice 10 :

Exercice 11 :

1. Soient a et b des nombres réels tels que $a<b$ et f une application de $[a,b]$ dans $[a,b]$
   a) On suppose que pour tout $(x,y)\in[a,b]\times[a,b]$ on a :
   $$|f(x)-f(y)|\leq|x-y|$$
   Montrer que f est continue sur $[a,b]$.
   En déduire qu'il existe $x\in[a,b]$, tel que $f(x)=x$.
   b) On suppose maintenant que pour tout $(x,y)\in[a,b]\times[a,b]$ $x\neq y$ on a :
   $$|f(x)-f(y)|<|x-y|$$
   Montrer qu'il existe un unique $x\in[a,b]$, tel que $f(x)=x$
2. On désigne par f l'application de $[0,2]$ dans $\mathbb{R}$, définie pour tout $x\in[0,2]$ par :
   $$f(x)=\ln(2+x^2)$$
   a) On pose

$$M=\max_{x\in[0,2]}|f'(x)|$$

Montrer que $M<1$.

b) En déduire, en montrant que $f([0,2])\subset[0,2]$, qu'il existe un unique $x\in[0,2]$ tel que $f(x)=x$. On notera $\tilde{x}$ cet élément.

c) Montrer que l'application f est injective.

On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels par la donnée de :

$$x_0\in[0,2]\quad\text{et}\quad x_{n+1}=f(x_n)\quad\text{si}\ n\geq 0$$

d) Montrer que si $x_0\neq\tilde{x}$, alors pour tout $n\geq 0$, $x_n\neq\tilde{x}$.

e) On suppose que $x_0\neq\tilde{x}$. Montrer que pour tout $n\geq 0$

$$\frac{|x_{n+1}-\tilde{x}|}{|x_n-\tilde{x}|}\leq M$$

f) En déduire que pour tout $x_0\in[0,2]$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\tilde{x}$.

On donne $0,69<\ln(2)<0,7$ et $1,79<\ln(6)<1,8$.

Allez à : Correction exercice 11 :

II Continuité dérivabilité

Exercice 12 :

Les fonctions f,g et $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définies par :

$$f(x)=x|x|;\qquad g(x)=x^{\frac{3}{5}};\qquad h(x)=\cos\left(\sqrt{|x|}\right)$$

Sont-elles dérivables en 0 ?

Allez à : Correction exercice 12 :

Exercice 13 :

Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{si}\ \ x=0\\ x+\dfrac{x\ln(x)}{1-x} & \text{si}\ \ 0<x<1\\ 0 & \text{si}\ \ x=1\end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $[0,1]$.
2. Montrer qu'il existe $c\in]0,1[$ telle que $f'(c)=0$. (on ne demande pas la valeur de c).

Allez à : Correction exercice 13 :

Exercice 14 :

Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes et calculer la dérivée lorsqu'elle existe :

1. $x\mapsto f(x)=\ln(\ln(x))$ si $x>1$
2. $x\mapsto g(x)=\ln\left(e^{x^2}+1\right)$ si $x\in\mathbb{R}$
3. $x\mapsto h(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x}} & \text{si}\ \ x<0\\ 0 & \text{si}\ \ x=0\\ x\ln(x)-x & \text{si}\ \ x>0\end{cases}$

Allez à : Correction exercice 14 :

Exercice 15 :

Soient a et b deux réels

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(ax)}{x} & \text{si} \quad x<0\\ 1 & \text{si} \quad x=0\\ e^{bx}-x & \text{si} \quad x>0\end{cases}$$

1. A l'aide de la règle de L'Hospital déterminer la limite suivante
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)\,x-\sin(x)}{x^2}$$
2. Déterminer a et b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer a et b pour que f soit dérivable sur $\mathbb{R}$.

Allez à : Correction exercice 15 :

Exercice 16 :

Soit a et b deux nombres réels. On définit la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ par
$$x\to\begin{cases}ax+b & \text{si } x\le 0\\ \dfrac{1}{1+x} & \text{si } x>0\end{cases}$$

1. Donner une condition sur b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer a et b tels que f soit dérivable sur $\mathbb{R}$ et dans ce cas calculer $f'(0)$.

Allez à : Correction exercice 16 :

Exercice 17 :

Soit $f:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ l'application définie par
$$f(x)=\frac{e^x}{x^e}$$

1. Etudier les variations de f.
2. Comparer les réels e^π et π^e.

Allez à : Correction exercice 17 :

Exercice 18 :

On considère l'application $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, définie par :
$$\begin{cases}f(x)=\dfrac{1}{x}\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}\right), & \text{si } x\neq 0\\ f(x)=0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $[-1,1]$.
2. Montrer que f est dérivable sur $]-1,1[$ et déterminer $f'(x)$ sur $]-1,1[$.
3. Montrer que l'application dérivée $f':]-1,1[\to\mathbb{R}$ est continue sur $]-1,1[$.
Quel est l'ensemble des $x\in]-1,1[$ pour lesquels $f'(x)=0$.
4. Dresser le tableau de variation de f et tracer son graphe. En déduire que f est injective.
5. On désigne par $\hat{f}$ la bijection de $[-1,1]$ sur $f([-1,1])$ définie par $\hat{f}(x)=f(x)$, pour tout $x\in[-1,1]$ et on désigne par $\hat{f}^{-1}$ sa bijection réciproque.
Justifier l'existence et déterminer $\left(\hat{f}^{-1}\right)'(0)$.

Allez à : Correction exercice 18 :

Exercice 19 :

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction définie par :
$$f(x)=\begin{cases}e^x & \text{si} \quad x<0\\ ax^2+bx+c & \text{si } x\ge 0\end{cases}$$
Déterminer a,b et c dans $\mathbb{R}$ tels que f soit C^2 (c'est-à-dire deux fois dérivables et que la dérivée seconde soit continue). Est-ce que dans ce cas f est C^3 ?

Allez à : Correction exercice 19 :

Exercice 20 :

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } x<0\\ 1 & \text{si } x=0\\ x^2+1 & \text{si } x>0\end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
2. Déterminer l'ensemble des points où f est dérivable ?
3. Calculer la dérivée de f aux points x où elle est dérivable ?

Allez à : Correction exercice 20 :

Exercice 21 :

Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x} & \text{si } 0\le x<\dfrac{1}{2}\\ 2x+\lambda x^2 & \text{si } \dfrac{1}{2}\le x\le 1\end{cases}$$

1. Déterminer, s'ils existent, les $\lambda\in\mathbb{R}$ pour que f soit continue.
2. Déterminer, s'ils existent, les $\lambda\in\mathbb{R}$ pour que f soit dérivable.

Allez à : Correction exercice 21 :

Exercice 22 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Pour tout $x\neq 0$ calculer $f'(x)$.
3. Calculer

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f'(x)$$

Que peut-on en déduire ?

4. Déterminer les limites de f en $\pm\infty$.
5. Dresser le tableau de variation de f et tracer sommairement son graphe.

Allez à : Correction exercice 22 :

Exercice 23 :

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction telle que

$$\forall x,y\in\mathbb{R}, |f(x)-f(y)|\le|\sin(x)-\sin(y)|$$

1. Montrer que la fonction f est 2π-périodique.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que f est dérivable en $\frac{\pi}{2}$ et calculer $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Allez à : Correction exercice 23 :

Exercice 24 :

Calculer les dérivées des fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $g:\mathbb{R}\setminus\{k\pi,k\in\mathbb{N}\}$ et $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définies par

$$f(x)=\ln(e^x);\quad g(x)=\ln(\sin^2(x));\quad h(x)=x+\sqrt{1+x^2}$$

Montrer aussi que

$$h'(x)=\frac{h(x)}{\sqrt{1+x^2}}$$

Allez à : Correction exercice 24 :

Exercice 25 :

Les fonctions $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définies par

$$f(x)=|x|\sin(x)\quad \text{et}\quad g(x)=\ln(1+|x|)$$

Sont-elles dérivable en 0 ?

Allez à : Correction exercice 25 :

Exercice 26 :

Calculer, lorsqu'elles existent, les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f_1: x\mapsto \ln(3+\sin(x))$
2. $f_2: x\mapsto \ln\left(\sqrt{1+x^2}\right)$
3. $f_3: x\mapsto \ln\left(\frac{2+\cos(x)}{2-\cos(x)}\right)$
4. $f_4: x\mapsto x^{x+1}$
5. $f_5: x\mapsto \sin((e^x)^2)$
6. $f_6: x\mapsto x^{\frac{\sin(x)}{x}}$

Allez à : Correction exercice 26 :

Exercice 27 :

Les fonctions f,g et $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définies par :

$$f(x)=\begin{cases}\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases},\quad g(x)=\begin{cases}x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases};$$

$$h(x)=\begin{cases}x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases};\quad i(x)=\begin{cases}x^3\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

Les fonctions f,g,h,i sont-elles continues en 0, dérivables en 0, de classe C^1 en 0.

Allez à : Correction exercice 27 :

Exercice 28 :

Soit $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $g(1)=0$.

Soit $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ définie pour tout $n>0$ par $f_n(x)=x^n g(x)$

1. Montrer que pour tout $n>0$, il existe $\alpha_n\in\,]0.1[$ telle que :

$$\sup_{x\in]0.1[}|f_n(x)|=f_n(\alpha_n)\quad \text{et}\quad f_n'(\alpha_n)=0$$

2. Calculer $f_n(\alpha_n)$ en fonction de α_n, $g'(\alpha_n)$ et n. En déduire

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in]0.1[}|f_n(x)|$$

Allez à : Correction exercice 28 :

III Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis.

Exercice 29 :

Soit f la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-x^2}{2} & \text{si } x\leq 1\\[2mm] \dfrac{1}{x} & \text{si } 1<x\end{cases}$$

Montrer qu'il existe $c \in]02[$ tel que : $f(2) - f(0) = (2 - 0)f'(c)$
Déterminer les valeurs possible de c.

Allez à : Correction exercice 29 :

Exercice 30 :

1. Montrer que pour tout x, y réels on a :
$$|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|$$
2. Montrer que pour tout $x > 0$
$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$$

Allez à : Correction exercice 30 :

Exercice 31 :

Soit f une application de l'intervalle $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.
On suppose que f est continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$, que $f(0) = 0$ et que pour tout $x \in]0,1[$, on a $f'(x) \neq 0$.
Montrer que f conserve un signe constant sur $]0,1[$.

Allez à : Correction exercice 31 :

Exercice 32 :

Soit $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ une application continument dérivable sur $[0,1]$ (ce qui signifie que f est continue et dérivable sur $[0,1]$ et que f' est continue sur $[0,1]$).
On suppose de plus que $f(0) = 0$, et que, pour tout $x \in [0,1]$, on ait $f'(x) > 0$. Montrer qu'il existe un nombre réel $m > 0$ tel que, pour tout $x \in [0,1]$, on ait :
$$f(x) \geq mx$$

Allez à : Correction exercice 32 :

Exercice 33 :

Soit $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$. Montrer qu'il existe $c \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ telle que :
$$f(c) = f\left(c + \frac{1}{2}\right)$$

Allez à : Correction exercice 33 :

Exercice 34 :

Soit $f_n: [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^n \sin(\pi x)$

1. Montrer qu'il existe $\alpha_n \in]0,1[$ tel que $f_n'(\alpha_n) = 0$. On pourra appliquer le théorème de Rolle en rappelant les hypothèses.
2. Calculer $f_n(\alpha_n)$ en fonction de α_n, de n et de $\cos(\pi\alpha_n)$.
3. En déduire la limite de $f_n(\alpha_n)$ lorsque n tend vers l'infini.

Allez à : Correction exercice 34 :

Exercice 35 :

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction deux fois dérivable sur $[a, b]$ telle que $f(a) = f(b) = 0$ et pour tout $x \in]a, b[$, $f''(x) \leq 0$. Montrer que, pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \geq 0$.

Allez à : Correction exercice 35 :

Exercice 36 :

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, avec $f(a)=f(b)=0$, telle que f soit dérivable sur $]a,b[$ et telle que sa dérivée soit strictement décroissante, c'est-à-dire que la fonction f' est strictement décroissante.

1. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c)=0$.
2. Montrer si $t \in]a,c[$ alors $f'(t)>0$ et que si $t \in]c,b[$ alors $f'(t)<0$.
3. Montrer que f est strictement croissante sur $[a,c]$ et décroissante sur $[c,b]$. On pourra utiliser le théorème des accroissements finis (on fera attention au fait que f n'est pas dérivable en a et en b.
4. Montrer que f admet un maximum global en $x=c$.
5. Montrer que pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \geq 0$.

Allez à : Correction exercice 36 :

Exercice 37 :

Soient a et b des réels tels que $0<a<b$.

1. A l'aide du théorème des accroissements finis montrer que
$$\frac{b-a}{b} < \ln(b)-\ln(a) < \frac{b-a}{a}$$
2. Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $[0,1]$ et deux fois dérivable sur $]0,1[$ telle que :
$$f(0)=0; f(1)=0; f'(0)>0 \quad \text{et} \quad f'(1)<0$$
De plus on supposera que $\forall x \in]0,1[, f''(x)<0$.
2.1. Montrer qu'il existe $\alpha>0$ tel que pour tout $x\in[0,\alpha]$, $f'(x)>0$.
2.2. Montrer que $f(\alpha)>0$.
2.3. On suppose qu'il existe $\beta \in]0,1[$ tel que $f(\beta)=0$, montrer qu'il existe $c_1 \in]0,\beta[$ et $c_2 \in]\beta,1[$ tel que $f'(c_1)=f'(c_2)=0$, en déduire une contradiction.
2.4. Déterminer le signe de $f(x)$ pour tout $x\in]0,1[$.
3. On considère la fonction f définie par :
$$f(x)=\ln(xa+(1-x)b)-x\ln(a)-(1-x)\ln(b)$$
Montrer que f vérifie les hypothèses du 2 (En particulier on vérifiera que f est bien définie $[0,1]$. Puis que pour tout $x\in]0,1[$
$$\ln(xa+(1-x)b) > x\ln(a)+(1-x)\ln(b)$$

Allez à : Correction exercice 37 :

Exercice 38 :

Soient a et b des réels tels que $a<b$.

1. A l'aide du théorème des accroissements finis montrer que
$$(b-a)e^a < e^b-e^a < (b-a)e^b$$
2. Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $[0,1]$ et deux fois dérivable sur $]0,1[$ telle que :
$$f(0)=0; f(1)=0; f'(0)<0 \quad \text{et} \quad f'(1)>0$$
De plus on supposera que $\forall x \in]0,1[, f''(x)>0$.
2.1. Montrer qu'il existe $\alpha>0$ tel que pour tout $x\in[0,\alpha]$, $f'(x)<0$.
2.2. Montrer que $f(\alpha)<0$.
2.3. On suppose qu'il existe $\beta \in]0,1[$ tel que $f(\beta)=0$, montrer qu'il existe $c_1 \in]0,\beta[$ et $c_2 \in]\beta,1[$ tel que $f'(c_1)=f'(c_2)=0$, en déduire une contradiction.
2.4. Déterminer le signe de $f(x)$ pour tout $x\in]0,1[$.
3. On considère la fonction f définie par :
$$f(x)=e^{xa+(1-x)b}-xe^a-(1-x)e^b$$
Montrer que f vérifie les hypothèses du 2 (En particulier on vérifiera que f est bien définie $[0,1]$. Puis que pour tout $x\in]0,1[$
$$e^{xa+(1-x)b} < xe^{a}+(1-x)e^b$$

Allez à : Correction exercice 38 :

Exercice 39 :

Soit p un entier, $p \geq 2$.

1. Montrer, en utilisant le théorème des accroissements finis qu'il existe un réel c dans l'intervalle $]0,1[$ tel que :
$$\ln(\ln(p+1)) - \ln(\ln(p)) = \frac{1}{(p+c)\ln(p+c)}$$
2. En déduire l'inégalité :
$$\ln(\ln(p+1)) - \ln(\ln(p)) < \frac{1}{p\ln(p)}$$
3. Démontrer que
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2\ln(2)} + \frac{1}{3\ln(3)} + \cdots + \frac{1}{n\ln(n)}\right) = +\infty$$

Allez à : Correction exercice 39 :

Exercice 40 :

1. Enoncer le théorème des accroissements finis.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction ln sur l'intervalle $[n, n+1]$, montrer que :
$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln(n) < \frac{1}{n}$$
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, on pose :
$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$
Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente et déterminer sa limite.

Allez à : Correction exercice 40 :

Exercice 41 :

Soit $P(X)$ un polynôme à coefficient réel de degré $n \geq 1$.

Montrer que l'équation $P(x) = e^x$ n'a qu'un nombre fini de solutions réelles.

Allez à : Correction exercice 41 :

Exercice 42 :

Soit $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$

On suppose f dérivable en 0 et en 1et que $f'(0) = f'(1) = 0$

Montrer qu'il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que
$$\frac{f(\alpha)}{\alpha} = \frac{f(\alpha) - 1}{\alpha - 1}$$
On pourra utiliser la fonction $g: [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par
$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{f(x)}{x} - \dfrac{f(x)-1}{x-1} & \text{si } x \in]0,1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$
En déduire que $f(\alpha) = \alpha$

Allez à : Correction exercice 42 :

Exercice 43 :

Soit $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. On pose
$$\varphi(x) = \big(f(b) - f(a)\big)x^3 - (b^3 - a^3)f(x)$$

1. Montrer que φ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, calculer $\varphi'(x)$.

2. Calculer $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$. En déduire qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que :
$$3c^2\big(f(b)-f(a)\big)=(b^3-a^3)f'(c)$$

Allez à : Correction exercice 43 :

Exercice 44 :

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une application continue, on suppose que f est dérivable sur $]a,b[$, et que pour tout $x\in[a,b]$, $f(x)>0$.

Montrer qu'il existe $c\in]a,b[$ tel que
$$\frac{f(b)}{f(a)}=e^{(b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}}$$

Allez à : Correction exercice 44 :

Exercice 45 :

Soit $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ une application continue, dérivable dans $]0,+\infty[$, telle que $f(0)=0$. On désigne par $g:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ définie par
$$g(x)=\frac{f(x)}{x}$$

1. Montrer que g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer $g'(x)$
2. Montrer que si f' est croissante sur $]0,+\infty[$, il en est de même de g.

Allez à : Correction exercice 45 :

Exercice 46 :

Soient a et b deux réels tels que $a<b$. Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une application continue sur $[a,b]$ telle que $f(a)<f(b)$.On suppose de plus que f est dérivable en a et en b et que $f'(a)=f'(b)=0$.

1. On pose
$$g(x)=f(x)-f(a)-(x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$
   i. Montrer que
$$g(x)=f(x)-f(b)-(x-b)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$
   ii. Montrer que g est dérivable en a et en b. Calculer $g'(a)$ et $g'(b)$.
   iii. En déduire qu'il existe $\eta>0$ tel que $\forall x\in]a,a+\eta],g(x)<0$ et qu'il existe $\eta'>0$ tel que $\forall x\in[b-\eta',b[,g(x)>0$
2. En déduire qu'il existe $c\in]a,b[$ tel que $g(c)=0$.
3. Montrer que
$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a}=\frac{f(c)-f(b)}{c-b}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Allez à : Correction exercice 46 :

Exercice 47 :

On considère une fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivable en tout réel a.

1. Que déclare le théorème des accroissements finis à propos de :
$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
2. Montrer que :
$$\lim_{x\to a^-}f'(x)=l\Rightarrow l=f'(a)$$
$$\lim_{x\to a^+}f'(x)=l\Rightarrow l=f'(a)$$
3. Soit g une fonction croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, soient

$$E=\{g(x),x<a\}\quad \text{et}\quad F=\{g(y),y>a\}$$

Montrer que E admet une borne supérieure notée m et que F admet une borne inférieure notée M. Puis montrer que

$$m\le g(a)\le M$$

4. Montrer que

$$\lim_{x\to a^-} g(x)=m\quad \text{et}\quad \lim_{y\to a^+} g(y)=M$$

5. Montrer que si la dérivée f' de f est croissante alors cette dérivée est continue.

Allez à : Correction exercice 47 :

CORRECTIONS

Correction exercice 1 :

En 0 le numérateur et le dénominateur tendent vers 0, il s'agit donc d'une forme indéterminée.

Première méthode

On va multiplier par l'expression conjuguée.

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}=\frac{x\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)}{\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}\right)\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)}=\frac{x\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)}{1+x^2-(1+x)}$$

$$=\frac{x\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)}{x^2-x}=\frac{x\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)}{x(x-1)}=\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}}{x-1}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}}{x-1}=-2$$

Deuxième méthode

On va utiliser la règle de L'Hospital, on pose

$$g(x)=x\quad \text{et}\quad h(x)=\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}$$

$$g'(x)=1\quad \text{et}\quad h'(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{2\sqrt{1+x}}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{g'(x)}{h'(x)}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{1}{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{2\sqrt{1+x}}}=\frac{1}{-\frac{1}{2}}=-2$$

Par conséquent

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{g(x)}{h(x)}=-2$$

En $+\infty$ le numérateur tend vers l'infini et le dénominateur est de la forme $+\infty-\infty$, il est donc lui-même une forme indéterminée. On peut penser à multiplié par l'expression conjuguée mais en regardant cette expression on voit que l'on retombe sur une forme indéterminée, on peut aussi penser à la règle de L'Hospital mais $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ est encore une forme indéterminée (que l'on pourrait arranger assez facilement) nous allons donc voir une autre technique.

En $+\infty$ $x>0$ donc $|x|=x$

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}=\frac{x}{\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}-\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)}}=\frac{x}{|x|\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}-|x|\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}}}$$

$$=\frac{x}{x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}-x\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}-\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}}}$$

Donc

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=1$$

Allez à : Exercice 1 :

Correction exercice 2 :

Pour commencer on peut regarder comment se comporte $f(x)$ pour des petites valeurs de x, prenons par exemple $x=\frac{1}{p}$ avec $p\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$

$$f(x)=\frac{1}{p}E\left(\frac{1}{p}-p\right)=\frac{1}{p}\times(-p)=-1\to -1$$

Lorsque $p\to+\infty$

Si par exemple $x=-\frac{1}{p}$ avec $p\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$

$$f(x)=-\frac{1}{p}E\left(-\frac{1}{p}+p\right)=-\frac{1}{p}(p-1)=-1+\frac{1}{p}\to -1$$

Il semble bien que f admette une limite et que cette limite soit -1. Mais pour l'instant nous n'avons rien démontré.

Pour tout $x>0$ réel il existe un unique $n\in\mathbb{N}$ tel que

$$n\le\frac{1}{x}<n+1$$

En fait $n=E\left(\frac{1}{x}\right)$

On en déduit que

$$\frac{1}{n+1}<x\le\frac{1}{n}\quad\text{et}\quad -n-1<-\frac{1}{x}\le -n$$

On additionne ces deux inégalités

$$-n-1+\frac{1}{n+1}<x-\frac{1}{x}\le -n+\frac{1}{n}$$

Ce qui équivaut à

$$-n-\frac{n}{n+1}<x-\frac{1}{x}\le -n+\frac{1}{n}$$

On en déduit que $E\left(x-\frac{1}{x}\right)$ vaut $-n-1$ ou $-n$, ce que l'on résume par

$$-n-1\le E\left(x-\frac{1}{x}\right)\le -n\quad(1)$$

On reprend les inégalités

$$\frac{1}{n+1}<x\le\frac{1}{n}\quad(2)$$

Le but est de « multiplier » les inégalités (1) et les inégalités (2), si tous les termes étaient positifs, il n'y aurait pas de problèmes mais dans les inégalités (1) les termes sont négatifs alors on va tout multiplier par -1

$$n\le -E\left(x-\frac{1}{x}\right)\le n+1\quad(1)'$$

On multiplie alors les inégalités (2) par les inégalités $(1)'$

$$\frac{n}{n+1}\le -xE\left(x-\frac{1}{x}\right)\le\frac{n+1}{n}\quad(3)$$

D'après

$$n\le\frac{1}{x}<n+1$$

$$\mathrm{x}\to 0\Leftrightarrow n\to+\infty$$

On fait tendre n vers $+\infty$ dans (3) et on obtient

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} -xE\left(x-\frac{1}{x}\right)=1\Leftrightarrow\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=-1$$

Pour la limite en 0^- on peut faire un raisonnement semblable ou remarquer que si y n'est pas un entier (ce qui est le cas puisque le but est de faire tendre $y = -x$ vers 0)

$$E(-y) = -E(y) - 1$$

Donc pour $x < 0$

$$f(x) = xE\left(x - \frac{1}{x}\right) = x\left(-E\left(-x + \frac{1}{x}\right) - 1\right) = (-x)E\left((-x) - \left(\frac{1}{-x}\right)\right) - x = f(-x) - x$$

$-x > 0$, on peut appliquer le résultat ci-dessus

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(-x) = -1$$

Comme la limite de $-x$ est aussi nulle

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = -1$$

Finalement

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f(x) = -1$$

Ce qui montre à la fois que f admet une limite lorsque $x \to 0$ (avec $x \neq 0$) et que cette limite est -1.

Allez à : Exercice 2 :

Correction exercice 3 :

a) Il s'agit d'une forme indéterminée. On va multiplier par l'expression conjuguée.

$$\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{x} = \frac{\left(\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}\right)\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1+x^2}\right)}{x\left(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+x}\right)} = \frac{1 + x - (1 + x^2)}{x\left(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+x}\right)}$$

$$= \frac{x - x^2}{x\left(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+x}\right)} = \frac{x(1-x)}{x\left(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+x}\right)} = \frac{1-x}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+x}}$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{1-x}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+x}} = \frac{1}{2}$$

Allez à : Exercice 3 :

b) Il s'agit d'une forme indéterminée. On va multiplier par l'expression conjuguée.

$$\frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+x}}{x^2} = \frac{\left(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+x}\right)\left(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+x}\right)}{x^2\left(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+x}\right)} = \frac{1 + x^2 - (1 + x)}{x^2\left(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+x}\right)}$$

$$= \frac{1 + x^2 - (1 + x)}{x^2\left(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+x}\right)} = \frac{x^2 - x}{x^2\left(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+x}\right)} = \frac{x(x-1)}{x^2\left(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+x}\right)}$$

$$= \frac{x-1}{x\left(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+x}\right)} = \frac{x-1}{x} \times \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+x}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x-1}{x} = 1$$

C'est la limite des termes de plus haut degré.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+x}} = 0$$

Car le dénominateur tend vers l'infini, finalement

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+x}}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x-1}{x} \times \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+x}}\right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x-1}{x} \times \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+x}} = 1 \times 0 = 0$$

Autre méthode

En $+\infty$, $x > 0$ donc $|x| = x$

$$\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}{x^2}=\frac{\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}-\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)}}{x^2}=\frac{|x|\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}-|x|\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}}}{x^2}$$
$$=\frac{x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}-x\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}}}{x^2}=\frac{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}-\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}}}{x}$$

Le numérateur tend vers 1 et le dénominateur vers l'infini, donc la limite du quotient tend vers 0.

Allez à : Exercice 3 :

c) Le numérateur et le dénominateur tendent vers 0, il s'agit d'une forme inderterminée, nous allons utiliser la règle de L'Hospital, on pose

$$f(x)=\ln(1+x^2)\quad \text{et}\quad g(x)=\sin^2(x)$$

Alors

$$f'(x)=\frac{2x}{1+x^2}\quad \text{et}\quad g'(x)=2\sin(x)\cos(x)$$
$$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{\frac{2x}{1+x^2}}{2\sin(x)\cos(x)}=\frac{x}{\sin(x)}\times\frac{1}{(1+x^2)\cos(x)}$$

On a « séparé » la partie indéterminée $\frac{x}{\sin(x)}$ de la partie où il n'y a pas de problème $\frac{1}{(1+x^2)\cos(x)}$

Comme on sait que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{\sin(x)}{x}=1$$

On a

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{x}{\sin(x)}=1$$

D'autre part

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{(1+x^2)\cos(x)}=1$$

Finalement

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{\ln(1+x^2)}{\sin^2(x)}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\left(\frac{x}{\sin(x)}\times\frac{1}{(1+x^2)\cos(x)}\right)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{x}{\sin(x)}\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{(1+x^2)\cos(x)}=1\times 1=1$$

Allez à : Exercice 3 :

d) Posons $t=x-1\Leftrightarrow x=1+t$

$$\frac{\ln(x)}{x-1}=\frac{\ln(1+t)}{t}$$

Première méthode

On sait d'après le programme de terminale que

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}}\frac{\ln(1+t)}{t}=1\Rightarrow\lim_{\substack{x\to 1\\ x\neq 1}}\frac{\ln(x)}{x-1}=1$$

Deuxième méthode

On utilise la règle de L'Hospital, on pose

$$f(x)=\ln(x)\quad \text{et}\quad g(x)=x-1$$

Alors

$$f'(x)=\frac{1}{x}\quad \text{et}\quad g'(x)=1$$
$$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{\frac{1}{x}}{1}=\frac{1}{x}$$
$$\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{g'(x)}=1\Rightarrow\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}=1$$

Troisième méthode

$$\frac{\ln(x)}{x-1}=\frac{\ln(x)-\ln(1)}{x-1}$$

La limite de ce quotient en 1 est la limite du taux de variation de la fonction ln en 1, ln étant dérivable, cette limite vaut $\ln'(1)$ c'est-à-dire $\left(\frac{1}{x}\right)_{x=1}=1$

Allez à : Exercice 3 :

Correction exercice 4 :

Par définition de la partie entière, $E(\ln(x))$ est l'unique entier tel que :

$$E(\ln(x))\leq \ln(x)<E(\ln(x))+1$$

Pour x assez grand ($x>e$, ce qui équivaut à $\ln(x)>1$ et donc $E(\ln(x))>0$) on a

$$0<E(\ln(x))\leq \ln(x)$$

En divisant cette inégalité par $x>0$

$$0<\frac{E(\ln(x))}{x}\leq\frac{\ln(x)}{x}$$

Comme

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$$

On a

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{E(\ln(x))}{x}=0$$

Allez à : Exercice 4 :

Correction exercice 5 :

Pour tout $x\in\mathbb{R}^+$

$$E(\ln(\sqrt{x})\leq \ln(\sqrt{x})<E(\ln(\sqrt{x})+1$$

Donc

$$\ln(\sqrt{x})-1<E(\ln(\sqrt{x})\leq\ln(\sqrt{x})$$

On divise par $\sqrt{x}>0$

$$\frac{\ln(\sqrt{x})-1}{\sqrt{x}}<\frac{E(\ln(\sqrt{x}))}{\sqrt{x}}\leq\frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$$

On pose $t=\sqrt{x}\to+\infty$ lorsque $x\to+\infty$

$\frac{\ln(\sqrt{x})-1}{\sqrt{x}}=\frac{\ln(t)}{t}-\frac{1}{t}\to 0$ lorsque $t\to+\infty$

Et $\frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}=\frac{\ln(t)}{t}\to 0$

Par conséquent

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{E(\ln(\sqrt{x}))}{\sqrt{x}}=0$$

La limite de $\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$ en 0 est une forme indéterminée car $\ln(1+x)-x\to 0$ et $x^2\to 0$ lorsque $x\to 0$.

Nous allons utiliser la règle de L'Hospital, on pose

$$f(x)=\ln(1+x)-x\quad\text{et}\quad g(x)=x^2$$

Alors

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}-1=-\frac{x}{1+x}\qquad\text{et}\quad g'(x)=2x$$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}=-\frac{\frac{x}{1+x}}{2x}=-\frac{1}{1+x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}-\frac{1}{1+x}=-1$$

Allez à : Exercice 5 :

Correction exercice 6 :

Notons déjà que cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}^*$ il reste à étudier la continuité en 0.

D'autre part $\sqrt{x^2}=|x|$, nous allons donc distinguer deux cas $x<0$ et $x>0$.

Si $x<0$ alors $f(x)=x+\frac{-x}{x}=x-1$ donc

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=-1$$

Si $x>0$ alors $f(x)=x+\frac{x}{x}=x+1$ donc

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=1$$

Par conséquent

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)\neq\lim_{x\to 0^+}f(x)$$

Ce qui montre que f n'est pas continue en 0.

Allez à : Exercice 6 :

Correction exercice 7 :

1. Le numérateur et le dénominateur tendent vers $+\infty$, il s'agit d'une forme indéterminée. Nous allons transformer le numérateur :

$$\ln(1+e^{2x})=\ln\left(e^{2x}(e^{-2x}+1)\right)=\ln(e^{2x})+\ln(e^{-2x}+1)=2x+\ln(1+e^{-2x})$$

Donc

$$\frac{\ln(1+e^{2x})}{x}=\frac{2x+\ln(1+e^{-2x})}{x}=2+\frac{\ln(1+e^{-2x})}{x}$$

$\ln(1+e^{-2x})\to 0$ lorsque x tend vers $+\infty$, par conséquent $\frac{\ln(1+e^{-2x})}{x}\to 0$ lorsque $x\to+\infty$ et

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^{2x})}{x}=2$$

2. $x^{-\frac{7}{2}}=\frac{1}{x^{\frac{7}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{x}^7}$ n'est définie que pour des $x>0$. $x^{-\frac{7}{2}}=\frac{1}{x^{\frac{7}{2}}}\to+\infty$ lorsque $x\to 0^+$

$-\frac{1}{x^2}\to-\infty$ lorsque $x\to 0$ donc $e^{-\frac{1}{x^2}}\to 0$ lorsque $x\to 0$.

Il s'agit d'une forme indéterminée. Il est à peu près clair que la règle de L'Hospital ne donne rien, on va faire un changement de variable $X=\frac{1}{x^2}\Leftrightarrow x=X^{-\frac{1}{2}}$, ainsi $X\to+\infty$ lorsque $x\to 0^+$.

$$x^{-\frac{7}{2}}e^{-\frac{1}{x^2}}=\left(X^{-\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{7}{4}}e^{-X}=X^{\frac{7}{8}}e^{-X}$$

Il s'agit d'une forme indéterminée dont le résultat est connu (l'exponentielle l'emporte) et vaut 0.

$$\operatorname{Lim}_{x\to 0^+}x^{-\frac{7}{2}}e^{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{X\to+\infty}X^{\frac{7}{8}}e^{-X}=0$$

Allez à : Exercice 7 :

Correction exercice 8 :

1. Si l'énoncé avait demandé « montrer qu'il existe un unique $c_n\in[0,1]$ tel que $f_n(c_n)=0$ on aurait étudier la fonction f_n sur $[0,1]$ en espérant pouvoir montrer que cette fonction est une bijection et que $f_n(0)$ et $f_n(1)$ soient de signe distincts, mais ce n'est pas le cas. L'autre théorème qui permet ce genre de résultat (sans l'unicité) est le théorème des valeurs intermédiaires.

f_n est une fonction continue sur $[0,1]$, $f_n(0) = -1 < 0$ et $f_n(1) = \ln(2) > 0$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $c_n \in [0,1]$ tel que $f_n(c_n) = 0$.

2. Alors là, il faut calculer la dérivée de f_n (car, évidemment f_n est dérivable)
$$f_n'(x) = \frac{nx^{n-1}}{1+x^n} + 1 = \frac{nx^{n-1} + 1 + x^n}{1+x^n} > 0$$
Pour tout $x \in [0, +\infty[$, par conséquent f_n est une bijection de $[0,1]$ sur $[f_n(0), f_n(1)] = [-1, \ln(2)]$, comme $0 \in [-1, \ln(2)]$, f_n admet un unique antécédent du réel 0, bref il existe un unique $c_n \in [0,1]$ tel que $f_n(c_n) = 0$.

Allez à : Exercice 8 :

Correction exercice 9 :

1. $f_n'(x) = nx^{n-1} - 1 > 0$

x	1	$+\infty$
$f_n'(x)$	$+$	
$f_n(x)$	-1 $\nearrow$	$+\infty$

f_n est une bijection de $]1, +\infty[$ sur $]-1, +\infty[$, comme $0 \in]-1, +\infty[$, il existe un unique $x_n \in]1, +\infty[$ tel que $f_n(x_n) = 0$.

2. On a $x_n^n - x_n - 1 = 0$ donc $x_n + 1 = x_n^n$
$$f_{n+1}(x_n) = x_{n+1}^n - x_n - 1 = x_{n+1}^n - x_n^n = x_n^n(x_n - 1) > 0$$
Car $x_n > 1$.

3. f_{n+1} est une bijection croissante donc f_{n+1}^{-1} est aussi une bijection croissante
$$f_{n+1}(x_n) > 0 \Rightarrow f_{n+1}(x_n) > f_{n+1}(x_{n+1}) \Rightarrow f_{n+1}^{-1}\big(f_{n+1}(x_n)\big) > f_{n+1}^{-1}\big(f_{n+1}(x_{n+1})\big) \Rightarrow x_n > x_{n+1}$$
La suite (x_n) est décroissante et minorée par 1 donc elle converge vers une limite $l \geq 1$

4. Si $l > 1$ alors
$$x_n > l \Rightarrow x_n^n > l^n$$
Donc
$$\lim_{n \to +\infty} x_n^n = +\infty$$
Ce qui est impossible car pour tout n on a
$$x_n^n = x_n + 1$$
Le terme de gauche tend vers $+\infty$ et celui de droite vers $l + 1$, il y a une contradiction. Donc $l = 1$.

Allez à : Exercice 9 :

Correction exercice 10 :

1. $f_n'(x) = -\frac{1}{2} - nx^{n-1} < 0$, $f_n(0) = 1$ et $f_n(1) = 1 - \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$

x	0	1
$f_n'(x)$	$-$	
$f_n(x)$	1 $\searrow$	$-\frac{1}{2}$

Donc f_n est une bijection de $[0,1]$ sur $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$, comme $0 \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$, il existe un unique $x_n \in [0,1]$ tel que $f_n(x_n) = 0$.

2.
$$f_{n+1}(x_n) = 1 - \frac{x_n}{2} - x_n^{n+1}$$
Or

$$f_n(x_n) = 1 - \frac{x_n}{2} - x_n^n = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{x_n}{2} = x_n^n$$

Donc

$$f_{n+1}(x_n) = 1 - \frac{x_n}{2} - x_n^{n+1} = x_n^n - x_n^{n+1} = x_n^n(1 - x_n) \geq 0$$

Car $x_n > 0$ et $1 - x_n > 0$.

3. La question 2. Entraine que

$$f_{n+1}(x_n) \geq 0 = f_{n+1}(x_{n+1})$$

La bijection réciproque de f_{n+1} est décroissante donc

$$f_{n+1}^{-1}\left(f_{n+1}(x_n)\right) \leq f_{n+1}^{-1}\left(f_{n+1}(x_{n+1})\right)$$

Ce qui entraine que

$$x_n \leq x_{n+1}$$

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, de plus elle est majorée par 1 donc elle converge vers une limite finie.

4.

a. $0 \leq x_n \leq M$ entraine que $0 \leq x_n^n \leq M^n$ comme la limite de M^n est 0,

$$\lim_{n\to+\infty} x_n^n = 0$$

b. Comme

$$1 - \frac{x_n}{2} - x_n^n = 0$$

Cela entraine que

$$1 - \frac{l}{2} = 0 \Leftrightarrow l = 2$$

Ce qui est impossible car $l \in [0,1]$

Par conséquent $l = 1$.

Allez à : Exercice 10 :

Correction exercice 11 :

1.

a) Soit $x_0 \in [a, b]$, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta = \epsilon > 0$ tel que

$$\forall x \in [a, b], |x - x_0| \leq \epsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq |x - x_0| \leq \epsilon$$

Cela montre que f est continue en x_0, pour tout $x_0 \in [a, b]$, f est continue sur $[a, b]$.

On pose $g(x) = f(x) - x$, g est une application continue

$$g(a) = f(a) - a \geq 0$$

Car$f(a) \in [a, b] \Leftrightarrow\ a \leq f(a) \leq b \Rightarrow 0 \leq f(a) - a$

$$g(b) = f(b) - b \leq 0$$

Car $f(b) \in [a, b] \Leftrightarrow a \leq f(b) \leq b \Rightarrow f(b) - b \leq 0$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [a, b]$ tel que $g(c) = 0$, ce qui équivaut à $f(c) = c$, il reste à changer le nom de c pour obtenir le résultat.

Pour montrer que f est continue en un $x_0 \in \mathbb{R}$ quelconque.

Première méthode :

$$\forall\epsilon > 0, \exists\eta = \epsilon > 0, \forall x\ |x - x_0| < \epsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq |x - x_0| < \epsilon$$

Donc f est continue en x_0 quelconque, donc sur $\mathbb{R}$.

Deuxième méthode

Pour montrer que f est continue en un $x_0 \in \mathbb{R}$ quelconque.

$$0 \leq |f(x) - f(x_0)| \leq |x - x_0|$$

Donc

$$0 \leq \lim_{x\to x_0} |f(x) - f(x_0)| \leq \lim_{x\to x_0} |x - x_0| = 0$$

On en déduit que

$$\lim_{x\to x_0}|f(x)-f(x_0)|=0$$

Ce qui est équivalent à

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

Autrement que f est continue en x_0 quelconque, et donc sur $\mathbb{R}$.

Allez à : Exercice 11 :

b) Comme

$$|f(x)-f(y)|<|x-y| \Rightarrow |f(x)-f(y)|\le |x-y|$$

On peut appliquer le résultat du a). Il existe $x\in[a,b]$ tel que $f(x)=x$, il reste à montrer l'unicité de x. Supposons qu'il existe $x_1\in[a,b]$ et $x_2\in[a,b]$, avec $x_1\neq x_2$ tels que

$$f(x_1)=x_1 \quad \text{et} \quad f(x_2)=x_2$$

Alors

$$|f(x_1)-f(x_2)|<|x_1-x_2|$$

Ce qui entraine que

$$|x_1-x_2|<|x_1-x_2|$$

Or $|x_1-x_2|\neq 0$ donc cette dernière est fausse, par conséquent il existe un unique $x\in[a,b]$ tel que $f(x)=x$.

Allez à : Exercice 11 :

2.

a) Etudions la fonction f' sur l'intervalle $[0,2]$

$$f'(x)=\frac{2x}{2+x^2}$$

La dérivée de cette fonction est

$$f''(x)=\frac{2(2+x^2)-2x\times 2x}{(2+x^2)^2}=2\frac{2+x^2-2x^2}{(2+x^2)^2}=2\frac{2-x^2}{(2+x^2)^2}$$

Tableau de variation de la fonction f' :

x	0		$\sqrt{2}$		2
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	$\frac{2}{3}$

On en déduit que

$$M=\frac{\sqrt{2}}{2}<1$$

Allez à : Exercice 11 :

b) D'après le tableau ci-dessus $\forall x\in[0,2], f'(x)\ge 0$ donc f est croissante (et même strictement croissante puisque la dérivée ne s'annule qu'en un point), donc $f([0,2])=[f(0),f(2)]=[\ln(2),\ln(6)]\subset[0,2]$ d'après les données à la fin de l'exercice.

De plus, d'après la formule des accroissements finis, pour tout $x,y\in[0,2]$, il existe $c\in[x,y]$ si $x<y$ ou $c\in[y,x]$ si $y<x$ tel que

$$f(x)-f(y)=f'(c)(x-y)$$

Ce qui entraine que

$$|f(x)-f(y)|=|f'(c)||x-y|\le M|x-y|<|x-y|$$

On peut donc appliquer le résultat du 1. b), il existe donc un unique $\tilde{x}\in[0,2]$ tel que

$$f(\tilde{x})=\tilde{x}$$

Remarque : on pouvait aussi montrer que la fonction g définie par $g(x)=f(x)-x$ est une bijection.

Allez à : Exercice 11 :

c) D'après b), f est strictement croissante sur $[0,2]$ donc elle est injective.

Remarque : si vous n'êtes pas convaincu, il suffit d'utiliser la contraposée de l'injectivité
$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$
En effet, si $x_1 \neq x_2$ alors $x_1 < x_2$ ou $x_1 > x_2$, dans le premier cas $f(x_1) < f(x_2)$ car f est strictement croissante et dans le second cas $f(x_1) > f(x_2)$ car f est strictement croissante.

Allez à : Exercice 11 :

d) si $x_0 \neq \tilde{x}$ alors montrons, par récurrence, que pour tout $n \geq 0$, $\tilde{x} \neq x_n$.
$$x_n \neq \tilde{x} \Rightarrow f(x_n) \neq f(\tilde{x}) \Rightarrow x_{n+1} \neq \tilde{x}$$
Car f est injective (on a utilisé la contraposée de l'injectivité), car $f(\tilde{x}) = \tilde{x}$ et $f(x_n) = x_{n+1}$, cela montre que pour tout $n \geq 0$.
$$x_n \neq \tilde{x}$$

Allez à : Exercice 11 :

e) D'après l'inégalité du b)
$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$
On applique cette formule à $x = x_n$ et $y = \tilde{x}$
$$|f(x_n) - f(\tilde{x})| \leq M|x_n - \tilde{x}|$$
Donc pour tout $n \geq 0$
$$|x_{n+1} - \tilde{x}| \leq M|x_n - \tilde{x}|$$
Comme $x_n \neq \tilde{x}$
$$\frac{|x_{n+1} - \tilde{x}|}{|x_n - \tilde{x}|} \leq M$$

Allez à : Exercice 11 :

f) Montrons par récurrence que pour tout $n \geq 0$.
$$|x_n - \tilde{x}| \leq M^n|x_0 - \tilde{x}|$$
Pour $n = 0$ l'inégalité est évidente, montrons que l'inégalité au rang n entraine l'inégalité au rang $n + 1$. D'après e)
$$|x_{n+1} - \tilde{x}| \leq M|x_n - \tilde{x}|$$
D'après l'hypothèse de récurrence
$$|x_{n+1} - \tilde{x}| \leq M|x_n - \tilde{x}| \leq M \times M^n|x_0 - \tilde{x}| = M^{n+1}|x_0 - \tilde{x}|$$
Donc pour tout $n \geq 0$
$$|x_n - \tilde{x}| \leq M^n|x_0 - \tilde{x}|$$
Et enfin $0 < M < 1$ entraine que $M^n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$, cela montre que
$$\lim_{n \to +\infty} x_n = \tilde{x}$$

Allez à : Exercice 11 :

Correction exercice 12 :

Comme toujours on a deux méthodes, soit on calcule la limite du taux de variation, soit on essaye de montrer que la fonction est C^1 en 0.

Première méthode : taux de variation
$$f(0) = 0$$
Donc
$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x|x|}{x} = |x|$$
Et alors
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} |x| = 0$$
Par conséquent f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$

Pour g, il y a un problème, est-ce que g est définie pour $x < 0$? La réponse est oui, mais ce n'est pas une évidence. En général $x \mapsto x^\alpha$ n'est pas définie pour $x < 0$, par exemple $x \mapsto x^{\frac{1}{2}}$ n'est pas définie pour $x < 0$, lorsque $\alpha = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}$ et q impair alors $x \mapsto x^{\frac{p}{q}}$ est définie sur $\mathbb{R}$, en effet, $x \mapsto x^q$ est une bijection sur $\mathbb{R}$ (ce qui est faux si q est pair), elle admet donc une bijection réciproque notée $x \mapsto x^{\frac{1}{q}}$, ensuite rien n'empêche d'élever cette fonction à une puissance positive.

$$g(0) = 0$$

Donc

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{x^{\frac{3}{5}}}{x} = x^{-\frac{2}{5}}$$

Et alors

$$\lim_{\substack{x\to 0\\x\neq 0}} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x\to 0\\x\neq 0}} x^{-\frac{2}{5}} = \lim_{\substack{x\to 0\\x\neq 0}} \frac{1}{x^{\frac{2}{5}}} = \pm\infty$$

Selon que $x < 0$ ou que $x > 0$, ce qui est important c'est que cette limite n'est pas finie, donc g n'est pas dérivable en 0.

$$h(0) = \cos(0) = 1$$

Donc

$$\frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \frac{\cos\left(\sqrt{|x|}\right) - 1}{x}$$

Cette limite est indéterminée, on peut penser à utiliser la règle de L'Hospital, mais dériver $x \mapsto \cos\left(\sqrt{|x|}\right)$ n'a rien de réjouissant (et il faudrait absolument distinguer le cas $x < 0$ et $x > 0$) et puis rien ne dit que cette fonction soit dérivable. Réfléchissons un peu, le numérateur est toujours négatif, alors que le dénominateur est négatif si $x < 0$ et positif si $x > 0$, alors, sauf si la limite existe et qu'elle est nulle, l'éventuelle limite sera différente en 0^- et 0^+. C'est pour cela que l'on va faire deux cas, $x < 0$ et $x > 0$.

Si $x < 0$, on pose $h = \sqrt{-x} = \sqrt{|x|}$, donc $x = -h^2$

$$\frac{\cos\left(\sqrt{|x|}\right) - 1}{x} = \frac{\cos(h) - 1}{-h^2} = \frac{1 - \cos(h)}{h^2}$$

Maintenant il vaut mieux se souvenir du résultat connu en terminale qui dit que

$$\lim_{h\to 0} \frac{1 - \cos(h)}{h^2} = \frac{1}{2}$$

Sinon, il faut appliquer la règle de L'Hospital deux fois de suite.

Donc

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\cos\left(\sqrt{|x|}\right) - 1}{x} = \frac{1}{2}$$

Si $x > 0$, on pose $h = \sqrt{x} = \sqrt{|x|}$ donc $x = h^2$

$$\frac{\cos\left(\sqrt{|x|}\right) - 1}{x} = \frac{\cos(h) - 1}{h^2} = -\frac{1 - \cos(h)}{h^2}$$

Avec le même résultat

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos\left(\sqrt{|x|}\right) - 1}{x} = -\frac{1}{2}$$

Ce qui montre que le taux de variation de h en 0 n'a pas de limite, par conséquent h n'est pas dérivable en 0.

Allez à : Exercice 12 :

Deuxième méthode

Si $x < 0$, $f(x) = x(-x) = -x^2$ et $f'(x) = -2x$ donc

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0$$

Si $x > 0$, $f(x) = x(x) = x^2$ et $f'(x) = 2x$ donc

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0$$

f est continue en 0 (c'est évident) et la limite de $f'(x)$ en 0 est finie, donc f est de classe C^1 en 0, donc dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

$$g'(x) = \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}$$

La limite de $g'(x)$ est infinie donc g n'est pas dérivable en 0.

Remarque : le seul cas où on ne peut pas conclure c'est quand la dérivée de la fonction n'admet pas de limite, auquel cas il se peut que le taux de variation admette une limite.

Si $x < 0$ alors $h(x) = \cos\left(\sqrt{-x}\right)$ donc

$$h'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{-x}}\left(-\sin\left(\sqrt{-x}\right)\right) = \frac{\sin\left(\sqrt{-x}\right)}{2\sqrt{-x}}$$

On sait que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$$

Donc

$$\lim_{\substack{x\to 0^- \\ x\neq 0}} \frac{\sin\left(\sqrt{-x}\right)}{2\sqrt{-x}} = \frac{1}{2}$$

Si $x > 0$ alors $h(x) = \cos\left(\sqrt{x}\right)$ donc

$$h'(x) = \frac{-\sin\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}}$$

Donc

$$\lim_{\substack{x\to 0^+ \\ x\neq 0}} \frac{-\sin\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2}$$

Les limites à gauche et à droite sont différentes donc h n'est pas dérivable en 0.

Allez à : Exercice 12 :

Correction exercice 13 :

1. Si $x \in]0,1[$ alors f est continue.
   En $x = 0$

$$\lim_{x-0^+} x\ln(x) = 0$$

C'est une forme indéterminée dont la limite est connue.

Donc

$$\lim_{x-0^+} \left(x + \frac{x\ln(x)}{1-x}\right) = 0$$

On prolonge f en 0 par $f(0) = 0$

En $x = 1$, on pose $h = 1 - x$, c'est mieux que $h = x - 1$ parce qu'alors $h \to 0^+$ lorsque $x \to 1^-$.

$x = 1 - h$

$$f(x) = 1 - h + \frac{(1-h)\ln(1-h)}{h} = 1 - h + (1-h)\frac{\ln(1-h)}{h}$$

Comme

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\ln(1-h)}{h} = -1$$

Soit parce que c'est la limite du taux de variation de la fonction $h \to \ln(1-h)$, soit en appliquant la règle de L'Hospital, soit parce que la limite est connue.

Donc

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{h\to 0^+}\left(1-h+(1-h)\frac{\ln(1-h)}{h}\right) = 1-1=0$$

On prolonge f en $x=1$ par $f(1)=0$.

2. f ainsi prolongée est continue sur $[0,1]$ et manifestement dérivable sur $]0,1[$, de plus $f(0)=f(1)$, on peut appliquer le théorème de Rolle, il existe $c\in]0,1[$ tel que

$$f'(c)=0$$

Remarque : calculer $f'(x)$ ne me parait pas raisonnable du tout.

Allez à : Exercice 13 :

Correction exercice 14 :

1. Si $x>1$ alors $\ln(x)>0$ donc f est définie, continue et dérivable sur $]1,+\infty[$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}=\frac{1}{x\ln(x)}$$

Allez à : Exercice 14 :

2. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $e^{x^2}+1>0$, donc g est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$

$$g'(x)=\frac{2xe^{x^2}}{1+e^{x^2}}$$

Allez à : Exercice 14 :

h est évidemment définie sur $\mathbb{R}$, avant d'étudier la dérivabilité on va étudier la continuité, pour tout $x\in\mathbb{R}^*$ h est continue.

$$\lim_{x\to 0^-} h(x) = \lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0 = h(0)$$

Car $\frac{1}{x}\to -\infty$ lorsque $x\to 0^-$.

$$\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} x\ln(x) - x = 0 = h(0)$$

Car la limite de $x\ln(x)$ en 0 est une forme indéterminée dont le résultat est connu et vaut 0.

Ces deux limites sont égales à $h(0)$ donc h est continue en 0.

h est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, on va étudier la dérivabilité en 0, il y a deux méthodes :

Première méthode :

On calcule la limite du taux de variation en 0, donc ici on va calculer la limite à gauche et à droite de ce taux

Pour $x<0$

$$\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$$

Il s'agit évidemment d'une forme indéterminée, on peut appliquer la règle de L'Hospital ou poser $X=\frac{1}{x}$, ainsi $X\to -\infty$ lorsque $x\to 0^-$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{X\to -\infty} Xe^X$$

Il s'agit encore d'une forme indéterminée mais le résultat est connu, c'est l'exponentielle qui l'emporte, la limite est donc nulle

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=0$$

Pour $x>0$

$$\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=\frac{x\ln(x)-x}{x}=\frac{x(\ln(x)-1)}{x}=\ln(x)-1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}(\ln(x)-1)=-\infty$$

On en conclut que $\frac{h(x)-h(0)}{x-0}$ n'a pas de limite en 0 donc la fonction n'est pas dérivable en 0.

Deuxième méthode

Le but est de montrer que la fonction est de classe C^1 en 0, c'est-à-dire que h est dérivable et que cette dérivée est continue (c'est un résultat plus fort que ce que demande l'énoncé mais dans de nombreux exercices cela se révèle plus efficace).

Pour $x<0$, $h'(x)=-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$, on pose $X=\frac{1}{x}$, ainsi $X\to -\infty$ lorsque $x\to 0^-$

$$h'(x)=-X^2e^X$$

Il s'agit encore d'une forme indéterminée mais le résultat est connu, c'est l'exponentielle qui l'emporte, la limite est donc nulle

$$\lim_{x\to 0^-} h'(x)=0$$

Pour $x>0$, $h'(x)=1\times \ln(x)+x\times\frac{1}{x}-1=\ln(x)$

$$\lim_{x\to 0^+} h'(x)=-\infty$$

$h'(x)$ admet des limites distinctes dans $\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ donc h n'est pas dérivable en 0. (Et donc pas C^1 en 0).

Allez à : Exercice 14 :

Deuxième méthode

Le but est de montrer que la fonction est de classe C^1 en 0, c'est-à-dire que f est dérivable et que cette dérivée est continue (c'est un résultat plus fort que ce que demande l'énoncé mais dans de nombreux exercices cela se révèle plus efficace).

Pour $x<0$, $f'(x)=-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$, on pose $X=\frac{1}{x}$, ainsi $X\to -\infty$ lorsque $x\to 0^-$

$$f'(x)=-X^2e^X$$

Il s'agit encore d'une forme indéterminée mais le résultat est connu, c'est l'exponentielle qui l'emporte, la limite est donc nulle

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x)=0$$

Pour $x>0$, $f'(x)=1\times \ln(x)+x\times\frac{1}{x}-1=\ln(x)$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x)=-\infty$$

$f'(x)$ admet des limites distinctes dans $\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ donc f n'est pas dérivable en 0. (Et donc pas C^1 en 0.

Allez à : Exercice 14 :

Correction exercice 15 :

1. La limite de $\frac{\cos(x)x-\sin(x)}{x^2}$ en 0 est indéterminée, on regarde la limite du quotient des dérivées du numérateur et du dénominateur

$$\frac{(\cos(x)\,x-\sin(x))'}{(x^2)'}=\frac{-\sin(x)\,x+\cos(x)-\cos(x)}{2x}=\frac{-\sin(x)\,x}{2x}=-\frac{\sin(x)}{2}\xrightarrow[x\to 0]{}0$$

Donc

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)\,x-\sin(x)}{x^2}=0$$

2. Pour $x\neq 0$ f est définie, continue et dérivable, on étudie la continuité et la dérivabilité en 0

Si $a\neq 0$

$$\frac{\sin(ax)}{x}=a\frac{\sin(ax)}{ax}\xrightarrow[x\to 0]{}a$$

Si $a=0$

$$\frac{\sin(ax)}{x} = 0 \xrightarrow[x\to 0]{} 0 = a$$
$$e^{bx} - x \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

f est continue en 0 si et seulement si

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(1) \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = 1$$

3. f doit-être continue, donc $a = 1$

Si $x < 0$ alors $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$

$$f'(x) = \frac{\cos(x)\, x - \sin(x)}{x^2} \xrightarrow[x\to 0^-]{} 0$$

D'après la question 1.

Si $x > 0$ alors $f(x) = e^{bx} - x$

$$f'(x) = be^{bx} - 1 \xrightarrow[x-0^+]{} b - 1$$

Pour $a = 1$ et $b = 1$, $f'(x)$ admet une limite en 0, et f est continue donc f est de classe C^1 en 0, donc dérivable.

Allez à : Exercice 15 :

Correction exercice 16 :

1. Si $x \neq 0$, f est continue.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} ax + b = b = f(0)$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+x} = 1$$

Donc f est continue si et seulement si $b = 1$.

2. Si $x \neq 0$ alors f est dérivable. Si $x \neq 0$

Si $x < 0$ alors $f'(x) = a$, si $x > 0$ alors $f'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$ et

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{-1}{(1+x)^2} = -1$$
$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) \Leftrightarrow -1 = a$$

Si $b = 1$ et si $a = -1$ alors f est continue en 0 et

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} f'(x)$$

Donc f est dérivable en 0. Finalement f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Allez à : Exercice 16 :

Correction exercice 17 :

1. On peut dériver cette application comme un quotient mais en la triturant un tout petit peu on peut se ramener à la dérivation d'un produit, ce qui est toujours plus simple

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f(x) = e^x x^{-e}$$

Remarque : l'énoncé à décider de ne définir f que sur $]0, +\infty[$ mais on aurait pu la définir sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f'(x) = e^x x^{-e} + e^x(-e)x^{-e-1}$$

Il faut arranger cette expression pour pouvoir trouver son signe, pour cela il faut factoriser, par e^x, çà c'est évident, mais aussi par une puissance de x, le mieux est de factoriser par x^{-e-1} car si on factorise par x^{-e} on se retrouverait avec un terme en $\frac{1}{x}$.

$$f'(x) = e^x x^{-e-1}(x - e)$$

Comme $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, e^x x^{-e-1} > 0$. On en déduit que :

$\forall x \in]0, e[, f'(x) < 0$ et f est décroissante et $\forall x \in]e, +\infty[, f'(x) > 0$ et f est croissante.

2. Comparer deux réels signifie que l'on cherche à savoir lequel des deux est le plus grand. Comme

$$f(\pi)=\frac{e^\pi}{\pi^e}$$

Le problème est de savoir si $f(\pi)$ est inférieur ou supérieur à 1. Il est clair que $\pi>e$, f étant croissante sur $]e,+\infty[$ on a :

$$f(e)<f(\pi)$$

Et

$$f(e)=\frac{e^e}{e^e}=1$$

On a $f(\pi)>1$ et donc $e^\pi>\pi^e$

Allez à : Exercice 17 :

Correction exercice 18 :

1. D'abord on peut vérifier que f est bien définie sur $[-1,1]$, en effet

$$-1\le x\le 1\Leftrightarrow x^2\le 1\Leftrightarrow 1-x^2\ge 0$$

Donc $x\to\sqrt{1-x^2}$ est bien définie sur $[-1,1]$.

Pour $x\neq 0$ f est continue, le problème est de savoir si f est continue en 0. Pour cela il faut montrer que la limite de f en 0 vaut $f(0)$, il s'agit d'une forme indéterminée, on peut penser à utiliser la règle de L'Hospital mais comme il y a des racines, on va plutôt utiliser l'expression conjuguée

$$\frac{1}{x}\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}\right)=\frac{(1+x^2)-(1-x^2)}{x\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)}=\frac{2x^2}{x\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)}$$

$$=\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}$$

Le numérateur tend vers 0 et le dénominateur vers 2 donc

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}=0=f(0)$$

Donc f est continue en 0 et donc sur $[-1,1]$.

Allez à : Exercice 18 :

2. $x\to\sqrt{1-x^2}$ est dérivable sur $]-1,1[$ donc f est dérivable sur $]-1,0[\,\cup\,]0,1[$, il reste à montrer que f est dérivable en 0.

Première méthode : on calcule le taux de variation

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{1}{x^2}\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}\right)=\frac{(1+x^2)-(1-x^2)}{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)}=\frac{2x^2}{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}$$

Donc

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{2}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}=1$$

On en déduit que f est dérivable en 0 et que $f'(0)=1$.

Deuxième méthode : on calcule la limite de $f'(x)$ en 0.

$$f'(x)=\frac{\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}\right)'x-\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}\right)}{x^2}$$
$$=\frac{\left(\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}-\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right)x-\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}\right)}{x^2}$$
$$=\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)x^2-\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}\right)}{x^2}$$
$$=\frac{\frac{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+x^2}}x^2-\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}\right)}{x^2}$$
$$=\frac{\left(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}\right)x^2-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+x^2}\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}\right)}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+x^2}x^2}$$
$$=\frac{\left(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}\right)x^2-(1+x^2)\sqrt{1-x^2}+(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}{x^2\sqrt{1-x^4}}$$
$$=\frac{x^2\sqrt{1-x^2}+x^2\sqrt{1+x^2}-(1+x^2)\sqrt{1-x^2}+(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}{x^2\sqrt{1-x^4}}$$
$$=\frac{-\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}}{x^2\sqrt{1-x^4}}$$

On a déjà fait un bel effort mais cela ne suffit pas, on tombe sur une forme indéterminée.

$$f'(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x^2\sqrt{1-x^4}}=\frac{1+x^2-(1-x^2)}{x^2\sqrt{1-x^4}\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)}=\frac{2x^2}{x^2\sqrt{1-x^4}\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{1-x^4}\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)}$$

Donc

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f'(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{2}{\sqrt{1-x^4}\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)}=1$$

Il faut bien préciser que f est continue et que $f'(x)$ admet une limite en 0 pour pouvoir conclure que f est dérivable en 0, à dérivée continue et que $f'(0)=1$.

Avec les deux méthodes on conclut que f est dérivable sur $]-1,1[$.

Ici, cette méthode est nettement plus compliquée mais parfois elle est plus simple.

De plus l'énoncé demande de calculer $f'(x)$ donc la deuxième méthode s'imposait.

Pour résoudre $f'(x)=0$ il fallait, de toutes façon calculer $f'(x)$ donc on n'a pas fait ce long calcul pour rien.

Allez à : Exercice 18 :

3. Pour montrer que f' est continue, c'est évident pour $x\neq 0$ et en 0 voir la deuxième méthode.

$$\forall x\in\,]-1,0[\,\cup\,]0,1[,\ f'(x)=\frac{2}{\sqrt{1-x^4}\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)}>0\quad\text{et}\quad f'(0)=1>0$$

Il n'y a pas de $x\in\,]-1,1[$ tel que $f'(x)=0$.

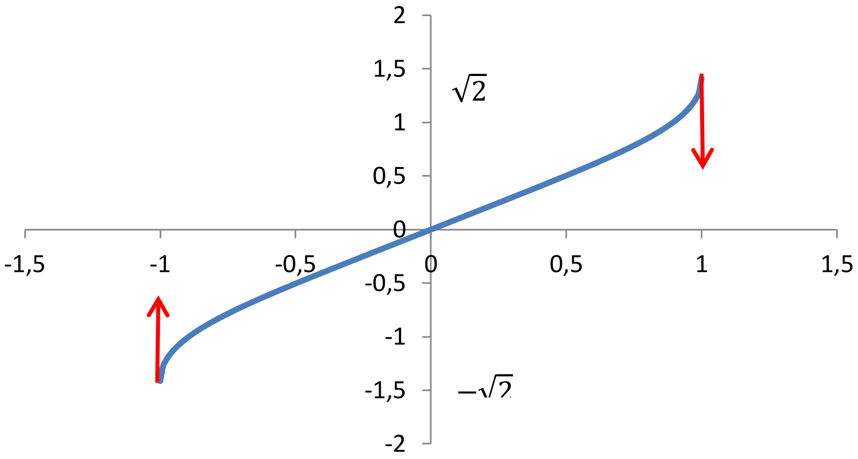
Allez à : Exercice 18 :

4. $f(-1)=-\sqrt{2}$ et $f(1)=\sqrt{2}$ et pour tout $x\in\,]-1,1[$, $f'(x)>0$, il reste à voir comment se comporte $f'(x)$ en -1^+ et 1^-, comme f' est paire ces deux limite seront égales.

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{2}{\sqrt{1-x^4}\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)}=+\infty$$

Car le dénominateur tend vers 0^+. Ce qui signifie que f admet des demi-tangentes verticales en -1 et en 1.

x	-1		1
$f'(x)$	||	$+$	||
$f(x)$	$-\sqrt{2}$	$\nearrow$	$\sqrt{2}$



f est strictement monotone donc f est injective.

Allez à : Exercice 18 :

5. $\hat{f}:[-1,1]\to f([-1,1])=\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$ est une bijection. Comme $\hat{f}'(0)=1\neq 0$ la bijection réciproque est dérivable en 0 comme

$$\hat{f}^{-1}(x)=\frac{1}{\hat{f}'\left(\hat{f}^{-1}(x)\right)}$$

On a

$$\hat{f}^{-1}(0)=\frac{1}{\hat{f}'\left(\hat{f}^{-1}(0)\right)}=\frac{1}{\hat{f}'(0)}=\frac{1}{1}=1$$

Allez à : Exercice 18 :

Correction exercice 19 :

Si $x\neq 0$ la fonction est C^∞ donc tout va bien. Etudions la fonction en $x=0$.

Il faut d'abord que la fonction soit continue

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} e^x=1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(ax^3+bx+c)=c$$

La fonction est continue si et seulement si $c=1$. Dans ce cas regardons si la fonction est de classe C^1.

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x)=\lim_{x\to 0^-} e^x=1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^+}(2ax+b)=b$$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x)=\lim_{x\to 0^+} f'(x)\Leftrightarrow b=1$$

Comme, lorsque $c=1$, f est continue, f est de classe C^1 si et seulement si $b=c=1$.

Si $x<0$, $f''(x)=e^x$ et si $x>0$, $f''(x)=2a$, la première dérivée seconde tend vers 1 et la deuxième tend vers $2a$ donc cette fonction est de classe C^2 en $x=0$ si et seulement si $a=\frac{1}{2}$ (car bien sûr f' est continue).

Si $x<0$, $f'''(x)=e^x$ et si $x>0$, $f'''(x)=0$, la première dérivée troisième tend vers 1 et la seconde vers 0, donc cette fonction n'est jamais de classe C^2 en $x=0$.

Allez à : Exercice 19 :

Correction exercice 20 :

1. Pour tout $x\neq 0$ la fonction est de classe C^∞ donc dérivable.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin(x)}{x}=1=f(0)$$

Certes, il s'agit d'une forme indéterminée, mais soit on la considère comme connue (de la terminale), soit on la considère comme le taux de variation de la fonction $x \to \sin(x)$ en 0 et cette limite est la valeur de la fonction dérivée en 0, c'est-à-dire $\cos'(0) = 1$, soit on applique la règle de Riemann.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x^2 + 1) = 1 = f(0)$$

Finalement on a :

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$$

Ce qui entraine que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x) = f(0)$$

Ce qui montre que f est continue en $x = 0$.

Allez à : Exercice 20 :

2. Calculons la fonction dérivée pour $x < 0$ et pour $x > 0$.

Pour $x < 0$

$$f'(x) = \frac{\cos(x)\, x - \sin(x)}{x^2}$$

La limite de $f'(x)$ en $x = 0$ est une forme indéterminée, utilisons la règle de L'Hospital.

$$f'(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

$$g'(x) = -\sin(x)\, x + \cos(x) - \cos(x) = -x\sin(x)$$

$$h'(x) = 2x$$

Donc

$$\frac{g'(x)}{h'(x)} = \frac{-x\sin(x)}{2x} = -\frac{\sin(x)}{2}$$

On en déduit que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{g'(x)}{h'(x)} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} -\frac{\sin(x)}{2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f'(x) = 0$$

Par conséquent

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f'(x) = 0$$

Pour $x > 0$

$$f'(x) = 2x$$

Donc

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 2x = 2$$

On en déduit que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f'(x) \neq \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x)$$

Ce qui montre que f n'est pas dérivable en $x = 0$.

Conclusion :

Pour $x < 0$

$$f'(x) = \frac{\cos(x)\, x - \sin(x)}{x^2}$$

Pour $x > 0$

$$f'(x) = 2x$$

Pour $x = 0$, f n'est pas dérivable.

Allez à : Exercice 20 :

Correction exercice 21 :

1.

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to\frac{1}{2}^-} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} = f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to\frac{1}{2}^+} (2x+\lambda x^2) = 2\times\frac{1}{2}+\lambda\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1+\frac{\lambda}{4}$$

f est continue si et seulement si

$$\frac{2}{3} = 1+\frac{\lambda}{4} \Leftrightarrow \lambda = -\frac{4}{3}$$

2. Une condition nécessaire pour que f soit continue est que f soit continue, donc s'il y a une valeur de λ pour laquelle f est dérivable, ce ne peut être que $-\frac{4}{3}$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x} & \text{si} \quad 0 \le x < \dfrac{1}{2} \\ 2x - \dfrac{4}{3}x^2 & \text{si} \quad \dfrac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$$

Si $0 \le x < \frac{1}{2}$ alors

$$f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

Et

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} f'(x) = \lim_{x\to\frac{1}{2}^-} -\frac{1}{(1+x)^2} = -\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^2} = -\frac{4}{9}$$

Si $\frac{1}{2} < x \le 1$ alors

$$f'(x) = 2-\frac{8}{3}x$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} f'(x) = \lim_{x\to\frac{1}{2}^+} \left(2-\frac{8}{3}x\right) = 2-\frac{8}{3}\times\frac{1}{2} = 2-\frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

$f'(x)$ n'a pas de limite lorsque $x\to\frac{1}{2}$ donc f n'est pas dérivable en $\frac{1}{2}$. Par conséquent il n'existe pas de $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que la fonction f soit dérivable.

Allez à : Exercice 21 :

Correction exercice 22 :

1. Pour tout $x\neq 0$, $x\mapsto -\frac{1}{x^2}$ est continue et l'exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$ donc f est continue sur $\mathbb{R}^*$.

En $x=0$.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{-1}{x^2} = -\infty \Rightarrow \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} e^{\frac{-1}{x^2}} = 0 = f(0)$$

Donc f est continue en 0.

2.

$$\forall x\in\mathbb{R}^*, \qquad f'(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' e^{-\frac{1}{x^2}} = (-x^{-2})'e^{-\frac{1}{x^2}} = -(-2)x^{-3}e^{-\frac{1}{x^2}} = \frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$$

3. On pose $X=\frac{1}{x}$

$$f'(x) = 2X^3e^{-X^2}$$

Lorsque $x\to 0^\pm$, $-X^2\to-\infty$ donc $e^{-X^2}\to 0$ alors que $2X^3\to\pm\infty$, il s'agit d'une forme indéterminée mais l'exponentielle l'emporte sur les fonctions polynômes. Donc

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f'(x) = \lim_{X\to\pm\infty} 2X^3 e^{-X^2} = 0$$

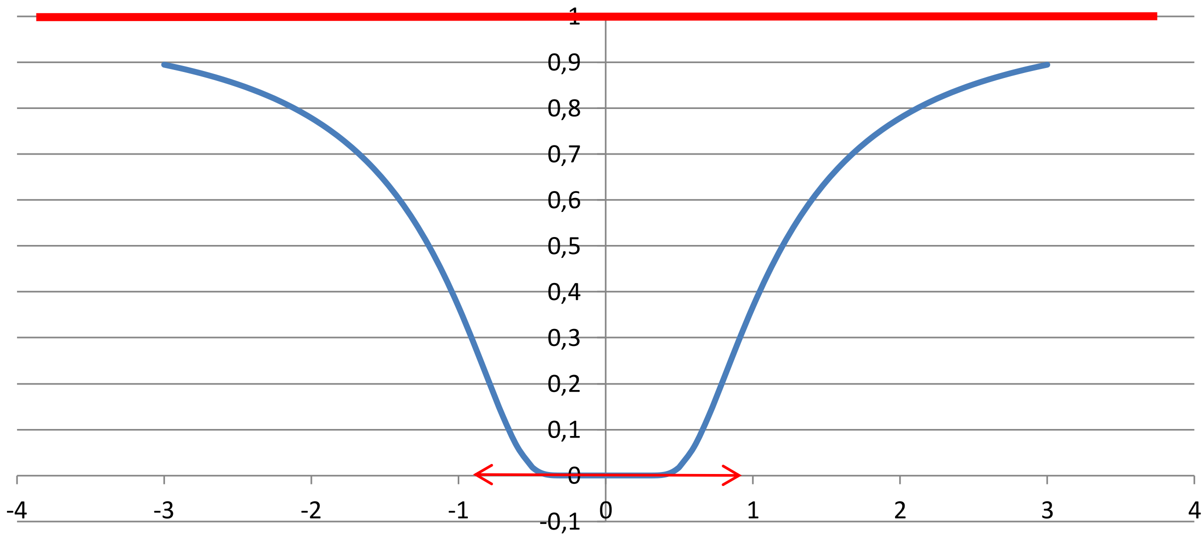
$f'(x)$ admet une limite en 0 et f est continue en 0 donc f est de classe C^1 en 0, ce qui signifie que f est dérivable et que $f'(0) = 0$.

4.

$$\lim_{x\to\pm\infty} -\frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} e^{-\frac{1}{x^2}} = e^0 = 1$$

5. $f'(x)$ a le même signe que x^3.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1



Attention, ce dessin donne l'impression qu'il y a un « plat » au voisinage de 0, c'est juste que les valeurs sont très petites

Allez à : Exercice 22 :

Correction exercice 23 :

1.

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f(x) - f(x + 2\pi)| \leq |\sin(x) - \sin(x + 2\pi)| = 0$$

Ce qui équivaut à ce que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x + 2\pi)$, f est 2π périodique.

2. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$,

Première méthode

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, |x - x_0| < \eta \Rightarrow |\sin(x) - \sin(x_0)| < \epsilon$$

Car la fonction sin est une fonction continue. Cela entraine que pour tout

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq |\sin(x) - \sin(x_0)| < \epsilon$$

Cela montre que la fonction f est continue en x_0, ceci étant vrai pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

Deuxième méthode

Pour montrer que f est continue en un $x_0 \in \mathbb{R}$ quelconque.

$$0 \leq |f(x) - f(x_0)| \leq |\sin(x) - \sin(x_0)|$$

Donc

$$0 \leq \lim_{x\to x_0} |f(x) - f(x_0)| \leq \lim_{x\to x_0} |\sin(x) - \sin(x_0)| = 0$$

Car sin est continue en x_0

On en déduit que

$$\lim_{x \to x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0$$

Ce qui est équivalent à

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Autrement que f est continue en x_0 quelconque, et donc sur $\mathbb{R}$

3. Remarques préliminaires

Dans ce genre d'exercice il faut montrer qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = l$$

Autrement dit que

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left| \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} - l \right| = 0$$

Pour cela il faut majorer $\left| \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} - l \right|$ par une expression tendant vers 0.

Le problème est qu'il faudrait deviner l à priori et que l'on ne connait pas $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Ce n'est pas gagné d'avance. Il doit y avoir y avoir un truc plus simple.

D'après l'inégalité

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| \leq |\sin(x) - \sin(y)|$$

On en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left| f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right) \right| \leq \left| \sin(x) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right|$$

Puis en divisant par $\left| x - \frac{\pi}{2} \right|$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}, \left| \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} \right| \leq \left| \frac{\sin(x) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} \right|$$

A droite, il s'agit du taux de variation de la fonction sin en $\frac{\pi}{2}$ qui tend vers

$$\sin'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Ce qui entraine que

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left| \frac{\sin(x) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} \right| = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Ça, c'est un coup de chance parce que du coup, on en déduit que

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left| \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} - 0 \right| = 0$$

Et d'après les remarques préliminaire, cela signifie que $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Si on avait trouvé une limite non nulle on n'aurait rien pu conclure.

Allez à : Exercice 23 :

Correction exercice 24 :

1. Si $x > 1$ alors $\ln(x) > 0$ donc f est définie, continue et dérivable sur $]1, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)} = \frac{1}{x \ln(x)}$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{x^2} + 1 > 0$, donc g est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$

$$g'(x) = \frac{2xe^{x^2}}{1 + e^{x^2}}$$

3. h est évidemment définie sur $\mathbb{R}$, avant d'étudier la dérivabilité on va étudier la continuité, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ h est continue.

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$$

Car $\frac{1}{x} \to -\infty$ lorsque $x \to 0^-$.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x \ln(x) - x = 0$$

Car la limite de $x \ln(x)$ en 0 est une forme indéterminée dont le résultat est connu et vaut 0.
Ces deux limites sont égales donc h est continue en 0.
h est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, on va étudier la dérivabilité en 0, il y a deux méthodes :
Première méthode :
On calcule la limite du taux de variation en 0, donc ici on va calculer la limite à gauche et à droite de ce taux
Pour $x < 0$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$$

Il s'agit évidemment d'une forme indéterminée, on peut appliquer la règle de L'Hospital ou poser $X = \frac{1}{x}$, ainsi $X \to -\infty$ lorsque $x \to 0^-$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{X \to -\infty} Xe^X$$

Il s'agit encore d'une forme indéterminée mais le résultat est connu, c'est l'exponentielle qui l'emporte, la limite est donc nulle

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$$

Pour $x > 0$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x \ln(x) - x}{x} = \frac{x(\ln(x) - 1)}{x} = \ln(x) - 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} (\ln(x) - 1) = -\infty$$

On en conclut que $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ n'a pas de limite en 0 donc la fonction n'est pas dérivable en 0.
Deuxième méthode
Le but est de montrer que la fonction est de classe C^1 en 0, c'est-à-dire que f est dérivable et que cette dérivée est continue (c'est un résultat plus fort que ce que demande l'énoncé mais dans de nombreux exercices cela se révèle plus efficace).
Pour $x < 0$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$, on pose $X = \frac{1}{x}$, ainsi $X \to -\infty$ lorsque $x \to 0^-$

$$f'(x) = -X^2 e^X$$

Il s'agit encore d'une forme indéterminée mais le résultat est connu, c'est l'exponentielle qui l'emporte, la limite est donc nulle

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = 0$$

Pour $x > 0$, $f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln(x)$

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = -\infty$$

$f'(x)$ admet des limites distinctes dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ donc f n'est pas dérivable en 0. (Et donc pas C^1 en 0.

Allez à : Exercice 24 :

Correction exercice 25 :

Il est clair que ces fonctions sont continues en 0, c'est nécessaire. On a $f(0)=0$ et $g(0)=0$

Première méthode :

On va montrer que f est de classe C^1 en 0 (c'est-à-dire que f est dérivable en 0 et que sa dérivée est continue en 0).

Pour $x<0$, $f(x)=-x\sin(x)$ et $f'(x)=-\sin(x)-x\cos(x)$, donc

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x)=0$$

Pour $x>0$, $f(x)=x\sin(x)$ et $f'(x)=x\sin(x)+x\cos(x)$, donc

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x)=0$$

Ces deux limites sont finies et égales et f est continue en 0, donc f est de classe C^1 en 0, on en déduit que f est dérivable en 0.

Même technique pour g

Pour $x<0$, $g(x)=\ln(1-x)$ et $f'(x)=-\frac{1}{1-x}$, donc

$$\lim_{x\to 0^-} g'(x)=-1$$

Pour $x>0$, $g(x)=\ln(1+x)$ et $g'(x)=\frac{1}{1+x}$, donc

$$\lim_{x\to 0^+} g'(x)=1$$

Ces deux limites sont finies et différentes donc g n'est pas dérivable en 0.

Deuxième méthode :

Pour montrer que f est dérivable il faut montrer que le taux de variation

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

Admet une limite finie en 0, avec $x\neq 0$.

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{|x|\sin(x)}{x}=\frac{|x|}{x}\sin(x)$$

Pour $x\neq 0$, $\frac{|x|}{x}=\pm 1$, cette expression est bornée et $\sin(x)\to 0$ lorsque $x\to 0$ donc

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$$

f est dérivable en 0.

Pour montrer que g est dérivable il faut montrer que le taux de variation

$$\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\frac{\ln(1+|x|)}{x}$$

Admet une limite finie en 0, avec $x\neq 0$.

Pour $x<0$,

$$\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\frac{\ln(1-x)}{x}$$

Il s'agit évidemment d'une forme indéterminée, soit on applique la règle de L'Hospital, soit on applique le résultat connu

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$$

Avec $t=-x$ pour trouver que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{\ln(1-x)}{x}=-1$$

Pour $x>0$,

$$\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\frac{\ln(1+x)}{x}$$
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

Ces deux limites sont distinctes donc g n'est pas dérivable.

Allez à : Exercice 25 :

Correction exercice 26 :

1. Comme $\forall x\in\mathbb{R}, 3+\sin(x)\geq 2$, f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$
$$\forall x\in\mathbb{R}, f_1'(x)=\frac{\cos(x)}{3+\sin(x)}$$

Allez à : Exercice 26 :

2. Comme $\forall x\in\mathbb{R}, \sqrt{1+x^2}\geq 1$, f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$
On peut dériver cette fonction en considérant qu'elle est de la forme $\ln\big(u(x)\big)$ mais ce n'est pas très malin, en effet
$$f_2(x)=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$
Donc
$$\forall x\in\mathbb{R}, f_2'(x)=\frac{1}{2}\times\frac{2x}{1+x^2}=\frac{x}{1+x^2}$$

Allez à : Exercice 26 :

3. $\forall x\in\mathbb{R}, 2+\cos(x)\geq 1$ et $2-\cos(x)\geq 1$ donc f_3 est dérivable sur $\mathbb{R}$.
On peut dériver cette fonction en considérant qu'elle est de la forme $\ln\big(u(x)\big)$ mais ce n'est pas très malin, en effet
$$\forall x\in\mathbb{R}, f_3(x)=\ln(2+cos(x))-\ln(2-cos(x))$$
Donc
$$\forall x\in\mathbb{R}, f_3'(x)=\frac{-\sin(x)}{2+\cos(x)}-\left(-\frac{-\sin(x)}{2-\cos(x)}\right)=\frac{-\sin(x)}{2+\cos(x)}-\frac{\sin(x)}{2-\cos(x)}$$
Ce résultat est juste mais il faut toujours essayer d'arranger les choses, ici il faut réduire au même dénominateur dans le but, si cela était demander, de trouver le signe de cette expression en fonction de x.
$$\forall x\in\mathbb{R}, f_3'(x)=-\sin(x)\left(\frac{1}{2+\cos(x)}+\frac{1}{2-\cos(x)}\right)=-\sin(x)\frac{2-\cos(x)+2+\cos(x)}{(2+\cos(x))(2-\cos(x))}=$$
$$=\frac{-4\sin(x)}{4-\cos^2(x)}$$
Remarque : avec cette expression il est clair que $f_3'(x)$ a le même signe que $-\sin(x)$.

Allez à : Exercice 26 :

4. Attention, il ne faut pas dériver cette fonction comme si elle était de la forme x^α car le « α » n'est pas constant, il s'agit d'une fonction « puissance » qui s'écrit
$$f_4(x)=e^{(x+1)\ln(x)}$$
Cette fonction est dérivable pour tout $x>0$
$$\forall x\in\mathbb{R}^{+*}, f_4'(x)=\big((x+1)\ln(x)\big)'e^{(x+1)\ln(x)}=\left(\ln(x)+\frac{x+1}{x}\right)e^{(x+1)\ln(x)}$$
Là encore il faut réduire au même dénominateur
$$\forall x\in\mathbb{R}^{+*}, f_4'(x)=\frac{x\ln(x)+x+1}{x}e^{(x+1)\ln(x)}$$
Remarque : heureusement que l'on ne demande pas le signe de $f_4'(x)$ parce que ce n'est pas si simple, pour ceux que cela intéresse, $\forall x\in\mathbb{R}^{+*}, f_4'(x)>0$.

Allez à : Exercice 26 :

5. f_5 est dérivable sur $\mathbb{R}$, il faut quand même faire une petite transformation si on veut dériver cette fonction simplement
$$\forall x \in \mathbb{R}, (e^x)^2 = e^{2x}$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, f_5(x) = \sin((e^x)^2) = \sin(e^{2x})$$
Donc
$$\forall x \in \mathbb{R}, f_5'(x) = 2e^{2x}\cos(e^{2x})$$

Allez à : Exercice 26 :

6. Attention, il ne faut pas dériver cette fonction comme si elle était de la forme x^α car le « α » n'est pas constant, il s'agit d'une fonction « puissance » qui s'écrit
$$f_6(x) = e^{\frac{\sin(x)}{x}\ln(x)}$$
Cette fonction est dérivable pour tout $x > 0$.
Pour éviter d'écrire une formule longue à écrire, on va d'abord dériver
$$g_6 : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}\ln(x)$$
$$g_6'(x) = \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)'\ln(x) + \frac{\sin(x)}{x} \times \frac{1}{x} = \frac{\cos(x)\,x - \sin(x)}{x^2}\ln(x) + \frac{\sin(x)}{x^2}$$
$$= \frac{\cos(x)\,x\ln(x) - \sin(x)\ln(x) + \sin(x)}{x^2}$$
Donc
$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f_6'(x) = \frac{\cos(x)\,x\ln(x) - \sin(x)\ln(x) + \sin(x)}{x^2}e^{\frac{\sin(x)}{x}\ln(x)}$$
Remarque : $f_6'(x)$ a le même signe que $\cos(x)\,x\ln(x) - \sin(x)\ln(x) + \sin(x)$ et heureusement que l'on ne se demande pas quel est son signe, là, je cale et je pense que ce n'est pas gagné d'avance !

Allez à : Exercice 26 :

Correction exercice 27 :
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{1}{x} = \pm\infty$$
Donc les fonctions
$$x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{et} \quad x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$
N'admettent pas de limites en 0 (ni de limite finie ni de limite infinie)

D'après les remarques préliminaires f n'est pas continue en 0, par suite f est ni dérivable ni de classe C^1.

Pour $x \neq 0$, g est le produit d'une fonction bornée $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ par une fonction $x \mapsto x$ qui tend vers 0 en 0 donc
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} g(x) = 0 = g(0)$$
Ce qui signifie que g est continue en 0.
$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$
D'après les remarques préliminaires le taux de variation de g en 0 n'admet pas de limite, donc g n'est pas dérivable en 0, par conséquent g n'est pas de classe C^1 en 0.

Pour $x \neq 0$, h est le produit d'une fonction bornée $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ par une fonction $x \mapsto x^2$ qui tend vers 0 en 0 donc

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} h(x)=0=h(0)$$

Ce qui signifie que h est continue en 0.

$$\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Pour $x\neq 0$, le taux de variation de h en 0 est le produit d'une fonction bornée $x\mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ par une fonction qui tend vers 0 $x\mapsto x$ en 0 donc

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{h(x)-h(0)}{x-0}=0$$

Ce taux de variation admet une limite donc h est dérivable en 0 et $h'(0)=0$ (le résultat de la limite)

$$\forall x\neq 0, h'(x)=2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)+x^2\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right)=2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

$x\mapsto x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ tend vers 0 en 0, mais $x\mapsto\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite en 0 donc h' n'admet pas de limite en 0 donc h' n'est pas continue en 0, ce qui signifie que h n'est pas de classe C^1 en 0.

Pour $x\neq 0$, i est le produit d'une fonction bornée $x\mapsto\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ par une fonction $x\mapsto x^3$ qui tend vers 0 en 0 donc

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} i(x)=0=i(0)$$

Ce qui signifie que i est continue en 0.

$$\frac{i(x)-i(0)}{x-0}=x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Pour $x\neq 0$, le taux de variation de i en 0 est le produit d'une fonction bornée $x\mapsto\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ par une fonction $x\mapsto x^2$ qui tend vers 0 en 0 donc

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{i(x)-i(0)}{x-0}=0$$

Ce taux de variation admet une limite donc i est dérivable en 0 et $i'(0)=0$ (le résultat de la limite)

$$\forall x\neq 0, i'(x)=3x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)+x^3\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right)=3x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)+x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

$x\mapsto x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ tend vers 0 en 0 et$x\mapsto x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ tendent vers 0 en 0 (toujours car elles sont le produit d'une fonction bornée par une fonction qui tend vers 0 lorsque x tend vers 0) , donc

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} i'(x)=0$$

Le fait que $i'(x)$ admette une limite finie en 0 et que i soit continue en 0 montre que i est de classe C^1.

Remarque :

En montrant que i est de classe C^1 en 0 on montre au passage que i est dérivable en 0, du coup, dans cette question on pouvait se passer du calcul de la limite du taux de variation de i en 0.

Allez à : Exercice 27 :

Correction exercice 28 :

1. Les fonctions f_n sont continues sur un intervalle fermé borné $[0,1]$ donc les fonctions f_n sont bornées et atteignent leur maximum pour un réel $\alpha_n\in[0,1]$. Si $\alpha_n\in\{0,1\}$, que ce passe-t-il ? Comme $f_n(0)=0^n\times g(0)=0$ et $f_n(1)=1^n\times g(1)=0$, cela signifie que la fonction f_n est constante et nulle sur $[0,1]$, dans ce cas particulier n'importe valeur strictement comprise entre 0 et 1 vérifie

$$\sup_{x\in]0.1[}|f_n(x)|=f_n(\alpha_n)(=0)\quad \text{et}\quad f_n'(\alpha_n)=0$$

Si $\alpha_n\in]0,1[$ $|f_n|$ atteint un extremum à l'intérieur de l'intervalle $[0,1]$ donc sa dérivée est nulle.

2.

$$f_n'(x) = nx^{n-1}g(x) + x^n g'(x) = x^{n-1}\big(ng(x) + xg'(x)\big)$$

Par conséquent $f_n'(\alpha_n) = 0$ et $\alpha_n \in]0,1[$ entraine que

$$ng(\alpha_n) + \alpha_n g'(\alpha_n) = 0$$

Donc

$$g(\alpha_n) = -\frac{\alpha_n g'(\alpha_n)}{n}$$

Et

$$f(\alpha_n) = \alpha_n^n\left(-\frac{\alpha_n g'(\alpha_n)}{n}\right) = -\frac{\alpha_n^{n+1} g'(\alpha_n)}{n}$$

On en déduit que

$$|f(\alpha_n)| = \left|\frac{\alpha_n^{n+1} g'(\alpha_n)}{n}\right| = \frac{|\alpha_n|^{n+1}|g_n'(\alpha_n)|}{n} \leq \frac{|1|^{n+1}|g_n'(\alpha_n)|}{n} = \frac{|g_n'(\alpha_n)|}{n}$$

Comme g' est continue, g' est bornée, ce qui signifie qu'il existe M telle que pour tout $x \in [0,1]$, $|g'(x)| \leq M$

D'où

$$|f(\alpha_n)| \leq \frac{M}{n} \to 0$$

Allez à : Exercice 28 :

Correction exercice 29 :

Pour utiliser le théorème des accroissements finis, il faut d'abord montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Si $x \neq 1$, f est dérivable. Etudions la fonction en $x = 1$.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{3-x^2}{2} = 1 = f(1) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x} = 1 = f(1)$$

Ce qui montre que la fonction est continue en $x = 1$.

Pour $x < 1$:

$$f'(x) = \frac{1}{2}(-2x) = -x$$

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} -x = -1$$

Pour $x > 1$:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} -\frac{1}{x^2} = -1$$

Le fait que f soit continue en 1 et que $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} f'(x)$, montre que f est dérivable en $x = 1$.

Bref, f est dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier f est continue sur $[0,2]$ et dérivable sur $]0,2[$, on peut appliquer le théorème des accroissements finis sur $[0,2]$ donc il existe $c \in]02[$ tel que : $f(2) - f(0) = (2-0)f'(c)$.

$$f(2) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad f(0) = \frac{3-0^2}{2} = \frac{3}{2}$$

Par conséquent

$$f(2) - f(0) = (2-0)f'(c) \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = 2f'(c) \Leftrightarrow f'(c) = -\frac{1}{2}$$

Supposons que $0 \leq c \leq 1$ alors

$$f'(c) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -c = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}$$

On vérifie que $0 \leq \frac{1}{2} \leq 1$ donc $c = \frac{1}{2}$ est une solution.

Supposons que $1 < c \leq 2$ alors

$$f'(c) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

On a $-\sqrt{2} \notin]1,2]$ et $\sqrt{2} \in]1,2]$, donc $\sqrt{2}$ est solution, il y a donc deux solutions $c = \frac{1}{2}$ et $c = \sqrt{2}$.

Allez à : Exercice 29 :

Correction exercice 30 :

1. Pour $x \neq y$. La fonction sin est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer le théorème des accroissements finis sur $[x, y]$ si $x < y$ (ou sur $[y, x]$ si $y < x$). Il existe $c \in]x, y[$ (ou $]y, x[$) tel que
$$\sin(x) = \sin(y) + (x - y)\cos(c)$$
Donc
$$\sin(x) - \sin(y) = (x - y)\cos(c)$$
On prend la valeur absolue
$$|\sin(x) - \sin(y)| = |x - y| \times |\cos(c)|$$
Puis comme $|\cos(c)| \leq 1$ on a
$$|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|$$
Pour $x = y$ l'inégalité est triviale.
2. La fonction $f: x \to \ln(1 + x)$ est continue est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ donc on peut appliquer le théorème des accroissements finis.
$$f'(x) = \frac{1}{1 + x}$$
Par conséquent il existe $c \in]0, x[$ tel que
$$\ln(1 + x) = \ln(1) + (x + 1 - 1) \times \frac{1}{1 + c} = \frac{x}{1 + c}$$
$$0 < c < x \Leftrightarrow 1 < 1 + c < 1 + x \Leftrightarrow \frac{1}{1 + x} < \frac{1}{1 + c} < 1 \Leftrightarrow \frac{x}{1 + x} < \frac{x}{1 + c} < x$$
Car $x > 0$
On en déduit que
$$\frac{x}{1 + x} < \ln(1 + x) < x$$

Allez à : Exercice 30 :

Correction exercice 31 :

Dans ce genre d'exercice on ne sait pas forcément comment commencer mais f vérifie les hypothèses du théorème des accroissements finis. Il existe $c \in]0,1[$ tel que
$$f(1) - f(0) = (1 - 0)f'(c) \Leftrightarrow f(1) = f'(c)$$
Cela montre que $f(1) \neq 0$,
Supposons que $f(1) > 0$ et faisons l'hypothèse qu'il existe $x_0 \in]0,1[$ tel que $f(x_0) < 0$ (en espérant arriver à une contradiction).
f étant continue sur $[x_0, 1]$ et comme $f(x_0) < 0$ et $f(1) > 0$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x_1 \in]x_0, 1[$ tel que $f(x_1) = 0$. Puis appliquons le théorème de Rolle entre 0 et x_1 (f vérifie évidemment ses hypothèses), il existe $d \in]0, x_1[$ tel que $f'(d) = 0$, ce qui contredit l'énoncé.
Si $f(1) < 0$ on suppose qu'il existe $x_0 \in]0,1[$ tel que $f(x_0) > 0$ et on fait pareil.

Allez à : Exercice 31 :

Correction exercice 32 :

f' est une fonction continue sur $[0,1]$ donc f' a un minimum et f' atteint ce minimum, autrement dit il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $f'(x_0) = \min\{f'(x),\ x \in [0,1]\}$, on pose $m = f'(x_0) > 0$ car pour tout $x \in [0,1]$ $f'(x) > 0$.

Puis on applique le théorème des accroissements finis à f entre 0 et $x \in]0,1]$, f vérifie les hypothèses du théorème, donc il existe $c \in]0, x[$ tel que

$$f(x) - f(0) = (x - 0)f'(c)$$

Ce qui équivaut à

$$f(x) = xf'(c) > xf'(x_0) = mx$$

Allez à : Exercice 32 :

Correction exercice 33 :

Soit g la fonction définie sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ défini par

$$g(x) = f(x) - f\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

$$g(0) = f(0) - f\left(\frac{1}{2}\right) \quad \text{et} \quad g\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) - f(1) = f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0) = -\left(f(0) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = -g(0)$$

La fonction g est continue, $g(0)$ et $g\left(\frac{1}{2}\right)$ sont de signes opposés, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $c \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ tel que $g(c) = 0$, c'est-à-dire tel que

$$f(c) = f\left(c + \frac{1}{2}\right)$$

Allez à : Exercice 33 :

Correction exercice 34 :

1. f_n est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$, de plus $f_n(0) = f_n(1) = 0$, on peut appliquer le théorème de Rolle alors il existe $\alpha_n \in]0,1[$ tel que $f_n'(\alpha_n) = 0$
2. $f_n'(x) = nx^{n-1}\sin(\pi x) + x^n \cos(\pi x) = x^{n-1}(n \sin(\pi x) + \pi x \cos(\pi x))$

$$f_n'(\alpha_n) = 0 \Leftrightarrow {\alpha_n}^{n-1}(n \sin(\pi\alpha_n) + \alpha_n \cos(\pi\alpha_n)) = 0 \Leftrightarrow n\sin(\pi\alpha_n) + \pi\alpha_n \cos(\pi\alpha_n)$$

Car $\alpha_n \neq 0$

Donc

$$f_n'(\alpha_n) = 0 \Leftrightarrow \sin(\pi\alpha_n) = -\frac{\pi\alpha_n}{n}\cos(\pi\alpha_n)$$

On en déduit que

$$f_n(\alpha_n) = {\alpha_n}^n \sin(\pi\alpha_n) = -\pi\frac{{\alpha_n}^{n+1}}{n}\cos(\pi\alpha_n)$$

3.

$$|f_n(\alpha_n)| = \left|-\pi\frac{{\alpha_n}^{n+1}}{n}\cos(\pi\alpha_n)\right| = \frac{\pi}{n}|{\alpha_n}^{n+1}\cos(\pi\alpha_n)| < \frac{\pi}{n}$$

Car $|{\alpha_n}^{n+1}| < 1$ et $|\cos(\pi\alpha_n)| \leq 1$

Par conséquent

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(\alpha_n) = 0$$

Allez à : Exercice 34 :

Correction exercice 35 :

D'après le théorème de Rolle (les hypothèses sont clairement vérifiées), il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f'(c) = 0$$

La fonction f vérifie $\forall x \in]a,b[$, $f''(x) \leq 0$, ce qui signifie que la fonction f' est décroissante, autrement dit si $x \leq c$ alors $f'(x) \geq f'(c) = 0$ et si $x \geq c$ alors $f'(x) \leq f'(c) = 0$. La fonction f est croissante sur $[a,c]$ et décroissante sur $[c,b]$. On en déduit que

$$x \in [a,c], 0 = f(a) \leq f(x) \quad \text{et} \quad x \in [c,b], f(x) \geq f(b) = 0$$

Ce qui montre bien que pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \geq 0$.

Allez à : Exercice 35 :

Correction exercice 36 :

1. f vérifie les hypothèses du théorème de Rolle donc il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.
2. Si $t \in]a,c[$ alors $a < t < c$ alors $f'(t) > f'(c) = 0$ (car f' est décroissante).
   Si $t \in]c,b[$ alors $c < t < b$ alors $f'(t) < f'(c) = 0$ (car f' est décroissante).
3. Soit $x \in [a,c]$ et $y \in [a,c]$ avec $x < y$, f est continue sur $[x,y]$ et dérivable sur $]x,y[$ donc il existe $d \in]x,y[\subset]a,c[$ tel que
   $$f(y) - f(x) = f'(d)(y - x) > 0$$
   Car $y > x$ et $f'(d) > 0$ d'après la question 2. On en déduit que pour tout
   $$x \in [a,c], \qquad f(y) > f(x)$$
   donc f est strictement croissante sur $[a,c]$.
   Soit $x \in [c,b]$ et $y \in [c,b]$ avec $x < y$, f est continue sur $[x,y]$ et dérivable sur $]x,y[$ donc il existe $e \in]x,y[\subset]c,b[$ tel que
   $$f(y) - f(x) = f'(e)(y - x) > 0$$
   Car $y > x$ et $f'(e) < 0$ d'après la question 2. On en déduit que pour tout
   $$x \in [c,b], \qquad f(y) < f(x)$$
   donc f est strictement décroissante sur $[c,b]$.
4. D'après la question 3. La fonction est strictement croissante sur $[a,c]$ et strictement décroissante sur $[c,b]$ donc elle admet un maximum global en $x = c$.
5. f est croissante sur $[a,c]$ donc pour tout $x \in]a,c]$, $x < a$, donc $f(x) \geq f(a) = 0$ et f est strictement décroissante sur $[c,b]$ donc pour tout $x \in [c,b[$, $x > b$ donc $f(x) \geq f(b) = 0$
   Comme $f(a) = f(b) = 0$, pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \geq 0$.

Allez à : Exercice 36 :

Correction exercice 37 :

1. $g: x \to \ln(x)$, g est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$, on peut appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction g entre a et b. $g'(x) = \frac{1}{x}$ donc il existe $c \in]a,b[$ tel que :
   $$\ln(b) - \ln(a) = (b - a) \times \frac{1}{c}$$
   $$0 < a < c < b \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{b-a}{b} < \frac{b-a}{c} < \frac{b-a}{a}$$
   Car $b - a > 0$.
   Donc
   $$\frac{b-a}{b} < \ln(b) - \ln(a) < \frac{b-a}{a}$$
2.
   2.1. Première méthode :
   $f(0) = f(1)$ et f est C^1 sur $[0,1]$ d'après le théorème de Rolle il existe $\alpha \in]0.1[$ tel que $f'(\alpha) = 0$, la fonction f' étant strictement décroissante, pour tout x tel que $0 < x < \alpha$, $f'(0) > f'(x) > f'(\alpha) = 0$.
   Deuxième méthode :
   f' est continue et $f'(0) > 0$ donc pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\alpha \geq 0$ tel que pour tout $x \in [0,\alpha]$

$$|f'(x) - f'(0)| < \epsilon$$

Ce qui entraine que

$$f'(0) - \epsilon < f'(x) < f'(0) + \epsilon$$

Il suffit de prendre $\epsilon = \frac{f'(0)}{2}$ pour montrer que pour tout $x \in [0, \alpha]$, $f'(x) > 0$.

2.2. Première méthode :

Appliquons le théorème des accroissements finis entre 0 et α, les hypothèses sont évidemment vérifiées, il existe $c \in]0, \alpha[$ tel que

$$f(\alpha) - f(0) = \alpha f'(c)$$

Comme $f(0) = 0$ et $f'(c) > 0$, on a $f(\alpha) > 0$

Deuxième méthode :

D'après 2.1. la dérivée est strictement positive sur l'intervalle $]0, \alpha]$ et la fonction est nulle en 0 donc elle est strictement croissante sur $[0, \alpha]$, par conséquent $0 < \alpha \Rightarrow 0 = f(0) < f(\alpha)$.

2.3. S'il existe $\beta \in]0,1[$ tel que $f(\beta) = 0$, les hypothèses du théorème de Rolle sont vérifiées entre 0 et β et entre β et 1 donc il existe $c_1 \in]0, \beta[$ et $c_2 \in]\beta, 1[$ tel que $f'(c_1) = 0$ et $f'(c_2) = 0$, comme $f''(x) < 0$ entraine que f' étant strictement décroissante ce « c » est unique, d'où la contradiction

2.4. D'après 2.2. il existe une valeur $\alpha \in]0,1[$ telle que $f(\alpha) > 0$, d'après 2.3. f ne s'annule pas sur $]0,1[$ et f est continue, par conséquent pour tout $x \in]0,1[$, $f(x) > 0$.

3. Soit $g: [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = ax + (1 - x)b$

$$g(0) = b; \quad g(1) = a; \quad g'(x) = a - b < 0$$

Donc g est une bijection décroissante de $[0,1]$ sur $[a, b]$ en fait le fait que g soit bijective n'a pas beaucoup d'importance mais cela permet d'affirmer facilement que $g([0,1]) = [a, b]$ et donc que $g(x) > 0$ sur $[0,1]$, le reste de la fonction ne pose pas de problème donc f est définie, continue, et dérivable autant de fois que l'on veut.

$$f(0) = \ln(0 \times a + (1 - 0)b) - 0 \times \ln(a) - (1 - 0)\ln(b) = \ln(b) - \ln(b) = 0$$
$$f(1) = \ln(1 \times a + (1 - 1)b) - 1 \times \ln(a) - (1 - 1)\ln(b) = \ln(a) - \ln(a) = 0$$

$$\forall x \in [0,1], \qquad f'(x) = \frac{a - b}{xa + (1 - x)b} - \ln(a) + \ln(b)$$

$$\forall x \in [0,1], \qquad f''(x) = -\frac{(a - b)(a - b)}{(xa + (1 - x)b)^2} = -\frac{(a - b)^2}{(xa + (1 - x)b)^2} < 0$$

$$f'(0) = \frac{a - b}{b} + \ln(b) - \ln(a) > \frac{a - b}{b} + \frac{b - a}{b} = 0$$

D'après 1. Inégalité de gauche.

$$f'(1) = \frac{a - b}{a} + \ln(b) - \ln(a) < \frac{a - b}{a} + \frac{b - a}{a} = 0$$

D'après 1. Inégalité de droite.

D'après 2.4. la fonction f est strictement positive sur $]0,1[$ donc

$$\ln(xa + (1 - x)b) - x\ln(a) - (1 - x)\ln(b) > 0$$

Autrement dit

$$\forall x \in]0,1[, \qquad x\ln(a) + (1 - x)\ln(b) < \ln(xa + (1 - x)b)$$

Allez à : Exercice 37 :

Correction exercice 38 :

4. $g: x \to e^x$, g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ on peut appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction g entre a et b. $g'(x) = e^x$ donc il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$e^b - e^a = (b - a) \times e^c$$
$$a < c < b \Rightarrow e^a < e^c < e^b \Rightarrow (b - a)e^a < e^b - e^a < (b - a)e^b$$

Car $b-a>0$.

5.

5.1. Première méthode :

$f(0)=f(1)$ et f est C^1 sur $[0,1]$ d'après le théorème de Rolle il existe $\alpha\in]0,1[$ tel que $f'(\alpha)=0$, la fonction f' étant strictement croissante, pour tout x tel que $0<x<\alpha$, $f'(0)<f'(x)<f'(\alpha)=0$.

Deuxième méthode :

f' est continue et $f'(0)<0$ donc pour tout $\epsilon>0$ il existe $\alpha\geq 0$ tel que pour tout $x\in[0,\alpha]$

$$|f'(x)-f'(0)|<\epsilon$$

Ce qui entraine que

$$f'(0)-\epsilon<f'(x)<f'(0)+\epsilon$$

Il suffit de prendre $\epsilon=-\frac{f'(0)}{2}$ pour montrer que pour tout $x\in[0,\alpha]$, $f'(x)<0$.

5.2. Première méthode :

Appliquons le théorème des accroissements finis entre 0 et α, les hypothèses sont évidemment vérifiées, il existe $c\in]0,\alpha[$ tel que

$$f(\alpha)-f(0)=\alpha f'(c)$$

Comme $f(0)=0$ et $f'(c)<0$, on a $f(\alpha)<0$

Deuxième méthode :

D'après 2.1. la dérivée est strictement négative sur l'intervalle $]0,\alpha]$ et la fonction est nulle en 0 donc elle est strictement décroissante sur $[0,\alpha]$, par conséquent $0<\alpha\Rightarrow 0=f(0)>f(\alpha)$.

5.3. S'il existe $\beta\in]0,1[$ tel que $f(\beta)=0$, les hypothèses du théorème de Rolle sont vérifiées entre 0 et β et entre β et 1 donc il existe $c_1\in]0,\beta[$ et $c_2\in]\beta,1[$ tel que $f'(c_1)=0$ et $f'(c_2)=0$, comme $f''(x)>0$ entraine que f' étant strictement croissante ce « c » est unique, d'où la contradiction, par conséquent il n'existe pas de $\beta\in]0,1[$ tel que $f(\beta)=0$.

5.4. D'après 2.2. il existe une valeur $\alpha\in]0,1[$ telle que $f(\alpha)<0$, d'après 2.3. f ne s'annule pas sur $]0,1[$ et f est continue, par conséquent pour tout $x\in]0,1[$, $f(x)<0$.

6. f est définie, continue, et dérivable autant de fois que l'on veut.

$$f(0)=e^{0\times a+(1-0)b}-0\times e^a-(1-0)e^b=e^b-e^b=0$$

$$f(1)=e^{1\times a+(1-1)b}-e^a-(1-1)e^b=e^a-e^a=0$$

$$\forall x\in[0,1],\qquad f'(x)=(a-b)e^{ax+(1-x)b}-e^a+e^b$$

$$\forall x\in[0,1],\qquad f''(x)=(a-b)^2e^{ax+(1-x)b}>0$$

$$f'(0)=(a-b)e^b-e^a+e^b=(a-b)e^b+e^b-e^a<(a-b)e^b+(b-a)e^b=0$$

D'après 1. Inégalité de droite.

$$f'(1)=(a-b)e^a-e^a+e^b=(a-b)e^a+e^b-e^a>(a-b)e^b+(b-a)e^b=0$$

D'après 1. Inégalité de gauche.

D'après 2.4. la fonction f est strictement négative sur $]0,1[$ donc

$$e^{xa+(1-x)b}-xe^a-(1-x)e^b<0$$

Pour tout $x\in]0,1[$

$$e^{xa+(1-x)b}<xe^{\mathrm{a}}+(1-x)e^b$$

Allez à : Exercice 38 :

Correction exercice 39 :

1. Appliquons le théorème des accroissements finis à la fonction

$$f_p(x)=\ln(\ln(p+x))$$

Entre $x=0$ et $x=1$

Vérifions que cette fonction vérifie les hypothèses,

$$0\leq x\leq 1\Leftrightarrow p\leq x+p\leq p+1\Leftrightarrow \ln(p)\leq\ln(x+p)\leq\ln(p+1)$$

Il faut encore prendre le logarithme, ce qui est possible car $2 \leq p$ entraine que $\ln(2) \leq \ln(p)$ et bien sur $\ln(2) > 0$, donc

$$0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow \ln(p) \leq \ln(x+p) \leq \ln(p+1) \Leftrightarrow \ln(\ln(p)) \leq \ln(\ln(x+p)) \leq \ln(\ln(p+1))$$

Cela montre que la fonction est définie et continue sur $[0,1]$, et qu'elle est dérivable sur $[0,1]$ donc sur $]0,1[$.

$$f_p'(x) = \frac{1}{\ln(p+x)} \times \frac{1}{p+x}$$

Il existe $c \in]0,1[$ tel que

$$f_p(1) - f_p(0) = (1-0)\frac{1}{\ln(p+c)} \times \frac{1}{p+c}$$

Ce qui équivaut à

$$\ln(\ln(p+1)) - \ln(\ln(p)) = \frac{1}{(p+c)\ln(p+c)}$$

2.

$$\begin{cases} p+c > p > 0 \\ \ln(p+c) > \ln(p) > 0 \end{cases} \Rightarrow (p+c)\ln(p+c) > p\ln(p) > 0 \Rightarrow \frac{1}{(p+c)\ln(p+c)} < \frac{1}{p\ln(p)}$$

3.

$$\ln(\ln(3)) - \ln(\ln(2)) < \frac{1}{2\ln(2)}$$
$$\ln(\ln(4)) - \ln(\ln(3)) < \frac{1}{3\ln(3)}$$
$$\vdots$$
$$\ln(\ln(n)) - \ln(\ln(n-1)) < \frac{1}{(n-1)\ln(n-1)}$$
$$\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n)) < \frac{1}{n\ln(n)}$$

En faisant la somme de ces $n-1$ lignes

$$\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)) < \frac{1}{2\ln(2)} + \frac{1}{3\ln(3)} + \cdots + \frac{1}{n\ln(n)}$$

Comme

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(\ln(n+1)) = +\infty$$
$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2\ln(2)} + \frac{1}{3\ln(3)} + \cdots + \frac{1}{n\ln(n)}\right) = +\infty$$

Allez à : Exercice 39 :

Correction exercice 40 :

1. Soient a et b deux réels avec $a < b$, soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$$

2. D'après le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction ln , qui est C^∞, il existe $c \in]n,n+1[$ tel que :

$$\ln(n+1) - \ln(n) = (n+1-n) \times \frac{1}{c} = \frac{1}{c}$$

Comme pour $n \geq 1$

$$n < c < n+1 \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < c < \frac{1}{n}$$

On a

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln(n) < \frac{1}{n}$$

3. En appliquant la question 2 à n, puis $n+1$,…, puis à $n+n-1=2n$

$$\frac{1}{n+1}<\ln(n+1)-\ln(n)<\frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{n+2}<\ln(n+2)-\ln(n+1)<\frac{1}{n+1}$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{n+(n-2)+1}<\ln(n+(n-2)+1)-\ln\big(n+(n-2)\big)<\frac{1}{n+(n-2)}$$

$$\frac{1}{n+(n-1)+1}<\ln(n+(n-1)+1)-\ln\big(n+(n-1)\big)<\frac{1}{n+(n-1)}$$

Puis on fait la somme de ces n inégalités

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}<\ln(2n)-\ln(n)<\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n-1}$$

Car dans le terme central les logarithmes se simplifient

Cela donne

$$u_n<\ln\left(\frac{2n}{n}\right)<\frac{1}{n}+u_n-\frac{1}{2n}=u_n+\frac{1}{2n}$$

L'inégalité de droite donne

$$u_n<\ln(2)$$

Et celle de gauche donne

$$\ln(2)-\frac{1}{2n}<u_n$$

En réunissant ces deux inégalités

$$\ln(2)-\frac{1}{2n}<u_n<\ln(2)$$

Le théorème des gendarmes entraine que

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\ln(2)$$

Autre façon de faire, on applique la question 2 à $n+k$ $k\in\{0,\dots,n-1\}$

$$\frac{1}{n+k+1}<\ln(n+k+1)-\ln(n+k)<\frac{1}{n+k}$$

On fait la somme

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n+k+1}<\sum_{k=0}^{n-1}(\ln(n+k+1)-\ln(n+k))<\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n+k}$$

Donc

$$u_n<\sum_{k=0}^{n-1}\ln(n+k+1)-\sum_{k=0}^{n-1}\ln(n+k)<\frac{1}{n}+u_n-\frac{1}{2n}=u_n+\frac{1}{2n}$$

En faisant le changement d'indice $k'=k+1$ dans la première somme, si $k=0$ alors $k'=1$ et si $k=n-1$ alors $k'=n$

$$u_n<\sum_{k'=1}^{n}\ln(n+k')-\sum_{k=0}^{n-1}\ln(n+k)<u_n+\frac{1}{2n}$$

L'indice k' est un indice « muet » donc on peut l'appeler k

$$u_n<\sum_{k=1}^{n}\ln(n+k)-\sum_{k=0}^{n-1}\ln(n+k)<u_n+\frac{1}{2n}$$

Comme

$$\sum_{k=1}^{n}\ln(n+k)-\sum_{k=0}^{n-1}\ln(n+k)=\ln(n+n)-\ln(n)=\ln\left(\frac{2n}{n}\right)=\ln(2)$$

Car on ne garde que le dernier terme de la première somme et le premier de la seconde somme. Puis on finit de la même façon.

Allez à : Exercice 40 :

Correction exercice 41 :

On pose $f(x) = e^x - P(x)$, ainsi le problème est de trouver le nombre de solution réelle de $f(x) = 0$

Soit $P_0 = a \in \mathbb{R}^*$ un polynôme de degré 1,

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = a$$

Si $a \leq 0$ il n'y a pas de solution et si $a > 0$ alors il y a une solution. Donc $f(x) = 0$ a au plus 1 solution.

Posons (H_n) « $f(x) = 0$ a au plus n solutions où $n = d°P$ »

(H_0) est vraie.

Montrons que (H_n) entraine (H_{n+1})

Soit P_{n+1} un polynôme de degré $n + 1$, et supposons que f, définie par $f(x) = e^x - P_{n+1}(x)$ admet au moins $n + 2$ solutions que l'on notera $a_0, a_1, \dots, a_{n+1}$ avec $a_0 < a_1 < \dots < a_{n+1}$.

D'après le théorème de Rolle, puisque f est dérivable sur $\mathbb{R}$,

$$\forall k \in \{0,1, \dots, n\}, \exists c_k \in]a_k, a_{k+1}[, f'(c_k) = 0$$

Ce qui entraine que $f'(x) = 0$ a au moins $n + 1$ solutions mais

$$f'(x) = e^x - P'_{n+1}(x)$$

P'_{n+1} est de degré n donc d'après (H_n) $f'(x) = 0$ à au plus n solutions d'où la contradiction, ce qui montre que $f(x) = 0$ a au plus $n + 1$ solutions, on a bien montré que $(H_n) \Rightarrow (H_{n+1})$ donc

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, où $n = d°P$ $e^x = P(x)$ a au plus n solutions, et donc un nombre finis de solutions.

Allez à : Exercice 41 :

Correction exercice 42 :

Comme f est dérivable en 0

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 0$$

Donc

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{f(x)}{x} - \frac{f(x) - 1}{x - 1} \right) = 0 - \frac{f(0) - 1}{0 - 1} = -\frac{-1}{-1} = -1$$

Comme f est dérivable en 1 et que

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = 0$$

Donc

$$\lim_{x \to 1^-} \left(\frac{f(x)}{x} - \frac{f(x) - 1}{x - 1} \right) = \frac{f(1)}{1} - 0 = \frac{1}{1} = 1$$

Cela montre que g est une fonction continue sur $[0,1]$, on peut alors utiliser le théorème des valeurs intermédiaires. $g(0) = -1$ et $g(1) = 1$, et $0 \in]-1,1[$ donc il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que

$$g(\alpha) = 0$$

Ce qui équivaut à

$$\frac{f(\alpha)}{\alpha} = \frac{f(\alpha) - 1}{\alpha - 1}$$

$$\frac{f(\alpha)}{\alpha} = \frac{f(\alpha) - 1}{\alpha - 1} \Leftrightarrow (\alpha - 1) f(\alpha) = \alpha (f(\alpha) - 1) \Leftrightarrow \alpha f(\alpha) - f(\alpha) = \alpha f(\alpha) - \alpha \Leftrightarrow f(\alpha) = \alpha$$

Allez à : Exercice 42 :

Correction exercice 43 :

1. $x \to x^3$ et f sont continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$ donc φ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.
$$\varphi'(x) = \big(f(b) - f(a)\big)3x^2 - (b^3 - a^3)f'(x)$$
2.
$$\varphi(a) = \big(f(b) - f(a)\big)a^3 - (b^3 - a^3)f(a) = a^3 f(b) - a^3 f(a) - b^3 f(a) + a^3 f(a) = a^3 f(b) - b^3 f(a)$$
$$\varphi(b) = \big(f(b) - f(a)\big)b^3 - (b^3 - a^3)f(b) = b^3 f(b) - b^3 f(a) - b^3 f(b) + a^3 f(b) = -b^3 f(a) + a^3 f(b)$$
Donc
$$\varphi(a) = \varphi(b)$$
D'après 1. φ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ et alors φ vérifie les hypothèses du théorème de Rolle, il existe donc $c \in]a, b[$ tel que
$$\varphi'(c) = 0 \Leftrightarrow 3c^2\big(f(b) - f(a)\big) - (b^3 - a^3)f'(c) = 0 \Leftrightarrow 3c^2\big(f(b) - f(a)\big) = (b^3 - a^3)f'(c)$$

Allez à : Exercice 43 :

Correction exercice 44 :

f vérifie les hypothèses du théorème des accroissements finis mais la formule à montrer ne correspond pas à la formule habituelle. Comme il y a une exponentielle on peut penser à considérer le logarithme de cette égalité, ce qui est possible parce que pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) > 0$.
$$\frac{f(b)}{f(a)} = e^{(b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{f(b)}{f(a)}\right) = (b - a)\frac{f'(c)}{f(c)} \Leftrightarrow \ln\big(f(b)\big) - \ln\big(f(a)\big) = (b - a)\frac{f'(c)}{f(c)}$$
Vu ainsi, cela devient plus clair, on va appliquer la formule des accroissements finis à la fonction g définie par :
$$g(x) = \ln\big(f(x)\big)$$
$g: [a, b] \to \mathbb{R}$ une application continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ car f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ et que $\forall x \in [a, b], f(x) > 0$, donc il existe $c \in]a, b[$ telle que :
$$g(b) - g(a) = (b - a)g'(c) \qquad (1)$$
Comme
$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$
(1) équivaut à
$$\ln\big(f(a)\big) - \ln\big(f(b)\big) = (b - a)\frac{f'(c)}{f(c)} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{f(b)}{f(a)}\right) = (b - a)\frac{f'(c)}{f(c)} \Leftrightarrow \frac{f(b)}{f(a)} = e^{(b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}}$$

Allez à : Exercice 44 :

Correction exercice 45 :

1.
$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad g'(x) = \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2} = \frac{f'(x)}{x} - \frac{f(x)}{x^2}$$
2. Appliquons le théorème des accroissements finis entre 0 et x. f est continue sur $[0, x]$ et dérivable sur $]0, x[$ donc les conditions sont réalisées. Il existe $c \in]0, x[$ tel que :
$$f(x) - f(0) = f'(c)(x - 0) \Leftrightarrow f(x) = xf'(c)$$
Donc
$$g'(x) = \frac{xf'(x) - xf'(c)}{x^2} = \frac{x\big(f'(x) - f'(c)\big)}{x^2} = \frac{f'(x) - f'(c)}{x}$$

Comme $x > 0$ et que f' croissante entraine que $c < x \Rightarrow f'(c) \leq f'(x)$, on a

$$g'(x) \geq 0$$

Dons g est croissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$

Allez à : Exercice 45 :

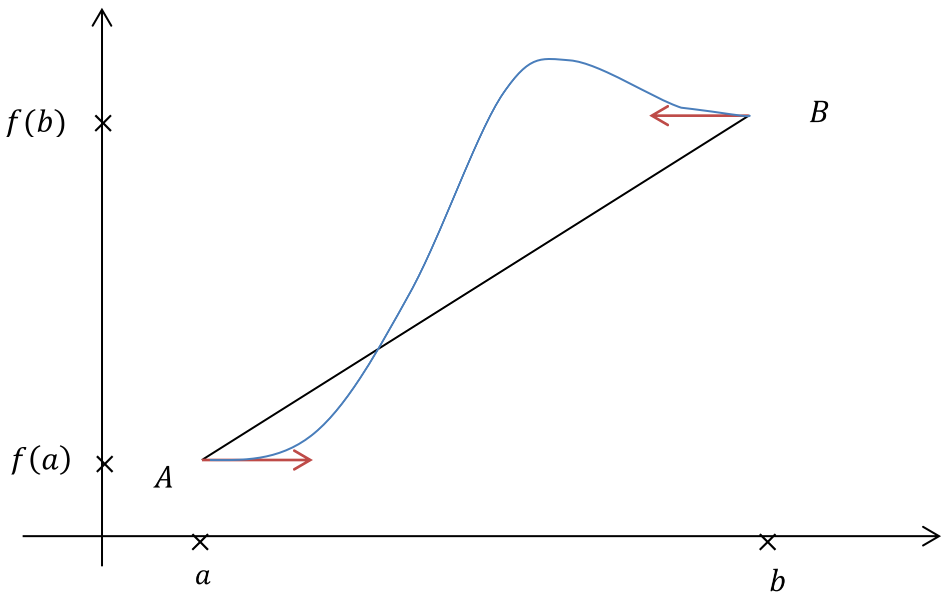
Correction exercice 46 :

Remarque préliminaire

$$y = \frac{f(a) - f(b)}{a - b} x + \frac{af(b) - bf(a)}{a - b}$$

Est l'équation de la droite passant par $A = \big(a, f(a)\big)$ et par $B = \big(b, f(b)\big)$, il suffit de remplacer x par a et on trouve que $y = f(a)$, puis de remplacer x par b et on trouve que $y = f(b)$

Donc g mesure la différence entre la droite (AB) et la courbe représentative de f (et ceci entre $x = a$ et $x = b$). Le but des questions est de montrer que lorsque x est proche de a alors la droite est au-dessous de la courbe (donc que $g(x) > 0$) et que lorsque que x est proche de b alors la courbe est au-dessus de la courbe (donc que $g(x) < 0$). Sur le dessin ci-dessous cela paraitra plus clair.



Cette courbe représente le graphe d'une fonction dérivable mais l'énoncé n'impose pas qu'elle le soit, on sait simplement qu'elle est dérivable en a et en b (Et de dérivée nulle).

1.

i. On va calculer la différence entre les deux valeurs de g.

$$f(x)-f(a)-(x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}-\left(f(x)-f(b)-(x-b)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)$$
$$=f(x)-f(a)-x\frac{f(b)-f(a)}{b-a}+a\frac{f(b)-f(a)}{b-a}-f(x)+f(b)$$
$$+x\frac{f(b)-f(a)}{b-a}-b\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$
$$=-f(a)+a\frac{f(b)-f(a)}{b-a}+f(b)-b\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$
$$=f(b)-f(a)+(a-b)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$
$$=f(b)-f(a)-(b-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f(b)-f(a)-\big(f(b)-f(a)\big)$$
$$=0$$

Donc

$$g(x)=f(x)-f(b)-(x-b)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Allez à : Exercice 46 :

ii. Il est clair que $g(a)=0$.

$$\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=\frac{f(x)-f(a)-(x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}{x-a}=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

En prenant la définition de g

$$\lim_{x\to a^+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$
$$=-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$g(b)=f(b)-f(a)-(b-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f(b)-f(a)-\big(f(b)-f(a)\big)=0$$

En prenant

$$g(x)=f(x)-f(b)-(x-b)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\frac{g(x)-g(b)}{x-b}=\frac{f(x)-f(b)-(x-b)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}{x-b}=\frac{f(x)-f(b)}{x-b}-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$
$$\lim_{x\to b^-}\frac{g(x)-g(b)}{x-b}=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$
$$=-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Cela montre que g est dérivable en a et en b et que

$$g'(a)=-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\quad\text{et que}\quad g'(b)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Allez à : Exercice 46 :

iii. Comme $b>a$ et $f(b)>f(a)$ on a :

$$\Delta=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}>0$$

Donc $g'(a)<0$ et $g'(b)>0$.

Attention rien ne dit que g est dérivable pour des valeurs plus grandes que a même toutes petites donc en déduire que sur $[a,a+\eta]$ $g'(x)<0$ donc que g est décroissante, et puisque $g(a)=0$ on a $g(x)<0$ est faux.

Reprenons la définition de la limite avec les « ϵ »

$$\lim_{x\to a^+} g'(x) = -\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = -\Delta \Leftrightarrow \forall\epsilon>0, \exists\eta>0, \forall x, 0\le x-a\le\eta$$
$$\Rightarrow \left|\frac{g(x)-g(a)}{x-a}+\Delta\right| \le \epsilon$$
$$\left|\frac{g(x)-g(a)}{x-a}+\Delta\right| \le \epsilon \Leftrightarrow -\epsilon \le \frac{g(x)}{x-a}+\Delta \le \epsilon \Leftrightarrow -\epsilon-\Delta \le \frac{g(x)}{x-a} \le \epsilon-\Delta$$
$$\Rightarrow g(x) \le (x-a)(\epsilon-\Delta)$$

Car $x-a>0$, il reste à prendre $\epsilon=\frac{\Delta}{2}$, en tous les cas strictement inférieur à Δ pour montrer que pour tout x vérifiant $0<x-a\le\eta$ c'est-à-dire $a<x\le a+\eta$ on a $g(x)<0$

$$\lim_{x\to b^-} g'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \Delta \Leftrightarrow \forall\epsilon>0, \exists\eta'>0, \forall x, 0\le b-x\le\eta'$$
$$\Rightarrow \left|\frac{g(x)-g(b)}{x-b}-\Delta\right| \le \epsilon$$
$$\left|\frac{g(x)-g(b)}{x-b}-\Delta\right| \le \epsilon \Leftrightarrow -\epsilon \le \frac{g(x)}{x-b}-\Delta \le \epsilon \Leftrightarrow -\epsilon+\Delta \le \frac{g(x)}{x-b} \le \epsilon+\Delta$$
$$\Rightarrow (-\epsilon+\Delta)(x-b) \ge g(x)$$

Car $x-b<0$, il reste à prendre $\epsilon=\frac{\Delta}{2}$, en tous les cas strictement inférieur à Δ pour montrer que pour tout x vérifiant $0<b-x\le\eta'$ c'est-à-dire $b-\eta'\le x<b$ on a
$$g(x) < \left(-\frac{\Delta}{2}+\Delta\right)(x-b) = \frac{\Delta}{2}(x-b) < 0$$

Car $x<b$.

Allez à : Exercice 46 :

2. Il suffit de prendre $x_1\in\left]a,a+\eta\right[$ et $x_2\in\left]b-\eta',b\right[$ pour avoir $g(x_1)<0$ et $g(x_2)>0$, g étant continue sur $[x_1,x_2]$, $g(x)$ prend toutes les valeurs comprise entre $g(x_1)$ et $g(x_2)$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires, en particulier, il existe $c\in\left]x_1,x_2\right[\subset\left]a,b\right[$ tel que $g(c)=0$.

Allez à : Exercice 46 :

3. En prenant la définition de g
$$g(c)=0 \Leftrightarrow f(c)-f(a)-(c-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0 \Leftrightarrow f(c)-f(a)=(c-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$
$$\Leftrightarrow \frac{f(c)-f(a)}{c-a}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$
En prenant $g(x)$ dans le 1. i
$$f(c)-f(b)-(c-b)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0 \Leftrightarrow f(c)-f(b)=(c-b)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$
$$\Leftrightarrow \frac{f(c)-f(b)}{c-b}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$
On en déduit les deux égalités demandées.

Allez à : Exercice 46 :

Correction exercice 47 :

1. f est continue sur $[a,a+h]$ et dérivable sur $\left]a,a+h\right[$ si $h>0$ (ou continue sur $[a+h,a]$ et dérivable sur $\left]a+h,a\right[$ si $h<0$) donc on peut appliquer le théorème des accroissements finis à f sur $[a,a+h]$ si $h>0$ (ou sur $[a+h,h]$ si $h<0$), ce qu'il signifie qu'il existe $c\in\left]a,a+h\right[$ (ou sur $\left]a+h,a\right[$ si $h<0$). Dans ces deux cas $|c-a|<h$
$$f(a+h)-f(a)=(a+h-a)f'(c)=hf'(c)$$
Donc

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(c)$$

Allez à : Exercice 47 :

2. f' admet une limite l en a^- si

$$\forall\epsilon>0,\exists\eta>0,\qquad a-x\le\eta\Rightarrow|f'(x)-l|\le\epsilon$$

Car $|x-a|=-(x-a)=a-x$

On choisit donc $h=\eta$ ainsi

$$|f'(c)-l|\le\epsilon$$

Ce qui entraine que

$$\forall\epsilon>0,\exists\eta>0,\qquad\left|\frac{f(a+\eta)-f(a)}{\eta}-l\right|\le\epsilon$$

Autrement dit

$$\lim_{\substack{\eta\to0\\ \eta>0}}\frac{f(a+\eta)-f(a)}{\eta}=l$$

La fonction f étant dérivable en a, cette limite vaut $f'(a)$, par conséquent $f'(a)=l$.

Le raisonnement est identique pour montrer l'autre limite, ou alors on peut considérer la fonction $f_-(x)=-f(-x)$ ce qui équivaut à ce que et ce qui entraine que $f_-'(x)=-\big(-f'(-x)\big)=f'(-x)$

$$\lim_{x\to a^+}f'(x)=\lim_{x\to a^+}f_-'(-x)$$

Puis on fait le changement de variable $t=-x$, lorsque $x\to a^+$ alors $t\to -a^-$ par conséquent

$$\lim_{x\to a^+}f'(x)=\lim_{x\to a^+}f_-'(-x)=\lim_{t\to -a^-}f_-'(t)=f_-'(-a)$$

D'après la démonstration ci-dessus et donc

$$\lim_{x\to a^+}f'(x)=\lim_{x\to a^+}f_-'(-x)=\lim_{t\to -a^-}f_-'(t)=f_-'(-a)=f'(a)$$

Allez à : Exercice 47 :

3. E est non vide et majoré par $g(a)$ car g est croissante donc E admet une borne supérieure m. $g(a)$ est un majorant de E et m est le plus petit des majorant donc

$$m\le g(a)$$

F est non vide et minorée par $g(a)$ car g est croissante donc F admet une borne inférieure M. $g(a)$ est un minorant de F et M est le plus grand des minorants donc

$$g(a)\le M$$

Allez à : Exercice 47 :

4. Nous allons utiliser le fait que m est la borne supérieure de E.

Pour tout $\epsilon>0$ il existe $g(t)\in E$ tel que

$$m-\epsilon<g(t)<m$$

Donc, comme g est croissante, pour tout x tel que $t<x<a$, $g(t)<g(x)<g(a)$, m étant la borne supérieure de E, on a $g(t)<g(x)<m$, ce qui entraine que $g(t)-m<g(x)-m<0$

On en déduit que pour tout $\epsilon>0$, il existe $\eta=a-t$ tel que $a-\eta<x<a$ (ce qui équivaut à $t=a-(a-t)<x<a$, on a $g(t)<g(x)<m$, ce qui entraine que

$$m-\epsilon<g(t)<g(x)<m\Rightarrow-\epsilon<g(x)-m<0$$

Ce qui montre bien que la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers a^- est m.

Nous allons utiliser le fait que M est la borne supérieure de F.

Pour tout $\epsilon>0$ il existe $g(u)\in F$ tel que

$$M<g(u)<M+\epsilon$$

Donc, comme g est croissante, pour tout y tel que $a<y<u$, $g(a)<g(y)<g(u)$, M étant la borne inférieure de F, on a $M<g(y)<g(u)$, ce qui entraine que $0<g(y)-M<g(u)-M$. On en déduit que pour tout $\epsilon>0$, il existe $\eta=u-a$ tel que $a<y<a+\eta$ (ce qui équivaut à $a<y<a+u-a=u$, on a $M<g(y)<g(u)$, ce qui entraine que

$$M<g(y)<g(u)<M+\epsilon$$

Ce qui montre bien que la limite de $g(y)$ lorsque y tend vers a^+ est M.

Allez à : Exercice 47 :

5. Comme f est dérivable en a, d'après le 2. Il suffit de montrer que $f'(x)$ admet une limite en a^- et en a^+.

   On applique à f' le résultat de 3.
$$m \leq f'(a) \leq M$$
   Où
$$m = \inf\{f'(x), x < a\} \quad \text{et} \quad M = \sup\{f'(y), y > a\}$$
   On a montré au 5.
$$\lim_{x \to a^-} f'(x) = m \quad \text{et} \quad \lim_{x \to a^+} f'(x) = M$$
   D'après le 2. (puisque $f'(x)$ admet une limite en a^- et a^+
$$\lim_{x \to a^-} f'(x) = f'(a) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to a^+} f'(x) = f'(a)$$
   Ce qui montre que
$$\lim_{x \to a} f'(x) = f'(a)$$
   Autrement dit f' est continue.

Allez à : Exercice 47 :

Fonctions élémentaires

Exercice 1.

Déterminer les limites de x^n lorsque $n \to +\infty$ selon les valeurs de x.

Aller à : Correction exercice 1

Exercice 2.

Déterminer les limites de $(\ln(x))^n$, avec $n \in \mathbb{N}$, lorsque $n \to +\infty$

Aller à : Correction exercice 2

Exercice 3.

Résoudre

$$x^y = y^x$$

Lorsque x et y sont des entiers strictement positifs.

Aller à : Correction exercice 3

Exercice 4.

Déterminer la limite quand x tend vers 0^+ (avec $x \neq 0$) de :

$$\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}$$

(On pourra utiliser une variable auxiliaire bien choisie tendant vers $+\infty$).

Aller à : Correction exercice 4

Exercice 5.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) e^{-x^2}$

1. Déterminer les limites de f à l'infini.
2. Etudier les variations de f.
3. Tracer la courbe représentative de f.

Aller à : Correction exercice 5

Exercice 6.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (2x - 1)e^{x-1} + 4$$

1. Etudier les variation de f sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer les limites de f en $\pm\infty$.
3. Tracer sommairement le graphe de f.

Aller à : Correction exercice 6

Exercice 7.

Soient f et g les fonctions définies par

$$f(x) = e^{-x} + (1 - e^{-x}) \ln(1 - e^{-x}) \qquad \text{et} \qquad g(x) = \ln(1 - e^{-x})\, e^x$$

1. Montrer que f et g sont définies pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$.
2. Calculer les variations de f et en déduire que pour tout $x > 0$, $f(x) > 0$.
3. Montrer que $g'(x) = \frac{e^x}{1-e^{-x}} f(x)$.
4. En déduire les variations de g

5. Calculer la limite de g en 0^+, puis calculer la limite de g en $+\infty$ (on pourra poser $X = -e^{-x}$)
6. Tracer le graphe de g.

Allez à : Correction exercice 7

Exercice 8.

Soit $f: [0, \infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.
2. Pour tout $x > 0$ calculer $f'(x)$.
3. Calculer

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x)$$

Que peut-on en déduire graphiquement ?

4. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   Que peut-on en déduire graphiquement ?
5. Dresser le tableau de variation de f et tracer sommairement son graphe.

Allez à : Correction exercice 8

Exercice 9.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $f'(x)$ et en déduire les variations de f.
3. Calculer les limites de f en $\pm\infty$. Puis les limites en $\pm\infty$ de $f(x) - x$, en déduire que le graphe de f admet une asymptote en $\pm\infty$.
4. Tracer sommairement le graphe de f.

Aller à : Correction exercice 9

Exercice 10.

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Calculer la dérivée de f
3. Quelles sont les variations de f.

Allez à : Correction exercice 10

Exercice 11.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

1. Vérifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $f'(x)$. On exprimera $f'(x)$ sous la forme $\left(u(x)\right)^\alpha$ où u est un polynôme et α un réel.
3. Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

Aller à : Correction exercice 11

Exercice 12.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x)=\ln\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$$
1. Déterminer l'ensemble sur lequel f est définie et continue.
2. Calculer $f'(x)$. On exprimera $f'(x)$ sous la forme $\beta\big(u(x)\big)^{\alpha}$ où u est un polynôme et α et β sont des réels.
3. Calculer la limite de f en $+\infty$.

Aller à : Correction exercice 12

Exercice 13.

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=2\sin(x)+\sin(2x)$.
1. Déterminer l'ensemble de définition de f, sa période et sa parité. En déduire un ensemble d'étude.
2. Calculer la dérivée de f et déterminer son signe.
3. Dresser le tableau de variation.
4. Tracer la courbe représentative de f.

Aller à : Correction exercice 13

Exercice 14.

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=2\cos(x)+\sin(2x)$.
1. Déterminer l'ensemble de définition de f, sa période et sa parité. En déduire un ensemble d'étude.
2. Calculer la dérivée de f et déterminer son signe sur $[-\pi,\pi]$.
3. Dresser le tableau de variation.
4. Tracer la courbe représentative de f sur $[-\pi,\pi]$.

Allez à : Correction exercice 14

Exercice 15.

Soit f la fonction définie sur $I=\mathbb{R}$ par :
$$f(x)=\sin^2(x)+\frac{1}{2}\cos(x)$$
1. Etudier la parité de f et sa périodicité, en déduire un intervalle d'étude.
2. Montrer qu'il existe un unique $x_0\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$, tel que $f'(x_0)=0$.
3. Etudier les variations de f sur $[0,\pi]$.
4. Dresser le tableau de variation de f et tracer le graphe de f.

Allez à : Correction exercice 15

Exercice 16.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x)=\frac{1}{3}\cos(3x)-\frac{3}{4}\cos(2x)$$
1. Déterminer la période de f, sa parité et en déduire un intervalle d'étude I.
2. Exprimer $\sin(3x)$ et $\sin(2x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.
3. Etudier les variation de f sur I.

On admettra qu'il existe un unique $x_0\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right]$ tel que $\cos(x_0)=-\frac{1}{4}$ tel que $\cos(x)\geq-\frac{1}{4}$ si $x\in[0,x_0]$ et $\cos(x)\leq-\frac{1}{4}$ si $x\in[x_0,\pi]$.

Si on connait les fonctions trigonométriques réciproques donner un nom à x_0. (Hors programme)

4. Calculer $f(0)$, $f(x_0)$ et $f(\pi)$ sous forme rationnelle.
5. Dresser le tableau de variation. Tracer sommairement le graphe de f sur trois périodes.

Aller à : Correction exercice 16

Corrections

Correction exercice 1.

Si $x < -1$ alors x^n n'a pas de limite mais $\lim\limits_{n\to+\infty} |x|^n = +\infty$

Si $x = -1$ alors $x^n = (-1)^n$ n'a pas de limite.

Si $|x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = 0$

Si $x = 1$ alors $x^n = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = 1$

Si $x > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = +\infty$

Profitons de ce petit exercice pour rappeler les équivalences très importantes suivantes :

$-1 < x < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow 1 - x^2 > 0$

Aller à : Exercice 1

Correction exercice 2.

$$-1 < \ln(x) < 1 \Leftrightarrow e^{-1} < x < e \Leftrightarrow \frac{1}{e} < x < e$$

Donc

Evidemment $x > 0$.

Si $0 < x \leq \frac{1}{e}$ alors $\ln(x) < -1$ et $(\ln(x))^n$ n'a pas de limite.

Si $\frac{1}{e} < x < e$ alors $-1 < \ln(x) < 1$ et $(\ln(x))^n \to 0$

Si $x = e$ alors $\ln(x) = 1$ et $(\ln(x))^n = 1 \to 1$

Si $x > e$ alors $\ln(x) > 1$ et $(\ln(x))^n \to +\infty$

Aller à : Exercice 2

Correction exercice 3.

$$x^y = y^x \Leftrightarrow e^{y\ln(x)} = e^{x\ln(y)} \Leftrightarrow y\ln(x) = x\ln(y) \Leftrightarrow \frac{\ln(x)}{x} = \frac{\ln(y)}{y} \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

Si on pose $f(t) = \frac{\ln(t)}{t}$

$$f'(t) = \frac{\frac{1}{t}t - \ln(t) \times 1}{t^2} = \frac{1 - \ln(t)}{t^2}$$

Les variations de cette fonction sont résumées dans le tableau ci-dessous

t	0		1		e		$+\infty$
$f'(t)$	$\Vert$		$+$		0	$-$	
$f(t)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

Si $x \leq 1$, il y a une unique solution (x, x).

Si $1 < x < e$, il y a deux couples de solutions (x, x) et (x, y) avec $y > e$.

Si $x = e$, il y a une unique solution (e, e)

Si $x > e$, il y a deux couples de solutions (x, x) et (x, y) avec $y < e$.
Maintenant cherchons les solutions dans $(\mathbb{N}^*)^2$:
$x = n = 1$ donne la solution $(1,1)$.
$x = n = 2 \in]1, e[$, on cherche l'unique $y = m > e$ tel que $2^m = m^2$ (s'il existe).
$m = 3$ ne marche pas, $m = 4$ est solution (c'est donc la seule).

Aller à : Exercice 3

Correction exercice 4.

On pose $X = \frac{1}{x}$, si $x \to 0^+$ alors $X \to +\infty$

$$\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3} = X^3 e^{-X^2}$$

Il s'agit d'une forme indéterminée puisque X^3 tend vers l'infini et e^{-X^2} tend vers 0.
La fonction exponentielle l'emporte sur les fonctions puissances (lors d'une forme indéterminée)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3} = \lim_{X\to+\infty} X^3 e^{-X^2} = 0$$

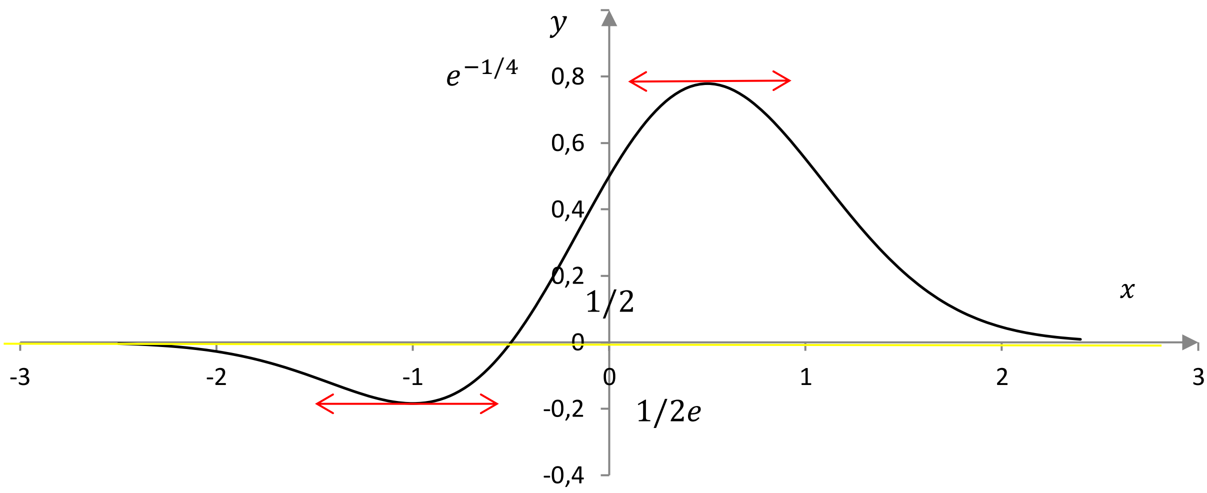
Aller à : Exercice 4

Correction exercice 5.

1. Si $x < 0$ on pose $x^2 = X \Leftrightarrow x = -\sqrt{X}$, donc $f(x) = (-\sqrt{X} + \frac{1}{2})e^{-X} \xrightarrow[X\to+\infty]{} 0$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$
Si $x > 0$ on pose $x^2 = X \Leftrightarrow x = \sqrt{X}$, donc $f(x) = (\sqrt{X} + \frac{1}{2})e^{-X} \xrightarrow[X\to+\infty]{} 0$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$
Ceci dit dans ce cas les limites sont presque évidentes.
2. $f'(x) = e^{-x^2} + \left(x + \frac{1}{2}\right)(-2x)e^{-x^2} = (-2x^2 - x + 1)e^{-x^2}$
Le polynôme $-2X^2 - X + 1$ admet $X_1 = -1$ et $X_2 = \frac{1}{2}$ comme racines donc
$-2X^2 - X + 1 = -2(X + 1)(X - \frac{1}{2})$
Donc $f'(x) = -2(x + 1)(x - \frac{1}{2})e^{-x^2}$
On en déduit le tableau de variation de f

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\frac{-1}{2e}$	$\nearrow$	$e^{-\frac{1}{4}}$	$\searrow$	0

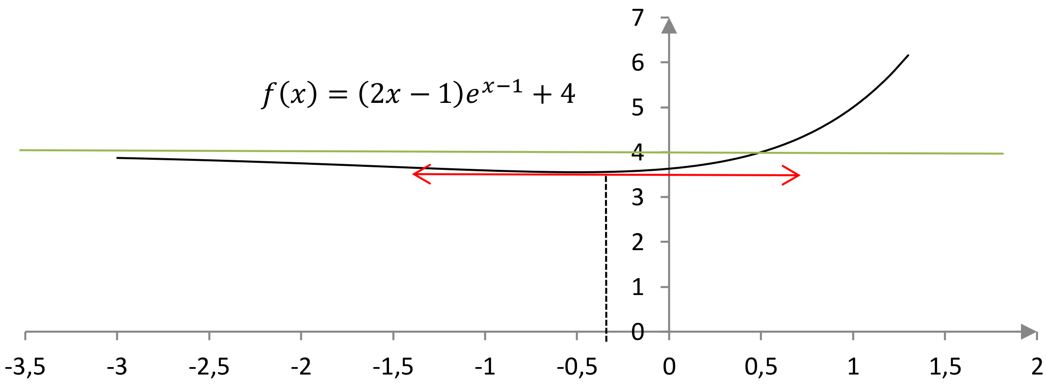
3. $\frac{-1}{2e} \approx -0{,}2$ en gros et $e^{-\frac{1}{4}} \approx 0{,}8$ en gros.



Aller à : Exercice 5

Correction exercice 6.

1. f est évidemment définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Comme $e^{x-1}=e^x\times e^{-1}=\frac{1}{e}e^x$ on a
$$f(x)=(2x-1)e^{x-1}+4=\frac{1}{e}(2x-1)e^x+4$$
$$f'(x)=2e^{x-1}+(2x-1)e^{x-1}=e^{x-1}(2+2x-1)=e^{x-1}(2x+1)$$
Comme $e^{x-1}>0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $2x+1$
Si $x<-\frac{1}{2}$ alors $f'(x)$ est négative et f est décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right[$.
Si $x>-\frac{1}{2}$ alors $f'(x)$ est positive et f est croissante sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$.
2. L'exponentielle l'emporte sur les fonction polynômes donc
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=4\qquad et\qquad \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$
3.



Aller à : Exercice 6

Correction exercice 7.

1.
$$x>0\Leftrightarrow -x<0\Leftrightarrow e^{-x}<1\Leftrightarrow 1-e^{-x}>0$$
Donc f et g sont définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2.
$$f'(x)=-e^{-x}+e^{-x}\ln(1-e^{-x})+(1-e^{-x})\times\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}=-e^{-x}+e^{-x}\ln(1-e^{-x})+e^{-x}$$
$$=e^{-x}\ln(1-e^{-x})$$

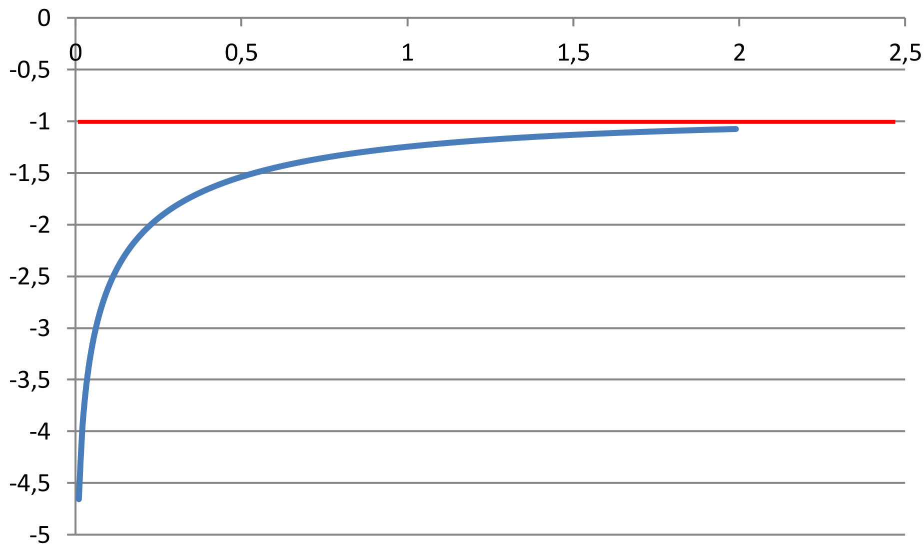
Le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $\ln(1-e^{-x})$, comme $e^{-x}>0$, on a $1-e^{-x}<0$, donc $\ln(1-e^{-x})<0$, on en déduit que f est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Pour montrer que pour tout $x>0$, $f(x)>0$ il faut et il suffit de montrer que la limite de $f(x)$ en $+\infty$ est positive, comme la limite de e^{-x} en $+\infty$ est nulle, la limite de $f(x)$ est $0+1\times\ln(1)=0$, ce qui achève la démonstration.

3.
$$g'(x)=\underbrace{\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}}_{>0}\times e^{x}+\ln(1-e^{-x})\,e^{x}=\frac{e^{x}}{1-e^{-x}}\left(e^{-x}+(1-e^{-x})\ln(1-e^{-x})\right)=\frac{e^{x}}{1-e^{-x}}f(x)$$
Car $1-e^{-x}>0$ et $f(x)>0$ pour tout $x>0$.

4. Pour tout $x>0$, $g'(x)>0$ donc g est croissante

5.
$$\lim_{x\to 0^+} g(x)=-\infty$$
$$g(x)=\ln(1+X)\times\frac{1}{-X}=-\ln\left(\frac{1+X}{X}\right)\xrightarrow[X\to 0]{}-1$$
Car
$$\lim_{x\to+\infty}(-e^{-x})=0$$

6.



Allez à : Exercice 7

Correction exercice 8.

1. Pour $x>0$ f est continue et dérivable en tant que composée de fonctions continues et dérivables.
En $0*+$
$$\lim_{x\to 0^+}-\frac{1}{x}=-\infty\Rightarrow\lim_{x\to 0^+}e^{-\frac{1}{x}}=0=f(0)$$
Donc f est continue en 0^+. Donc sur $\mathbb{R}^+$.

2. f est dérivable en tant que composée de fonction dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.
$$f'(x)=\left(-\frac{1}{x}\right)'e^{-\frac{1}{x}}=\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$$

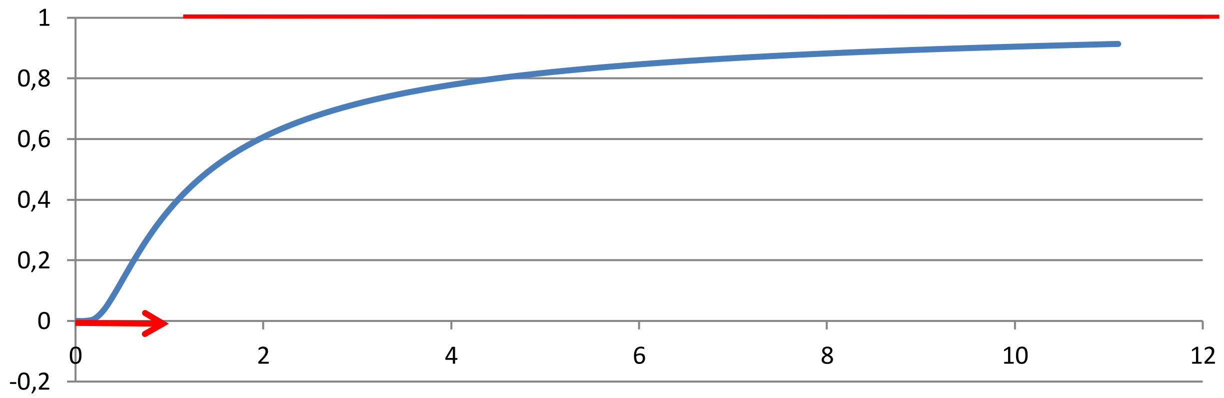
3. On pose $X=\frac{1}{x}\to+\infty$ lorsque $x\to 0^+$, ce qui équivaut à $x=\frac{1}{X}$
$$f'(x)=X^2e^{-X}$$
$$\lim_{x\to 0^+}f'(x)=\lim_{X\to+\infty}X^2e^{-X}=0$$

Par croissance comparée.
f est continue en 0 et f' admet une limite en 0 donc f est de classe C^1 en 0. En particulier f est dérivable en 0 et admet une demi-tangente horizontale en 0.

4.
$$\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1$$
La droite d'équation $y = 1$ est asymptote en $+\infty$.

5. Il est clair que pour tout $x > 0$, $f'(x) > 0$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1



Allez à : Exercice 8

Correction exercice 9.

1. Si $x \neq 0$ f est la composée et le produit de fonction continue et dérivable, donc f est dérivable.
$$\lim_{x\to0} \frac{-1}{x^2} = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$$
$$\lim_{x\to0} xe^{-\frac{1}{x^2}} = 0 = f(0)$$
f est continue en 0.
$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = e^{-\frac{1}{x^2}}$$
$$\lim_{x\to0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$$
f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

2. Pour tout $x \neq 0$
La dérivée de $-\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$ est $-(-2)x^{-3} = \frac{2}{x^3}$,
$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} + x \times \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} = \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^2}(x^2+2) > 0$$
Comme $f'(0) = 0$, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3.
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{-1}{x^2} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} xe^{-\frac{1}{x^2}} = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-\frac{1}{x^2}} = +\infty$$

$$f(x) - x = xe^{-\frac{1}{x^2}} - x = x\left(e^{-\frac{1}{x^2}} - 1\right) = \frac{1}{X}\left(e^{-X^2} - 1\right) = \frac{e^{-X^2} - 1}{X - 0}$$

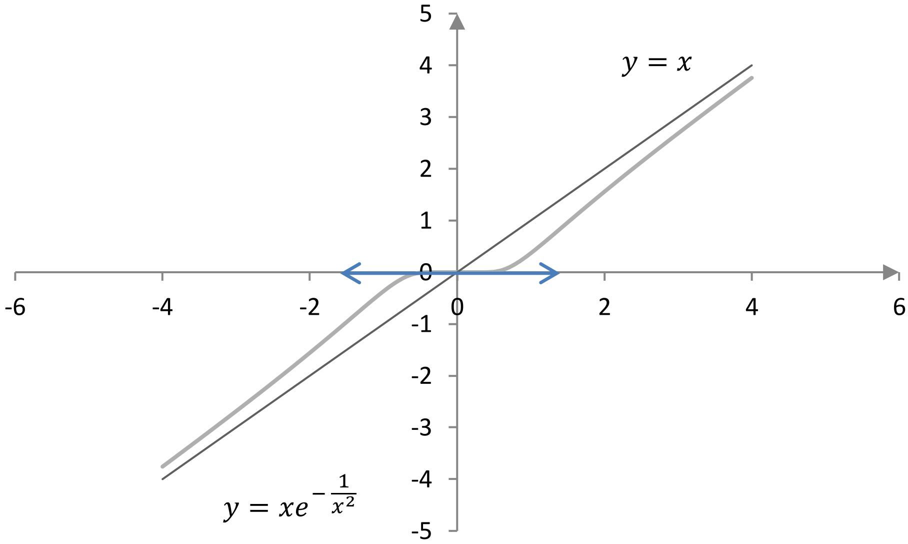
Il s'agit du taux de variation de la fonction $\varphi: X \to e^{-X^2}$ en 0, sa limite est $\varphi'(0)$

$$\varphi'(X) = -2Xe^{-X^2} \Rightarrow \varphi'(0) = 0$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - x) = \lim_{X\to 0}\frac{e^{-X^2} - 1}{X - 0} = \varphi'(0) = 0$$

La droite d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe en $\pm\infty$.

4.



Aller à : Exercice 9

Correction exercice 10.

1.

On cherche les valeurs de x telles que $\frac{1+x}{1-x} > 0$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1 - x$		$+$		$+$	0	$-$	
$1 + x$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{1+x}{1-x}$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	

Par conséquent $D_f =]-1,1[$

2. $\forall x \in]-1,1[, f(x) = \ln(1 + x) - \ln(1 - x)$

Donc

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{-1}{1-x} = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} = \frac{1 - x + 1 + x}{(1+x)(1-x)} = \frac{2}{1 - x^2}$$

3.

$$\forall x \in]-1,1[, x^2 < 1$$

Donc $1 - x^2 > 0$, ce qui montre que $f'(x) > 0$ et que la fonction est strictement croissante.

Allez à : Exercice 10

Correction exercice 11.

1.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -x \leq |x| \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad -x \leq \sqrt{x^2} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad -x < \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \qquad 0 < x + \sqrt{x^2+1}$$

Ce qui montre que f est définie sur $\mathbb{R}$. (et même continue et dérivable sur $\mathbb{R}$).

2. La dérivée de $g: x \to x + \sqrt{x^2+1} = x + (x^2+1)^{\frac{1}{2}}$ est
$$g'(x) = 1 + \frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \times 2x = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$f'(x) = \frac{\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = (x^2+1)^{-\frac{1}{2}}$$
C'est bien la forme que suggérait l'énoncé.

3. Si $x \to +\infty$ alors $x + \sqrt{x^2+1} \to +\infty$ et $f(x) \to +\infty$
$$x + \sqrt{x^2+1} = \frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)}{x-\sqrt{x^2+1}} = \frac{x^2-(x^2+1)}{x-\sqrt{x^2+1}} = \frac{-1}{x-\sqrt{x^2+1}}$$
Si $x \to -\infty$ alors $x - \sqrt{x^2+1} \to -\infty$ et alors
$$\frac{-1}{x-\sqrt{x^2+1}} \to 0^+$$
Donc
$$f(x) = \ln\left(\frac{-1}{x-\sqrt{x^2+1}}\right) \to -\infty$$

Aller à : Exercice 11

Correction exercice 12.

1. Nécessairement $x^2 \geq 1$, soit $x \leq -1$, soit $x \geq 1$, mais si $x \leq -1$ alors $x - \sqrt{x^2-1} < 0$ donc f n'est pas définie.
Si $x > 1$
$$x^2 - 1 \leq x^2 \Rightarrow \sqrt{x^2-1} \leq |x| = x \Rightarrow x - \sqrt{x^2-1} > 0$$
f est définie et continue sur $[1, +\infty[$.

Remarque :
Un raisonnement qui ressemble plus ou moins à çà est faux
$$x - \sqrt{x^2-1} > 0 \Leftrightarrow x > \sqrt{x^2-1} \Leftrightarrow x^2 > x^2 - 1$$
Il a deux problèmes majeurs, d'abord on oublie que $x^2 - 1$ doit être positif et je rappelle que $a = b \Rightarrow a^2 = b^2$ et que si l'on veut qu'il y ait équivalence il faut que a et b soit de même signe. Dans notre exercice $x > \sqrt{x^2-1}$ est évidemment faux pour un $x < 0$.

2. La dérivée de $g: x \to x - \sqrt{x^2-1} = x + (x^2-1)^{-\frac{1}{2}}$ est
$$g'(x) = 1 - \frac{1}{2}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}} \times 2x = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{x^2-1}-x}{\sqrt{x^2-1}}$$
$$f'(x) = \frac{\frac{\sqrt{x^2-1}-x}{\sqrt{x^2-1}}}{x-\sqrt{x^2-1}} = \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}} = -(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}$$
C'est bien la forme que suggérait l'énoncé.

3. Si $x \to +\infty$ alors $\sqrt{x^2-1} \to +\infty$
Il s'agit d'une forme indéterminée
$$x - \sqrt{x^2-1} = \frac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{x^2-(x^2-1)}{x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$$

Si $x \to +\infty$ alors $x + \sqrt{x^2 - 1} \to +\infty$ et alors

$$\frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \to 0^+$$

Donc

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}\right) \to -\infty$$

Aller à : Exercice 12

Correction exercice 13.

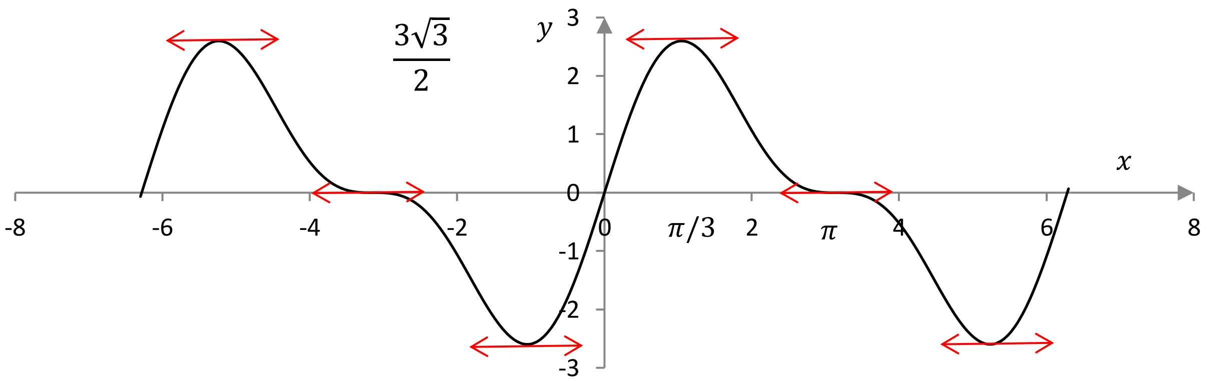
1. f est définie (continue et dérivable) sur $\mathbb{R}$, 2π périodique et impaire (ce sont des évidences qu'il n'est pas nécessaire de développer), on étudiera f sur l'intervalle $[0, \pi]$, par parité on connaitra les variation de f sur $[0,2\pi]$, puis par périodicité sur $\mathbb{R}$.
2.
$$f'(x) = 2\cos(x) + 2\cos(2x) = 2(\cos(\mathrm{x}) + 2\cos^2(x) - 1) = 2(2\cos^2(x) + \cos(x) - 1)$$
Le polynôme $2X^2 + X - 1$ admet $X_1 = -1$ et $X_2 = \frac{1}{2}$ comme racine donc
$2X^2 + X - 1 = 2(X + 1)(X - \frac{1}{2})$, on en déduit que $f'(x) = 4(\cos(x) + 1)(\cos(x) - \frac{1}{2})$
Dressons un tableau de signe :

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$\cos(x) + 1$		$+$		$+$	0
$\cos(x) + \frac{1}{2}$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0

f est croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$.
3. On en déduit le tableau de variation de f.
$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0

4°)



Aller à : Exercice 13

Correction exercice 14.

1. f est définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique mais elle est ni paire ni impaire. On l'étudiera sur $[-\pi,\pi]$.
2. $f'(x) = -2\sin(x) + 2\cos(2x) = -2\sin(x) + 2(1 - 2\sin^2(x)) = -4\left(\sin^2(x) + \frac{1}{2}\sin(x) - \frac{1}{2}\right)$

   Le polynôme $X^2 - \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}$ admet -1 et $\frac{1}{2}$ comme racine donc $X^2 - \frac{1}{2}X + \frac{1}{2} = (X+1)\left(X - \frac{1}{2}\right)$, on en déduit que :

$$f'(x) = -4(\sin(x) + 1)\left(\sin(x) - \frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{cases} \sin(x) + 1 = 0 \\ x \in [-\pi,\pi] \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2}$$

   Et pour tout $x \in [-\pi,\pi]$ avec $x \neq -\frac{\pi}{2}$, $\sin(x) + 1 > 0$

$$\begin{cases} \sin(x) - \dfrac{1}{2} = 0 \\ x \in [-\pi,\pi] \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6}$$

   Si $x \in \left[-\pi, \frac{\pi}{6}\right[$, $\sin(x) - \frac{1}{2} < 0$

   Si $x \in \left]\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right[$, $\sin(x) - \frac{1}{2} > 0$

   Si $x \in \left]\frac{5\pi}{6}, \pi\right]$, $\sin(x) < 0$

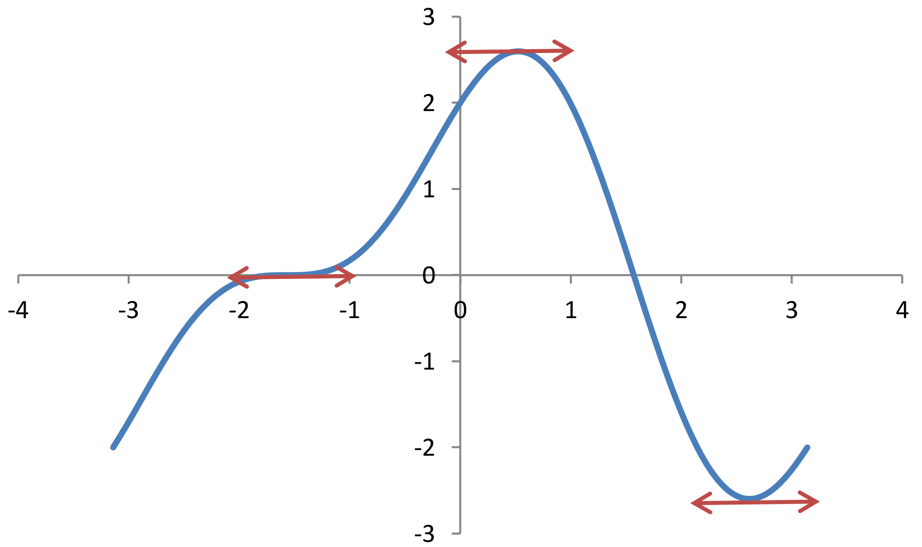
   On en déduit le signe de $f'(x)$ sur $[-\pi,\pi]$

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

3.

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-2	↗	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↘	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↗	-2

4.



Allez à : Exercice 14

Correction exercice 15.

1. f est paire et 2π périodique, on étudie f sur $[0,\pi]$
2. On pose $g(x)=\cos(x)-\frac{1}{4}$, $g\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}>0$ et $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}<0$
   D'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe une valeur qui annule g dans $\left]\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right[$. D'autre part $g'(x)=-\sin(x)<0$ sur cet intervalle, donc cette valeur est unique.
3. $f'(x)=2\cos(x)\sin(x)-\frac{1}{2}\sin(x)=2\sin(x)\left(\cos(x)-\frac{1}{4}\right)$

$$\forall x\in[0,\pi],\qquad f'(x)=0\Leftrightarrow\begin{cases}\sin(x)=0\\ \cos(x)=\dfrac{1}{4}\end{cases}$$

   Il y a deux valeurs qui annulent $\sin(x)$ dans $[0,\pi]$, ce sont 0 et π.
   Pour $\in[0,\pi]$ $\cos(x_0)=\frac{1}{4}$.

x	0		x_0		π
$\sin(x)$	0	$+$		$+$	0
$\cos(x)+\frac{1}{4}$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0

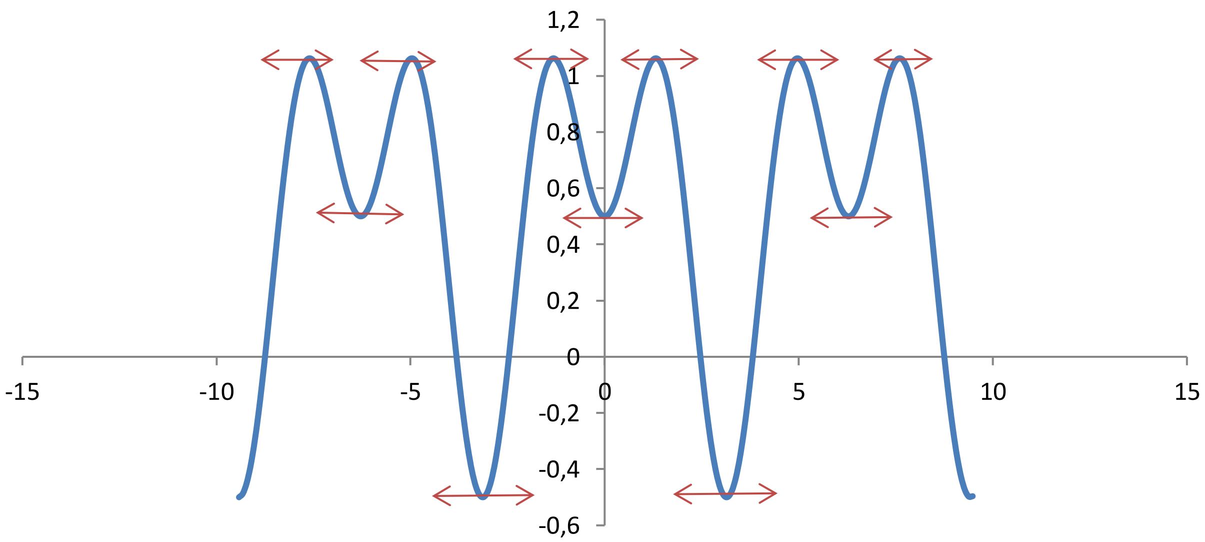
   f est croissante sur $[0,x_0]$
   f est décroissante sur $[x_0,\pi]$
4.

$$f(0)=\frac{1}{2}$$

$$f(x_0)=\sin^2(x_0)+\frac{1}{2}\cos(x_0)=1-\cos^2(x_0)+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=1-\frac{1}{16}+\frac{1}{8}=\frac{16-1+2}{16}=\frac{17}{16}$$

$$f(\pi)=-\frac{1}{2}$$

x	0		x_0		π
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{17}{16}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$



Allez à : Exercice 15

Correction exercice 16.

1.

$$f(x+2\pi)=\frac{1}{3}\cos\big(3(x+2\pi)\big)-\frac{3}{4}\cos\big(2(x+2\pi)\big)=\frac{1}{3}\cos(3x+6\pi)-\frac{3}{4}\cos(2x+4\pi)$$
$$=\frac{1}{3}\cos(3x)-\frac{3}{4}\cos(2x)=f(x)$$

f est 2π périodique.

$$f(-x)=\frac{1}{3}\cos(-3x)-\frac{3}{4}\cos(-2x)=\frac{1}{3}\cos(3x)-\frac{3}{4}\cos(2x)=f(x)$$

f est paire (et 2π périodique) donc on étudie f sur $[0,\pi]$.

2.

$$\cos(3x)+i\sin(3x)=e^{3ix}=\left(e^{ix}\right)^3=(\cos(x)+i\sin(x))^3$$
$$=\cos^3(x)+3i\cos^2(x)\sin(x)-3\cos(x)\sin^2(x)-i\sin^3(x)$$
$$=\cos^3(x)-3\cos(x)\sin^2(x)+i(3\cos^2(x)\sin(x)-\sin^3(x))$$

Voir cours pour plus de détails. Puis on égalise les parties réelle et imaginaire

$$\begin{cases}\cos(3x)=\cos^3(x)-3\cos(x)\sin^2(x)\\ \sin(3x)=3\cos^2(x)\sin(x)-\sin^3(x)\end{cases}$$
$$\sin(2x)=2\sin(x)\cos(x)$$

C'est une formule connue.

3.

$$f'(x)=-\sin(3x)+\frac{3}{2}\sin(2x)=-(3\cos^2(x)\sin(x)-\sin^3(x))+3\sin(x)\cos(x)$$
$$=\sin(x)\,(-3\cos^2(x)+\sin^2(x)+3\cos(x))$$
$$=\sin(x)\,(-3\cos^2(x)+1-\cos^2(x)+3\cos(x))$$
$$=\sin(x)\,(-4\cos^2(x)+3\cos(x)+1)$$

Soit P le polynôme $P=-4X^2+3X+1$, il admet 1 et $-\frac{1}{4}$ comme racine. On déduit que

$$P=-4(X-1)\left(X+\frac{1}{4}\right)$$

Et que

$$-4\cos^2(x)+3\cos(x)+1=-4(\cos(x)-1)\left(\cos(x)+\frac{1}{4}\right)$$

Et la dérivée vaut

$$f'(x)=-4\sin(x)(\cos(x)-1)\left(\cos(x)+\frac{1}{4}\right)$$

Faisons un tableau de signe pour trouver le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de $x\in[0,\pi]$

x	0		x_0		π
$\sin(x)$	0	$+$		$+$	0
$\cos(x)-1$	0	$-$		$-$	
$\cos(x)+\frac{1}{4}$		$+$	0	$-$	
$\sin(x)(\cos(x)-1)\left(\cos(x)+\frac{1}{4}\right)$	0	$-$	0	$+$	0
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0

f est croissante sur $[0,x_0]$ et décroissante sur $[x_0,\pi]$

En fait $x_0=\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$ (Hors programme), c'est l'unique valeur de $[0,\pi]$ dont le cosinus vaut $-\frac{1}{4}$.

4.

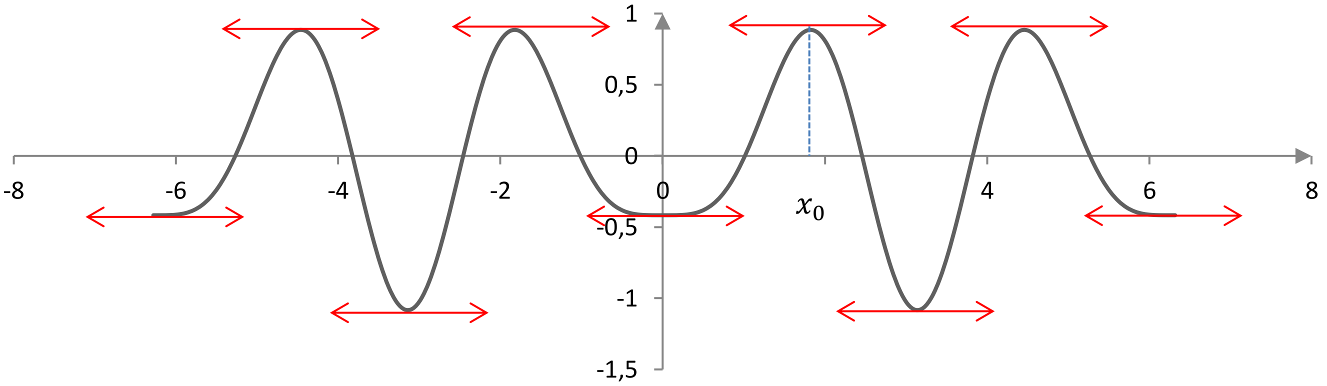
$$f(0)=\frac{1}{3}\cos(0)-\frac{3}{4}\cos(0)=-\frac{5}{12}$$
$$f(\pi)=\frac{1}{3}\cos(3\pi)-\frac{3}{4}\cos(2\pi)=-\frac{1}{3}-\frac{3}{4}=-\frac{13}{12}$$
$$f(x)=\frac{1}{3}\cos(3x)-\frac{3}{4}\cos(2x)=\frac{1}{3}\left(\cos^3(x)-3\cos(x)\sin^2(x)\right)-\frac{3}{4}\left(2\cos^2(x)-1\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left(\cos^3(x)-3\cos(x)\left(1-\cos^2(x)\right)\right)-\frac{3}{4}\left(2\cos^2(x)-1\right)$$
$$=\frac{4}{3}\cos^3(x)-\frac{3}{2}\cos^2(x)-\cos(x)+\frac{3}{4}$$

Sachant que $\cos(x_0)=-\frac{1}{4}$

$$f(x_0)=\frac{4}{3}\cos^3(x_0)-\frac{3}{2}\cos^2(x_0)-\cos(x_0)+\frac{3}{4}=\frac{4}{3}\left(-\frac{1}{4}\right)^3-\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=-\frac{1}{48}-\frac{3}{32}+1$$
$$=\frac{-2-9+96}{96}=\frac{85}{96}$$

5.

x	0		x_0		π
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	$-\frac{5}{12}$	$\nearrow$	$\frac{85}{96}$	$\searrow$	$-\frac{13}{12}$



Aller à : Exercice 16

Calculs de primitives

Exercice 1.

Calculer

1.
$$F_1(x)=\int_0^x \cos^3(t)\,dt$$
2.
$$F_2(x)=\int_0^x \sin^3(t)\,dt$$
3.
$$F_3(x)=\int_0^x \cos^4(t)\,dt$$
4.
$$F_4(x)=\int_0^x \sin^4(t)\,dt$$
5.
$$F_5(t)=\int_0^x \cos^2(t)\sin^2(t)\,dt$$
6.
$$F_6(x)=\int_0^x \cos^2(t)\sin^3(t)\,dt$$
7.
$$F_7(x)=\int_0^x \cos(t)\sin^4(t)\,dt$$

Allez à : Correction exercice 1

Exercice 2.

Calculer
$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(t)\sin^2(t)\,dt$$

Allez à : Correction exercice 2

Exercice 3.

1.
$$F_1(x)=\int_0^x \mathrm{ch}^3(t)\,dt$$
2.
$$F_2(x)=\int_0^x \mathrm{sh}^3(t)\,dt$$
3.
$$F_3(x)=\int_0^x \mathrm{ch}^4(t)\,dt$$
4.

$$F_4(x)=\int_0^x \mathrm{sh}^4(t)\,dt$$

5.

$$F_5(t)=\int_0^x \mathrm{ch}^2(t)\,\mathrm{sh}^2(t)\,dt$$

6.

$$F_6(x)=\int_0^x \mathrm{ch}^2(t)\,\mathrm{sh}^3(t)\,dt$$

7.

$$F_7(x)=\int_0^x \mathrm{ch}(t)\,\mathrm{sh}^4(t)\,dt$$

Allez à : Correction exercice 3

Exercice 4.

Calculer les primitives suivantes :

1.

$$F_1(x)=\int (\cos(x)\cos(2x)+\sin(x)\sin(2x))dx$$

2.

$$F_2(x)=\int \cos(x)\sin^4(x)\,dx$$

3.

$$F_3(x)=\int \cos^6(x)\,dx$$

4.

$$F_4(x)=\int \sin^4(x)\,dx$$

5.

$$F_5(x)=\int \sin^3(x)\cos^2(x)\,dx$$

6.

$$F_6(x)=\int \mathrm{ch}^2(x)\,\mathrm{sh}^2(x)\,dx$$

7.

$$F_7(x)=\int \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}^3(x)\,dx$$

8.

$$F_8(x)=\int \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}^3(x)\,dx$$

Allez à : Correction exercice 4

Exercice 5.

1.

$$F_1(x)=\int_0^x e^t\cos(t)\,dt$$

2.

$$F_2(x)=\int_0^x e^t\sin(t)\,dt$$

3.

$$F_3(x)=\int_0^x e^{-t}\cos(2t)\,dt$$

4.

$$F_4(x)=\int_0^x e^{-t}\sin(2t)\,dt$$

5.

$$F_5(x)=\int_0^x e^{2t}\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)dt$$

6.

$$F_6(x)=\int_0^x e^{-2t}\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)dt$$

7.

$$F_7(x)=\int_0^x e^{-t}\cos\left(2t+\frac{\pi}{3}\right)dt$$

8.

$$F_8(x)=\int_0^x e^{t}\cos\left(2t-\frac{\pi}{3}\right)dt$$

Allez à : Correction exercice 5

Exercice 6.

1.

$$F_1(x)=\int_0^x te^t dt$$

2.

$$F_2(x)=\int_0^x t^2e^t dt$$

3.

$$F_3(x)=\int_0^x t^3e^t dt$$

4.

$$F_4(x)=\int_1^x t\ln(t)\,dt$$

5.

$$F_5(x)=\int_1^x t^2\ln(t)\,dt$$

6.

$$F_6(x)=\int_1^x t^3\ln(t)\,dt$$

7.

$$F_7(x)=\int_0^x t\sin(t)\,dt$$

8.

$$F_8(x)=\int_0^x t^2\sin(t)\,dt$$

9.

$$F_9(x)=\int_0^x t^3\sin(t)\,dt$$

10.

$$F_{10}(x)=\int_0^x t\cos(t)\,dt$$

11.

$$F_{11}(x)=\int_0^x t^2\cos(t)\,dt$$

12.

$$F_{12}(x)=\int_0^x t^3\cos(t)\,dt$$

13.

$$F_{13}(x)=\int_0^x \arcsin(t)\,dt$$

14.

$$F_{14}(x)=\int_0^x t\arcsin(t)dt$$

15.

$$F_{15}(x)=\int_0^x \arctan(t)\,dt$$

Allez à : Correction exercice 6

Exercice 7.

1.

$$F_1(x)=\int e^x\cos(x)\,dx$$

2.

$$F_2(x)=\int \frac{\ln(x)}{x^n}dx\,,\qquad n\neq 1$$

3.

$$F_3(x)=\int x\arctan(x)\,dx$$

4.

$$F_4(x)=\int (x^2+x+1)e^x dx$$

Allez à : Correction exercice 7

Exercice 8.

Calculer

1.

$$F_1(x)=\int \frac{dx}{x(x-1)}$$

2.

$$F_2(x)=\int \frac{dx}{1-x^2}$$

3.

$$F_3(x)=\int \frac{dx}{x(x^2-1)}$$

4.

$$F_4(x) = \int \frac{x^3}{x^2+4}\,dx$$

5.

$$F_5(x) = \int \frac{x}{x^2+4}\,dx$$

6.

$$F_6(x) = \int \frac{x^2}{x^2+3}\,dx$$

7.

$$F_7(x) = \int \frac{1}{x^2(x^2-1)}\,dx$$

8.

$$F_8(x) = \int \frac{1}{x(x^2-1)^2}\,dx$$

9.

$$F_9(x) = \int \frac{1}{(x^2-1)^2}\,dx$$

10.

$$F_{10}(x) = \int \frac{1}{x^2(x^2-1)^2}\,dx$$

11.

$$F_{11}(x) = \int \frac{x+1}{(x^2+1)^2}\,dx$$

12.

$$F_{12}(x) = \int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\,dx$$

13.

$$F_{13}(x) = \int \frac{x}{(x-1)(x+1)(x+3)}\,dx$$

14.

$$F_{14}(x) = \int \frac{dx}{x^4-x^2-2}$$

15.

$$F_{15}(x) = \int \frac{dx}{(x+2)(x^2+2x+5)}$$

16.

$$F_{16}(x) = \int \frac{16dx}{x^2(x^2+2)^3}$$

17.

$$F_{17}(x) = \int \frac{x^4+1}{x(x-1)^3}\,dx$$

18.

$$F_{18}(x) = \int \frac{1}{x(x^2+1)^2}\,dx$$

19.

Trouver une primitive de

$$t \to \frac{t}{t^2 + 2t + 4}$$

Allez à : Correction exercice 8

Exercice 9.

1. Calculer

$$G(t) = \int \frac{-t+1}{t^2 + 2t + 5} dt$$

2. Calculer

$$F(t) = \int \frac{\ln(t^2 + 2t + 5)}{(t-1)^2} dt$$

Allez à : Correction exercice 9

Exercice 10.

1. Décomposer en éléments simple

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2(x+1)}$$

2. Calculer

$$F(x) = \int \frac{1}{x^2} \ln(x^2 + x)\, dx$$

A l'aide d'une intégration par partie

Allez à : Correction exercice 10

Exercice 11.

Calculer les primitives suivantes :

1.

$$F_1(x) = \int \frac{dx}{x^2 + 5}$$

2.

$$F_2(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 5}}$$

3.

$$F_3(x) = \int e^x \sin(e^x)\, dx$$

4.

$$F_4(x) = \int \tan^3(x)\, dx$$

5.

$$F_5(x) = \int \frac{1}{\tan^3(x)}\, dx$$

6.

$$F_6(x) = \int \frac{2x+3}{(x^2 + 3x + 7)^m} dx\, , m \neq 1$$

7.

$$F_7(x) = \int \frac{\ln(x)}{x} dx$$

8.

$$F_8(x) = \int \frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}^5(x)} dx$$

Allez à : Correction exercice 11

Exercice 12.

Calculer

1.

$$F_1(x) = \int \frac{dx}{x^2 + a^2} \quad a \neq 0$$

2.

$$F_2(x) = \int \frac{dx}{(1 + x^2)^2}$$

3.

$$F_3(x) = \int \frac{x^3}{x^2 - 4} dx$$

4.

$$F_4(x) = \int \frac{4x dx}{(x - 2)^2}$$

5.

$$F_5(x) = \int \frac{dx}{x^2 + x + 1}$$

6.

$$F_6(t) = \int \frac{dt}{t^2 + 2t - 1}$$

7.

$$F_7(t) = \int \frac{(3t + 1)dt}{(t^2 - 2t + 10)^2}$$

8.

$$F_8(t) = \int \frac{(3t + 1)dt}{t^2 - 2t + 10}$$

9.

$$F_9(t) = \int \frac{dt}{t^3 + 1}$$

10.

$$F_{10}(x) = \int \frac{x^3 + 2}{(x + 1)^3} dx$$

11.

$$F_{11}(x) = \int \frac{x + 1}{x(x - 2)^2} dx$$

Allez à : Correction exercice 12

Exercice 13.

Calculer les intégrales de fractions rationnelles suivantes.

1.

$$I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 2}$$

2.

$$I_2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1 - x^2}$$

3.

$$I_3=\int_2^3\frac{(2x+1)dx}{x^2+x-3}$$

4.

$$I_4=\int_0^2\frac{x}{x^4+16}dx$$

5.

$$I_5=\int_0^1\frac{5x+6}{(x^2-4)(x+2)}dx$$

6.

$$I_6=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{x-1}{x^2(x^2+1)}dx$$

Allez à : Correction exercice 13

Exercice 14.

Calculer les primitives suivantes :

1.

$$F_1(x)=\int\frac{\cos^3(x)}{\sin^5(x)}dx$$

2.

$$F_2(x)=\int\frac{\sin^3(x)}{1+\cos(x)}dx$$

3.

$$F_3(x)=\int\frac{dx}{\cos^4(x)+\sin^4(x)}$$

4.

$$F_4(x)=\int\frac{\cos(x)-2}{\sin(x)}dx$$

Allez à : Correction exercice 14

Exercice 15.

$$I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\cos(x)\sin(x)}$$

Allez à : Correction exercice 15

Exercice 16.

$$I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3(t)}{\sin^4(t)}dt$$

Allez à : Correction exercice 16

Exercice 17.

1. Déterminer une primitive de la fonction f définie par :

$$f(t)=\frac{1}{\sin(2t)}$$

2. A l'aide du changement de variable $x = 2t$, calculer

$$F(x) = \int \frac{dx}{\sin(x)}$$

Allez à : Correction exercice 17

Exercice 18.

Calculer sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$$F(x) = \int \frac{2dx}{1 + \tan(x)}$$

Allez à : Correction exercice 18

Exercice 19.

Calculer

$$F(t) = \int \frac{1}{1 + \mathrm{ch}(t)} dt$$

Allez à : Correction exercice 19

Exercice 20.

Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1 + \mathrm{sh}(x)}{1 + \mathrm{ch}(x)}$$

Allez à : Correction exercice 20

Exercice 21.

$$\int \frac{dx}{(\mathrm{ch}(x) + 1)^2}$$

Allez à : Correction exercice 21

Exercice 22.

Calculer pour $x > 0$

$$F(x) = \int \frac{\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x) - 1} dx$$

Allez à : Correction exercice 22

Exercice 23.

Calculer

$$\int \frac{2 - \mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x)}{2\,\mathrm{ch}(x)} dx$$

Allez à : Correction exercice 23

Exercice 24.

1. Décomposer en élément simple la fraction

$$f(x) = \frac{1}{x(x-1)^2}$$

2. Calculer

$$F(t) = 2\int \frac{dt}{\mathrm{ch}(t)\,\mathrm{sh}^3(t)}$$

A l'aide du changement de variable $x = \operatorname{ch}^2(t)$

Allez à : Correction exercice 24

Exercice 25.

Calculer

$$F(x) = \int (3t^2 - 2t)\ln(t^2 + 1)\, dt$$

Allez à : Correction exercice 25

Exercice 26.

A l'aide d'une intégration par partie calculer les intégrales suivantes

a.

$$I_1 = \int_1^e t\ln(t)\, dt$$

b.

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)\, dt$$

c.

$$I_3 = \int_0^{\sqrt{3}} 3x^2\ln(x^2 + 1)\, dx$$

Allez à : Correction exercice 26

Exercice 27.

1. Calculer

$$\int \frac{2x}{(x^2 - 1)^2}\, dx$$

2. Calculer sur $]1, +\infty[$

$$G(x) = \int \frac{2x}{(x^2 - 1)^2}\ln(x)\, dx$$

Allez à : Correction exercice 27

Exercice 28.

Calculer

$$\int \frac{1}{(x + 1)^2}\arctan(x)\, dx$$

Allez à : Correction exercice 28

Exercice 29.

Calculer

1.

$$F_1(x) = \int \frac{1}{\sqrt{2 + x} + \sqrt[3]{2 + x}}\, dx\,; \qquad t = \sqrt[6]{2 + x}$$

Avec $x \in]-2, +\infty[$

2.

$$F_2(x) = \int \frac{1}{((x - 1)^2 - 4)^2}\, dx\,; \qquad \frac{x - 1}{2} = \operatorname{th}(u)$$

Avec $x \in]-1,3[$

3.

$$F_3(x) = \int (\arcsin(x))^2 dx$$

4.

$$F_4(x) = \int x^2\sqrt{1+x^3}dx$$

Allez à : Correction exercice 29

Exercice 30.

1. Calculer

$$F(t) = 2\int \frac{t^2}{t^2-1}\,dt$$

2. En déduire

$$G(x) = \int \sqrt{e^x+1}dx$$

A l'aide du changement de variable $t = \sqrt{e^x+1}$

Allez à : Correction exercice 30

Exercice 31.

Calculer les primitives suivantes sur l'intervalle I :

1. $I =]1,+\infty[$

$$F_1(x) = \int \frac{dx}{x+\sqrt{x-1}}$$

2. $I = \mathbb{R}^{+*}$

$$F_2(x) = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$$

3. $I = \mathbb{R}$

$$F_3(x) = \int \frac{x}{\sqrt{9+4x^2}}dx$$

4. $I = \left]\frac{1-\sqrt{2}}{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right[$

$$F_4(x) = \int \frac{x+1}{\sqrt{-4x^2+4x+1}}dx$$

5. $I = \left]-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right[$

$$F_5(x) = \int \frac{8x-3}{\sqrt{12x-4x^2-5}}dx$$

6. $I =]1,+\infty[$

$$F_6(x) = \int \sqrt{x^2-1}dx$$

7. $I =]1,4[$

$$F_7(x) = \int \frac{x\sqrt{x}}{x^2-5x+4}dx$$

8. $I =]-1,1[$

$$F_8(x) = \int \frac{1}{1-t}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}dt$$

Allez à : Correction exercice 31

Exercice 32.

Calculer

$$F(x)=\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-x}}$$

Allez à : Correction exercice 32

Exercice 33.

1. Calculer

$$F(x)=\int \frac{dx}{x^2(x-1)}$$

2. Calculer

$$G(t)=\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t(t+1)\left(\sqrt{\frac{t}{t+1}}-\frac{t}{t+1}\right)}$$

A l'aide du changement de variable $x=\sqrt{\frac{t}{t+1}}$

Allez à : Correction exercice 33

Exercice 34.

1.

$$F_1(x)=\int_0^x (t^2+1)\arctan(t)\,dt$$

2.

$$F_2(x)=\int_0^x (t+1)\arcsin(t)\,dt$$

Allez à : Correction exercice 34

CORRECTION

Correction exercice 1.

1. On peut mettre $\cos^3(t)$ sous la forme $f(\sin(t))\cos(t)$ car la puissance de $\cos$ est impaire.

$$F_1(x)=\int_0^x \cos^3(t)\,dt=\int_0^x \cos^2(t)\cos(t)\,dt=\int_0^x (1-\sin^2(t))\cos(t)\,dt$$

On pose $u=\sin(t)\Rightarrow du=\cos(t)\,dt$

$$t=0\Rightarrow u=\sin(0)=0$$
$$t=x\Rightarrow u=\sin(x)$$

$$F_1(x)=\int_0^{\sin(x)}(1-u^2)du=\left[u-\frac{u^3}{3}\right]_0^{\sin(x)}=\sin(x)-\frac{\sin^3(x)}{3}$$

2. On peut mettre $\sin^3(t)$ sous la forme $f(\cos(t))\sin(t)$ car la puissance de $\sin$ est impaire.

$$F_2(x)=\int_0^x \sin^3(t)\,dt=\int_0^x \sin^2(t)\sin(t)\,dt=-\int_0^x (1-\cos^2(t))(-\sin(t))dt$$

On pose $u=\cos(t)\Rightarrow du=-\sin(t)\,dt$

$$t=0\Rightarrow u=\cos(0)=1$$

$$t = x \Rightarrow u = \cos(x)$$

$$F_2(x) = -\int_1^{\cos(x)} (1-u^2)du = -\left[u - \frac{u^3}{3}\right]_1^{\cos(x)} = -\left(\cos(x) - \frac{\cos^3(x)}{3}\right) + \left(1 - \frac{1}{3}\right)$$

$$= -\cos(x) + \frac{\cos^3(x)}{3} + \frac{2}{3}$$

3. Ici les puissances de $\sin$ et $\cos$ sont paires (respectivement 0 et 4) on doit linéariser $\cos^4(t)$

$$(\cos(t))^4 = \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right)^4 = \frac{e^{4it} + 4e^{2it} + 6 + 4e^{-2it} + e^{4it}}{16} = \frac{e^{4it} + e^{4it} + 4\left(e^{2it} + e^{-2it}\right) + 6}{16}$$

$$= \frac{2\cos(4t) + 4 \times 2\cos(2t) + 6}{16} = \frac{\cos(4t) + 4\cos(2t) + 3}{8}$$

$$F_3(x) = \frac{1}{8}\int_0^x (\cos(4t) + 4\cos(2t) + 3)dt = \frac{1}{8}\left[\frac{1}{4}\sin(4t) + \frac{4}{2}\sin(2t) + 3t\right]_0^x$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\sin(4x) + \frac{4}{2}\sin(2x) + 3x\right) = \frac{1}{32}\sin(4x) + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{3}{8}x$$

4. Ici les puissances de $\sin$ et $\cos$ sont paires (respectivement 4 et 0) on doit linéariser $\sin^4(t)$

$$(\sin(t))^4 = \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right)^4 = \frac{e^{4it} - 4e^{2it} + 6 - 4e^{-2it} + e^{4it}}{16} = \frac{e^{4it} + e^{4it} - 4\left(e^{2it} + e^{-2it}\right) + 6}{16}$$

$$= \frac{2\cos(4t) - 4 \times 2\cos(2t) + 6}{16} = \frac{\cos(4t) - 4\cos(2t) + 3}{8}$$

$$F_4(x) = \frac{1}{8}\int_0^x (\cos(4t) - 4\cos(2t) + 3)dt = \frac{1}{8}\left[\frac{1}{4}\sin(4t) - \frac{4}{2}\sin(2t) + 3t\right]_0^x$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\sin(4x) - \frac{4}{2}\sin(2x) + 3x\right) = \frac{1}{32}\sin(4x) - \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{3}{8}x$$

5. Ici les puissances de $\sin$ et $\cos$ sont paires (respectivement 2 et 2) on doit linéariser $\cos^2(t)\sin^2(t)$

$$\cos^2(t)\sin^2(t) = \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right)^2\left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right)^2 = \left(\frac{e^{2it} + 2 + e^{-2it}}{4}\right)\left(\frac{e^{2it} - 2 + e^{-2it}}{-4}\right)$$

$$= \frac{e^{4it} - 2e^{2it} + 1 + 2e^{2it} - 4 + 2e^{-2it} + 1 - 2e^{-2it} + e^{-4it}}{-16} = \frac{e^{4it} + e^{-4it} - 2}{-16}$$

$$= \frac{2\cos(4t) - 2}{-16} = -\frac{1}{8}\cos(4t) + \frac{1}{8}$$

$$F_5(t) = \frac{1}{8}\int_0^x (-\cos(4t) + 1)dt = -\frac{1}{8}\left[\frac{1}{4}\sin(4t) + t\right]_0^x = -\frac{1}{32}\sin(4x) - \frac{x}{8}$$

6. On peut mettre $\cos^2(t)\sin^3(t)$ sous la forme $f(\cos(t))\sin(t)$ car la puissance de $\sin$ est impaire.

$$F_6(x) = \int_0^x \cos^2(t)\sin^3(t)\,dt = -\int_0^x \cos^2(t)\sin^2(t)\,(-\sin(t))dt$$

$$= -\int_0^x \cos^2(t)\,(1 - \cos^2(t))(-\sin(t))dt$$

On pose $u = \cos(t) \Rightarrow du = -\sin(t)\,dt$

$$t = 0 \Rightarrow u = \cos(0) = 1$$

$$t = x \Rightarrow u = \cos(x)$$

$$F_6(x) = -\int_1^{\cos(x)} u^2(1-u^2)dt = \int_1^{\cos(x)} (u^4-u^2)dt = \left[\frac{u^5}{5}-\frac{u^3}{3}\right]_1^{\cos(x)}$$
$$= \frac{\cos^5(x)}{5} - \frac{\cos^3(x)}{3} - \left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right) = \frac{\cos^5(x)}{5} - \frac{\cos^3(x)}{3} + \frac{2}{15}$$

7. $\cos(t)\sin^4(t)$ est sous la forme $f(\sin(t))\cos(t)$ car la puissance de cos est impaire.

   On pose $u = \sin(t) \Rightarrow du = \cos(t)\,dt$
$$t = 0 \Rightarrow u = \sin(0) = 0$$
$$t = x \Rightarrow u = \sin(x)$$
$$F_7(x) = \int_0^{\sin(x)} t^4 dt = \left[\frac{t^5}{5}\right]_0^{\sin(x)} = \frac{\sin^5(x)}{5}$$

Allez à : Exercice 1

Correction exercice 2.
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\sin^2(t)\cos(t)\,dt$$
On pose $x = \sin(t)$, $dx = \cos(t)\,dt$
$$t = 0 \Rightarrow x = \sin(0) = 0$$
$$t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$
$$I = \int_0^1 (1-x^2)x^2dx = \int_0^1 (x^2-x^4)dx = \left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{3}-\frac{1}{5} = \frac{2}{15}$$

Allez à : Exercice 2

Correction exercice 3.

1. On peut toujours poser $u = e^t$ mais parfois, il y a plus simple.
$$F_1(x) = \int_0^x \mathrm{ch}^3(t)\,dt = \int_0^x \mathrm{ch}^2(t)\,\mathrm{ch}(t)\,dt$$
On pose $u = \mathrm{sh}(t) \Rightarrow du = \mathrm{ch}(t)\,dt$, $\mathrm{ch}^2(t) = 1 + \mathrm{sh}^2(t) = 1 + u^2$
$$t = 0 \Rightarrow u = \mathrm{sh}(0) = 0$$
$$t = x \Rightarrow u = \mathrm{sh}(x)$$
$$F_1(x) = \int_0^{\mathrm{sh}(x)} (1+u^2)du = \left[u + \frac{u^3}{3}\right]_0^{\mathrm{sh}(x)} = \mathrm{sh}(x) + \frac{\mathrm{sh}^3(x)}{3}$$

Allez à : Exercice 3

2. On peut toujours poser $u = e^t$ mais parfois, il y a plus simple.
$$F_2(x) = \int_0^x \mathrm{sh}^3(t)\,dt = \int_0^x \mathrm{sh}^2(t)\,\mathrm{sh}(t)\,dt$$
On pose $u = \mathrm{ch}(t) \Rightarrow du = \mathrm{sh}(t)\,dt$, $\mathrm{sh}^2(t) = \mathrm{ch}^2(t) - 1 = u^2 - 1$
$$t = 0 \Rightarrow u = \mathrm{ch}(0) = 1$$
$$t = x \Rightarrow u = \mathrm{ch}(x)$$
$$F_2(x) = \int_1^{\mathrm{ch}(x)} (u^2-1)du = \left[\frac{u^3}{3} - u\right]_1^{\mathrm{ch}(x)} = \frac{\mathrm{ch}^3(x)}{3} - \mathrm{ch}(x) - \left(\frac{1}{3} - 1\right) = \frac{\mathrm{ch}^3(x)}{3} - \mathrm{ch}(x) + \frac{2}{3}$$

Allez à : Exercice 3

3. Ici les puissances de sh et ch sont paires (respectivement 0 et 4) on pose

$$u=e^t \Leftrightarrow t=\ln(u)\Rightarrow dt=\frac{du}{u}$$

$$\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^4=\frac{e^{4t}+4e^{2t}+6+4e^{-2t}+e^{-4t}}{16}=\frac{1}{16}u^4+\frac{1}{4}u^2+\frac{3}{8}+\frac{1}{4}u^{-2}+\frac{1}{16}u^{-4}$$

$$t=0\Rightarrow u=e^0=1$$

$$t=x\Rightarrow u=e^x$$

$$F_3(x)=\int_1^{e^x}\left(\frac{1}{16}u^4+\frac{1}{4}u^2+\frac{3}{8}+\frac{1}{4}u^{-2}+\frac{1}{16}u^{-4}\right)\frac{du}{u}$$

$$=\frac{1}{16}\int_1^{e^x}u^3du+\frac{1}{4}\int_1^{e^x}udu+\frac{3}{8}\int_1^{e^x}\frac{1}{u}du+\frac{1}{4}\int_1^{e^x}u^{-3}du+\frac{1}{16}\int_1^{e^x}u^{-5}du$$

$$=\frac{1}{16}\left[\frac{u^4}{4}\right]_1^{e^x}+\frac{1}{4}\left[\frac{u^2}{2}\right]_1^{e^x}+\frac{3}{8}[\ln(u)]_1^{e^x}+\frac{1}{4}\left[\frac{u^{-2}}{-2}\right]_1^{e^x}+\frac{1}{16}\left[\frac{u^{-4}}{-4}\right]_1^{e^x}$$

$$=\frac{1}{64}(e^{4x}-1)+\frac{1}{8}(e^{2x}-1)+\frac{3}{8}(\ln(e^x)-\ln(1))-\frac{1}{8}(e^{-2x}-1)-\frac{1}{64}(e^{-4x}-1)$$

$$=\frac{1}{64}(e^{4x}-e^{-4x})+\frac{1}{8}(e^{2x}-e^{-2x})+\frac{3}{8}x=\frac{\operatorname{sh}(4x)}{32}+\frac{\operatorname{sh}(2x)}{4}+\frac{3x}{8}$$

Autre méthode

$$\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^4=\frac{e^{4t}+4e^{2t}+6+4e^{-2t}+e^{-4t}}{16}=\frac{e^{4t}+e^{-4t}+4(e^{2t}+e^{-2t})+6}{16}$$

$$=\frac{2\operatorname{ch}(4t)+4\times\operatorname{ch}(2t)+6}{16}=\frac{1}{8}\operatorname{ch}(4t)+\frac{1}{4}\operatorname{ch}(2t)+\frac{3}{8}$$

$$F_3(x)=\frac{1}{8}\int_0^x\operatorname{ch}(4t)\,dt+\frac{1}{4}\int_0^x\operatorname{ch}(2t)\,dt+\frac{3}{8}\int_0^x dt=\frac{1}{8}\left[\frac{\operatorname{sh}(4t)}{4}\right]_0^x+\frac{1}{4}\left[\frac{\operatorname{sh}(2t)}{2}\right]_0^x+\frac{3}{8}$$

$$=\frac{1}{32}\operatorname{sh}(4x)+\frac{1}{8}\operatorname{sh}(2x)+\frac{3x}{8}$$

Allez à : Exercice 3

4. Ici les puissances de sh et ch sont paires (respectivement 4 et 0) on pose

$$u=e^t \Leftrightarrow t=\ln(u)\Rightarrow dt=\frac{du}{u}$$

$$\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^4=\frac{e^{4t}-4e^{2t}+6-4e^{-2t}+e^{-4t}}{16}=\frac{1}{16}u^4-\frac{1}{4}u^2+\frac{3}{8}-\frac{1}{4}u^{-2}+\frac{1}{16}u^{-4}$$

$$t=0\Rightarrow u=e^0=1$$

$$t=x\Rightarrow u=e^x$$

$$F_4(x)=\int_1^{e^x}\left(\frac{1}{16}u^4-\frac{1}{4}u^2+\frac{3}{8}-\frac{1}{4}u^{-2}+\frac{1}{16}u^{-4}\right)\frac{du}{u}$$

$$=\frac{1}{16}\int_1^{e^x}u^3du-\frac{1}{4}\int_1^{e^x}udu+\frac{3}{8}\int_1^{e^x}\frac{1}{u}du-\frac{1}{4}\int_1^{e^x}u^{-3}du+\frac{1}{16}\int_1^{e^x}u^{-5}du$$

$$=\frac{1}{16}\left[\frac{u^4}{4}\right]_1^{e^x}-\frac{1}{4}\left[\frac{u^2}{2}\right]_1^{e^x}+\frac{3}{8}[\ln(u)]_1^{e^x}-\frac{1}{4}\left[\frac{u^{-2}}{-2}\right]_1^{e^x}+\frac{1}{16}\left[\frac{u^{-4}}{-4}\right]_1^{e^x}$$

$$=\frac{1}{64}(e^{4x}-1)-\frac{1}{8}(e^{2x}-1)+\frac{3}{8}(\ln(e^x)-\ln(1))+\frac{1}{8}(e^{-2x}-1)-\frac{1}{64}(e^{-4x}-1)$$
$$=\frac{1}{64}(e^{4x}-e^{-4x})-\frac{1}{8}(e^{2x}-e^{-2x})+\frac{3}{8}x=\frac{\operatorname{sh}(4x)}{32}-\frac{\operatorname{sh}(2x)}{4}+\frac{3x}{8}$$

Autre méthode

$$\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^4=\frac{e^{4t}-4e^{2t}+6-4e^{-2t}+e^{-4t}}{16}=\frac{e^{4t}+e^{-4t}-4(e^{2t}+e^{-2t})+6}{16}$$
$$=\frac{2\operatorname{ch}(4t)-4\times\operatorname{ch}(2t)+6}{16}=\frac{1}{8}\operatorname{ch}(4t)+\frac{1}{4}\operatorname{ch}(2t)+\frac{3}{8}$$
$$F_4(x)=\frac{1}{8}\int_0^x\operatorname{ch}(4t)\,dt-\frac{1}{4}\int_0^x\operatorname{ch}(2t)\,dt+\frac{3}{8}\int_0^x dt=\frac{1}{8}\left[\frac{\operatorname{sh}(4t)}{4}\right]_0^x-\frac{1}{4}\left[\frac{\operatorname{sh}(2t)}{2}\right]_0^x+\frac{3}{8}$$
$$=\frac{1}{32}\operatorname{sh}(4x)-\frac{1}{8}\operatorname{sh}(2x)+\frac{3x}{8}$$

Allez à : Exercice 3

5. Ici les puissances de sh et ch sont paires (respectivement 2 et 2) on pose

$$u=e^t\Leftrightarrow t=\ln(u)\Rightarrow dt=\frac{du}{u}$$
$$\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^2=\left(\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)\right)^2=\left(\frac{e^{2t}-e^{-2t}}{4}\right)^2=\frac{e^{4t}-2+e^{-4t}}{16}$$
$$t=0\Rightarrow u=e^0=1$$
$$t=x\Rightarrow u=e^x$$
$$F_5(t)=\frac{1}{16}\int_1^{e^x}(u^4-2+u^{-4})\frac{du}{u}=\frac{1}{16}\int_1^{e^x}\left(u^3-\frac{2}{u}+u^{-5}\right)du=\frac{1}{16}\left[\frac{u^4}{4}-2\ln(u)-\frac{u^{-4}}{4}\right]_1^{e^x}$$
$$=\frac{1}{16}\left(\frac{e^{4x}}{4}-2\ln(e^x)-\frac{e^{-4x}}{4}\right)-\frac{1}{16}\left(\frac{1}{4}-2\ln(1)-\frac{1}{4}\right)=\frac{e^{4x}-e^{-4x}}{64}-\frac{x}{8}=\frac{\operatorname{sh}(4x)}{32}-\frac{x}{8}$$

Autre méthode

$$\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^2=\frac{e^{4t}-2+e^{-4t}}{16}=\frac{2\operatorname{ch}(4t)-2}{16}=\frac{1}{8}\operatorname{ch}(4t)-\frac{1}{8}$$
$$F_5(x)=\frac{1}{8}\int_0^x(\operatorname{ch}(4t)-1)dt=\frac{1}{8}\left[\frac{\operatorname{sh}(4t)}{4}-t\right]_0^x=\frac{\operatorname{sh}(4x)}{32}-\frac{x}{8}$$

Allez à : Exercice 3

6. On peut mettre $\operatorname{ch}^2(t)\operatorname{sh}^3(t)$ sous la forme $f(\operatorname{ch}(t))\operatorname{sh}(t)$ car la puissance de sh est impaire.

$$F_6(x)=\int_0^x\operatorname{ch}^2(t)\operatorname{sh}^3(t)\,dt=\int_0^x\operatorname{ch}^2(t)\operatorname{sh}^2(t)\operatorname{sh}(t)\,dt=\int_0^x\operatorname{ch}^2(t)\,(\operatorname{ch}^2(t)-1)\operatorname{sh}(t)\,dt$$

On pose $u=\operatorname{ch}(t)\Rightarrow du=\operatorname{sh}(t)\,dt$

$$t=0\Rightarrow u=\operatorname{ch}(0)=1$$
$$t=x\Rightarrow u=\operatorname{ch}(x)$$
$$F_6(x)=\int_1^{\operatorname{ch}(x)}t^2(t^2-1)dt=\int_1^{\operatorname{ch}(x)}(t^4-t^2)dt=\left[\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right]_1^{\operatorname{ch}(x)}=\frac{\operatorname{ch}^5(x)}{5}-\frac{\operatorname{ch}^3(x)}{3}-\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)$$
$$=\frac{\operatorname{ch}^5(x)}{5}-\frac{\operatorname{ch}^3(x)}{3}+\frac{2}{15}$$

Allez à : Exercice 3

7. $\mathrm{ch}(t)\,\mathrm{sh}^4(t)$ est de la forme $f(\mathrm{sh}(t))\,\mathrm{ch}(t)$
On pose $u = \mathrm{sh}(t) \Rightarrow du = \mathrm{ch}(t)\,dt$

$$t = 0 \Rightarrow u = \mathrm{sh}(0) = 0$$
$$t = x \Rightarrow u = \mathrm{sh}(x)$$
$$F_7(x) = \int_0^{\mathrm{sh}(x)} u^4 du = \frac{\mathrm{sh}^5(x)}{5}$$

Allez à : Exercice 3

Correction exercice 4.

1. Avec la formule d'addition

$$\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) = \cos(a+b)$$
$$\cos(x)\cos(2x) + \sin(x)\sin(2x) = \cos(x-2x) = \cos(-x) = \cos(x)$$
$$F_1(x) = \int \cos(x)\,dx = \sin(x) + K$$

Allez à : Exercice 4

2. La puissance en $\cos(x)$ est impaire et celle en $\sin(x)$ est paire, on peut mettre $\cos(x)$ en facteur.
On pose $t = \sin(x)$, $dt = \cos(x)\,dx$

$$F_2(x) = \int t^4 dt = \frac{1}{5}t^5 + K = \frac{1}{5}\sin^5(t) + K$$

Allez à : Exercice 4

3. La puissance en $\cos(x)$ est paire et la puissance en $\sin(x)$ est paire (en fait elle est nulle), il faut linéariser.

$$\cos^6(x) = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^6$$
$$= \frac{1}{64}\Big(\left(e^{ix}\right)^6 + 6\left(e^{ix}\right)^5\left(e^{-ix}\right) + 15\left(e^{ix}\right)^4\left(e^{-ix}\right)^2 + 20\left(e^{ix}\right)^3\left(e^{ix}\right)^{-3} + 15\left(e^{ix}\right)^2\left(e^{-ix}\right)^4 + 6\left(e^{ix}\right)\left(e^{-ix}\right)^5 + \left(e^{-ix}\right)^6\Big)$$
$$= \frac{1}{64}\left(e^{6ix} + 6e^{4ix} + 15e^{2ix} + 20 + 15e^{-2ix} + 6e^{-4ix} + e^{-6ix}\right)$$
$$= \frac{1}{64}\left(e^{6ix} + e^{-6ix} + 6\left(e^{4ix} + e^{-4ix}\right) + 15\left(e^{2ix} + e^{-2ix}\right) + 20\right)$$
$$= \frac{1}{64}(2\cos(6x) + 6 \times 2\cos(4x) + 15 \times \cos(2x) + 20)$$
$$= \frac{1}{32}\cos(6x) + \frac{3}{16}\cos(4x) + \frac{15}{32}\cos(2x) + \frac{5}{16}$$

Par conséquent :

$$F_3(x) = \frac{1}{32 \times 6}\sin(6x) + \frac{3}{16 \times 4}\sin(4x) + \frac{15}{32 \times 2}\sin(2x) + \frac{5}{16}x + K$$
$$= \frac{1}{192}\sin(6x) + \frac{3}{64}\sin(4x) + \frac{15}{64}\sin(2x) + \frac{5}{16}x + K$$

Allez à : Exercice 4

4. La puissance en $\cos(x)$ est paire et la puissance en $\sin(x)$ est paire, il faut linéariser.

$$\sin^4(x)=\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^4=\frac{1}{16}\left(e^{4ix}+4e^{2ix}+6+4e^{-2ix}+e^{-4ix}\right)$$
$$=\frac{1}{16}\left(e^{4ix}+e^{-4ix}\right)+4\left(e^{2ix}+e^{-2ix}+6\right)=\frac{1}{16}(2\cos(4x)+4\times 3\cos(2x)+6)$$
$$=\frac{1}{8}\cos(4x)+\frac{3}{4}\cos(2x)+\frac{3}{8}$$

Par conséquent :

$$F_4(x)=\frac{1}{8\times 4}\sin(4x)+\frac{3}{4\times 2}\sin(2x)+\frac{3x}{8}+K=\frac{1}{32}\sin(4x)+\frac{3}{8}\sin(2x)+\frac{3x}{8}+K$$

Allez à : Exercice 4

5. La puissance en $\cos(x)$ est paire et celle en $\sin(x)$ est impaire, on peut mettre $\sin(x)$ en facteur.

$$F_5(x)=\int\sin^3(x)\cos^2(x)\,dx=\int\sin^2(x)\cos^2(x)\sin(x)\,dx=\int(1-\cos^2(x))\cos^2(x)\sin(x)\,dx$$
$$=\int(\cos^2(x)-\cos^4(x))\sin(x)\,dx$$

On pose $t=\cos(x)$ donc $dt=-\sin(x)\,dx$

$$F_5(x)=\int(t^2-\mathrm{t}^4)(-dt)=-\int(t^2-t^4)dt=-\left(\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{5}t^5\right)+K=-\frac{1}{3}\cos^3(x)+\frac{1}{5}\cos^5(x)+K$$

En fait rien n'empêche de linéariser $\sin^3(x)\cos^2(x)=\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3\times\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2=\cdots$

Mais la première méthode est bien plus simple.

Allez à : Exercice 4

6. La puissance de $\operatorname{ch}(x)$ est paire et la puissance de $\operatorname{sh}(x)$ est paire, il faut poser $t=e^x$

$$\operatorname{ch}^2(x)\operatorname{sh}^2(x)=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2=\left(\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)\right)^2=\frac{1}{16}(e^{2x}-e^{-2x})^2$$
$$=\frac{1}{16}(e^{4x}-2+e^{-4x})=\frac{1}{16}e^{4x}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}e^{-4x}$$

Par conséquent :

$$F_6(x)=\int\operatorname{ch}^2(x)\operatorname{sh}^2(x)\,dx=\int\left(\frac{1}{16}e^{4x}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}e^{-4x}\right)dx=\frac{1}{64}e^{4x}-\frac{x}{8}-\frac{1}{64}e^{-4x}+K$$
$$=\frac{1}{32}\operatorname{sh}(4x)-\frac{x}{8}+K$$

Allez à : Exercice 4

7. La puissance de $\operatorname{sh}(x)$ est impaire, il peut poser $t=\operatorname{ch}(x)$ donc $dt=\operatorname{sh}(x)\,dx$

$$F_7(x)=\int\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}^3(x)\,dx=\int t^3dt=\frac{t^4}{4}+K=\frac{\operatorname{ch}^4(x)}{4}+K$$

On peut aussi poser $t=e^x$ mais la première méthode est bien plus simple.
Autre méthode (moins bonne), la puissance de $\operatorname{ch}(x)$ est impaire on peut poser $t=\operatorname{sh}(x)$ donc $dt=\operatorname{ch}(x)\,dx$

$$F_7(x)=\int\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}^3(x)\,dx=\int\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}^2(x)\operatorname{ch}(x)dx=\int\operatorname{sh}(x)\,(1+\operatorname{sh}^2(x))\operatorname{ch}(x)dx$$
$$=\int t(1+t^2)dt=\int(t+t^3)dt=\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{4}+K=\frac{\operatorname{ch}^2(x)}{2}+\frac{\operatorname{ch}^4(x)}{4}+K$$

Allez à : Exercice 4

8. La puissance de $\operatorname{ch}(x)$ est impaire, il peut poser $t=\operatorname{sh}(x)$ donc $dt=\operatorname{ch}(t)\,dt$

$$F_8(x)=\int\operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}^3(x)\,dx=\int t^3dt=\frac{t^4}{4}+K=\frac{\operatorname{sh}^4(x)}{4}+K$$

Autre méthode (moins bonne)

La puissance de $\mathrm{sh}(x)$ est impaire, on peut poser $t=\mathrm{ch}(x)$ donc $dt=\mathrm{sh}(x)\,dx$

$$F_8(x)=\int \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}^3(x)\,dx=\int \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}^2(x)\,\mathrm{sh}(x)\,dx=\int \mathrm{ch}(x)\,(\mathrm{ch}^2(x)-1)\,\mathrm{sh}(x)\,dx$$
$$=\int t(t^2-1)dt=\int (t^3-t)dt=\frac{t^4}{4}-t+K=\frac{\mathrm{ch}^4(x)}{4}-\mathrm{ch}(x)+K'$$

Allez à : Exercice 4

Correction exercice 5.

1.

$F_1(x)=\int_0^x e^t\cos(t)\,dt$	
$u'(t)=e^t$	$u(t)=e^t$
$v(t)=\cos(t)$	$v'(t)=-\sin(t)$
$F_1(x)=\int_0^x e^t\cos(t)\,dt=[e^t\cos(t)]_0^x-$	$\int_0^x e^t(-\sin(t))dt$

$$F_1(x)=\int_0^x e^t\cos(t)\,dt=[e^t\cos(t)]_0^x+\int_0^x e^t\sin(t)\,dt$$

Il faut refaire une autre intégration par partie

$\int_0^x e^t\sin(t)\,dt$	
$u'(t)=e^t$	$u(t)=e^t$
$v(t)=\sin(t)$	$v'(t)=\cos(t)$
$\int_0^x e^t\sin(t)\,dt=[e^t\sin(t)]_0^x-$	$\int_0^x e^t\cos(t)\,dt$

$$\int_0^x e^t\sin(t)\,dt=[e^t\sin(t)]_0^x-\int_0^x e^t\cos(t)\,dt=[e^t\sin(t)]_0^x-F_1(x)$$

Ce que l'on remplace dans

$$F_1(x)=\int_0^x e^t\cos(t)\,dt=[e^t\cos(t)]_0^x+\int_0^x e^t\sin(t)\,dt=[e^t\cos(t)]_0^x+[e^t\sin(t)]_0^x-F_1(x)$$
$$\Leftrightarrow 2F_1(x)=[e^t\cos(t)]_0^x+[e^t\sin(t)]_0^x=e^x\cos(x)-1+e^x\sin(x)$$
$$\Leftrightarrow F_1(x)=\frac{1}{2}e^x\cos(x)-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^x\sin(x)$$

Remarque :

Lors de la seconde intégration par partie il faut continuer à intégrer e^x sinon on retombe sur la même intégrale.

On aurait aussi pu dériver e^x lors de la première intégration par partie et bien sûr dans la seconde aussi.

Allez à : Exercice 5

2.

Première méthode :

On fait exactement pareil.

Deuxième méthode :

On utilise le résultat ci-dessus

$$F_2(x)=\int_0^x e^t\sin(t)\,dt=[e^t\sin(t)]_0^x-F_1(x)$$

Puis

$$F_1(x)=\frac{1}{2}e^x\cos(x)+\frac{1}{2}e^x\sin(x)+K$$

$$F_2(x)=e^x\sin(x)-\left(\frac{1}{2}e^x\cos(x)+\frac{1}{2}e^x\sin(x)\right)+K'=-\frac{1}{2}e^x\cos(x)+\frac{1}{2}e^x\sin(x)+K'$$

Troisième méthode :

$$F_1(x)+iF_2(x)=\int_0^x e^t\cos(t)\,dt+i\int_0^x e^t\sin(t)\,dt=\int_0^x e^t(\cos(t)+i\sin(t))dt=\int_0^x e^te^{it}dt$$

$$=\int_0^x e^{(1+i)t}\,dt=\left[\frac{1}{1+i}e^{(1+i)t}\right]_0^x=\frac{1}{1+i}e^{(1+i)x}-\frac{1}{1+i}e^0=\frac{1-i}{2}e^xe^{ix}-\frac{1-i}{2}$$

$$=\frac{e^t}{2}(1-i)(\cos(x)+i\sin(x))-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}$$

$$=\frac{e^x}{2}(\cos(x)+\sin(x)+i(-\cos(x)+\sin(x))-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}$$

$F_1(x)$ est la partie réelle et $F_2(x)$ est la partie imaginaire

$$F_1(x)=\frac{e^x}{2}(\cos(x)+\sin(x))-\frac{1}{2}$$

$$F_2(x)=\frac{e^x}{2}(-\cos(x)+\sin(x))+\frac{1}{2}$$

On a en même temps $F_1(x)$ et $F_2(x)$.

Allez à : Exercice 5

3. Le plus simple serait de calculer $F_3(x)+iF_4(x)$ comme dans l'exercice ci-dessus
Pour changer, on va faire une intégration par parties en dérivant l'exponentielle et en intégrant le « $\cos(2t)$ »

$F_3(x)=\int_0^x e^{-t}\cos(2t)\,dt$	
$u'(t)=\cos(2t)$	$u(t)=\frac{1}{2}\sin(2t)$
$v(t)=e^{-t}$	$v'(t)=-e^{-t}$
$F_3(x)=\int_0^x e^{-t}\cos(2t)\,dt=\left[\frac{1}{2}e^{-t}\sin(2t)\right]_0^x-$	$\int_0^x(-e^{-t})\frac{1}{2}\sin(2t)\,dt$

$$F_3(x)=\int_0^x e^{-t}\cos(2t)\,dt=\left[\frac{1}{2}e^{-t}\sin(2t)\right]_0^x+\frac{1}{2}\int_0^x e^{-t}\sin(2t)\,dt$$

On refait une intégration par parties

$\int_0^x e^{-t}\sin(2t)\,dt$	
$u'(t)=\sin(2t)$	$u(t)=-\frac{1}{2}\cos(2t)$
$v(t)=e^{-t}$	$v'(t)=-e^{-t}$
$\int_0^x e^{-t}\sin(2t)\,dt\ )=\left[e^{-t}\left(-\frac{1}{2}\cos(2t)\right)\right]_0^x-$	$\int_0^x(-e^{-t})\left(-\frac{1}{2}\cos(2t)\right)dt$

$$\int_0^x e^{-t}\sin(2t)\,dt\ )=\left[e^{-t}\left(-\frac{1}{2}\cos(2t)\right)\right]_0^x\ -\frac{1}{2}\int_0^x e^{-t}\cos(2t)\,dt$$

Ce que l'on remplace dans

$$F_3(x)=\int_0^x e^{-t}\cos(2t)\,dt=\left[\frac{1}{2}e^{-t}\sin(2t)\right]_0^x+\frac{1}{2}\int_0^x e^{-t}\sin(2t)\,dt$$

$$=\left[\frac{1}{2}e^{-t}\sin(2t)\right]_0^x+\frac{1}{2}\left(\left[e^{-t}\left(-\frac{1}{2}\cos(2t)\right)\right]_0^x\ -\frac{1}{2}\int_0^x e^{-t}\cos(2t)\,dt\right)$$

$$=\frac{1}{2}e^{-x}\sin(2x)-\frac{1}{4}e^{-x}\cos(2x)+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}F_3(x)$$

Donc

$$\left(1+\frac{1}{4}\right)F_3(x)=\frac{1}{2}e^{-x}\sin(2x)-\frac{1}{4}e^{-x}\cos(2x)+\frac{1}{4}$$

Puis

$$F_3(x)=\frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}e^{-x}\sin(2x)-\frac{1}{4}e^{-x}\cos(2x)+\frac{1}{4}\right)=\frac{2}{5}e^{-x}\sin(2x)-\frac{1}{5}e^{-x}\cos(2x)+\frac{1}{5}$$

Allez à : Exercice 5

4. On reprend l'égalité ci-dessus

$$F_3(x)=\int_0^x e^{-t}\cos(2t)\,dt=\left[\frac{1}{2}e^{-t}\sin(2t)\right]_0^x+\frac{1}{2}\int_0^x e^{-t}\sin(2t)\,dt=\frac{1}{2}e^{-x}\sin(2x)+\frac{1}{2}F_4(x)$$

Par conséquent

$$F_4(x)=2F_3(x)-e^{-x}\sin(2x)=2\left(\frac{2}{5}e^{-x}\sin(2x)-\frac{1}{5}e^{-x}\cos(2x)\right)-e^{-x}\sin(2x)$$
$$=-\frac{1}{5}e^{-x}\sin(2x)-\frac{2}{5}e^{-x}\cos(2x)$$

Et on rajoute comme d'habitude une constante

$$F_4(x)=-\frac{1}{5}e^{-x}\sin(2x)-\frac{2}{5}e^{-x}\cos(2x)+K$$

Allez à : Exercice 5

5.

$F_5(x)=\int_0^x e^{2t}\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)dt$	
$u'(t)=\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)$	$u(t)=\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)$
$v(t)=e^{2t}$	$v'(t)=2e^{2t}$
$F_5(x)=\int_0^x e^{2t}\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)dt=\left[e^{2t}\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\right]_0^x-$	$\int_0^x 2e^{2t}\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)dt$

$$F_5(x)=\int_0^x e^{2t}\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)dt=\left[e^{2t}\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\right]_0^x-2\int_0^x e^{2t}\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)dt$$

On fait une seconde intégration par partie

$\int_0^x e^{2t}\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)dt$	
$u'(t)=\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)$	$u(t)=-\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)$
$v(t)=e^{2t}$	$v'(t)=2e^{2t}$
$\int_0^x e^{2t}\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)dt=[e^{2t}\left(-\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\right]_0^x-$	$\int_0^x 2e^{t}\left(-\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\right)dt$

$$\int_0^x e^{2t}\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)dt=[e^{2t}\left(-\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\right]_0^x+2\int_0^x e^{t}\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)dt$$
$$=-2e^{2x}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+2F_5(x)$$

Ce que l'on remplace dans

$$F_5(x)=\int_0^x e^{2t}\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)dt=\left[e^{2t}\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\right]_0^x-2\int_0^x e^{2t}\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)dt=F_5(x)$$
$$=\left[e^{2t}\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\right]_0^x-2\left(-2e^{2x}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+2F_5(x)\right)$$

Donc

$$5F_5(x)=e^{2x}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)-2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+4e^{2x}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} + e^{2x}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) + 4e^{2x}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

Et enfin

$$F_5(x) = \frac{1}{5}e^{2x}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{4}{5}e^{2x}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

Allez à : Exercice 5

6. On fait le changement de variable $u = -t \Leftrightarrow t = -u \Rightarrow dt = -du$

$$t = 0 \Rightarrow u = 0$$
$$t = x \Rightarrow u = -x$$

$$F_6(x) = \int_0^{-x} e^{2u}\cos\left(-u+\frac{\pi}{4}\right)(-du) = -\int_0^{-x} e^{2u}\cos\left(u-\frac{\pi}{4}\right)du = -F_5(-x)$$
$$= -\left(\frac{1}{5}e^{-2x}\sin\left(-x-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{4}{5}e^{2x}\cos\left(-x-\frac{\pi}{4}\right)\right) + K'$$
$$= \frac{1}{5}e^{-2x}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) - \frac{4}{5}e^{2x}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) + K'$$

Allez à : Exercice 5

7. On peut faire des intégrations par parties ou utiliser les résultats précédents en utilisant la formule

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$F_7(x) = \int_0^x e^{-t}\left(\cos(2t)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin(2t)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)dt$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\int_0^x e^{-t}\cos(2t)\,dt - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\int_0^x e^{-t}\sin(2t)\,dt = \frac{1}{2}F_3(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}F_4(x)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}e^{-x}\sin(2x) - \frac{1}{5}e^{-x}\cos(2x)\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{1}{5}e^{-x}\sin(2x) - \frac{2}{5}e^{-x}\cos(2x)\right)$$
$$= \frac{2-\sqrt{3}}{10}e^{-x}\sin(2x) + \frac{\left(-1+2\sqrt{3}\right)}{10}e^{-x}\cos(2x)$$

Allez à : Exercice 5

8. On fait le changement de variable $u = -t \Leftrightarrow t = -u \Rightarrow dt = -du$

$$t = 0 \Rightarrow u = 0$$
$$t = x \Rightarrow u = -x$$

$$F_8(x) = \int_{-0}^{-x} e^{-u}\cos\left(-2u-\frac{\pi}{3}\right)(-du) = -\int_0^{-x} e^{-u}\cos(2u+\frac{\pi}{3})du = -F_7(-x)$$
$$= -\left(\frac{2-\sqrt{3}}{10}e^{x}\sin(-2x) + \frac{\left(-1+2\sqrt{3}\right)}{10}e^{x}\cos(-2x)\right)$$
$$= \frac{2-\sqrt{3}}{10}e^{x}\sin(2x) - \frac{\left(-1+2\sqrt{3}\right)}{10}e^{x}\cos(2x)$$

Allez à : Exercice 5

Correction exercice 6.

1.

$F_1(x) = \int_0^x te^t dt$	
$u'(t) = e^t$	$u(t) = e^t$
$v(t) = t$	$v'(t) = 1$

$F_1(x)=\int_0^x te^t dt=[te^t]_0^x-\quad\int_0^x 1\times e^t dt$

$$F_1(x)=\int_0^x te^t dt=[te^t]_0^x-\int_0^x e^t dt=xe^x-[e^t]_0^x=xe^x-e^x+1$$

Allez à : Exercice 6

2.

$F_2(x)=\int_0^x t^2e^t dt$	
$u'(t)=e^t$	$u(t)=e^t$
$v(t)=t^2$	$v'(t)=2t$
$F_2(x)=\int_0^x t^2e^t dt=[t^2e^t]_0^x-\quad\int_0^x 2te^t dt$	

$$F_2(x)=\int_0^x t^2e^t dt=[t^2e^t]_0^x-2\int_0^x te^t dt=x^2e^x-2F_1(x)=x^2e^x-2(x-1)e^x-2$$
$$=(x^2-2x+2)e^x-2$$

Allez à : Exercice 6

3.

$F_3(x)=\int_0^x t^3e^t dt$	
$u'(t)=e^t$	$u(t)=e^t$
$v(t)=t^3$	$v'(t)=3t^2$
$F_3(x)=\int_0^x t^3e^t dt=[t^3e^t]_0^x-\quad\int_0^x 3t^2e^t dt$	

$$F_3(x)=\int_0^x t^3e^t dt=[t^3e^t]_0^x-3F_2(t)=x^3e^x-3(x^2-2x+2)e^x+6$$
$$=(x^3-3x^2+6x-6)e^x+6$$

Allez à : Exercice 6

4.

$F_4(x)=\int_1^x t\ln(t)\,dt$	
$u'(t)=t$	$u(t)=\frac{t^2}{2}$
$v(t)=\ln(t)$	$v'(t)=\frac{1}{t}$
$F_4(x)=\int_1^x t\ln(t)\,dt=\left[\frac{t^2}{2}\ln(t)\right]_1^x-\quad\int_1^x \frac{t^2}{2}\times\frac{1}{t}dt$	

$$F_4(x)=\int_1^x t\ln(t)\,dt=\left[\frac{t^2}{2}\ln(t)\right]_1^x-\frac{1}{2}\int_1^x tdt=\frac{x^2}{2}\ln(x)-\frac{1}{2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_1^x=\frac{x^2}{2}\ln(x)-\frac{1}{4}(x^2-1)$$

Allez à : Exercice 6

5.

$F_5(x)=\int_1^x t^2\ln(t)\,dt$	
$u'(t)=t^2$	$u(t)=\frac{t^3}{3}$
$v(t)=\ln(t)$	$v'(t)=\frac{1}{t}$

$F_7(x)=\int_0^x t\sin(t)\,dt$	
$u'(t)=\sin(t)$	$u(t)=-\cos(t)$
$v(t)=t$	$v'(t)=1$
$F_7(x)=\int_0^x t\sin(t)\,dt=[t(-\cos(t)]_0^x-$	$\int_0^x 1\times(-\cos(t))dt$

$F_5(x)=\int_1^x t^2\ln(t)\,dt=\left[\frac{t^3}{3}\ln(t)\right]_1^x-$	$\int \frac{t^3}{3}\times\frac{1}{t}dt$

$$F_5(x)=\int_1^x t^2\ln(t)\,dt=\left[\frac{t^3}{3}\ln(t)\right]_1^x-\frac{1}{3}\int_1^x t^2dt=\frac{x^3}{3}\ln(x)-\frac{1}{3}\left[\frac{t^3}{3}\right]_1^x=\frac{x^3}{3}\ln(x)-\frac{1}{9}(x^3-1)$$

Allez à : Exercice 6

6.

$F_6(x)=\int_1^x t^3\ln(t)\,dt$	
$u'(t)=t^3$	$u(t)=\frac{t^4}{4}$
$v(t)=\ln(t)$	$v'(t)=\frac{1}{t}$
$F_6(x)=\int_1^x t^3\ln(t)\,dt=\left[\frac{t^4}{4}\ln(t)\right]_1^x-$	$\int_1^x \frac{t^4}{4}\times\frac{1}{t}dt$

$$F_6(x)=\int_1^x t^3\ln(t)\,dt=\left[\frac{t^4}{4}\ln(t)\right]_1^x-\frac{1}{4}\int_1^x t^3dt=\frac{x^4}{4}\ln(x)-\frac{1}{4}\left[\frac{t^4}{4}\right]_1^x=\frac{x^4}{4}\ln(x)-\frac{1}{16}(x^4-1)$$

Allez à : Exercice 6

7.

$$F_7(x)=\int_0^x t\sin(t)\,dt=[t(-\cos(t)]_0^x+\int_0^x\cos(t)\,dt=-x\cos(x)+[\sin(t)]_0^x$$
$$=-x\cos(x)+\sin(x)$$

Allez à : Exercice 6

8.

$F_8(x)=\int_0^x t^2\sin(t)\,dt$	
$u'(t)=\sin(t)$	$u(t)=-\cos(t)$
$v(t)=t^2$	$v'(t)=2t$
$F_8(x)=\int_0^x t^2\sin(t)\,dt=[t^2(-\cos(t))]_0^x-$	$\int_0^x 2t(-\cos(t))dt$

$$F_8(x)=\int_0^x t^2\sin(t)\,dt=[t^2(-\cos(t))]_0^x+2\int_0^x t\cos(t)\,dt$$

Il faut faire une seconde intégration par parties.

$\int_0^x t\cos(t)\,dt$	
$u'(t)=\cos(t)$	$u(t)=\sin(t)$
$v(t)=t$	$v'(t)=1$
$\int_0^x t\cos(t)\,dt=[t\sin(t)]_0^x-$	$\int_0^x 1\times\sin(t)\,dt$

$$\int_0^x t\cos(t)\,dt=[t\sin(t)]_0^x-\int_0^x\sin(t)\,dt=x\sin(x)-[-\cos(t)]_0^x=x\sin(x)+\cos(x)-1$$

Ce que l'on remplace dans

$$F_8(x)=\int_0^x t^2\sin(t)\,dt=[t^2(-\cos(t)]_0^x+2\int_0^x t\cos(t)\,dt$$

$$=-x^2\cos(x)+2(x\sin(x)+\cos(x)-1)=(-x^2+2)\cos(x)+2x\sin(x)-2$$

Allez à : Exercice 6

9.

$F_9(x)=\int_0^x t^3\sin(t)\,dt$	
$u'(t)=\sin(t)$	$u(t)=-\cos(t)$
$v(t)=t^3$	$v'(t)=3t^2$
$F_9(x)=\int_0^x t^3\sin(t)\,dt=[t^3(-\cos(t))]_0^x-$	$\int_0^x 3t^2(-\cos(t))dt$

$$F_9(x)=\int_0^x t^3\sin(t)\,dt=[t^3(-\cos(t))]_0^x+3\int_0^x t^2\cos(t)\,dt$$

Il faut faire une seconde intégration par parties.

$\int_0^x t^2\cos(t)\,dt$	
$u'(t)=\cos(t)$	$u(t)=\sin(t)$
$v(t)=t^2$	$v'(t)=2t$
$\int_0^x t^2\cos(t)\,dt=[t^2\sin(t)]_0^x-$	$\int_0^x 2t\sin(t)\,dt$

$$\int_0^x t^2\cos(t)\,dt=[t^2\sin(t)]_0^x-2\int_0^x t\sin(t)\,dt\;=x^2\sin(x)-2F_7(x)$$

$$=x^2\sin(x)-2(-x\cos(x)+\sin(x))=(x^2-2)\sin(x)+2x\cos(x)$$

Ce que l'on remplace dans

$$F_9(x)=-x^3\cos(x)+3\int_0^x t^2\cos(t)\,dt=-x^3\cos(x)+3\big((x^2-2)\sin(x)+2x\cos(x)\big)$$

$$=(-x^3+6x)\cos(x)+(3x^2-6)\sin(x)$$

Allez à : Exercice 6

10. On peut faire une intégration par parties mais on va voir une autre technique qui permet de calculer $F_{10}(x)$ et $F_7(x)$ en même temps.

$$F_{10}(x)+iF_7=\int_0^x t\cos(t)\,dt+i\int_0^x t\sin(t)\,dt=\int_0^x t(\cos(t)+i\sin(t))dt=\int_0^x te^{it}dt$$

Et on fait une intégration par parties.

$F_{10}(x)+iF_7=\int_0^x te^{it}dt$	
$u'(t)=e^{it}$	$u(t)=\frac{1}{i}e^{it}=-ie^{it}$
$v(t)=t$	$v'(t)=1$
$F_{10}(x)+iF_7=\int_0^x te^{it}dt=\left[-tie^{it}\right]_0^x-$	$\int_0^x 1\times(-ie^{it})dt$

$$F_{10}(x)+iF_7=\int_0^x te^{it}dt=\left[-tie^{it}\right]_0^x+i\int_0^x e^{it}dt=ixe^{ix}+i\left[\frac{1}{i}e^{it}\right]_0^x=ixe^{ix}+\left(e^{ix}-1\right)$$
$$=-ixe^{ix}+e^{ix}-1=-ix(\cos(x)+i\sin(x))+\cos(x)+i\sin(x)-1$$
$$=-ix\cos(x)+x\sin(x)+\cos(x)+i\sin(x)-1$$
$$=(x\sin(x)+\cos(x)-1)+i(-x\cos(x)+\sin(x))$$
$$F_{10}(x)=x\sin(x)+\cos(x)-1$$
$$F_7(x)=-x\cos(x)+\sin(x)$$

Allez à : Exercice 6

11. On peut faire deux intégrations par parties ou calculer $F_{11}(x)+iF_8(x)$, nous allons voir une autre technique.

On pose $u=\frac{\pi}{2}-t\Leftrightarrow t=\frac{\pi}{2}-u\Rightarrow dt=-du$

$$t=0\Rightarrow u=\frac{\pi}{2}$$
$$t=x\Rightarrow u=\frac{\pi}{2}-x$$
$$F_{11}(x)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-x}\left(u-\frac{\pi}{2}\right)^2\cos\left(\frac{\pi}{2}-u\right)dt=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-x}\left(u^2-\pi+\frac{\pi^2}{4}\right)\sin(u)\,du$$
$$=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\left(u^2-\pi+\frac{\pi^2}{4}\right)\sin(u)\,du-\int_0^{\frac{\pi}{2}-x}\left(u^2-\pi+\frac{\pi^2}{4}\right)\sin(u)\,du=C_1-G(x)$$

Où

$$G(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}-x}\left(u^2-\pi+\frac{\pi^2}{4}\right)\sin(u)\,du$$
$$C_1=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\left(u^2-\pi+\frac{\pi^2}{4}\right)\sin(u)\,du=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(u^2-\pi+\frac{\pi^2}{4}\right)\sin(u)\,du=G(0)$$

Et

$$G(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}-x}\left(u^2-\pi+\frac{\pi^2}{4}\right)\sin(u)\,du$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}-x}u^2\sin(u)\,du-\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}-x}u\sin(u)\,du+\frac{\pi^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}-x}\sin(u)\,du$$
$$=F_8\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\pi F_7\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\frac{\pi^2}{4}[-\cos(u)]_0^{\frac{\pi}{2}-x}$$
$$=\left(-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2+1\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$
$$-\pi\left(-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)+\frac{\pi^2}{4}\left(-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+1\right)$$
$$=\left(1-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2+\pi x-x^2\right)\sin(x)+(\pi-2x)\cos(x)-\pi\left(-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin(x)+\cos(x)\right)$$
$$+\frac{\pi^2}{4}(-\sin(x)+1)$$
$$=(\pi-2x-\pi)\cos(x)+\left(1-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2+\pi x-x^2+\pi\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\frac{\pi^2}{4}\right)\sin(x)+\frac{\pi^2}{4}$$
$$=-2x\cos(x)+(1-x^2)\sin(x)+\frac{\pi^2}{4}$$

Comme $G(0)=\frac{\pi^2}{4}$

$$F_{11}(x)=-2x\cos(x)+(1-x^2)\sin(x)$$

Franchement c'est plus compliqué que de faire deux intégrations par parties, c'était juste pour varier les plaisirs.

Allez à : Exercice 6

12. Toutes les méthodes décrites ci-dessus fonctionnent, voyons une autre façon de faire :

On cherche une primitive de la forme

$$F_{12}(x)=(ax^3+bx^2+cx+d)\cos(x)+(a'x^3+b'x^2+c'x+d')\sin(x)+K$$

Où a,b,c,a',b' et c' sont des constantes réelles.

En faisant le changement de variables $u=-t$ on constate que F_{12} est une fonction paire, on peut alors améliorer la forme de la primitive

$$F_{12}(x)=(bx^2+d)\cos(x)+(a'x^3+c'x)\sin(x)+K$$

On dérive

$$\begin{aligned}F'_{12}(x)&=2bx\cos(x)-(bx^2+d)\sin(x)+(3a'x^2+c')\sin(x)+(a'x^3+c'x)\cos(x)\\&=(2b+a'x^3+c'x)\cos(x)+(-(bx^2+d)+3a'x^2+c')\sin(x)\\&=(a'x^3+(c'+2b)x)\cos(x)+\left((3a'-b)x^2+c'-d\right)\sin(x)\end{aligned}$$

$$F'_{12}(x)=x^3\cos(x)\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}a'x^3+(c'+2b)x=x^3\\(3a'-b)x^2+c'-d=0\end{matrix}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}a'=1\\c'+2b=0\\3a'-b=0\\c'-d=0\end{matrix}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}a'=1\\c'=-2b\\b=-3a'\\d=c'\end{matrix}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}a'=1\\c'=6\\b=-3\\d=6\end{matrix}\right.$$

$$F_{12}(x)=(-3x^2+6)\cos(x)+(x^3+6x)\sin(x)+K$$

Comme $F_{12}(0)=\int_0^0 t^3\cos(t)\,dt=0$, et que

$$F_{12}(x)=(-30^2+6)\cos(0)+(0^3+6\times 0)\sin(0)+K=6+K$$

cela entraine que $K=-6$ et

$$F_{12}(x)=(-3x^2+6)\cos(x)+(x^3+6x)\sin(x)-6$$

Allez à : Exercice 6

13. Il faut faire une intégration par parties mais il n'y a qu'une fonction, alors on écrit $F_{13}(x)$ de la façon suivante :

$$F_{13}(x)=\int_0^x 1\times\arcsin(t)\,dt$$

$F_{13}(x)=\int_0^x 1\times\arcsin(t)\,dt$	
$u'(t)=1$	$u(t)=t$
$v(t)=\arcsin(t)$	$v'(t)=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
$F_{13}(x)=\int_0^x 1\times\arcsin(t)\,dt=[t\arcsin(t)]_0^x-$	$\int_0^x\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt$

$$F_{13}(x)=\int_0^x 1\times\arcsin(t)\,dt=[t\arcsin(t)]_0^x-\int_0^x\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

$\int_0^x\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt$ peut se calculer directement en remarquant que $\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}=t(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}u'(t)\left(u(t)\right)^{-\frac{1}{2}}$ avec $u(t)=1-t^2$

Donc

$$\int_0^x\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt=\left[-\left(u(t)\right)^{\frac{1}{2}}\right]_0^x=-\left(u(x)\right)^{\frac{1}{2}}+\left(u(0)\right)^{\frac{1}{2}}=-\sqrt{1-x^2}+1$$

Sinon on pose $t = \sin(u) \Leftrightarrow u = \arcsin(t) \Rightarrow dt = \cos(u)\, du$

$$\sqrt{1-t^2} = \sqrt{1-\sin^2(u)} = \sqrt{\cos^2(u)} = |\cos(u)|$$

Mais $-1 \le x \le 1$ donc $-1 \le t \le 1$ donc on peut prendre $-\frac{\pi}{2} \le u \le \frac{\pi}{2}$ et alors $\cos(u) \ge 0$.

$$t = 0 \Rightarrow u = \arcsin(0) = 0$$
$$t = x \Rightarrow u = \arcsin(x)$$
$$\int_0^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^{\arcsin(x)} \frac{\sin(u)}{\cos(u)} \cos(u)\, du = \int_0^{\arcsin(x)} \sin(u)\, du = [-\cos(u)]_0^{\arcsin(x)}$$
$$= -\cos(\arcsin(x)) + \cos(0) = -\sqrt{1-x^2} + 1$$

Encore une autre méthode, on fait le changement de variable $v = t^2$ parce que l'on a remarqué qu'au numérateur le « t » était, à une constante multiplicative près, la dérivée de v et que $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ ne dépend que de $v = t^2$.

$$dv = 2tdt$$
$$t = 0 \Rightarrow v = 0$$
$$t = x \Rightarrow v = x^2$$
$$\int_0^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{1}{2}\int_0^{x^2} \frac{dv}{\sqrt{1-v}} = \frac{1}{2}\int_0^{x^2} (1-v)^{-\frac{1}{2}} dv = \frac{1}{2}\left[-2(1-v)^{\frac{1}{2}}\right]_0^{x^2} = -(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + 1$$

$$F_{13}(x) = [t \arcsin(t)]_0^x - \int_0^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt = x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} - 1$$

Allez à : Exercice 6

14.

$F_{14}(x) = \int_0^x t \arcsin(t) dt$	
$u'(t) = t$	$u(t) = \frac{t^2}{2}$
$v(t) = \arcsin(t)$	$v'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
$F_{14}(x) = \int_0^x t \arcsin(t) dt = \left[\frac{t^2}{2}\arcsin(t)\right]_0^x -$	$\int_0^x \frac{\frac{t^2}{2}}{\sqrt{1-t^2}} dt$

$$F_{14}(x) = \int_0^x t \arcsin(t) dt = \left[\frac{t^2}{2}\arcsin(t)\right]_0^x - \frac{1}{2}\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

Pour le calcul de $\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} dt$

On pose $t = \sin(u) \Leftrightarrow u = \arcsin(t) \Rightarrow dt = \cos(u)\, du$

$$\sqrt{1-t^2} = \sqrt{1-\sin^2(u)} = \sqrt{\cos^2(u)} = |\cos(u)|$$

Mais $-1 \le x \le 1$ donc $-1 \le t \le 1$ donc on peut prendre $-\frac{\pi}{2} \le u \le \frac{\pi}{2}$ et alors $\cos(u) \ge 0$.

$$t = 0 \Rightarrow u = \arcsin(0) = 0$$
$$t = x \Rightarrow u = \arcsin(x)$$
$$\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^{\arcsin(x)} \frac{\sin^2(u)}{\cos(u)} \cos(u)\, du = \int_0^{\arcsin(x)} \sin^2(u)\, du$$

Il faut linéariser $\sin^2(u)$ ou ce qui revient au même utiliser la formule

$$\sin^2(u) = \frac{1-\cos(2u)}{2}$$

$$\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int_0^{\arcsin(x)} \frac{1-\cos(2u)}{2}du = \frac{1}{2}\left[u - \frac{1}{2}\sin(2u)\right]_0^{\arcsin(x)}$$
$$= \frac{1}{2}\arcsin(x) - \frac{1}{4}\sin(2\arcsin(2u))$$
$$= \frac{1}{2}\arcsin(x) - \frac{1}{4} \times 2\sin(\arcsin(x))\cos(\arcsin(x)) = \frac{1}{2}\arcsin(x) - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$$

Par conséquent

$$F_{14}(x) = \int_0^x t\arcsin(t)dt = \left[\frac{t^2}{2}\arcsin(t)\right]_0^x - \frac{1}{2}\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt$$
$$= \frac{x^2}{2}\arcsin(x) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\arcsin(x) - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\right) = \frac{2x^2-1}{4}\arcsin(x) + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}$$

Allez à : Exercice 6

15. Pour faire une intégration par parties on écrit $F_{15}(x)$ sous la forme

$$F_{15}(x) = \int_0^x 1 \times \arctan(t)\,dt$$

$F_{15}(x) = \int_0^x 1 \times \arctan(t)\,dt$	
$u'(t) = 1$	$u(t) = t$
$v(t) = \arctan(t)$	$v'(t) = \frac{1}{1+t^2}$
$F_{15}(x) = \int_0^x 1 \times \arctan(t)\,dt = [t\arctan(t)]_0^x -$	$\int_0^x \frac{t}{1+t^2}dt$

$$F_{15}(x) = \int_0^x 1 \times \arctan(t)\,dt = [t\arctan(t)]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2}dt = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\int_0^x \frac{2t}{1+t^2}dt$$
$$= x\arctan(x) - \frac{1}{2}[\ln(1+t^2)]_0^x = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

Allez à : Exercice 6

Correction exercice 7.

1. Pour F_1 on peut faire deux intégrations par parties

$\int e^x\cos(x)\,dx$	
$u'(x) = e^x$	$u(x) = e^x$
$v(x) = \cos(x)$	$v'(x) = -\sin(x)$
$F_1(x) = [e^x\cos(x)] -$	$\int e^x(-\sin(x))dx$

$$F_1(x) = e^x\cos(x) + \int e^x\sin(x)\,dx$$

$\int e^x\sin(x)\,dx$	
$u'(x) = e^x$	$u(x) = e^x$
$v(x) = \sin(x)$	$v'(x) = \cos(x)$
$\int e^x\sin(x)\,dx = [e^x\sin(x)] -$	$\int e^x\cos(x)\,dx$

$$\int e^x\sin(x)\,dx = e^x\sin(x) - \int e^x\cos(x)\,dx$$

Donc

$$F_1(x) = e^x\cos(x) + \left(e^x\sin(x) - \int e^x\cos(x)\,dx\right) \Leftrightarrow F_1(x) = e^x(\cos(x) + \sin(x)) - F_1(x)$$

$$\Leftrightarrow 2F_1(x) = e^x(\cos(x) + \sin(x)) \Leftrightarrow F_1(x) = e^x\left(\frac{1}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x)\right)$$

Il ne reste plus qu'à rajouter une constante

$$F_1(x) = e^x\left(\frac{1}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x)\right) + K$$

Deuxième méthode

$$F_1(x) = \int e^x\cos(x)\,dx = \int e^x\,\mathcal{R}e(e^{ix})dx = \int \mathcal{R}e(e^x e^{ix})dx = \int \mathcal{R}e\left(e^{(1+i)x}\right)dx$$

$$= \mathcal{R}e\left(\int e^{(1+i)x}dx\right) = \mathcal{R}e\left(\frac{1}{1+i}e^{(1+i)x}\right) + K$$

$$= \mathcal{R}e\left(\frac{1-i}{2}e^x(\cos(x) + i\sin(x))\right) + K$$

$$= \frac{e^x}{2}\mathcal{R}e(\cos(x) - i\cos(x) + i\sin(x) + \sin(x)) + K = \frac{e^x}{2}(\cos(x) + \sin(x)) + K$$

Allez à : Exercice 7

2. A l'aide d'une intégration par partie

$\int \frac{\ln(x)}{x^n}dx = \int x^{-n}\ln(x)\,dx$	
$u'(x) = x^{-n}$	$u(x) = \frac{1}{-n+1}x^{-n+1} = -\frac{1}{n-1}\times\frac{1}{x^{n-1}}$
$v(x) = \ln(x)$	$v'(x) = \frac{1}{x}$
$F_2(x) = \left[-\frac{\ln(x)}{(n-1)x^{n-1}}\right] -$	$\int \frac{-1}{n-1}\times\frac{1}{x^n}dx$

$$F_2(x) = -\frac{\ln(x)}{(n-1)x^{n-1}} - 1n - 1 \times \frac{1}{x^n}dx = -\frac{\ln(x)}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int x^{-n}dx$$

$$= -\frac{\ln(x)}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\times\frac{1}{-n+1}x^{-n+1} + K$$

$$= -\frac{\ln(x)}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\times\frac{1}{-n+1}x^{-n+1} + K = -\frac{\ln(x)}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{1}{(n-1)^2x^{n-1}} + K$$

Allez à : Exercice 7

3. A l'aide d'une intégration par partie

$\int x\arctan(x)\,dx$	
$u'(x) = x$	$u(x) = \frac{x^2}{2}$
$v(x) = \arctan(x)$	$v'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
$F_3(x) = \left[\frac{x^2}{2}\arctan(x)\right] -$	$\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}dx$

$$F_3(x) = \frac{x^2}{2}\arctan(x) - \frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}dx = \frac{x^2}{2}\arctan(x) - \frac{1}{2}\int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\arctan(x) - \frac{1}{2}\int\left(\frac{x^2+1}{1+x^2} + \frac{-1}{1+x^2}\right)dx = \frac{x^2}{2}\arctan(x) - \frac{1}{2}\int\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\arctan(x) - \frac{1}{2}(x - \arctan(x)) + K = \frac{1}{2}(x^2-1)\arctan(x) - \frac{x}{2} + K$$

Allez à : Exercice 7

4. On cherche une primitive de la forme

$$F_4(x)=(ax^2+bx+c)e^x+K$$
$$F_4'(x)=(2ax+b)e^x+(ax^2+bx+c)e^x=(ax^2+(2a+b)x+b+c)e^x$$
$$(x^2+x+1)e^x=(ax^2+(2a+b)x+b+c)e^x\Leftrightarrow x^2+x+1=ax^2+(2a+b)x+b+c$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\2a+b=1\\b+c=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-1\\c=2\end{cases}$$

Donc

$$F_4(x)=(x^2-x+2)e^x+K$$

On aurait pu faire aussi deux intégrations par partie.

Allez à : Exercice 7

Correction exercice 8.

1.

$$\frac{1}{x(x-1)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}$$

On multiplie par x, puis $x=0$

$$a=\left[\frac{1}{x-1}\right]_{x=0}=-1$$

On multiplie par $x-1$, puis $x=1$

$$b=\left[\frac{1}{x}\right]_{x=1}=1$$
$$\frac{1}{x(x-1)}=\frac{-1}{x}+\frac{1}{x-1}$$
$$F_1(x)=\int\frac{dx}{x(x-1)}=\int\left(\frac{-1}{x}+\frac{1}{x-1}\right)dx=-\ln|x|+\ln|x-1|+K=\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+K$$

Allez à : Exercice 8

2.

$$\frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{-(x-1)(x+1)}=\frac{-1}{(x-1)(x+1)}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+1}$$

On multiplie par $x-1$, puis $x=1$

$$a=\left[-\frac{1}{x+1}\right]_{x=1}=-\frac{1}{2}$$

On multiplie par $x+1$, puis $x=-1$

$$b=\left[-\frac{1}{x-1}\right]_{x=-1}=\frac{1}{2}$$
$$F_2(x)=\int\frac{dx}{1-x^2}=\int\left(\frac{-\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{\frac{1}{2}}{x+1}\right)dx=\frac{1}{2}(-\ln|x-1|+\ln|x+1|)+K=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|+K$$

Remarque :

$$F_2(x)=\operatorname{argth}(x)+K$$

A condition que l'on cherche une intégrale sur l'intervalle $]-1,1[$, sinon c'est faux.

On peut éventuellement décomposer de la façon suivante :

$$\frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{(1-x)(x+1)}=\frac{a}{1-x}+\frac{b}{x+1}=\frac{\frac{1}{2}}{1-x}+\frac{\frac{1}{2}}{x+1}$$

Mais alors il faut faire attention

$$\int \frac{dx}{1-x} = -\ln|1-x| + K = -\ln|x-1| + K$$

Allez à : Exercice 8

3.

Première méthode

$$\frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$$

On multiplie par x, puis $x = 0$

$$a = \left[\frac{1}{(x-1)(x+1)}\right]_{x=0} = -1$$

On multiplie par $x - 1$, puis $x = 1$

$$b = \left[\frac{1}{x(x+1)}\right]_{x=1} = \frac{1}{2}$$

On multiplie par $x + 1$, puis $x = -1$

$$c = \left[\frac{1}{x(x-1)}\right]_{x=-1} = \frac{1}{2}$$

$$F_3(x) = \int \frac{dx}{x(x^2-1)} = \int \left(\frac{-1}{x} + \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}}{x+1}\right) dx = -\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + K$$

$$= \ln\frac{\sqrt{|x^2-1|}}{|x|} + K$$

Deuxième méthode

$$F_3(x) = \int \frac{dx}{x(x^2-1)} = \int \frac{xdx}{x^2(x^2-1)}$$

On pose $t = x^2 \Rightarrow dt = 2xdx$

$$F_3(x) = \int \frac{xdx}{x^2(x^2-1)} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t(t-1)} = \frac{1}{2}F_1(t) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t}\right| + K = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2}\right| + K$$

Allez à : Exercice 8

4. Il faut faire une division euclidienne

$$x^3 = x^3 + 4x - 4x = x(x^2+4) - 4x$$

Donc

$$\frac{x^3}{x^2+4} = x - \frac{4x}{x^2+4}$$

$$F_4(x) = \int \left(x - \frac{4x}{x^2+4}\right) dx = \int \left(x - 2\frac{2x}{x^2+4}\right) dx = \frac{x^2}{2} - 2\ln(x^2+4) + K$$

Remarque :

La valeur absolu dans le logarithme est inutile puisque $x^2 + 4 > 0$.

Allez à : Exercice 8

5.

$$F_5(x) = \int \frac{x}{x^2+4} dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+4} dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + K$$

Allez à : Exercice 8

6. Il faudrait faire une division mais

$$\frac{x^2}{x^2+3}=\frac{x^2+3-3}{x^2+3}=1-\frac{3}{x^2+3}$$

$$F_6(x)=\int\frac{x^2}{x^2+3}dx=F_6(x)=\int\left(1-\frac{3}{x^2+3}\right)dx=x-3\int\frac{dx}{x^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}$$

$$=x-3\times\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)+K=x-\sqrt{3}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)+K$$

Allez à : Exercice 8

7.

$$\frac{1}{x^2(x^2-1)}=\frac{1}{x^2(x-1)(x+1)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x-1}+\frac{d}{x+1}$$

On multiplie par x^2, puis $x=0$

$$b=\left[\frac{1}{(x-1)(x+1)}\right]_{x=0}=-1$$

On multiplie par $x-1$, puis $x=1$

$$c=\left[\frac{1}{x^2(x+1)}\right]_{x=1}=\frac{1}{2}$$

On multiplie par $x+1$, puis $x=-1$

$$d=\left[\frac{1}{x^2(x-1)}\right]_{x=-1}=-\frac{1}{2}$$

On multiplie par x, puis $x\to+\infty$

$$0=a+c+d\Leftrightarrow a=0$$

$$\frac{1}{x^2(x^2-1)}=\frac{1}{x^2(x-1)(x+1)}=\frac{-1}{x^2}+\frac{\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{-\frac{1}{2}}{x+1}$$

$$F_7(x)=\int\frac{1}{x^2(x^2-1)}dx=\int\left(\frac{-1}{x^2}+\frac{\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{-\frac{1}{2}}{x+1}\right)dx=-\int x^{-2}dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}$$

$$=-[-x^{-1}]+\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x+1|+K=\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+K$$

Allez à : Exercice 8

8.

$$\frac{1}{x(x^2-1)^2}=\frac{1}{x(x-1)^2(x+1)^2}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2}+\frac{d}{x+1}+\frac{e}{(x+1)^2}$$

Cela risque d'être long, rusons :

$$F_8(x)=\int\frac{1}{x(x^2-1)^2}dx=\int\frac{xdx}{x^2(x^2-1)^2}$$

On pose $t=x^2\Rightarrow dt=2xdx$

$$F_8(x)=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t(t-1)^2}$$

$$\frac{1}{t(t-1)^2}=\frac{a}{t}+\frac{b}{t-1}+\frac{c}{(t-1)^2}$$

C'est déjà beaucoup mieux

On multiplie par t, puis $t=0$

$$a=\left[\frac{1}{(t-1)^2}\right]_{t=0}=1$$

On multiplie par $(t-1)^2$, puis $t=1$

$$c=\left[\frac{1}{t}\right]_{t=1}=1$$

On multiplie par t, puis $t\to+\infty$

$$0=a+b\Leftrightarrow b=-1$$

$$\frac{1}{t(t-1)^2}=\frac{1}{t}-\frac{1}{t-1}+\frac{1}{(t-1)^2}$$

$$F_8(x)=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t-1}+\frac{1}{(t-1)^2}\right)dt=\frac{1}{2}\ln|t|-\frac{1}{2}\ln|t-1|+\frac{1}{2}\int(t-1)^{-2}dt$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t}{t-1}\right|+\frac{1}{2}[(t-1)^{-1}]+K=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2}{x^2-1}\right|+\frac{1}{2}\times\frac{1}{x^2-1}+K$$

Allez à : Exercice 8

9.

$$\frac{1}{(x^2-1)^2}=\frac{1}{(x-1)^2(x+1)^2}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{(x-1)^2}+\frac{c}{x+1}+\frac{d}{(x+1)^2}$$

On multiplie par $(x-1)^2$, puis $x=1$

$$b=\left[\frac{1}{(x+1)^2}\right]_{x=1}=\frac{1}{4}$$

On multiplie par $(x+1)^2$, puis $x=-1$

$$d=\left[\frac{1}{(x+1)^2}\right]_{x=1}=\frac{1}{4}$$

$x=0$

$$1=-a+b+c+d\Leftrightarrow -a+c=\frac{1}{2}$$

On multiplie par x, puis $x\to+\infty$

$$0=a+c$$

On en déduit aisément que :

$$a=-\frac{1}{4}\quad et\quad c=\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{(x-1)^2(x+1)^2}=\frac{1}{4}\left(\frac{-1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}\right)$$

$$\int\frac{1}{(x-1)^2(x+1)^2}dx=\frac{1}{4}\int\left(\frac{-1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{4}\left(-\ln|x-1|+\ln|x+1|+\int((x-1)^{-2}+(x+1)^{-2})dx\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+[-(x-1)^{-1}-(x+1)^{-1}]\right)+K$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right)+K=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{4}\frac{2x}{(x^2-1)}+K$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\frac{x}{(x^2-1)}+K$$

Allez à : Exercice 8

10.

$$\frac{1}{x^2(x^2-1)^2}=\frac{1}{x^2(x-1)^2(x+1)^2}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x-1}+\frac{d}{(x-1)^2}+\frac{e}{x+1}+\frac{f}{(x+1)^2}$$

Là cela risque d'être long.

En effet, on peut facilement déterminer b, d et f, ensuite en multipliant par x puis faire tendre $x\to+\infty$, on trouve une autre relation, il en manque encore 2 (car il y a 6 coefficients), mais on ne peut pas faire $x=0$, ni $x=1$, ni $x=-1$, à mon avis $x=i$ donnerait de bon résultats mais on va être un peu astucieux et cela va s'arranger relativement simplement.

$$\frac{1-x^2+x^2}{x^2(x^2-1)^2}=\frac{1-x^2}{x^2(x^2-1)^2}+\frac{x^2}{x^2(x^2-1)^2}=-\frac{1}{x^2(x^2-1)}+\frac{1}{(x-1)^2(x+1)^2}$$

$$F_{10}(x)=\int\frac{1}{x^2(x^2-1)^2}dx=\int\left(-\frac{1}{x^2(x^2-1)}+\frac{1}{(x-1)^2(x+1)^2}\right)dx$$

$$=-\int\frac{dx}{x^2(x^2-1)}+\int\frac{1}{(x-1)^2(x+1)^2}dx=-F_7(x)+F_9(x)$$

Par conséquent

$$F_{10}(x)=-F_7(x)+F_9(x)=-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{4}\frac{2x}{(x^2-1)}+K$$

$$=-\frac{1}{x}-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\frac{x}{(x^2-1)}+K$$

Allez à : Exercice 8

11.

$$F_{11}(x)=\int\frac{x+1}{(x^2+1)^2}dx=\int\frac{x}{(x^2+1)^2}dx+\int\frac{1}{(x^2+1)^2}dx$$

$$\int\frac{x}{(x^2+1)^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{(x^2+1)^2}dx=\frac{1}{2}\times\frac{-1}{x^2+1}$$

$\int\frac{1}{(x^2+1)^2}dx$ est le cas le plus compliqué des fractions rationnelles, il y a deux méthodes

Première méthode

$$\arctan(x)=\int\frac{1}{x^2+1}dx=\int 1\times\frac{1}{x^2+1}dx$$

Et on intègre par parties

$\int 1\times\frac{1}{x^2+1}dx$	
$u'(x)=1$	$u(x)=x$
$v(x)=\frac{1}{x^2+1}$	$v'(x)=-\frac{2x}{(x^2+1)^2}$
$\int\frac{1}{x^2+1}dx=\left[\frac{x}{x^2+1}\right]-$	$\int x\frac{(-2x)}{x^2+1}dx$

$$\arctan(x)=\int\frac{1}{x^2+1}dx=\left[\frac{x}{x^2+1}\right]+2\int\frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx=\frac{x}{x^2+1}+2\int\frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^2}dx$$

$$=\frac{x}{x^2+1}+2\int\frac{x^2+1}{(x^2+1)^2}dx-2\int\frac{1}{(x^2+1)^2}dx$$

$$=\frac{x}{x^2+1}+2\int\frac{1}{x^2+1}dx-2\int\frac{1}{(x^2+1)^2}dx$$

$$=\frac{x}{x^2+1}+2\arctan(x)-2\int\frac{1}{(x^2+1)^2}dx$$

Donc

$$2\int\frac{1}{(x^2+1)^2}dx=\frac{x}{x^2+1}+\arctan(x)\Rightarrow\int\frac{1}{(x^2+1)^2}dx=\frac{1}{2}\times\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{2}\arctan(x)+K$$

Deuxième méthode

On fait le changement de variable $x = \tan(t) \Leftrightarrow dx = (1 + \tan^2(t))dt$

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx = \int \frac{1+\tan^2(t)}{(1+\tan^2(t))^2}dt = \int \frac{dt}{1+\tan^2(t)} = \int \cos^2(t)\,dt = \int \frac{1+\cos(2t)}{2}dt$$

$$= \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin(2t)\right) + K = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \times 2\sin(t)\cos(t) = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\frac{\sin(t)}{\cos(t)}\cos^2(t)$$

$$= \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \times \frac{\sin(t)}{\cos(t)} \times \frac{1}{1+\tan^2(t)} = \frac{1}{2}\arctan(x) + \frac{1}{2}x\frac{1}{1+x^2}$$

$$F_{11}(x) = \frac{1}{2} \times \frac{-1}{x^2+1} + \frac{1}{2}\arctan(x) + \frac{1}{2} \times \frac{x}{1+x^2} + K = \frac{1}{2} \times \frac{x-1}{x^2+1} + \frac{1}{2}\arctan(x) + K$$

Allez à : Exercice 8

12. A priori il faut décomposer $\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}$ en éléments simples mais $(x-2)(x+5) = x^2 + 3x - 10$

Donc $\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}$ est de la forme $\frac{u'(x)}{u(x)}$ et alors

$$F_{12}(x) = \ln|x^2 + 3x - 10| + K$$

Allez à : Exercice 8

13.

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)(x+3)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+3}$$

On multiplie par $x - 1$, puis $x = 1$

$$a = \left[\frac{x}{(x+1)(x+3)}\right]_{x=1} = \frac{1}{8}$$

On multiplie par $x + 1$, puis $x = -1$

$$b = \left[\frac{x}{(x-1)(x+3)}\right]_{x=-1} = \frac{1}{4}$$

On multiplie par $x + 3$, puis $x = -3$

$$c = \left[\frac{x}{(x-1)(x+1)}\right]_{x=-3} = -\frac{3}{8}$$

$$F_{13}(x) = \int \left(\frac{\frac{1}{8}}{x-1} + \frac{\frac{1}{4}}{x+1} + \frac{-\frac{3}{8}}{x+3}\right)dx = \frac{1}{8}\ln|x-1| + \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{3}{8}\ln|x+3| + K$$

Allez à : Exercice 8

14.

$$x^4 - x^2 - 2 = X^2 - X - 2$$

Ce polynôme a deux racines $X_1 = -1$ et $X_2 = 2$ donc

$$x^4 - x^2 - 2 = X^2 - X - 2 = (X+1)(X-2) = (x^2+1)(x^2-2) = (x^2+1)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$$

$$\frac{1}{x^4 - x^2 - 2} = \frac{1}{(x^2+1)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})} = \frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{c}{x-\sqrt{2}} + \frac{d}{x+\sqrt{2}}$$

On multiplie par $x^2 + 1$, puis $x = i$

$$ai + b = \left[\frac{1}{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}\right]_{x=i} = \left[\frac{1}{x^2-2}\right]_{x=i} = -\frac{1}{3}$$

Donc $a = 0$ et $b = -\frac{1}{3}$

On multiplie par $x-\sqrt{2}$, puis $x=\sqrt{2}$

$$c=\left[\frac{1}{(x^2+1)(x+\sqrt{2})}\right]_{x=\sqrt{2}}=\frac{1}{3\times 2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{12}$$

On multiplie par $x+\sqrt{2}$, puis $x=-\sqrt{2}$

$$d=\left[\frac{1}{(x^2+1)(x-\sqrt{2})}\right]_{x=-\sqrt{2}}=\frac{-1}{3\times 2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{12}$$

$$F_{14}(x)=\int\left(\frac{-\frac{1}{3}}{x^2+1}+\frac{\frac{\sqrt{2}}{12}}{x-\sqrt{2}}+\frac{-\frac{\sqrt{2}}{12}}{x+\sqrt{2}}\right)dx$$

$$=-\frac{1}{3}\arctan(x)+\frac{\sqrt{2}}{12}\ln\left|x-\frac{\sqrt{2}}{12}\right|-\frac{\sqrt{2}}{12}\ln\left|x+\frac{\sqrt{2}}{12}\right|+K$$

$$=-\frac{1}{3}\arctan(x)+\frac{\sqrt{2}}{12}\ln\left|\frac{x-\frac{\sqrt{2}}{12}}{x+\frac{\sqrt{2}}{12}}\right|+K$$

Allez à : Exercice 8

15. x^2+2x+5 n'a pas de racine réelle.

$$\frac{1}{(x+2)(x^2+2x+5)}=\frac{a}{x+2}+\frac{bx+c}{x^2+2x+5}$$

On multiplie par $x=2$, puis $x=-2$

$$a=\left[\frac{1}{x^2+2x+5}\right]_{x=-2}=\frac{1}{5}$$

On multiplie par x, puis $x\to+\infty$

$$0=a+b\Leftrightarrow b=-\frac{1}{5}$$

$x=0$

$$\frac{1}{10}=\frac{a}{2}+\frac{c}{5}\Leftrightarrow 1=5a+2c\Leftrightarrow c=\frac{1}{2}-\frac{5}{2}a=0$$

$$F_{15}(x)=\int\left(\frac{\frac{1}{5}}{x+2}+\frac{-\frac{1}{5}x}{x^2+2x+5}\right)dx=\frac{1}{5}\ln|x+2|-\frac{1}{5}\int\frac{x}{x^2+2x+5}dx$$

$$\int\frac{x}{x^2+2x+5}dx=\int\frac{x}{(x+2)^2+1}dx$$

On pose $t=x+2\Leftrightarrow x=t-2\Rightarrow dx=dt$

$$\int\frac{x}{x^2+2x+5}dx=\int\frac{t-2}{t^2+1}dt=\int\frac{t}{t^2+1}dt-2\int\frac{1}{t^2+1}dt=\frac{1}{2}\ln(t^2+1)-2\arctan(t)+K$$

$$=\frac{1}{2}\ln((x+2)^2+1)-2\arctan(x+2)+K$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5)-2\arctan(x+2)+K$$

$$F_{15}(x)=\frac{1}{5}\ln|x+2|-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5)-2\arctan(x+2)\right)+K$$

$$=\frac{1}{5}\ln|x+2|-\frac{1}{10}\ln(x^2+2x+5)+\frac{2}{5}\arctan(x+2)+K$$

Allez à : Exercice 8

16. C'est très difficile.

$$\frac{16}{x^2(x^2+2)^3}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{cx+d}{x^2+2}+\frac{ex+f}{(x^2+2)^2}+\frac{hx+j}{(x^2+2)^3}$$

$\frac{16}{x^2(x^2+2)^3}$ est paire donc

$$\frac{16}{x^2(x^2+2)^3}=\frac{a}{-x}+\frac{b}{(-x)^2}+\frac{-cx+d}{(-x)^2+2}+\frac{-ex+f}{((-x)^2+2)^2}+\frac{-hx+j}{((-x)^2+2)^3}$$

On en déduit que :

$$a=c=e=h=0$$

$$\frac{16}{x^2(x^2+2)^3}=\frac{b}{x^2}+\frac{d}{x^2+2}+\frac{f}{(x^2+2)^2}+\frac{j}{(x^2+2)^3}$$

On multiplie par x^2 puis $x=0$

$$b=\left[\frac{16}{(x^2+2)^3}\right]_{x=0}=2$$

On multiplie par $(x^2+2)^3$ puis $x=i\sqrt{2}$

$$j=\left[\frac{16}{x^2}\right]_{x=i\sqrt{2}}=-8$$

On multiplie par x^2, puis $x^2\to+\infty$

$$0=b+d\Leftrightarrow d=-2$$

$x=i$

$$-16=-b+d+f+j\Leftrightarrow -16=-2-2+f-8\Leftrightarrow f=-4$$

$$\frac{16}{x^2(x^2+2)^3}=\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x^2+2}-\frac{4}{(x^2+2)^2}-\frac{8}{(x^2+2)^3}$$

$$F_{16}(x)=\int\frac{16dx}{x^2(x^2+2)^3}=\int\left(\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x^2+2}-\frac{4}{(x^2+2)^2}-\frac{8}{(x^2+2)^3}\right)dx$$

$$=-\frac{2}{x}-\frac{2}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)-4\int\frac{dx}{4\left(\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right)^2}-8\int\frac{dx}{8\left(\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right)^3}$$

$$=-\frac{2}{x}-\frac{2}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)-\int\frac{dx}{\left(\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right)^2}-\int\frac{dx}{\left(\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right)^3}$$

Dans les deux intégrales on fait le changement de variable $t=\frac{x}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow x=\sqrt{2}t\Rightarrow dx=\sqrt{2}dt$

$$F_{16}(x)=-\frac{2}{x}-\sqrt{2}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)-\sqrt{2}\int\frac{dt}{(t^2+1)^2}-\sqrt{2}\int\frac{dt}{(t^2+1)^3}$$

Or

$$\int\frac{1}{(x^2+1)^2}dx=\frac{1}{2}\times\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{2}\arctan(x)$$

D'après le cours, ce que l'on a revu dans le calcul de $F_{11}(x)$.

Donc

$$\int\frac{dt}{(t^2+1)^2}=\frac{1}{2}\times\frac{t}{t^2+1}+\frac{1}{2}\arctan(t)$$

$$\int\frac{dt}{(t^2+1)^2}=\int 1\times\frac{1}{(t^2+1)^2}dt$$

On intègre par parties

$\int 1 \times \frac{1}{(t^2+1)^2} dt$	
$u'(t) = 1$	$u(t) = t$
$v(t) = \frac{1}{(t^2+1)^2} = (t^2+1)^{-2}$	$v'(t) = -\frac{4t}{(t^2+1)^3}$
$\int \frac{1}{(t^2+1)^2} dt = \left[\frac{t}{(t^2+1)^2}\right] -$	$\int t \times \left(-\frac{4t}{(t^2+1)^3}\right) dt$

$$\int \frac{1}{(t^2+1)^2} dt = \left[\frac{t}{(t^2+1)^2}\right] + 4\int \frac{t^2}{(t^2+1)^3} dt = \frac{t}{(t^2+1)^2} + 4\int \frac{t^2+1-1}{(t^2+1)^3} dt$$
$$= \frac{t}{(t^2+1)^2} + 4\int \frac{t^2+1}{(t^2+1)^3} dt - 4\int \frac{1}{(t^2+1)^3} dt$$
$$= \frac{t}{(t^2+1)^2} + 4\int \frac{1}{(t^2+1)^2} dt - 4\int \frac{1}{(t^2+1)^3} dt$$

Donc

$$4\int \frac{1}{(t^2+1)^3} dt = \frac{t}{(t^2+1)^2} + 3\int \frac{1}{(t^2+1)^2} dt$$
$$\int \frac{1}{(t^2+1)^3} dt = \frac{1}{4} \times \frac{t}{(t^2+1)^2} + 3\left(\frac{1}{2} \times \frac{t}{t^2+1} + \frac{1}{2}\arctan(t)\right)$$

On en déduit que

$$F_{16}(x) = -\frac{2}{x} - \frac{2}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2} \times \frac{t}{t^2+1} + \frac{1}{2}\arctan(t)\right)$$
$$- 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{4} \times \frac{t}{(t^2+1)^2} + 3\left(\frac{1}{2} \times \frac{t}{t^2+1} + \frac{1}{2}\arctan(t)\right)\right) + K$$
$$= -\frac{2}{x} - \frac{2}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - \sqrt{2}\frac{t}{t^2+1} - \sqrt{2}\arctan(t) - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{t}{(t^2+1)^2}$$
$$- 3\sqrt{2}\arctan(t) + K$$
$$= -\frac{2}{x} - \sqrt{2}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - \frac{x}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} - \sqrt{2}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2} \times \frac{x}{\left(\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1\right)^2}$$
$$- 3\sqrt{2}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + K = -\frac{2}{x} - 5\sqrt{2}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - \frac{2x}{x^2+2} - \frac{2x}{(x^2+2)^2} + K$$

Allez à : Exercice 8

17. Attention il faut faire une division euclidienne.

$$x(x-1)^3 = x(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x$$

$x^4 \qquad\qquad +1$	$x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x$
$x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x$	1
$3x^3 - 3x^2 + x + 1$	

$$x^4 + 1 = 1 \times (x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x) + 3x^3 - 3x^2 + x + 1$$

Donc

$$\frac{x^4+1}{x(x-1)^3} = 1 + \frac{3x^3 - 3x^2 + x + 1}{x(x-1)^3}$$
$$F_{17}(x) = \int \left(1 + \frac{3x^3 - 3x^2 + x + 1}{x(x-1)^3}\right) dx = x + \int \frac{3x^3 - 3x^2 + x + 1}{x(x-1)^3} dx$$
$$\frac{3x^3 - 3x^2 + x + 1}{x(x-1)^3} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2} + \frac{d}{(x-1)^3}$$

On multiplie par x, puis $x = 0$

$$a=\left[\frac{3x^3-3x^2+x+1}{(x-1)^3}\right]_{x=0}=-1$$

On multiplie par $(x-1)^3$, puis $x=1$

$$d=\left[\frac{1}{x}\right]_{x=1}=1$$

On multiplie par x puis $x\to+\infty$

$$3=a+b\Leftrightarrow b=-4$$

$x=2$

$$\frac{3\times 8-3\times 4+2+1}{2\times 1}=\frac{a}{2}+b+c+d\Leftrightarrow\frac{15}{2}=-\frac{1}{2}-4+c+1\Leftrightarrow c=8+4-1=11$$

$$\frac{3x^3-3x^2+x+1}{x(x-1)^3}=\frac{-1}{x}-\frac{4}{x-1}+\frac{11}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x-1)^3}$$

$$\int\frac{3x^3-3x^2+x+1}{x(x-1)^3}dx=\int\left(\frac{-1}{x}-\frac{4}{x-1}+\frac{11}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x-1)^3}\right)dx$$

$$=-\ln|x|-4\ln|x-1|-\frac{11}{x-1}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{(x-1)^2}+K$$

$$F_{17}(x)=x-\ln|x|-4\ln|x-1|-\frac{11}{x-1}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{(x-1)^2}+K$$

Allez à : Exercice 8

18. Si on n’a rien vu il faut décomposer la fraction

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2}=\frac{a}{x}+\frac{bx+c}{x^2+1}+\frac{dx+e}{(x^2+1)^2}$$

On multiplie par $(x^2+1)^2$ puis $x=i$

$$di+e=\left[\frac{1}{x}\right]_{x=i}=\frac{1}{i}=-i\Rightarrow\begin{cases}d=-1\\ e=0\end{cases}$$

On multiplie par x puis $x=0$

$$a=\left[\frac{1}{(x^2+1)^2}\right]_{x=0}=1$$

$x\to\frac{1}{x(x^2+1)^2}$ est impaire donc

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2}=-\frac{1}{(-x)((-x)^2+1)^2}\Leftrightarrow\frac{a}{x}+\frac{bx+c}{x^2+1}+\frac{dx+e}{(x^2+1)^2}$$

$$=-\left(\frac{a}{-x}+\frac{-bx+c}{(-x)^2+1}+\frac{-dx+e}{((-x)^2+1)^2}\right)\Leftrightarrow\frac{a}{x}+\frac{bx+c}{x^2+1}+\frac{dx+e}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{a}{x}+\frac{bx-c}{x^2+1}+\frac{dx-e}{(x^2+1)^2}\Rightarrow c=e=0$$

Et enfin on multiplie par x, puis $x\to+\infty$

$$0=a+b\Rightarrow b=-1$$

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2}=\frac{1}{x}+\frac{-x}{x^2+1}+\frac{-x}{(x^2+1)^2}$$

$$F_{18}(x)=\int\frac{1}{x(x^2+1)^2}dx=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{-x}{x^2+1}+\frac{-x}{(x^2+1)^2}\right)dx$$

$$=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\frac{1}{2}\times\frac{1}{x^2+1}+K$$

Mais on peut faire mieux

$$F_{18}(x)=\int\frac{1}{x(x^2+1)^2}dx=\int\frac{xdx}{x^2(x^2+1)^2}$$

On peut alors faire le changement de variable $t=x^2$ donc $dt=2xdx$

$$F_{18}(x)=\int\frac{xdx}{x^2(x^2+1)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t(t+1)^2}$$

Puis on décompose la fraction en éléments simple

$$\frac{1}{t(t+1)^2}=\frac{a}{t}+\frac{b}{t+1}+\frac{c}{(t+1)^2}$$

On multiplie par t, puis $t=0$

$$a=\left[\frac{1}{(t+1)^2}\right]_{t=0}=1$$

On multiplie par $(t+1)^2$ puis $t=-1$

$$c=\left[\frac{1}{t}\right]_{t=-1}=-1$$

On multiplie par t, puis $t\to+\infty$

$$0=a+b\Rightarrow b=-1$$

$$F_{18}(x)=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t}+\frac{-1}{t+1}+\frac{-1}{(t+1)^2}\right)dt=\frac{1}{2}\left(\ln|t|-\ln|t+1|+\frac{1}{t+1}\right)+K$$

$$=\frac{1}{2}\left(\ln(x^2)-\ln(x^2+1)+\frac{1}{x^2+1}\right)+K=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\frac{1}{2}\times\frac{1}{x^2+1}+K$$

Allez à : Exercice 8

19.

Le polynôme t^2+2t+4 n'admet pas de racines réelles, cette fraction est donc un élément simple, il faut donc mettre le dénominateur sous sa forme canonique

$$t^2+2t+4=(t+1)^2+3$$

$$\int\frac{t}{t^2+2t+4}dt=\int\frac{t}{(t+1)^2+3}dt$$

Puis faire le changement de variable $x=t+1\Leftrightarrow t=x-1$, ce qui entraine que $dt=dx$

$$\int\frac{t}{t^2+2t+4}dt=\int\frac{x-1}{x^2+3}dx=\int\frac{x}{x^2+3}dx-\int\frac{1}{x^2+3}dx=\frac{1}{2}\ln(x^2+3)-\int\frac{1}{x^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+3)-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)+K=\frac{1}{2}\ln(t^2+2t+4)-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{t+1}{\sqrt{3}}\right)+K$$

Allez à : Exercice 8

Correction exercice 9.

1.

$$\int\frac{-t+1}{t^2+2t+5}dt=\int\frac{-t+1}{(t+1)^2+4}dt$$

On fait le changement de variable $u=t+1\Leftrightarrow t=u-1$, $dt=du$

$$G(t)=\int\frac{-(u-1)+1}{u^2+4}dt=\int\frac{-u+2}{u^2+4}dt=\int\frac{-u}{u^2+4}dt+\int\frac{2}{u^2+4}dt$$

$$=-\frac{1}{2}\ln(u^2+4)+\frac{2}{2}\arctan\left(\frac{u}{2}\right)=-\frac{1}{2}\ln(t^2+2t+5)+\arctan\left(\frac{t+1}{2}\right)+K$$

Allez à : Exercice 9

2. On fait une intégration par partie

$F(t)=\int \frac{\ln(t^2+2t+5)}{t^2}dt$	
$u'(t)=\frac{1}{(t-1)^2}$	$u(t)=-\frac{1}{t-1}$
$v(t)=\ln(t^2+2t+5)$	$v'(t)=\frac{2t+2}{t^2+2t+5}$
$F(t)=\left[-\frac{\ln(t^2+2t+5)}{t-1}\right]+$	$\int \frac{2t+2}{(t-1)(t^2+2t+5)}dt$

Il existe a, b et c réels tels que

$$\frac{2t+2}{(t-1)(t^2+2t+5)}=\frac{a}{t-1}+\frac{bt+c}{t^2+2t+5}$$

Je multiplie par $t-1$, puis $t=1$

$$a=\left[\frac{2t+2}{t^2+2t+5}\right]_{t=1}=\frac{1}{2}$$

Je multiplie par t, puis $t\to+\infty$

$$0=a+b\Leftrightarrow b=-\frac{1}{2}$$

$t=0$,

$$-\frac{2}{5}=-a+\frac{c}{5}\Leftrightarrow c=-2+5a=\frac{1}{2}$$

$$\int\frac{2t+2}{(t-1)(t^2+2t+5)}dt=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t-1}+\frac{-t+1}{t^2+2t+5}\right)dt=\frac{1}{2}\left(\ln|t-1|+\int\frac{-t+1}{t^2+2t+5}dt\right)$$

$$=\frac{1}{2}\ln|t-1|-\frac{1}{4}\ln(t^2+2t+5)+\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{t+1}{2}\right)+K$$

Donc

$$F(t)=-\frac{\ln(t^2+2t+5)}{t-1}+\frac{1}{2}\ln|t-1|-\frac{1}{4}\ln(t^2+2t+5)+\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{t+1}{2}\right)+K$$

Allez à : Exercice 9

Correction exercice 10.

1. Il existe a, b et c réels tels que :

$$f(x)=\frac{2x+1}{x^2(x+1)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x+1}$$

On multiplie par x^2, puis $x=0$

$$b=\left[\frac{2x+1}{x+1}\right]_{x=0}=1$$

On multiplie par $x+1$, puis $x=-1$

$$c=\left[\frac{2x+1}{x^2}\right]_{x=-1}=-1$$

On multiplie par x, puis $x\to+\infty$

$$0=a+c\Rightarrow a=1$$

Par conséquent

$$f(x)=\frac{2x+1}{x^2(x+1)}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x+1}$$

2.

$F(x)=\int\frac{1}{x^2}\ln(x^2+x)\,dx$	
$u'(x)=\frac{1}{x^2}$	$u(x)=-\frac{1}{x}$
$v(x)=\ln(x^2+x)$	$v'(x)=\frac{2x+1}{x^2+x}$
$F(x)=-\frac{1}{x}\ln(x^2+x)$	$-\int\frac{2x+1}{-x(x^2+x)}dx$

Donc

$$F(x)=-\frac{1}{x}\ln(x^2+x)+\int\frac{2x+1}{x^2(x+1)}dx=-\frac{1}{x}\ln(x^2+x)+\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$=-\frac{1}{x}\ln(x^2+x)+\ln|x|-\frac{1}{x}-\ln|x+1|+K,\quad K\in\mathbb{R}$$

Allez à : Exercice 10

Correction exercice 11.

1.

$$F_1(x)=\int\frac{dx}{x^2+5}=\int\frac{dx}{x^2+\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)+K$$

Allez à : Exercice 11

2.

$$F_2(x)=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2-1}}$$

On fait le changement de variable $t=\frac{x}{\sqrt{5}}\Leftrightarrow x=\sqrt{5}t\Rightarrow dx=\sqrt{5}dt$

$$F_2(x)=\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{\sqrt{5}dt}{\sqrt{t^2-1}}=\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}=\operatorname{argch}(t)+K=\operatorname{argch}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)+K$$

Allez à : Exercice 11

3.

On fait le changement de variable $t=e^x\Leftrightarrow x=\ln(t)\Rightarrow dx=\frac{dt}{t}$

$$F_3(x)=\int t\sin(t)\left(\frac{dt}{t}\right)=\int\sin(t)\,dt=-\cos(t)+K=-\cos(e^x)+K$$

Autre méthode : on remarque que $dt=e^xdx$, or ce terme est dans l'intégrale donc

$$F_3(x)=\int e^x\sin(e^x)dx=\int\sin(e^x)(e^xdx)=\int\sin(t)\,dt=-\cos(t)+K=-\cos(e^x)+K$$

Allez à : Exercice 11

4. On pose $t=\tan(x)\Leftrightarrow x=\arctan(t)\Rightarrow dx=\frac{dt}{1+t^2}$

$$F_4(x)=\int t^3\times\frac{dt}{1+t^2}=\int\frac{t^3}{1+t^2}dt=\int\frac{t(t^2+1)-t}{1+t^2}dt=\int\left(t-\frac{t}{1+t^2}\right)dt$$
$$=\frac{t^2}{2}-\frac{1}{2}\ln(1+t^2)+K=\frac{1}{2}\tan^2(x)-\frac{1}{2}\ln(1+\tan^2(x))+K$$

Autre méthode

$$F_4(x)=\int\tan^3(x)\,dx=\int\tan(x)(\tan^2(x)+1-1)dx$$
$$=\int\tan(x)\,(1+\tan^2(x))dx-\int\tan(x)\,dx+K'$$
$$=\int\tan(x)\tan'(x)\,dx-\int\frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx+K'=\frac{1}{2}\tan^2(x)+\int\frac{\cos'(x)}{\cos(x)}dx+K'$$
$$=\frac{1}{2}\tan^2(x)+\ln|\cos(x)|+K'$$

On peut se demander si ces deux primitives sont bien égales à une constante près.

$$\ln(1+\tan^2(x))=\ln\left(\frac{1}{\cos^2(x)}\right)=-\ln(\cos^2(x))=-2\ln|\cos(x)|$$

Donc tout va bien.

Allez à : Exercice 11

5.

$$F_5(x)=\int\frac{1}{\tan^3(x)}\,dx=\int\frac{1+\tan^2(x)-\tan^2(x)}{\tan^3(x)}\,dx=\int\frac{1+\tan^2(x)}{\tan^3(x)}\,dx-\int\frac{\tan^2(x)}{\tan^3(x)}\,dx$$
$$=\int\frac{\tan'(x)}{\tan^3(x)}dx-\int\frac{1}{\tan(x)}dx=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{\tan^2(x)}-\int\frac{\cos(x)}{\sin(x)}dx$$
$$=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{\tan^2(x)}-\int\frac{\sin'(x)}{\sin(x)}dx=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{\tan^2(x)}-\ln|\sin(x)|+K$$

Autre méthode

$$F_5(x)=\int\frac{1}{\tan^3(x)}\,dx=\int\frac{\cos^3(x)}{\sin^3(x)}dx=\int\frac{\cos(x)\cos^2(x)}{\sin^3(x)}dx=\int\frac{\cos(x)\,(1-\sin^2(x))}{\sin^3(x)}dx$$
$$=\int\frac{1-\sin^2(x)}{\sin^3(x)}\cos(x)\,dx$$

On fait alors le changement de variable $t=\sin(x)\Rightarrow dt=\cos(x)\,dx$

$$F_5(x)=\int\frac{1-\sin^2(x)}{\sin^3(x)}\cos(x)\,dx=\int\frac{1-t^2}{t^3}(dt)=\int\left(\frac{1}{t^3}-\frac{1}{t}\right)dt=\int t^{-3}dt-\ln|t|+K'$$
$$=-\frac{1}{2}\times t^{-2}-\ln|t|+K'=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{t^2}-\ln|t|+K'=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sin^2(x)}-\ln|\sin(x)|+K'$$

Là encore on peut se demander si ces deux primitives sont égales à une constante près.

$$\frac{1}{\sin^2(x)}=\frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\sin^2(x)}=\frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)}+1=\frac{1}{\tan^2(x)}+1$$

Donc

$$F_5(x)=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sin^2(x)}-\ln|\sin(x)|+K'=-\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{\tan^2(x)}+1\right)-\ln|\sin(x)|+K'$$
$$=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{\tan^2(x)}-\ln|\sin(x)|-\frac{1}{2}+K'$$

On en déduit que $K=-\frac{1}{2}+K'$.

Allez à : Exercice 11

6. A priori il faudrait décomposer la fraction en éléments simples mais ici cela s'arrange plus simplement.
On pose $t=x^2+3x+7\Rightarrow dt=(2x+3)dx$

$$F_6(x)=\int\frac{dt}{t^m}=\int t^{-m}dt=\frac{1}{1-m}t^{-m+1}+K=-\frac{1}{m-1}\times\frac{1}{t^{m-1}}+K$$
$$=-\frac{1}{m-1}\times\frac{1}{(x^2+3x+7)^{m-1}}+K$$

Allez à : Exercice 11

7.

$$F_7(x)=\int\frac{\ln(x)}{x}dx=\int\ln(x)\times\frac{dx}{x}=\int\ln(x)\times\ln'(x)\,dx=\frac{1}{2}\ln^2(x)+K$$

Autre méthode (très semblable)

On pose $t=\ln(x)\Rightarrow dt=\frac{dx}{x}$

$$F_7(x)=\int\frac{\ln(x)}{x}dx=\int\ln(x)\times\frac{dx}{x}=\int tdt=\frac{1}{2}\times t^2+K=\frac{1}{2}\ln^2(x)+K$$

Encore une autre méthode

On pose $t=\ln(x)\Leftrightarrow x=e^t\Rightarrow dx=e^tdt$

$$F_7(x)=\int\frac{\ln(x)}{x}dx=\int\frac{\ln(e^t)}{e^t}\times e^tdt=\int tdt=\frac{1}{2}\times t^2+K=\frac{1}{2}\ln^2(x)+K$$

Allez à : Exercice 11

8. La « méthode normale » voudrait que l'on pose $t = e^x$ mais ici cela s'arrange plus simplement.
On pose $t = \operatorname{sh}(x) \Rightarrow dt = \operatorname{ch}(x)\,dx$

$$F_8(x) = \int \frac{1}{t^5}dt = \int t^{-5}dt = \frac{1}{-4}\times t^{-4} + K = -\frac{1}{4}\times\frac{1}{t^4} + K = -\frac{1}{4\operatorname{sh}^4(x)} + K$$

Allez à : Exercice 11

Correction exercice 12.

1. Ce n'est qu'un rappel d'un résultat du cours :

$$F_1(x) = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + K$$

Allez à : Exercice 12

2. Pour F_2, on constate que $\frac{1}{(1+x^2)^2}$ est un élément simple, donc il n'y a pas de décomposition à faire.

Première méthode (décrite dans le cours)

$\arctan(x) = \int 1 \times \frac{1}{1+x^2}dx$	
$u'(x) = 1$	$u(x) = x$
$v(x) = \frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1}$	$v'(x) = -2x(1+x^2)^{-2}$
$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \left[\frac{x}{1+x^2}\right] -$	$\int x\left(-\frac{2x}{(1+x^2)^2}\right)dx$

$$\begin{aligned}\arctan(x) &= \frac{x}{1+x^2} + 2\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx = \frac{x}{1+x^2} + 2\int \frac{x^2+1-1}{(1+x^2)^2}dx\\ &= \frac{x}{1+x^2} + 2\int\left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{(1+x^2)^2}\right)dx\\ &= \frac{x}{1+x^2} + 2\left(\int\frac{1}{1+x^2}dx - \int\frac{1}{(1+x^2)^2}dx\right)\\ &= \frac{x}{1+x^2} + 2\left(\arctan(x) - \int\frac{1}{(1+x^2)^2}dx\right) = \frac{x}{1+x^2} + 2\arctan(x) - 2F_2(x)\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$F_2(x) = \frac{1}{2}\arctan(x) + \frac{1}{2}\times\frac{x}{1+x^2} + K$$

Deuxième méthode

On pose $x = \tan(t)$, alors $dx = (1+\tan^2(t))dt$

$$\begin{aligned}F_2(x) &= \int\frac{(1+\tan^2(t))}{(1+\tan^2(t))^2}dt = \int\frac{1}{1+\tan^2(t)}dt = \int\cos^2(t)\,dt = \int\frac{1+\cos(2t)}{2}dt\\ &= \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin(2t) + K = \frac{\arctan(x)}{2} + \frac{1}{4}\sin(2\arctan(x)) + K'\\ &= \frac{\arctan(x)}{2} + \frac{2}{4}\sin(\arctan(x))\cos(\arctan(x)) + K'\\ &= \frac{\arctan(x)}{2} + \frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + K' = \frac{\arctan(x)}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{x}{1+x^2} + K'\end{aligned}$$

En effet :

$$\cos^2(\arctan(x)) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}$$

Ensuite $\arctan(x) \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ donc $\cos(\arctan(x)) > 0$ donc

$$\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Puis

$$\sin(\arctan(x)) = \tan(\arctan(x))\cos(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Si on trouve que

$$F_2(x) = \frac{\arctan(x)}{2} + \frac{1}{4}\sin(2\arctan(x)) + K'$$

C'est bon.

Allez à : Exercice 12

3. Il faut faire une division euclidienne : $x^3 = x^3 - 4x + 4x = x(x^2-4) + 4x$
Donc

$$\frac{x^3}{x^2-4} = x + \frac{4x}{x^2-4}$$

Normalement il faudrait encore décomposer $\frac{4x}{x^2-4}$ mais cette fraction est, à une constante multiplicative près, de la forme $\frac{u'(x)}{u(x)}$.

$$F_3(x) = \int \left(x + \frac{4x}{x^2-4}\right)dx = \frac{x^2}{2} + 2\ln|x^2-4| + K$$

Allez à : Exercice 12

4.

$$\frac{4x}{(x-2)^2} = \frac{a}{(x-2)^2} + \frac{b}{x-2}$$
$$a = [4x]_{x=2} = 8$$

On multiplie par x, puis $x \to +\infty$

$$4 = b$$
$$F_4(x) = \int \left(\frac{8}{(x-2)^2} + \frac{4}{x-2}\right)dx = 8\int (x-2)^{-2}dx + 4\int \frac{1}{x-2}dx$$
$$= 8(-1)(x-2)^{-1} + 4\ln|x-2| + K = -\frac{8}{x-2} + 4\ln|x-2| + K$$

Allez à : Exercice 12

5.

x^2+x+1 n'a pas de racines réelles donc $\frac{1}{x^2+x+1}$ est un élément simple et il faut mettre x^2+x+1 sous forme canonique.

$$F_5(x) = \int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

On fait le changement de variable $t = x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = t - \frac{1}{2} \Rightarrow dx = dt$

$$F_5(x) = \int \frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}} = \int \frac{dt}{t^2 + \left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right) + K = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + K$$

Allez à : Exercice 12

6. t^2+2t-1 admet deux racines réelles distinctes

$$t_1 = \frac{-2-\sqrt{8}}{2} = -1-\sqrt{2}$$

Et

$$t_2 = -1+\sqrt{2}$$
$$t^2+2t-1 = (t-t_1)(t-t_2)$$

$$\frac{1}{t^2+2t-1}=\frac{1}{(t-t_1)(t-t_2)}=\frac{a}{t-t_1}+\frac{b}{t-t_2}$$
$$a=\left[\frac{1}{t-t_2}\right]_{t=t_1}=\frac{1}{t_1-t_2}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$$
$$b=\left[\frac{1}{t-t_1}\right]_{t=t_2}=\frac{1}{t_2-t_1}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$
$$F_6(t)=\frac{\sqrt{2}}{4}\int\left(\frac{-1}{t-t_1}+\frac{1}{t-t_2}\right)dt=\frac{\sqrt{2}}{4}(-\ln|t-t_1|+\ln|t-t_2|)+K=\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{t-t_2}{t-t_1}\right|+K$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{t+1-\sqrt{2}}{t+1+\sqrt{2}}\right|+K$$

Allez à : Exercice 12

7. $t^2-2t+10$ n'a pas de racine réelle donc $\frac{3t+1}{(t^2-2t+10)^2}$ est un élément simple et il faut mettre $t^2-2t+10$ sous sa forme canonique.

$$F_7(t)=\int\frac{(3t+1)dt}{((t-1)^2+9)^2}$$

On fait le changement de variable $u=t-1\Leftrightarrow t=u+1\Rightarrow dt=du$

$$F_7(t)=\int\frac{(3(u+1)+1)du}{(u^2+9)^2}=\int\frac{(3u+4)du}{(u^2+9)^2}=\int\frac{3udu}{(u^2+9)^2}+\int\frac{4du}{(u^2+9)^2}$$
$$I_1(t)=\int\frac{3udu}{(u^2+9)^2}\quad et\quad I_2(t)=\int\frac{4du}{(u^2+9)^2}$$

Dans I_1 on fait le changement de variable $v=u^2\Rightarrow dv=2udu$

$$I_1(t)=\int\frac{\frac{3}{2}dv}{(v+9)^2}=\frac{3}{2}\int(v+9)^{-2}dv=\frac{3}{2}(-1)(v+9)^{-1}=-\frac{3}{2(v+9)}=-\frac{3}{2(u^2+9)}$$
$$=-\frac{3}{2((t-1)^2+9)}=-\frac{3}{2(t^2-2t+10)}$$
$$I_2(t)=\int\frac{4du}{(u^2+9)^2}=\int\frac{4du}{9^2\left(\left(\frac{u}{3}\right)^2+1\right)^2}$$

On fait le changement de variable $v=\frac{u}{3}\Leftrightarrow u=3v\Rightarrow du=3dv$

$$I_2(t)=\frac{12}{81}\int\frac{dv}{(v^2+1)^2}=\frac{4}{27}\int\frac{dv}{(v^2+1)^2}$$

Comme on l'a déjà revu avec F_2

$$\int\frac{dv}{(v^2+1)^2}=\frac{1}{2}\arctan(v)+\frac{1}{2}\frac{v}{1+v^2}+K$$
$$I_2(t)=\frac{4}{27}\left(\frac{1}{2}\arctan(v)+\frac{1}{2}\frac{v}{1+v^2}\right)+K=\frac{2}{27}\arctan\left(\frac{u}{3}\right)+\frac{2}{27}\frac{\frac{u}{3}}{1+\left(\frac{u}{3}\right)^2}$$
$$=\frac{2}{27}\arctan\left(\frac{u}{3}\right)+\frac{2}{9}\times\frac{u}{9+u^2}=\frac{2}{27}\arctan\left(\frac{t-1}{3}\right)+\frac{2}{9}\times\frac{t-1}{t^2-2t+10}$$

Et finalement

$$F_7(t)=-\frac{3}{2(t^2-2t+10)}+\frac{2}{27}\arctan\left(\frac{t-1}{3}\right)+\frac{2}{9}\times\frac{t-1}{t^2-2t+10}$$
$$=\frac{2}{27}\arctan\left(\frac{t-1}{3}\right)+\frac{\frac{2}{9}t-\frac{31}{18}}{t^2-2t+10}$$

Allez à : Exercice 12

8. $t^2-2t+10$ n'a pas de racine réelle donc

$$\frac{3t+1}{t^2-2t+10}$$

est un élément simple, on met $t^2-2t+10$ sous forme canonique.

$$F_8(t)=\int\frac{3t+1}{((t-1)^2+9)}dt$$

On pose $u=t-1\Leftrightarrow t=u+1\Rightarrow dt=du$

$$F_8(t)=\int\frac{3(u+1)+1}{(u^2+9)}du=\int\frac{3u+4}{u^2+9}du=\int\frac{3u}{u^2+9}du+\int\frac{4}{u^2+3^2}du$$

$$=\frac{3}{2}\ln(u^2+9)+\frac{4}{3}\arctan\left(\frac{u}{3}\right)+K=\frac{3}{2}\ln(t^2-2t+10)+\frac{4}{3}\arctan\left(\frac{t-1}{3}\right)+K$$

Allez à : Exercice 12

9.

$$\frac{1}{t^3+1}=\frac{1}{(t+1)(t^2-t+1)}=\frac{a}{t+1}+\frac{bt+c}{t^2-t+1}$$

$$a=\left[\frac{1}{t^2-t+1}\right]_{t=-1}=\frac{1}{3}$$

On multiplie par t, puis $t\to+\infty$

$$0=a+b\Rightarrow b=-\frac{1}{3}$$

$t=0$,

$$1=a+c\Rightarrow c=\frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{t^3+1}=\frac{1}{(t+1)(t^2-t+1)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{t+1}+\frac{-t+2}{t^2-t+1}\right)$$

$$F_9(t)=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t+1}+\frac{1}{3}\int\frac{-t+2}{t^2-t+1}dt=\frac{1}{3}\ln|t+1|+\frac{1}{3}\int\frac{-t+2}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dt$$

On pose $u=t-\frac{1}{2}\Leftrightarrow t=u+\frac{1}{2}\Rightarrow dt=du$

$$\int\frac{-u+\frac{3}{2}}{u^2+\frac{3}{4}}du=-\int\frac{u}{u^2+\frac{3}{4}}du+\frac{3}{2}\int\frac{1}{u^2+\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2}du=-\frac{1}{2}\ln\left(u^2+\frac{3}{4}\right)+\frac{3}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right)+K$$

$$=-\frac{1}{2}\ln(t^2-t+1)+\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)+K$$

Par conséquent

$$F_9(t)=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t+1}+\frac{1}{3}\int\frac{-t+2}{t^2-t+1}dt$$

$$=\frac{1}{3}\ln|t+1|+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\ln(t^2-t+1)+\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)\right)+K$$

$$=\frac{1}{3}\ln|t+1|-\frac{1}{6}\ln(t^2-t+1)+\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)+K$$

Allez à : Exercice 12

10. Il faut diviser x^3+2 par $(x+1)^3=x^3+3x^2+3x+1$,

$$x^3+2=1\times(x^3+3x^2+3x+1)+(-3x^2-3x+1)$$

Ce qui entraine que

$$\frac{x^3+2}{(x+1)^3}=1+\frac{-3x^2-3x+1}{(x+1)^3}$$

On cherche alors a, b et c tels que :

$$\frac{-3x^2-3x+1}{(x+1)^3}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{(x+1)^2}+\frac{c}{(x+1)^3}$$
$$c=[-3x^2-3x+1]_{x=-1}=1$$

On multiplie par x, puis $x\to+\infty$

$$-3=a$$

$x=0$

$$1=a+b+c\Rightarrow b=1-a-c=3$$
$$F_{10}(x)=\int\frac{x^3+2}{(x+1)^3}dx=\int\left(1-\frac{3}{x+1}+\frac{3}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+1)^3}\right)dx$$
$$=x-3\ln|x+1|+3\int(x+1)^{-2}dx+\int(x+1)^{-3}dx$$
$$=x-3\ln|x+1|+3(-(x+1)^{-1})+\left(-\frac{1}{2}\right)(x+1)^{-2}+K$$
$$=x-3\ln|x+1|-\frac{3}{x+1}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{(x+1)^2}+K$$

Allez à : Exercice 12

11.

On cherche alors a, b et c tels que :

$$\frac{x+1}{x(x-2)^2}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x-2}+\frac{c}{(x-2)^2}$$
$$c=\left[\frac{x+1}{x}\right]_{x=2}=\frac{3}{2}$$

On multiplie par x, puis $x\to+\infty$

$$0=a+b$$

$x=1$

$$2=a-b+c\Leftrightarrow a-b=\frac{1}{2}$$

Donc $a=\frac{1}{4}$ et $b=-\frac{1}{4}$

$$F_{11}(x)=\int\frac{x+1}{x(x-2)^2}dx=\int\left(\frac{\frac{1}{4}}{x}-\frac{\frac{1}{4}}{x-2}+\frac{\frac{3}{2}}{(x-2)^2}\right)dx$$
$$=\frac{1}{4}\ln|x|-\frac{1}{4}\ln|x-2|+\frac{3}{2}\int(x-2)^{-2}dx=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{x-2}\right|-\frac{3}{2}\times\frac{1}{x-2}+K$$

Allez à : Exercice 12

Correction exercice 13.

1.

$$I_1=\int_0^1\frac{dx}{x^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^1=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(0)=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Allez à : Exercice 13

2.

$$I_2=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{1-x^2}=2\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{1-x^2}$$

Car $x\to\frac{1}{1-x^2}$ est paire

Première méthode parce que $\left[0,\frac{1}{2}\right]\subset]-1,1[$

$$I_2=2\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{1-x^2}=2[\operatorname{argth}(x)]_0^{\frac{1}{2}}=2\operatorname{argth}\left(\frac{1}{2}\right)-2\operatorname{argth}(0)=2\times\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right)=\ln(3)$$

Deuxième méthode (qui marche sur n'importe quel intervalle ne contenant pas -1 et 1).

$$\frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{(1-x)(1+x)}=\frac{a}{1-x}+\frac{b}{1+x}=\frac{\frac{1}{2}}{1-x}+\frac{\frac{1}{2}}{1+x}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)$$

$$I_2=2\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{1-x^2}=2\times\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)dx=[-\ln(1-x)+\ln(1+x)]_0^{\frac{1}{2}}=\left[\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=\ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right)-\ln(1)=\ln(3)$$

Attention $\int\frac{dx}{1-x}=-\ln(1-x)+K$, il ne faut pas oublier le signe $-$.

Allez à : Exercice 13

3. x^2+x-3 s'annule en $\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$ et $\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$, comme $[2,3]\subset\left]\frac{-1-\sqrt{13}}{2},\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right[$ $x\to\frac{2x+1}{x^2+x-3}$ est définie et continue sur $[2,3]$.
A priori il faut décomposer $\frac{2x+1}{x^2+x-3}$ en éléments simples mais il se trouve que $2x+1$ est la dérivée de x^2+x-3, donc

$$I_3=[\ln|x^2+x-3|]_2^3=\ln(9)-\ln(3)=\ln\left(\frac{9}{3}\right)=\ln(3)$$

Allez à : Exercice 13

4. On pose $t=x^2\Rightarrow dt=2xdx$
$x=0\Rightarrow t=0$ et $x=2\Rightarrow t=4$

$$I_4=\frac{1}{2}\int_0^2\frac{2xdx}{(x^2)^2+16}=\frac{1}{2}\int_0^4\frac{dt}{t^2+4^2}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\left[\arctan\left(\frac{t}{4}\right)\right]_0^4=\frac{1}{8}(\arctan(1)-\arctan(0))=\frac{1}{8}\times\frac{\pi}{4}$$
$$=\frac{\pi}{32}$$

Allez à : Exercice 13

5.
Il existe a,b et c réels tels que

$$\frac{5x+6}{(x^2-4)(x+2)}=\frac{5x+6}{(x-2)(x+2)^2}=\frac{a}{x-2}+\frac{b}{x+2}+\frac{c}{(x+2)^2}$$

On multiplie par $x-2$, puis $x=2$

$$a=\left[\frac{5x+6}{(x+2)^2}\right]_{x=-2}=\frac{10+6}{(2+2)^2}=1$$

On multiplie par $x+2$, puis $x=-2$

$$c=\left[\frac{5x+6}{x-2}\right]_{x=-2}=\frac{-10+6}{-2-2}=1$$

On multiplie par x, puis $x\to+\infty$

$$0=a+b\Rightarrow b=-1$$

Par conséquent

$$I_5=\int_0^1\left(\frac{1}{x-2}+\frac{-1}{x+2}+\frac{1}{(x+2)^2}\right)dx=\left[\ln|x-2|-\ln|x+2|-\frac{1}{x+2}\right]_{x=0}^{x=1}$$
$$=\ln|-1|-\ln(3)-\frac{1}{3}-\left(\ln|-2|-\ln(2)-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{6}-\ln(3)$$

Allez à : Exercice 13

6.

Il existe a, b, c et d quatre réels tels que :

$$\frac{x-1}{x^2(x^2+1)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{cx+d}{x^2+1}$$

On multiplie par x^2+1, puis $X=i$

$$ci+d=\left[\frac{x-1}{x^2}\right]_{X=i}=\frac{i-1}{-1}=1-i$$

Donc $c=-1$ et $d=1$

On multiplie par x^2, puis $x=0$

$$b=\left[\frac{x-1}{x^2+1}\right]_{X=0}=-1$$

On multiplie par x, puis $x\to+\infty$

$$0=a+c$$

Donc $a=-c=1$, finalement

$$\frac{x-1}{x^2(x^2+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{-x+1}{x^2+1}$$

$$I_6=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{x-1}{x^2(x^2+1)}dx=\int_1^{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{-x+1}{x^2+1}\right)dx=\int_1^{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2}\times\frac{2x}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}\right)dx$$

$$=\left[\ln(x)+\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\arctan(x)\right]_1^{\sqrt{3}}$$

$$=\ln\left(\sqrt{3}\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\ln(3+1)+\arctan\left(\sqrt{3}\right)-\left(\ln(1)+1-\frac{1}{2}\ln(1+1)+\arctan(1)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\ln(3)+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\ln(4)+\frac{\pi}{3}-1+\frac{1}{2}\ln(2)-\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\ln\left(3\times\frac{2}{4}\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}-1+\frac{\pi}{12}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}-1+\frac{\pi}{12}$$

Allez à : Exercice 13

Correction exercice 14.

1.

$$F_1(x)=\int\frac{\cos^3(x)}{\sin^5(x)}dx$$

D’après les règles de Bioche

$$\frac{\cos^3(-x)}{\sin^5(-x)}d(-x)=\frac{\cos^3(x)}{(-\sin(x))^5}(-dx)=\frac{\cos^3(x)}{-\sin^5(x)}(-dx)=\frac{\cos^3(x)}{\sin^5(x)}dx$$

$$\frac{\cos^3(x+\pi)}{\sin^5(x+\pi)}d(x+\pi)=\frac{(-\cos(x))^3}{(-\sin(x))^5}dx=\frac{-\cos^3(x)}{-\sin^5(x)}dx=\frac{\cos^3(x)}{\sin^5(x)}dx$$

Ici deux des changements de variables sont possibles, $t=\cos(x)$ et $t=\tan(x)$, on va essayer les deux pour constater que $t=\tan(x)$ est meilleur (ce qui est toujours le cas lorsque l’on a le choix entre $\cos(x)$ ou $\sin(x)$ et $\tan(x)$)

Changement de variable $t=\cos(x)\Rightarrow dt=-\sin(x)$.

$$F_1(x)=\int\frac{\cos^3(x)}{\sin^5(x)}dx=\int\frac{\cos^3(x)}{\sin^6(x)}\sin(x)\,dx=-\int\frac{\cos^3(x)}{(\sin^2(x))^3}(-\sin(x)\,dx)$$

$$=-\int\frac{\cos^3(x)}{(1-\cos^2(x))^3}(-\sin(x)\,dx)=-\int\frac{t^3}{(1-t^2)^3}dt$$

Il n’est pas tout simple de décomposer cette fraction rationnelle, on peut toutefois poser $u=t^2\Rightarrow du=2tdt$

$$F_1(x)=-\frac{1}{2}\int\frac{t^2}{(1-t^2)^3}2tdt=-\frac{1}{2}\int\frac{u}{(1-u)^3}du=-\frac{1}{2}\int\frac{u-1+1}{(1-u)^3}du$$
$$=-\frac{1}{2}\int\left(-\frac{1}{(1-u)^2}+\frac{1}{(1-u)^3}\right)du=\frac{1}{2}\int(1-u)^{-2}du-\frac{1}{2}\int(1-u)^{-3}du$$
$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}(-1)(1-u)^{-1}\right]-\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}(-1)(1-u)^{-2}\right]+K$$
$$=\frac{1}{4}\times\frac{1}{1-u}-\frac{1}{4}\times\frac{1}{(1-u)^2}+K=\frac{1}{4}\times\frac{1}{1-t^2}-\frac{1}{4}\times\frac{1}{(1-t^2)^2}+K$$
$$=\frac{1}{4}\times\frac{1}{1-\cos^2(t)}-\frac{1}{4}\times\frac{1}{(1-\cos^2(t))^2}+K=\frac{1}{4}\times\frac{1}{\sin^2(x)}-\frac{1}{4}\times\frac{1}{\sin^4(x)}+K$$
$$=\frac{1}{4}\frac{(\sin^2(x)-1)}{\sin^4(x)}+K=-\frac{1}{4}\times\frac{1}{\tan^4(x)}+K$$

Changement de variable $t=\tan(x)\Rightarrow dt=\frac{dx}{\cos^2(x)}$

$$F_1(x)=\int\frac{\cos^3(x)}{\sin^5(x)}dx=\int\frac{\cos^5(x)}{\sin^5(x)}\frac{dx}{\cos^2(x)}=\int\frac{1}{\frac{\sin^5(x)}{\cos^5(x)}}\frac{dx}{\cos^2(x)}=\int\frac{1}{\tan^5(x)}\frac{dx}{\cos^2(x)}=\int\frac{1}{t^5}dt$$
$$=\int t^{-5}dt=-\frac{1}{4}t^{-4}+K'=-\frac{1}{4}\times\frac{1}{\tan^4(x)}+K'$$

C'est nettement plus simple.

Allez à : Exercice 14

2. On applique encore les règles de Bioche.

$$\frac{\sin^3(-x)}{1+\cos(-x)}d(-x)=\frac{-\sin^3(x)}{1+\cos(x)}(-dx)=\frac{\sin^3(x)}{1+\cos(x)}dx$$

C'est le seul invariant qui fonctionne, on doit faire le changement de variable $t=\cos(x)\Rightarrow dt=-\sin(x)\,dx$

$$F_2(x)=-\int\frac{\sin^2(x)}{1+\cos(x)}(-\sin(x)dx)=-\int\frac{1-t^2}{1+t}dt=\int\frac{t^2-1}{1+t}dt=\int(t-1)dt=\frac{t^2}{2}-t+K$$
$$=\frac{\cos^2(x)}{2}-\cos(x)+K$$

Allez à : Exercice 14

3.

$$\frac{d(x+\pi)}{\cos^4(x+\pi)+\sin^4(x+\pi)}=\frac{dx}{(-\cos(x))^4+(-\sin(x))^4}=\frac{dx}{\cos^4(x)+\sin^4(x)}$$

Donc on doit faire le changement de variable $t=\tan(x)$

Première méthode

On fait apparaître $dt=\frac{dx}{\cos^2(x)}$

$$F_3(x)=\int\frac{\cos^2(x)}{\cos^4(x)+\sin^4(x)}\frac{dx}{\cos^2(x)}$$

Et la règle de Bioche dit que $\frac{\cos^2(x)}{\cos^4(x)+\sin^4(x)}$ peut s'exprimer en fonction de $\tan(x)$

$$\frac{\cos^2(x)}{\cos^4(x)+\sin^4(x)}=\frac{\cos^2(x)}{\cos^4(x)\,(1+\tan^4(x))}=\frac{1}{\cos^2(x)\,(1+\tan^4(x))}$$

Or $\frac{1}{\cos^2(x)}=1+\tan^2(x)$

$$\frac{\cos^2(x)}{\cos^4(x)+\sin^4(x)}=\frac{1+\tan^2(x)}{1+\tan^4(x)}$$

Donc

$$F_3(x)=\int\frac{1+t^2}{1+t^4}dt$$

Deuxième méthode

$$t=\tan(x)\Leftrightarrow x=\arctan(t)\Rightarrow dx=\frac{dt}{1+t^2}$$

$$\cos^2(x)=\frac{1}{1+\tan^2(x)}\Rightarrow \cos^4(x)=\frac{1}{(1+\tan^2(x))^2}$$

$$\sin^2(x)=1-\cos^2(x)=1-\frac{1}{1+\tan^2(x)}=\frac{\tan^2(x)}{1+\tan^2(x)}\Rightarrow \sin^4(x)=\frac{\tan^4(x)}{(1+\tan^2(x))^2}$$

Donc

$$F_3(x)=\int\frac{1}{\cos^4(x)+\sin^4(x)}dx=\int\frac{1}{\frac{1}{(1+t^2)^2}+\frac{t^4}{(1+t^2)^2}}\frac{dt}{1+t^2}=\int\frac{(1+t^2)^2}{1+t^4}\frac{dt}{1+t^2}$$

$$=\int\frac{1+t^2}{1+t^4}dt$$

On retrouve le même résultat heureusement, il reste à trouver une primitive de $t\to\frac{1+t^2}{1+t^4}$ et ce n'est pas simple.

$$\frac{1+t^2}{1+t^4}=\frac{1+t^2}{t^4+2t^2+1-2t^2}=\frac{1+t^2}{(t^2+1)^2-\left(\sqrt{2}t\right)^2}=\frac{1+t^2}{\left(t^2-\sqrt{2}t+1\right)\left(t^2-\sqrt{2}t+1\right)}$$

$$=\frac{at+b}{t^2-\sqrt{2}t+1}+\frac{ct+d}{t^2+\sqrt{2}t+1}$$

Car $t^2-\sqrt{2}t+1$ et $t^2+\sqrt{2}t+1$ sont deux polynômes sans racines réelles.

Remarque :

On peut aussi résoudre dans $\mathbb{C}$: $t^4=-1$, on trouve quatre racines complexes $z_k=e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right)}$, $k\in\{0,1,2,3\}$ que l'on regroupe ainsi

$$t^4+1=[(t-z_0)(t-z_3)][(t-z_1)(z-z_3)]$$

Puisque $z_0=\overline{z_3}$ et $z_1=\overline{z_2}$

$t\to\frac{1+t^2}{1+t^4}$ est paire, on en déduit que :

$$t^4+1=(-t)^4+1\Leftrightarrow\frac{at+b}{t^2-\sqrt{2}t+1}+\frac{ct+d}{t^2+\sqrt{2}t+1}=\frac{-at+b}{t^2+\sqrt{2}t+1}+\frac{-ct+d}{t^2-\sqrt{2}t+1}$$

Donc $c=-a$ et $d=b$

$t=0$ entraine que $1=b+d$ par conséquent $b=d=\frac{1}{2}$.

$t=i$ entraine que

$$0=\frac{ai+\frac{1}{2}}{-\sqrt{2}i}+\frac{-ai+\frac{1}{2}}{\sqrt{2}i}\Leftrightarrow 0=-\frac{2a}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow a=0$$

$$\frac{1+t^2}{1+t^4}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t^2-\sqrt{2}t+1}+\frac{1}{t^2+\sqrt{2}t+1}\right)$$

$$\int\frac{dt}{t^2-\sqrt{2}t+1}=\int\frac{dt}{\left(t-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}$$

On pose $u=t-\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow t=u+\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow dt=du$

$$\int\frac{dt}{t^2-\sqrt{2}t+1}=\int\frac{du}{u^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\sqrt{2}\arctan\left(u\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{2}t-1\right)$$

$$\int\frac{dt}{t^2+\sqrt{2}t+1}=\sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{2}t+1\right)$$

En faisant pareil ou en faisant le changement de variable $t'=-t$.

Donc

$$F_3(x)=\int\frac{1+t^2}{1+t^4}dt=\sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{2}t-1\right)+\sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{2}t+1\right)+K$$
$$=\sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{2}\tan(x)-1\right)+\sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{2}\tan(x)+1\right)+K$$

4.

Avec les règles de Bioche

$$\frac{\cos(-x)-2}{\sin(-x)}d(-x)=\frac{\cos(x)-2}{-\sin(x)}(-dx)=\frac{\cos(x)-2}{\sin(x)}dx$$

On fait le changement de variable $t=\cos(x)$

$$dt=-\sin(x)\,dx$$

Alors

$$F_4(x)=\int\frac{\cos(x)-2}{\sin(x)}dx=\int\frac{\cos(x)-2}{\sin(x)\,(-\sin(x))}(-\sin(x))dx=-\int\frac{\cos(x)-2}{\sin^2(x)}(-\sin(x))dx$$
$$=-\int\frac{\cos(x)-2}{1-\cos^2(x)}(-\sin(x))dx=-\int\frac{t-2}{1-t^2}dt=\int\frac{t-2}{t^2-1}dt$$

Il faut alors décomposer la fraction rationnelle $\frac{t-2}{t^2-1}$ en élément simple

$$\frac{t-2}{t^2-1}=\frac{t-2}{(t-1)(t+1)}$$

Il existe a et b réels tels que

$$\frac{t-2}{(t-1)(t+1)}=\frac{a}{t-1}+\frac{b}{t+1}$$

On multiplie par $t-1$, puis $t=1$

$$a=\left[\frac{t-2}{t+1}\right]_{t=1}=-\frac{1}{2}$$

On multiplie par $t+1$, puis $t=-1$

$$b=\left[\frac{t-2}{t-1}\right]_{t=-1}=-\frac{3}{2}$$

Donc

$$F_4(x)=\int\frac{\cos(x)-2}{\sin(x)}dx=\int\left(\frac{-\frac{1}{2}}{t-1}+\frac{\frac{3}{2}}{t+1}\right)dt=-\frac{1}{2}\ln|t-1|+\frac{3}{2}\ln|t+1|+K$$
$$=-\frac{1}{2}\ln|\cos(x)-1|+\frac{3}{2}\ln|\cos(x)+1|+K$$
$$=-\frac{1}{2}\ln(1-\cos(x))+\frac{3}{2}\ln(\cos(x)+1)+K$$

Allez à : Exercice 14

Correction exercice 15.

On pose $f(x)=\frac{1}{\cos(x)\sin(x)}$ pour appliquer les règles de Bioches

$$f(-x)d(-x)=\frac{1}{\cos(-x)\sin(-x)}(-dx)=\frac{-1}{\cos(x)\sin(x)}(-dx)=\frac{1}{\cos(x)\sin(x)}dx$$

On peut faire le changement de variable $t=\cos(x)$

$$f(\pi-x)d(\pi-x)=\frac{1}{\cos(\pi-x)\sin(\pi-x)}\left(d(\pi-x)\right)=\frac{1}{-\cos(x)\sin(x)}(-dx)$$
$$=\frac{1}{\cos(x)\sin(x)}dx$$

On peut faire le changement de variable $t=\sin(x)$

$$f(\pi+x)=\frac{1}{\cos(\pi+x)\sin(\pi+x)}d(\pi+x)=\frac{1}{(-\cos(x))(-\sin(x))}dx=\frac{1}{\cos(x)\sin(x)}dx$$

On peut faire le changement de variable $t=\tan(x)$

Le meilleur est $t=\tan(x)$, mais on va en faire deux histoire de comparer les différents changements de variables.

On commence par $t=\sin(x)$, il faut faire apparaitre la dérivée de sin au numérateur

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\cos(x)\sin(x)}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos(x)dx}{\cos^2(x)\sin(x)}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos(x)dx}{(1-\sin^2(x))\sin(x)}$$

$$x=\frac{\pi}{6}\Rightarrow t=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$$

$$x=\frac{\pi}{3}\Rightarrow t=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$dt=\cos(t)\,dt$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos(x)dx}{(1-\sin^2(x))\sin(x)}=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{dt}{(1-t^2)t}$$

Or

$$\frac{1}{(1-t^2)t}=\frac{-1}{(t-1)(t+1)t}=\frac{a}{t-1}+\frac{b}{t+1}+\frac{c}{t}$$

On multiplie par $t-1$, puis $t=1$

$$a=\left[\frac{-1}{(t+1)t}\right]_{t=1}=-\frac{1}{2}$$

On multiplie par $t+1$, puis $t=-1$

$$b=\left[\frac{-1}{(t-1)t}\right]_{t=-1}=-\frac{1}{2}$$

On multiplie par t, puis $t=0$

$$a=\left[\frac{-1}{(t-1)(t+1)}\right]_{t=0}=1$$

Par conséquent

$$I=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{dt}{(1-t^2)t}=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\frac{-\frac{1}{2}}{t-1}+\frac{-\frac{1}{2}}{t+1}+\frac{1}{t}\right)dt=\left[-\frac{1}{2}\ln|t-1|-\frac{1}{2}\ln|t+1|+\ln|t|\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=\left[\ln\left|\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right|\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\ln\left|\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{1-\frac{3}{4}}}\right|-\ln\left|\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}}\right|=\ln(\sqrt{3})-\ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=2\ln(\sqrt{3})$$

Pour le changement de variable $t=\cos(x)$ c'est quasiment pareil, il faut faire apparaitre la dérivée de cos au numérateur, on passe

Changement de variable $t=\tan(x)$, il faut faire apparaitre la dérivée de tan au numérateur

$$dt=\frac{dx}{\cos^2(x)}=(1+\tan^2(x))dx$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos(x)\sin(x)} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos(x)\,dx}{\cos^2(x)\sin(x)} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \times \frac{dx}{\cos^2(x)} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}} \times \frac{dx}{\cos^2(x)}$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\tan(x)} \times \frac{dx}{\cos^2(x)}$$

$$x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \tan(x) = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \tan(x) = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos(x)\sin(x)} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\tan(x)} \times \frac{dx}{\cos^2(x)} = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{t}\,dt = [\ln(t)]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} = \ln(\sqrt{3}) - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \ln(\sqrt{3}) + \ln(\sqrt{3}) = 2\ln(\sqrt{3})$$

C'est effectivement plus simple.

Allez à : Exercice 15

Correction exercice 16.

$$\frac{\cos^3(-t)}{\sin^4(-t)}d(-t) = -\frac{\cos^3(t)}{\sin^4(t)}dt \neq \frac{\cos^3(t)}{\sin^4(t)}dt$$

$$\frac{\cos^3(\pi - t)}{\sin^4(\pi - t)}d(\pi - t) = \frac{(-\cos(-t))^3}{(\sin(t))^4}(-dt) = \frac{\cos^3(t)}{\sin^4(t)}dt$$

$$\frac{\cos^3(\pi + t)}{\sin^4(\pi + t)}d(\pi + t) = \frac{(-\cos(t))^3}{(-\sin(t))^4}dt = \frac{-\cos^3(t)}{\sin^4(t)}dt = -\frac{\cos^3(t)}{\sin^4(t)}dt \neq \frac{\cos^3(t)}{\sin^4(t)}dt$$

On fait le changement de variable $x = \sin(t) \Rightarrow dx = \cos(t)\,dt$

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3(t)}{\sin^4(t)}dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2(t)}{\sin^4(t)}\cos(t)\,dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2(t)}{\sin^4(t)}\cos(t)\,dt$$

$$t = \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1 - x^2}{x^4}dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^2}\right)dx \int_{\frac{1}{2}}^{1} (x^{-4} - x^{-2})dx = \left[-\frac{1}{3}x^{-3} + x^{-1}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \left[-\frac{1}{3x^3} + \frac{1}{x}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$= -\frac{1}{3} + \frac{1}{1} - \left(-\frac{2^3}{3} + 2\right) = \frac{7}{3} - 1 = \frac{4}{3}$$

Allez à : Exercice 16

Correction exercice 17.

1. Avec les règles de Bioche

$$f(t + \pi)d(t + \pi) = \frac{1}{\sin(2(t + \pi))}dt = \frac{1}{\sin(2t)}dt = f(t)dt$$

On peut faire le changement de variable $u = \tan(t)$

$$du = \frac{dt}{\cos^2(t)}$$

$$\frac{1}{\sin(2t)} = \frac{1}{2\sin(t)\cos(t)} = \frac{\cos(t)}{2\sin(t)}\frac{1}{\cos^2(t)} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\tan(t)} \times \frac{dt}{\cos^2(t)}$$

Donc

$$\int f(t)dt = \int \frac{1}{2} \times \frac{1}{\tan(t)} \times \frac{dt}{\cos^2(t)} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{2}\ln|u| + K = \frac{1}{2}\ln|\tan(t)|$$

On a pris $K = 0$ car une demande « une » primitive de f.

2. $dx = 2dt$ et $t = \frac{x}{2}$

$$F(x) = \int \frac{1}{\sin(x)}dx = 2\int \frac{1}{\sin(2t)}dt = 2 \times \frac{1}{2}\ln|\tan(t)| + K = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + K$$

Allez à : Exercice 17

Correction exercice 18.

On pose $f(x) = \frac{2}{1+\tan(x)}$

$$f(-x)d(-x) = \frac{2}{1+\tan(-x)}(-dx) = \frac{-2}{1-\tan(x)}dx \neq f(x)dx$$

$$f(\pi - x)d(\pi - x) = \frac{2}{1+\tan(\pi - x)}(-dx) = \frac{-2}{1-\tan(x)}dx \neq f(x)dx$$

$$f(\pi + x)d(\pi + x) = \frac{2}{1+\tan(\pi + x)}dx = \frac{2}{1+\tan(x)}dx = f(x)dx$$

On fait le changement de variable $t = \tan(x)$, $dt = (1+\tan^2(x))dx$

$$F(x) = \int \frac{2}{(1+\tan(x))(1+\tan^2(x))}(1+\tan^2(x))dx = \int \frac{2}{(1+t)(1+t^2)}dt$$

Il existe a, b et c réels tels que

$$\frac{2}{(1+t)(1+t^2)} = \frac{a}{1+t} + \frac{bt+c}{1+t^2}$$

On multiplie par $t+1$, puis $t = -1$

$$a = \left[\frac{2}{1+t^2}\right]_{t=-1} = 1$$

On multiplie par t^2+1, puis $t = i$

$$bi + c = \left[\frac{2}{1+t}\right]_{t=i} = \frac{2}{1+i} = \frac{2(1-i)}{2} = 1 - i$$

Donc $b = -1$ et $c = 1$

$$F(x) = \int \left(\frac{1}{1+t} + \frac{-t+1}{1+t^2}\right)dt = \ln|t+1| - \int \frac{t}{t^2+1}dt + \int \frac{1}{1+t^2}dt$$

$$= \ln|t+1| - \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + \arctan(t) + K$$

$$= \ln|\tan(x)+1| - \frac{1}{2}\ln(\tan^2(x)+1) + \arctan(\tan(x)) + K$$

$$= \ln|\tan(x)+1| - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{\cos^2(x)}\right) + x + K = \ln\left|\frac{\sin(x)}{\cos(x)} + 1\right| + \ln|\cos(x)| + x + K$$

$$= \ln|\sin(x) + \cos(x)| + x + K$$

Allez à : Exercice 18

Correction exercice 19.

On pose $x = e^t$ donc $t = \ln(x)$ et $dt = \frac{dx}{x}$

D'autre part

$$1 + \mathrm{ch}(t) = 1 + \frac{e^t + e^{-t}}{2} = 1 + \frac{x + \frac{1}{x}}{2} = 1 + \frac{x^2 + 1}{2x} = \frac{2x + x^2 + 1}{2x} = \frac{(x+1)^2}{2x}$$

Donc

$$F(t) = \int \frac{2x}{(x+1)^2}\frac{dx}{x} = 2\int \frac{1}{(x+1)^2}dx = 2\int (x+1)^{-2}dx = -2(x+1)^{-1} + K = \frac{-2}{x+1} + K$$
$$= \frac{-2}{e^t + 1} + K$$

Allez à : Exercice 19

Correction exercice 20.

$$F(x) = \int \frac{1 + \mathrm{sh}(x)}{1 + \mathrm{ch}(x)}dx$$

On fait le changement de variable $t = e^x$, soit $x = \ln(t)$, $dx = \frac{dt}{t}$

$$\frac{1 + \mathrm{sh}(x)}{1 + \mathrm{ch}(x)} = \frac{1 + \frac{t - \frac{1}{t}}{2}}{1 + \frac{t + \frac{1}{t}}{2}} = \frac{1 + \frac{t^2 - 1}{2t}}{1 + \frac{t^2 + 1}{2t}} = \frac{2t + t^2 - 1}{2t + t^2 + 1} = \frac{t^2 + 2t - 1}{(t+1)^2}$$

$$F(x) = \int \frac{1 + \mathrm{sh}(x)}{1 + \mathrm{ch}(x)}dx = \int \frac{t^2 + 2t - 1}{(t+1)^2}\frac{dt}{t}$$

On décompose $\frac{t^2+2t-1}{t(t-1)^2}$ en éléments simples, il existe a, b et c tels que :

$$\frac{t^2 + 2t - 1}{t(t+1)^2} = \frac{a}{t} + \frac{b}{(t+1)^2} + \frac{c}{t+1}$$

Je multiplie par t, puis $t = 0$, $a = \left[\frac{t^2+2t-1}{(t+1)^2}\right]_{t=0} = -1$

Je multiplie par $(t+1)^2$, puis $t = -1$, $b = \left[\frac{t^2+2t-1}{t}\right]_{t=-1} = 2$

Je multiplie par t, puis $t \to \infty$, $1 = a + c$, donc $c = 2$.

$$F(x) = \int \left(\frac{-1}{t} + \frac{2}{(t+1)^2} + \frac{2}{t+1}\right)dt = -\ln|t| - \frac{2}{t+1} + 2\ln|t+1| + K$$

$$F(x) = -x - \frac{2}{e^x + 1} + 2\ln|e^x + 1| + K$$

Allez à : Exercice 20

Correction exercice 21.

On pose $t = e^x \Leftrightarrow x = \ln(t) \Rightarrow dx = \frac{dt}{t}$

$$\mathrm{ch}(x) + 1 = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + 1 = \frac{e^{2x} + 1}{2e^x} + 1 = \frac{t^2 + 1}{2t} + 1 = \frac{t^2 + 1 + 2t}{2t} = \frac{(t+1)^2}{2t}$$

$$\int \frac{dx}{(\operatorname{ch}(x)+1)^2} = \int \left(\frac{2t}{(t+1)^2}\right)^2 \frac{dt}{t} = \int \frac{4t}{(t+1)^4} dt = 4\int \frac{t+1-1}{(t+1)^4} dt$$
$$= 4\int \left(\frac{1}{(t+1)^3} - \frac{1}{(t+1)^4}\right) dt = 4\int \left((t+1)^{-3} - (t+1)^{-4}\right) dt$$
$$= 4\left[-\frac{1}{2}(t+1)^{-2} + \frac{1}{3}(t+1)^{-3}\right] + K = -\frac{2}{(t+1)^2} + \frac{4}{3(t+1)^3} + K$$
$$= -\frac{2}{(e^x+1)^2} + \frac{4}{3(e^x+1)^3} + K = \frac{6(e^x+1)+4}{3(e^x+1)^3} + K = 2\frac{3e^x+5}{3(e^x+1)^3} + K$$

Allez à : Exercice 21

Correction exercice 22.

On pose $t = e^x \Leftrightarrow x = \ln(t)$ donc $dx = \frac{dt}{t}$

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{t + \frac{1}{t}}{2} = \frac{t^2+1}{2t}$$
$$\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{t - \frac{1}{t}}{2} = \frac{t^2-1}{2t}$$
$$\frac{\operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x) - 1} = \frac{\frac{t^2+1}{2t} - \frac{t^2-1}{2t}}{\frac{t^2+1}{2t} - 1} = \frac{\frac{1}{t}}{\frac{t^2+1-2t}{2t}} = \frac{1}{(t-1)^2}$$
$$F(x) = \int \frac{2dt}{t(t-1)^2}$$

Il existe a, b et c réels tels que :

$$\frac{2}{t(t-1)^2} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t-1} + \frac{c}{(t-1)^2}$$

Je multiplie par t, puis $t = 0$

$$a = \left[\frac{2}{(t-1)^2}\right]_{t=0} = 2$$

Je multiplie par $(t-1)^2$, puis $t = 1$

$$c = \left[\frac{2}{t}\right]_{t=0} = 2$$

Je multiplie par t, puis $t \to +\infty$

$$0 = a + b \Leftrightarrow b = -2$$

$$F(x) = 2\int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t-1} + \frac{1}{(t-1)^2}\right) dt = 2\left(\ln|t| - \ln|t-1| - \frac{1}{t-1}\right) + K$$
$$= 2\left(\ln(e^x) - \ln(e^x-1) - \frac{1}{e^x-1}\right) + K = 2x - 2\ln(e^x-1) - \frac{2}{e^x-1} + K,$$
$K \in \mathbb{R}$

Allez à : Exercice 22

Correction exercice 23.

Il s'agit d'une fraction rationnelle de fonctions hyperboliques, on peut faire le changement de variable $t = e^x$, donc $x = \ln(t)$ et $dx = \frac{dt}{t}$

$$\frac{2 - \operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x)}{2\operatorname{ch}(x)} = \frac{2 - \frac{e^x+e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2}}{2\frac{e^x+e^{-x}}{2}} = \frac{2 - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{2 - \frac{1}{t}}{t + \frac{1}{t}} = \frac{2t-1}{t^2+1}$$

$$\int \frac{2-\operatorname{ch}(x)+\operatorname{sh}(x)}{2\operatorname{ch}(x)}dx=\int \frac{2t-1}{t^2+1}\frac{dt}{t}=\int \frac{2t-1}{(t^2+1)t}dt$$

Il existe a, b et c réels tels que

$$\frac{2t-1}{(t^2+1)t}=\frac{a}{t}+\frac{bt+c}{t^2+1}$$

$$a=\left[\frac{2t-1}{t^2+1}\right]_{t=0}=-1$$

$$bi+c=\left[\frac{2t-1}{t}\right]_{t=i}=\frac{2i-1}{i}=2+i$$

$b=1$ et $c=2$. Par conséquent

$$\frac{2t-1}{(t^2+1)t}=\frac{-1}{t}+\frac{t+2}{t^2+1}$$

$$\int \frac{2-\operatorname{ch}(x)+\operatorname{sh}(x)}{2\operatorname{ch}(x)}dx=\int\left(\frac{-1}{t}+\frac{t+2}{t^2+1}\right)dt=-\ln|t|+\frac{1}{2}\int\frac{2t}{t^2+1}dt+2\int\frac{1}{t^2+1}dt$$

$$=-\ln|t|+\frac{1}{2}\ln(t^2+1)+2\arctan(t)+K$$

$$=-\ln(e^x)+\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1)+2\arctan(e^x)+K$$

$$=-x+\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1)+2\arctan(e^x)+K$$

Autre méthode

$$\frac{2-\operatorname{ch}(x)+\operatorname{sh}(x)}{2\operatorname{ch}(x)}=\frac{1}{\operatorname{ch}(x)}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}$$

Donc

$$\int \frac{2-\operatorname{ch}(x)+\operatorname{sh}(x)}{2\operatorname{ch}(x)}dx=\int\left(\frac{1}{\operatorname{ch}(x)}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}\right)dx$$

Comme

$$\int\frac{dx}{\operatorname{ch}(x)}=\int\frac{\frac{1}{t}}{\frac{t^2+1}{2t}}dt=\int\frac{2dt}{t^2+1}=2\arctan(t)+K=2\arctan(e^x)$$

$$\int \frac{2-\operatorname{ch}(x)+\operatorname{sh}(x)}{2\operatorname{ch}(x)}dx=2\arctan(e^x)-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln(\operatorname{ch}(x)+K'$$

Allez à : Exercice 23

Correction exercice 24.

1. Il existe a, b et c réels tels que :

$$f(x)=\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2}$$

On multiplie par x, puis $x=0$

$$a=\left[\frac{1}{(x-1)^2}\right]_{X=0}=1$$

On multiplie par $(x-1)^2$, puis $x=1$

$$c=\left[\frac{1}{x}\right]_{x=1}=1$$

On multiplie par x, puis $x\to+\infty$

$$0=a+b\Leftrightarrow b=-1$$

$$f(x)=\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

2. $dx=2\operatorname{ch}(t)\operatorname{sh}(t)\,dt$

$$F(t)=2\int\frac{dt}{\operatorname{ch}(t)\operatorname{sh}^3(t)}=2\int\frac{\operatorname{ch}(t)\operatorname{sh}(t)\,dt}{\operatorname{ch}^2(t)\operatorname{sh}^4(t)}=2\int\frac{\operatorname{ch}(t)\operatorname{sh}(t)\,dt}{\operatorname{ch}^2(t)\operatorname{sh}^4(t)}=2\int\frac{\operatorname{ch}(t)\operatorname{sh}(t)\,dt}{\operatorname{ch}^2(t)\,(\operatorname{sh}^2(t))^2}$$
$$=\int\frac{2\operatorname{ch}(t)\operatorname{sh}(t)\,dt}{\operatorname{ch}^2(t)\,(\operatorname{ch}^2(t)-1)^2}=\int\frac{dx}{x(x-1)^2}=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}\right)dx$$
$$=\ln|x|-\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+K=\ln(\operatorname{ch}(t))-\ln(\operatorname{ch}(t)-1)-\frac{1}{\operatorname{ch}(t)-1}+K,\quad K\in\mathbb{R}$$

Allez à : Exercice 24

Correction exercice 25.

A l'aide d'une intégration par partie

$\int(2t-1)\ln(t^2+1)\,dt$	
$u'(t)=3t^2-2t$	$u(t)=t^3-t^2$
$v(t)=\ln(t^2+1)$	$v'(t)=\frac{2t}{t^2+1}$
$F(x)=[(t^3-t^2)\ln(t^2+1)]-$	$\int(t^3-t^2)\frac{2t}{t^2+1}$

$$F(x)=[(t^3-t^2)\ln(t^2+1)]-2\int\frac{t^4-t^3}{t^2+1}dt$$

Il faut diviser t^4-t^3 par t^2+1

$$\begin{array}{r|l} t^4-t^3 & t^2+1 \\ \cline{2-2} t^4\qquad+t^2 & t^2-t-1 \\ \hline -t^3-t^2 & \\ -t^3\qquad-t & \\ \hline -t^2+t & \\ -t^2\qquad-1 & \\ t+1 & \end{array}$$

$$t^4-t^3=(t^2+1)(t^2-t-1)+t+1\Rightarrow\frac{t^3-t^2}{t^2+1}=t^2-t-1+\frac{t+1}{t^2+1}$$
$$F(x)=(t^3-t^2)\ln(t^2+1)-2\int\left(t^2-t-1+\frac{t+1}{t^2+1}\right)dt$$
$$=(t^3-t^2)\ln(t^2+1)-2\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t\right)-2\left(\int\frac{t}{t^2+1}dt+\int\frac{1}{t^2+1}dt\right)$$
$$=(t^3-t^2)\ln(t^2+1)-\frac{2}{3}t^3+t^2-2t-\ln(t^2+1)-2\arctan(t)+K$$
$$=(t^3-t^2-1)\ln(t^2+1)-\frac{2}{3}t^3+t^2-2t-2\arctan(t)+K$$

Allez à : Exercice 25

Correction exercice 26.

a.

$$I_1=\int_1^e t\ln(t)\,dt$$

$$u'(t) = t \qquad u(t) = \frac{t^2}{2}$$
$$v(t) = \ln(t) \qquad v'(t) = \frac{1}{t}$$
$$I_1 = \left[\frac{t^2}{2}\ln(t)\right]_1^e - \int_1^e \frac{t}{2}dt$$

Donc

$$I_1 = \frac{e^2}{2}\ln(e) - \frac{1^2}{2}\ln(1) - \left[\frac{t^2}{4}\right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2-1}{4} = \frac{2e^2-e^2+1}{4} = \frac{e^2+1}{4}$$

b.

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)\,dt$$
$$u'(t) = \sin(t) \qquad u(t) = -\cos(t)$$
$$v(t) = t \qquad v'(t) = 1$$
$$I_2 = [-t\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,dt$$

Donc

$$I_2 = -\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 0\times\cos(0) + [\sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

c.

$\int_0^{\sqrt{3}} 3x^2\ln(x^2+1)\,dx$	
$u'(x) = 3x^2$	$u(x) = x^3$
$v(x) = \ln(x^2+1)$	$v'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$
$\int_0^{\sqrt{3}} 3x^2\ln(x^2+1)\,dx = [x^3\ln(x^2+1)]_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2x^4}{x^2+1}dx$	

Il faut alors décomposer $\frac{2x^4}{x^2+1}$ en éléments simples, pour cela il faut faire une division euclidienne de $2x^4$ par x^2+1

$$\begin{array}{r|l} 2x^4 & x^2+1 \\ \cline{2-2} 2x^4+2x^2 & 2x^2-2 \\ \hline -2x^2 & \\ -2x^2-2 & \\ \hline 2 & \end{array}$$

Donc

$$2x^4 = (x^2+1)(2x^2-2)+2$$

Ce qui entraine que

$$\frac{2x^4}{x^2+1} = 2x^2-2+\frac{2}{x^2+1}$$

Par conséquent

$$I_3=\int_0^{\sqrt{3}}3x^2\ln(x^2+1)\,dx=[x^3\ln(x^2+1)]_0^{\sqrt{3}}-\int_0^{\sqrt{3}}\left(2x^2-2+\frac{2}{x^2+1}\right)dx$$
$$=\left(\sqrt{3}\right)^3\ln\left(\left(\sqrt{3}\right)^2+1\right)-\left[\frac{2}{3}x^3-2x+2\arctan(x)\right]_0^{\sqrt{3}}$$
$$=3\sqrt{3}\ln(4)-\left(\frac{2}{3}\left(\sqrt{3}\right)^3-2\sqrt{3}+2\arctan\left(\sqrt{3}\right)\right)$$
$$=6\sqrt{3}\ln(2)-\left(2\sqrt{3}-2\sqrt{3}+2\times\frac{\pi}{3}\right)=6\sqrt{3}\ln(2)-\frac{2\pi}{3}$$

Allez à : Exercice 26

Correction exercice 27.

1. $\frac{2x}{(x^2-1)^2}$ est de la forme $\frac{u'(x)}{(u(x))^2}$, cela serait maladroit de décomposer cette fraction en éléments simple (mais c'est possible)

$$\int\frac{2x}{(x^2-1)^2}dx=\int 2x(x^2-1)^{-2}dx=-(x^2-1)^{-1}+K=\frac{-1}{x^2-1}+K$$

2.

$$G(x)=\int\frac{2x}{(x^2-1)^2}\ln(x)\,dx=\left[\frac{-1}{x^2-1}\ln(x)\right]-\int\frac{-1}{x(x^2-1)}dx$$
$$=\frac{-1}{x^2-1}\ln(x)+\int\frac{1}{x(x-1)(x+1)}dx$$
$$\frac{1}{x(x-1)(x+1)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x+1}$$

Je multiplie par x, puis $x=0$

$$a=\left[\frac{1}{(x-1)(x+1)}\right]_{x=0}=-1$$

Je multiplie par $x-1$, puis $x=1$

$$b=\left[\frac{1}{x(x+1)}\right]_{x=0}=\frac{1}{2}$$

Je multiplie par $x+1$, puis $x=-1$

$$c=\left[\frac{1}{x(x-1)}\right]_{x=0}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{x(x-1)(x+1)}=\frac{-1}{x}+\frac{\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{\frac{1}{2}}{x+1}$$
$$G(x)=\frac{-1}{x^2-1}\ln(x)+\int\left(\frac{-1}{x}+\frac{\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{\frac{1}{2}}{x+1}\right)dx$$
$$=\frac{-1}{x^2-1}\ln(x)-\ln|x|+\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|x+1|+K$$
$$=\frac{-1}{x^2-1}\ln(x)-\ln(x)+\frac{1}{2}\ln(x-1)+\frac{1}{2}\ln(x+1)+K$$
$$=\frac{-x^2}{x^2-1}\ln(x)+\frac{1}{2}\ln(x^2-1)+K$$

Allez à : Exercice 27

Correction exercice 28.

$\int \frac{1}{(x+1)^2}\arctan(x)\,dx$

$u'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}=(x+1)^{-2}$ $u(x)=-(x+1)^{-1}=-\frac{1}{x+1}$

$v(x)=\arctan(x)$ $v'(x)=\frac{1}{x^2+1}$

$\int \frac{1}{(x+1)^2}\arctan(x)\,dx=\left[-\frac{1}{x+1}\arctan(x)\right]-$ $\int \frac{-1}{x+1}\times\frac{1}{x^2+1}dx$

$$\int \frac{1}{(x+1)^2}\arctan(x)\,dx=\left[-\frac{1}{x+1}\arctan(x)\right]+\int \frac{1}{x+1}\times\frac{1}{x^2+1}dx$$

Or il existe a, b et c réels tels que

$$\frac{1}{x+1}\times\frac{1}{x^2+1}=\frac{a}{x+1}+\frac{bx+c}{x^2+1}$$

On multiplie par $x+1$, puis $x=-1$

$$a=\left[\frac{1}{x^2+1}\right]_{x=-1}=\frac{1}{2}$$

On multiplie par x^2+1, puis $x=i$

$$bi+c=\left[\frac{1}{x+1}\right]_{x=i}=\frac{1}{1+i}=\frac{1-i}{2}$$

Donc $b=-\frac{1}{2}$ et $c=\frac{1}{2}$.

Par conséquent

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x+1)^2}\arctan(x)\,dx&=-\frac{1}{x+1}\arctan(x)+\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x+1}+\frac{-x+1}{x^2+1}\right)dx\\&=-\frac{1}{x+1}\arctan(x)+\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{2}\left(\int-\frac{x}{x^2+1}dx+\int\frac{1}{x^2+1}dx\right)\\&=-\frac{1}{x+1}\arctan(x)+\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\arctan(x)\right)+K\\&=-\frac{1}{x+1}\arctan(x)+\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+\frac{1}{2}\arctan(x)+K\end{aligned}$$

Allez à : Exercice 28

Correction exercice 29.

1. Dans cet exemple il ne faut pas calculer dt, mais il faut trouver x en fonction de t :

$$t=\sqrt[6]{2+x}\Leftrightarrow t^6=2+x\Leftrightarrow x=t^6-2\Rightarrow dx=6t^5dt$$

D'autre part

$$\sqrt[3]{2+x}=(2+x)^{\frac{1}{3}}=(t^6)^{\frac{1}{3}}=t^2\quad et\quad \sqrt{2+x}=(2+x)^{\frac{1}{2}}=(t^6)^{\frac{1}{2}}=t^3$$

$$F_1(x)=\int\frac{1}{\sqrt{2+x}+\sqrt[3]{2+x}}dx=\int\frac{1}{t^3+t^2}6t^5dt=\int\frac{6t^3}{t+1}dt$$

La division euclidienne de t^3 par $t+1$ donne $t^3=(t+1)(t^2-t+1)-1$

$$\begin{aligned}F_1(x)=6\int\frac{(t+1)(t^2-t+1)-1}{t+1}dt&=6\int\left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)dt\\&=2t^3-3t^2+6t-\ln|t+1|+K\\&=2\sqrt[6]{2+x}^3-3\sqrt[6]{2+x}^2+6t-\ln\left|\sqrt[6]{2+x}+1\right|+K\\&=2\sqrt{2+x}-3\sqrt[3]{2+x}+6t-\ln\left|\sqrt[6]{2+x}+1\right|+K\end{aligned}$$

Allez à : Exercice 29

2.

$$\frac{x-1}{2}=\operatorname{th}(u)\Leftrightarrow x=2\operatorname{th}(u)+1\Rightarrow dx=2(1-\operatorname{th}^2(u))du$$

$$F_2(x)=\int \frac{1}{((x-1)^2-4)^2}dx=\int \frac{1}{((2\,\mathrm{th}(u))^2-4)^2}2(1-\mathrm{th}(u))du=\int \frac{2(1-\mathrm{th}^2(u))}{16(\mathrm{th}^2(u)-1)^2}du$$
$$=\frac{1}{8}\int \frac{1-\mathrm{th}^2(u)}{(1-\mathrm{th}^2(u))^2}du=\frac{1}{8}\int \frac{1}{1-\mathrm{th}^2(u)}du=\frac{1}{8}\int \mathrm{ch}^2(u)\,du$$

Car $1-\mathrm{th}^2(u)=1-\frac{\mathrm{sh}^2(u)}{\mathrm{ch}^2(u)}=\frac{\mathrm{ch}^2(u)-\mathrm{sh}^2(u)}{\mathrm{ch}^2(u)}=\frac{1}{\mathrm{ch}^2(u)}$

$$F_2(x)=\frac{1}{8}\int \left(\frac{e^u+e^{-u}}{2}\right)^2 du=\frac{1}{32}\int (e^{2u}+2+e^{-2u})du=\frac{1}{32}\left(\frac{e^{2u}}{2}+2u-\frac{e^{-2u}}{2}\right)+K$$

Il reste à remplacer u par sa valeur en fonction de x, soit $u=\mathrm{argth}\left(\frac{x-1}{2}\right)$

Pour $x\in]-1,3[$, $\frac{x-1}{2}\in]-1,1[$ et si on pose $t=\frac{x-1}{2}$

$$u=\mathrm{argth}(t)\ =\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\frac{x-1}{2}}{1-\frac{x-1}{2}}\right)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{3-x}\right)$$

Donc

$$e^{2u}=\frac{x+1}{x-3}\quad et\quad e^{-2u}=\frac{1}{e^{2u}}\ =\frac{3-x}{x+1}$$

Finalement

$$F_2(x)=\frac{1}{64}\times\frac{x+1}{x-3}+\frac{1}{32}\times\ln\left(\frac{x+1}{3-x}\right)-\frac{1}{64}\times\frac{3-x}{x+1}+K$$
$$=\frac{1}{64}\times\frac{(x+1)^2-(3-x)^2}{(3-x)(x+1)}+\frac{1}{32}\times\ln\left(\frac{x+1}{3-x}\right)+K$$
$$=\frac{1}{64}\times\frac{8x-8}{(3-x)(x+1)}+\frac{1}{32}\times\ln\left(\frac{x+1}{3-x}\right)+K$$
$$=\frac{1}{8}\times\frac{x-1}{(3-x)(x+1)}+\frac{1}{32}\times\ln\left(\frac{x+1}{3-x}\right)+K$$

Remarque :

On aurait pu décomposer la fraction rationnelle $\frac{1}{((x-1)^2-4)^2}=\frac{1}{(x-3)^2(x+1)^2}$ en éléments simples.

Allez à : Exercice 29

3. On pose $t=\arcsin(x)\Leftrightarrow x=\sin(t)\Rightarrow dx=\cos(t)\,dt$

$$F_3(x)=\int t^2\cos(t)\,dt$$

A l'aide d'une intégration

$F_3(x)=\int t^2\cos(t)\,dt$	
$u'(t)=\cos(t)$	$u(t)=\sin(t)$
$v(t)=t^2$	$v'(t)=2t$
$F_3(x)=[t^2\sin(t)]-$	$\int 2t\sin(t)\,dt$

$$F_3(x)=t^2\sin(t)-2\int t\sin(t)\,dt$$

A l'aide d'une deuxième intégration par partie

$\int t\sin(t)\,dt$	
$u'(t)=\sin(t)$	$u(t)=-\cos(t)$
$v(t)=t$	$v'(t)=1$
$\int t\sin(t)\,dt=[-t\cos(t)]-$	$\int(-\cos(t))dt$

$$\int t\sin(t)\,dt=[-t\cos(t)]-\int(-\cos(t))dt=-t\cos(t)+\sin(t)+K$$

Donc

$$F_3(x)=t^2\sin(t)-2(-t\cos(t)+\sin(t))+K=(t^2-2)\sin(t)+2t\cos(t)+K$$

$$= ((\arcsin(x))^2 - 2)x + 2\arcsin(x)\cos(\arcsin(x)) + K$$
$$= ((\arcsin(x))^2 - 2)x + 2\arcsin(x)\sqrt{1 - \mathrm{x}^2} + K$$

Allez à : Exercice 29

4.
$$F_4(x) = \int x^2\sqrt{1 + x^3}dx = \frac{1}{3}\int \sqrt{1 + x^3}(3x^2dx)$$

On pose $t = 1 + x^3 \Leftrightarrow dt = 3x^2dx$

$$F_4(x) = \frac{1}{3}\int \sqrt{t}dt = \frac{1}{3}\int t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times t^{\frac{3}{2}} + K = \frac{2}{9}(1 + x^3)^{\frac{3}{2}} + K = \frac{2}{9}(1 + x^3)\sqrt{1 + x^3} + K$$

Allez à : Exercice 29

Correction exercice 30.

1. On décompose en éléments simple
$$\frac{2t^2}{t^2 - 1} = 2\frac{t^2 - 1 + 1}{t^2 - 1} = 2 + \frac{2}{t^2 - 1} = 2 + \frac{2}{(t - 1)(t + 1)} = 2 + \frac{1}{t - 1} - \frac{1}{t + 1}$$
$$F(t) = \int \left(2 + \frac{1}{t - 1} - \frac{1}{t + 1}\right)dt = 2t + \ln|t - 1| - \ln|t + 1| + K$$

2.
$$t = \sqrt{e^x + 1} \Leftrightarrow t^2 = e^x + 1 \Leftrightarrow e^x = t^2 - 1 \Leftrightarrow x = \ln(t^2 - 1)$$

Ce qui entraine que
$$dx = \frac{2t}{t^2 - 1}dt$$

Par conséquent
$$G(x) = \int t \times \frac{2t}{t^2 - 1}dt = 2\int \frac{t^2}{t^2 - 1}\,dt = 2t + \ln|t - 1| - \ln|t + 1| + K$$
$$= 2\sqrt{e^x + 1} + \ln\left|\sqrt{e^x + 1} - 1\right| - \ln\left|\sqrt{e^x + 1} + 1\right| + K$$

Allez à : Exercice 30

Correction exercice 31.

1. On pose $t = \sqrt{x - 1} \Leftrightarrow t^2 = x - 1 \Leftrightarrow x = t^2 + 1 \Rightarrow dx = 2tdt$
$$F_1(x) = \int \frac{dx}{x + \sqrt{x - 1}} = \int \frac{2tdt}{t^2 + 1 + t} = 2\int \frac{t}{t^2 + t + 1}dt = 2\int \frac{t}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}dt$$

On pose $u = t + \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = u - \frac{1}{2} \Rightarrow dt = du$
$$F_1(x) = 2\int \frac{u - \dfrac{1}{2}}{u^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}du = \int \frac{2u}{u^2 + \dfrac{3}{4}}du + \int \frac{1}{u^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}du$$
$$= \ln\left(u^2 + \frac{3}{4}\right) + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right) + K = \ln(t^2 + t + 1) + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2t - 1}{\sqrt{3}}\right) + K$$
$$= \ln\left(x - 1 + \sqrt{x - 1} + 1\right) + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2\sqrt{x - 1} - 1}{\sqrt{3}}\right) + K$$
$$= \ln\left(x + \sqrt{x - 1}\right) + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2\sqrt{x - 1} - 1}{\sqrt{3}}\right) + K$$

Allez à : Exercice 31

2.

$$F_2(x)=\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}=\int\frac{dx}{x\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}=\int\frac{dx}{x\sqrt{\frac{3}{4}\left(\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1\right)}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\int\frac{dx}{x\sqrt{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}}$$

On pose $t=\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\sqrt{3}t=2x+1\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{3}t-1}{2}\Rightarrow dx=\frac{\sqrt{3}}{2}dt$

$$F_2(x)=\frac{2}{\sqrt{3}}\int\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}dt}{\frac{\sqrt{3}t-1}{2}\sqrt{t^2+1}}=2\int\frac{dt}{(\sqrt{3}t-1)\sqrt{t^2+1}}$$

On pose alors $t=\mathrm{sh}(u)\Rightarrow dt=\mathrm{ch}(u)\,du$, donc $\sqrt{\mathrm{sh}^2(u)+1}=\mathrm{ch}(u)$

$$F_2(x)=2\int\frac{\mathrm{ch}(u)\,du}{\left(\sqrt{3}\,\mathrm{sh}(u)-1\right)\mathrm{ch}(u)}=2\int\frac{du}{\sqrt{3}\,\mathrm{sh}(u)-1}$$

On pose $v=e^u\Leftrightarrow u=\ln(v)\Rightarrow du=\frac{dv}{v}$

$$F_2(x)=2\int\frac{du}{\sqrt{3}\,\mathrm{sh}(u)-1}=2\int\frac{du}{\sqrt{3}\frac{(e^u-e^{-u})}{2}-1}=2\int\frac{2e^u}{\sqrt{3}(e^{2u}-1)-2e^u}du$$

$$=2\int\frac{2v}{\sqrt{3}(v^2-1)-2v}\frac{dv}{v}=4\int\frac{dv}{\sqrt{3}v^2-2v-\sqrt{3}}=\frac{4}{\sqrt{3}}\int\frac{dv}{v^2-\frac{2}{\sqrt{3}}v-1}$$

$v^2-\frac{2}{\sqrt{3}}v-1$ a deux racines réelles : $\Delta=\frac{4}{3}+4=\frac{16}{3}=\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2$

$$v_1=\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{4}{\sqrt{3}}}{2}=\sqrt{3}\quad et\quad v_2=-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$v^2-\frac{2}{\sqrt{3}}v-1=\left(v-\sqrt{3}\right)\left(v-\frac{3}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\frac{1}{v^2-\frac{2}{\sqrt{3}}v-1}=\frac{1}{\left(v-\sqrt{3}\right)\left(v-\frac{3}{\sqrt{3}}\right)}=\frac{a}{v-\sqrt{3}}+\frac{b}{v-\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$a=\left[\frac{1}{v-\frac{\sqrt{3}}{3}}\right]_{v=\sqrt{3}}=\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$b=\left[\frac{1}{v-\sqrt{3}}\right]_{v=\frac{1}{\sqrt{3}}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$F_2(x)=\frac{4}{\sqrt{3}}\int\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{v-\sqrt{3}}-\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{v-\frac{3}{\sqrt{3}}}\right)dv=2\left(\ln\left|v-\sqrt{3}\right|-\ln\left|v-\frac{\sqrt{3}}{3}\right|\right)+K$$

$$=2\left(\ln\left|e^u-\sqrt{3}\right|-\ln\left|e^u-\frac{3}{\sqrt{3}}\right|\right)+K=2\ln\left|\frac{e^u-\sqrt{3}}{e^u-\frac{\sqrt{3}}{3}}\right|+K$$

Or $t=\operatorname{sh}(u)\Leftrightarrow u=\operatorname{argsh}(t)=\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)$ et $t=\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$

$$u=\operatorname{argsh}(t)=\ln\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\sqrt{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\right)=\ln\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{4x^2+4x+4}}{\sqrt{3}}\right)$$

$$=\ln\left(\frac{2\sqrt{x^2+x+1}+2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

Donc

$$e^u=\frac{2\sqrt{x^2+x+1}+2x+1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}e^u-\sqrt{3}=\dfrac{2\sqrt{x^2+x+1}+2x+1}{\sqrt{3}}-\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{x^2+x+1}+2x-2}{\sqrt{3}}\\[2ex] e^u-\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{2\sqrt{x^2+x+1}+2x+1}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{x^2+x+1}+2x}{\sqrt{3}}\end{cases}$$

Finalement

$$F_2(x)=2\ln\left|\frac{\frac{2\sqrt{x^2+x+1}+2x-2}{\sqrt{3}}}{\frac{2\sqrt{x^2+x+1}+2x}{\sqrt{3}}}\right|+K=2\ln\left|\frac{2\sqrt{x^2+x+1}+2x-2}{2\sqrt{x^2+x+1}+2x}\right|+K$$

Allez à : Exercice 31

3.

$$F_3(x)=\int\frac{x}{\sqrt{9+4x^2}}dx=\int\frac{x}{\sqrt{9\left(1+\left(\frac{2x}{3}\right)^2\right)}}dx$$

On pose $t=\frac{2x}{3}\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}t\Rightarrow dx=\frac{3}{2}dt$

$$F_3(x)=\int\frac{\frac{3}{2}t}{3\sqrt{1+t^2}}\times\frac{3}{2}dt=\frac{3}{4}\int\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}dt=\frac{3}{4}\sqrt{1+t^2}+K=\frac{3}{4}\sqrt{1+\left(\frac{2x}{3}\right)^2}+K$$

$$=\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}\sqrt{9+4x^2}+K=\frac{1}{8}\sqrt{9+4x^2}+K$$

Allez à : Exercice 31

4. Sur I, $-4x^2+4x+1>0$

$$F_4(x)=\int\frac{x+1}{\sqrt{-4x^2+4x+1}}dx=\int\frac{x+1}{\sqrt{-4\left(x^2-x-\frac{1}{4}\right)}}dx=\int\frac{x+1}{\sqrt{-4\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\right)}}dx$$

$$=\int\frac{x+1}{\sqrt{3-4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}dx=\int\frac{x+1}{\sqrt{3\left(1-\frac{4}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right)}}dx=\int\frac{x+1}{\sqrt{3}\sqrt{1-\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}}dx$$

On pose $t=\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\sqrt{3}t=2x-1\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{3}t+1}{2}\Rightarrow dx=\frac{\sqrt{3}}{2}dt$

$$F_4(x)=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{\frac{\sqrt{3}t+1}{2}+1}{\sqrt{1-t^2}}\frac{\sqrt{3}}{2}dt=\frac{1}{4}\int\frac{\sqrt{3}t+3}{\sqrt{1-t^2}}dt=\frac{\sqrt{3}}{4}\int\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt+\frac{1}{4}\int\frac{3}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{1-t^2}+\frac{3}{4}\arcsin(t)+K=-\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{1-\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}+\frac{3}{4}\arcsin\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+K$$

$$=-\frac{1}{4}\sqrt{-4x^2+4x+1}+\frac{3}{4}\arcsin\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+K$$

Allez à : Exercice 31

5. Sur I, $-4x^2+12x-5>0$

$$F_5(x)=\int\frac{8x-3}{\sqrt{-4x^2+12x-5}}dx=\int\frac{8x-3}{\sqrt{-4\left(x^2-3x+\frac{5}{4}\right)}}dx=\int\frac{8x-3}{\sqrt{-4\left(\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-1\right)}}dx$$

$$=\int\frac{8x-3}{\sqrt{4-4\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}}dx=\int\frac{8x-3}{\sqrt{4\left(1-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2\right)}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{8x-3}{\sqrt{1-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}}dx$$

On pose $t=x-\frac{3}{2}\Leftrightarrow x=t+\frac{3}{2}\Rightarrow dx=dt$

$$F_5(x)=\frac{1}{2}\int\frac{8\left(t+\frac{3}{2}\right)-3}{\sqrt{1-t^2}}dt=\int\frac{8t+9}{\sqrt{1-t^2}}dt=8\int\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt+9\int\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

$$=-8\sqrt{1-t^2}+9\arcsin(t)+K=-8\sqrt{1-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}+9\arcsin\left(x-\frac{3}{2}\right)+K$$

$$=-8\sqrt{4\left(-x^2+3x-\frac{5}{4}\right)}+9\arcsin\left(x-\frac{3}{2}\right)+K$$

$$=-8\sqrt{-4x^2+12x-5}+9\arcsin\left(x-\frac{3}{2}\right)+K$$

Allez à : Exercice 31

6. On pose $x=\mathrm{ch}(t)\Rightarrow dx=\mathrm{sh}(t)\,dt$ avec $t\geq 0$, $\sqrt{x^2-1}=\sqrt{\mathrm{ch}^2(t)-1}=\sqrt{\mathrm{sh}^2(t)}=\mathrm{sh}(t)$

$$F_6(x)=\int\sqrt{x^2-1}dx=\int \mathrm{sh}(t)\,\mathrm{sh}(t)\,dt=\int \mathrm{sh}^2(t)\,dt=\int\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^2dt=\int\frac{e^{2t}-2+e^{-2t}}{4}dt$$
$$=\frac{1}{4}\int(e^{2t}-2+e^{-2t})dt=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}e^{2t}-2t-\frac{1}{2}e^{-2t}\right)+K$$
$$=\frac{1}{16}e^{2\mathrm{argch}(x)}-\frac{1}{4}\mathrm{argch}(t)+\frac{1}{16}e^{-2\mathrm{argch}(x)}+K$$

Mais on peut trouver une forme plus agréable

$$\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}e^{2t}-2t-\frac{1}{2}e^{-2t}\right)=\frac{1}{16}(e^{2t}-e^{-2t})-\frac{1}{4}t=\frac{1}{16}(e^t+e^{-t})(e^t-e^{-t})$$
$$=\frac{1}{16}\times 2\,\mathrm{ch}(t)\times 2\,\mathrm{sh}(t)-\frac{1}{4}t=\frac{1}{4}\mathrm{ch}(t)\,\mathrm{sh}(t)-\frac{1}{4}t=\frac{1}{4}\mathrm{ch}(t)\sqrt{\mathrm{ch}^2(t)-1}-\frac{1}{4}t$$
$$=\frac{1}{4}x\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{4}\mathrm{argch}(x)$$

Donc

$$F_6(x)=\frac{1}{4}x\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{4}\mathrm{argch}(x)+K$$

Allez à : Exercice 31

7. On pose $t=\sqrt{x}\Leftrightarrow x=t^2\Rightarrow dx=2tdt$

$$F_7(x)=\int\frac{x\sqrt{x}}{x^2-5x+4}dx=\int\frac{t^2t}{t^4-5t^2+4}dt=\int\frac{t^3}{t^4-5t^2+4}dt$$
$$t^4-5t^2+4=(t^2-4)(t^2-1)=(t-2)(t+2)(t-1)(t+1)$$
$$\frac{t^3}{t^4-5t^2+4}=\frac{t^3}{(t-2)(t+2)(t-1)(t+1)}=\frac{a}{t-2}+\frac{b}{t+2}+\frac{c}{t-1}+\frac{d}{t+1}$$
$$a=\left[\frac{t^3}{(t+2)(t-1)(t+1)}\right]_{t=2}=\frac{8}{4\times 1\times 3}=\frac{2}{3}$$
$$b=\left[\frac{t^3}{(t-2)(t-1)(t+1)}\right]_{t=-2}=\frac{-8}{-4\times(-3)\times(-1)}=-\frac{2}{3}$$
$$c=\left[\frac{t^3}{(t-2)(t+2)(t+1)}\right]_{t=1}=\frac{1}{(-1)\times 3\times 2}=-\frac{1}{6}$$
$$d=\left[\frac{t^3}{(t-2)(t+2)(t-1)}\right]_{t=-1}=\frac{1}{(-3)\times 1\times(-2)}=\frac{1}{6}$$
$$\frac{t^3}{t^4-5t^2+4}=\frac{t^3}{(t-2)(t+2)(t-1)(t+1)}=\frac{\frac{2}{3}}{t-2}-\frac{\frac{2}{3}}{t+2}+\frac{\frac{1}{6}}{t-1}-\frac{\frac{1}{6}}{t+1}$$
$$F_7(x)=\int\left(\frac{\frac{2}{3}}{t-2}-\frac{\frac{2}{3}}{t+2}+\frac{\frac{1}{6}}{t-1}-\frac{\frac{1}{6}}{t+1}\right)dt$$
$$=\frac{2}{3}\ln|t-2|-\frac{2}{3}\ln|t+2|+\frac{1}{6}\ln|t-1|-\frac{1}{6}\ln|t+1|+$$
$$=\frac{2}{3}\ln\left(\frac{|t-2|}{|t+2|}\right)+\frac{1}{6}\ln\left(\frac{|t-1|}{|t+1|}\right)+K=\frac{2}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}\right|+\frac{1}{6}\ln\ln\left|\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right|+K$$

Allez à : Exercice 31

8. On pose $u=\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$

$$u=\sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \Leftrightarrow u^2=\frac{1-t}{1+t} \Leftrightarrow u^2(1+t)=1-t \Leftrightarrow u^2+tu^2=1-t \Leftrightarrow tu^2+t=1-u^2$$

$$\Leftrightarrow t(u^2+1)=1-u^2 \Leftrightarrow t=\frac{1-u^2}{u^2+1}$$

Donc

$$dt=\frac{-2u(u^2+1)-2u(1-u^2)}{(u^2+1)^2}=\frac{-4u}{(u^2+1)^2}du$$

D'autre part

$$1-t=1-\frac{1-u^2}{u^2+1}=\frac{u^2+1-(1-u^2)}{u^2+1}=\frac{2u^2}{u^2+1}$$

Par conséquent

$$F_8(t)=\int \frac{1}{1-t}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}dt=\int \frac{1}{\frac{2u^2}{u^2+1}}\times u\times\frac{-4u}{(u^2+1)^2}du=-2\int\frac{du}{u^2+1}=-2\arctan(u)+K$$

$$=-2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\right)+K$$

Allez à : Exercice 31

Correction exercice 32.

On pose

$$t=\sqrt{1-x} \Leftrightarrow t^2=1-x \Leftrightarrow x=1-t^2 \Rightarrow dx=-2tdt$$

$$F(x)=\int -\frac{2t}{1+t}dt=-2\int\frac{t}{1+t}dt=-2\int\frac{t+1-1}{t+1}dt=-2\int\left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$=-2t+2\ln(t+1)+K=-2\sqrt{1-x}+2\ln\left(\sqrt{1-x}+1\right)+K$$

Allez à : Exercice 32

Correction exercice 33.

1. Il existe a, b et c réels tels que

$$\frac{1}{x^2(x-1)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x-1}$$

On multiplie par x^2, puis $x=0$

$$b=\left[\frac{1}{x-1}\right]_{x=0}=-1$$

On multiplie par $x-1$, puis $x=1$

$$c=\left[\frac{1}{x^2}\right]_{x=1}=1$$

On multiplie par x, puis $x\to+\infty$

$$0=a+c\Rightarrow a=-1$$

Par conséquent

$$\int\frac{dx}{x^2(x-1)}=\int\left(\frac{-1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x-1}\right)dx=-\ln|x|-\frac{1}{x}+\ln|x-1|+K$$

2.

$$x=\sqrt{\frac{t}{t+1}}\Leftrightarrow x^2=\frac{t}{t+1}\Leftrightarrow x^2(t+1)=t\Leftrightarrow x^2t+x^2=t\Leftrightarrow x^2t-t=-x^2\Leftrightarrow t(x^2-1)=-x^2$$
$$\Leftrightarrow t=\frac{-x^2}{x^2-1}$$

On en déduit que

$$dt=\frac{-2x(x^2-1)-(-x^2)(2x)}{(x^2-1)^2}dx=\frac{-2x^3+2x+2x^3}{(x^2-1)^2}dx=\frac{2x}{(x^2-1)^2}dx$$
$$\frac{1}{t(t+1)\left(\sqrt{\frac{t}{t+1}}-\frac{t}{t+1}\right)}=\frac{1}{\frac{-x^2}{x^2-1}\left(\frac{-x^2}{x^2-1}+1\right)(x-x^2)}=\frac{x^2-1}{-x^2\left(\frac{-x^2+x^2-1}{x^2-1}\right)(x-x^2)}$$
$$=\frac{(x^2-1)^2}{x^2(x-x^2)}=\frac{(x^2-1)^2}{x^3(1-x)}=-\frac{(x^2-1)^2}{x^3(x-1)}$$

Par conséquent

$$G(t)=-\frac{1}{2}\int\frac{(x^2-1)^2}{x^3(x-1)}\frac{2x}{(x^2-1)^2}dx=-\int\frac{1}{x^2(x-1)}dx=-\int\frac{1}{x^2(x-1)}dx$$
$$=\ln|x|+\frac{1}{x}-\ln|x-1|+K=\ln\left|\sqrt{\frac{t}{t+1}}\right|+\sqrt{\frac{t+1}{t}}-\ln\left|\sqrt{\frac{t}{t+1}}-1\right|+K$$

Allez à : Exercice 33

Correction exercice 34.

1.

$F_1(x)=\int_0^x(t^2+1)\arctan(t)\,dt$	
$u'(t)=t^2+1$	$u(t)=\frac{t^3}{3}+t$
$v(t)=\arctan(t)$	$v'(t)=\frac{1}{1+t^2}$
$F_1(x)=\int_0^x(t^2+1)\arctan(t)\,dt=\left[\left(\frac{t^3}{3}+\mathrm{t}\right)\arctan(t)\right]_0^x-$	$\int_0^x\frac{\frac{t^3}{3}+t}{1+t^2}dt$

$$F_1(x)=\int_0^x(t^2+1)\arctan(t)\,dt=\left[\left(\frac{t^3}{3}+t\right)\arctan(t)\right]_0^x-\int_0^x\frac{\frac{t^3}{3}+t}{1+t^2}dt$$
$$=\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\arctan(x)-\frac{1}{3}\int_0^x\frac{t^3+3t}{t^2+1}dt$$

$\frac{t^3+t}{t^2+1}$ est une fraction rationnelle, il faut la décomposer en élément simple, pour cela on commence par faire une division euclidienne

$$\begin{array}{r|l} t^3+3t & t^2+1 \\ \cline{2-2} t^3+t & t \\ \cline{1-1} 2t & \end{array}$$

Donc $t^3+3t=(t^2+1)t+2t$, d'où l'on déduit que

$$\frac{t^3+3t}{t^2+1}=\frac{(t^2+1)t+2t}{t^2+1}=t+\frac{2t}{t^2+1}$$

Par conséquent

$$\int_0^x \frac{t^3+3t}{t^2+1}dt = \int_0^x \left(t+\frac{2t}{t^2+1}\right)dt = \left[\frac{t^2}{2}+\ln(t^2+1)\right]_0^x = \frac{x^2}{2}+\ln(x^2+1)$$

$$F_1(x) = \left(\frac{x^3}{3}+x\right)\arctan(x) - \frac{x^2}{2} - \ln(x^2+1)$$

Allez à : Exercice 34

2.

$$F_2(x) = \int_0^x (t+1)\arcsin(t)\,dt$$

$\int_0^x (t+1)\arcsin(t)\,dt$	
$u'(t) = t+1$	$u(t) = \frac{t^2}{2}+t$
$v(t) = \arcsin(t)$	$v'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
$\int_0^x (t+1)\arcsin(t)\,dt = \left[\left(\frac{t^2}{2}+t\right)\arcsin(t)\right]_0^x -$	$\int_0^x \frac{\frac{t^2}{2}+t}{\sqrt{1-t^2}}dt$

$$F_2(x) = \int_0^x (t+1)\arcsin(t)\,dt = \left[\left(\frac{t^2}{2}+t\right)\arcsin(t)\right]_0^x - \int_0^x \frac{\frac{t^2}{2}+t}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

$$= \left(\frac{x^2}{2}+x\right)\arcsin(x) - \int_0^x \frac{\frac{t^2}{2}+t}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

On fait le changement de variable $t = \sin(u) \Leftrightarrow u = \arcsin(t)$

$$t = 0 \Rightarrow u = \arcsin(0) = 0$$

$$t = x \Rightarrow u = \arcsin(x)$$

$$dt = \cos(u)\,du$$

$$\frac{\frac{t^2}{2}+t}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\frac{\sin^2(u)}{2}+\sin(u)}{\sqrt{1-\sin^2(u)}} = \frac{\frac{\sin^2(u)}{2}+\sin(u)}{\sqrt{\cos^2(u)}} = \frac{\frac{\sin^2(u)}{2}+\sin(u)}{|\cos(u)|}$$

Mais comme $u = \arcsin(t) \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $\cos(u) > 0$ et alors $|\cos(u)| = \cos(u)$

$$\int_0^x \frac{\frac{t^2}{2}+t}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int_0^{\arcsin(x)} \frac{\frac{\sin^2(u)}{2}+\sin(u)}{\cos(u)}\cos(u)\,du = \int_0^{\arcsin(x)} \left(\frac{\sin^2(u)}{2}+\sin(u)\right)du$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\arcsin(x)} \sin^2(u)\,du + \int_0^{\arcsin(x)} \sin(u)\,du$$

Pour la première intégrale il faut utiliser la formule $\sin^2(u) = \frac{1-\cos(2u)}{2}$

$$\int_0^x \frac{\frac{t^2}{2}+t}{\sqrt{1-t^2}}dt = \frac{1}{2}\int_0^{\arcsin(x)} \frac{1-\cos(2u)}{2}du + [-\cos(u)]_0^{\arcsin(x)}$$

$$=\frac{1}{4}\left[u-\frac{1}{2}\sin(2u)\right]_0^{\arcsin(x)}-\cos(\arcsin(x))+1$$
$$=\frac{1}{4}\left(\arcsin(x)-\frac{1}{2}\sin(2\arcsin(x))\right)-\cos(\arcsin(x))+1$$
$$=\frac{1}{4}\left(\arcsin(x)-\frac{1}{2}\times 2\sin(\arcsin(x))\cos(\arcsin(x))\right)-\sqrt{1-x^2}+1$$
$$=\frac{1}{4}\arcsin(x)-\frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-x^2}+1$$
$$=\frac{1}{4}\arcsin(x)-\frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-x^2}+1$$

Car

$$\cos(\arcsin(x))=\sqrt{1-x^2}$$
$$\sin(2a)=2\sin(a)\cos(a)$$
$$\arcsin(\sin(x))=x$$

Finalement

$$F_2(x)=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\arcsin(x)-\frac{1}{4}\arcsin(x)+\frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x^2}-1$$

Allez à : Exercice 34

Intégration

Exercice 1.

Répondre par vrai ou faux en justifiant votre réponse

On considère la fonction $f: x \mapsto x$ sur l'intervalle $I = [0,2]$.

1.
$$\sum_{i=1}^{2n} \frac{i}{n}$$
Est une somme de Riemann associe à f sur I.

2.
$$\sum_{i=1}^{2n} \frac{i}{n^2}$$
Est une somme de Riemann associe à f sur I.

3.
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{2i}{n^2}$$
Est une somme de Riemann associe à f sur I.

4.
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{4i}{n^2}$$
Est une somme de Riemann associe à f sur I.

Allez à : Correction exercice 1

Exercice 2.

Répondre par vrai ou faux en justifiant votre réponse

Toutes les fonctions considérées sont supposées intégrables sur l'intervalle considéré.

1. L'intégrale sur $[0,1]$ d'une fonction négative ou nulle est négative ou nulle.
2. L'intégrale sur $[0,1]$ d'une fonction paire est positive ou nulle.
3. L'intégrale sur $[-1,1]$ d'une fonction impaire est nulle.
4. L'intégrale sur $[0,1]$ d'une fonction minorée par 1 est inférieure ou égale à 1.
5. L'intégrale sur $[-1,1]$ d'une fonction majorée par 1 est inférieure ou égale à 1.
6. L'intégrale sur $[-1,1]$ d'une fonction majorée par 2 est inférieure ou égale à 4.
7. Si une fonction f est telle que pour tout $x \in [-1,1]$, $f(x) < x^3$, alors son intégrale sur $[-1,1]$ est strictement négative.
8. Si l'intégrale sur $[0,1]$ d'une fonction f continue vaut y, alors il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = y$.
9. Si l'intégrale sur $[-1,1]$ d'une fonction f vaut y, alors il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = 2y$.

Allez à : Correction exercice 2

Exercice 3.

Répondre par vrai ou faux en justifiant votre réponse

1. Toute fonction intégrable sur $[a, b]$ est continue.
2. Si f est une fonction continue sur $[a, b]$, sauf en un point, alors f admet une primitive qui s'annule en b.
3. Toutes fonctions continue sur $[a, b]$ admet une primitive qui s'annule en b.
4. Toute primitive d'une fonction continue sur $[a, b]$ s'annule en un point de $[a, b]$.
5. Toute primitive d'une fonction continue sur $[a, b]$ est dérivable sur $]a, b[$.
6. Toute primitive d'une fonction continue sur $]a, b[$ est dérivable à droite en a.

Allez à : Correction exercice 3

Exercice 4.

Répondre par vrai ou faux en justifiant votre réponse

1. Toute primitive d'une fonction positive ou nulle est positive ou nulle.
2. Toute primitive d'une fonction négative ou nulle est décroissante.
3. Toute fonction continue est la primitive d'une fonction continue.

Allez à : Correction exercice 4

Exercice 5.

1. Soit f une fonction de classe C^1 sur l'intervalle $[a,b]$. Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin(nt)\,dt = 0$$
2. Soit f une fonction en escalier sur l'intervalle $[a,b]$. Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin(nt)\,dt = 0$$
On pourra commencer par montrer que pour tout $\alpha<\beta$
$$\lim_{n\to+\infty}\int_\alpha^\beta \sin(nt)\,dt = 0$$
3. Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$. Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin(nt)\,dt = 0$$
On rappelle que pour toute fonction continue sur $[a,b]$, pour tout $\epsilon>0$, il existe une fonction en escalier χ telle que
$$\sup_{t\in[a,b]}|f(t)-\chi(t)|<\epsilon$$

Allez à : Correction exercice 5

Exercice 6.

Soit f la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$.
$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{si} \quad x\in\mathbb{Q}\\ 0 & \text{si} \quad x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$
On rappelle que tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ contient des rationnels et des irrationnels. Soit n un entier strictement positif. Pour $i=0,\dots,n$, on pose $a_i=\frac{i}{n}$.

1. Montrer que pour tout $i=1,\dots,n$, il existe x_i et y_i dans $[a_{i-1},a_i]$ tels que $f(x_i)=1$ et $f(y_i)=0$.
2. On considère les deux subdivisions pointées
$$D_1=\{([a_{i-1},a_i],x_i)\}_{1\le i\le n} \qquad \text{et} \qquad D_2=\{([a_{i-1},a_i],y_i)\}_{1\le i\le n}$$
Montrer que $S_{D_1}(f)=1$ et $S_{D_2}(f)=0$
On rappelle que
$$S_D(f)=\sum_{i=1}^n f(\alpha_i)(a_i-a_{i-1})$$
Pour $D=\{([a_{i-1},a_i],\alpha_i)\}_{1\le i\le n}$
3. En déduire que f n'est pas intégrable.

Allez à : Correction exercice 6

Exercice 7.

1. Montrer que le produit de deux fonctions en escalier est une fonction en escalier.
2. La composée de deux fonctions en escalier est toujours une fonction en escalier. Est-ce vrai ou faux ? (Justifier).

Allez à : Correction exercice 7

Exercice 8.

Montrer que si f est intégrable, alors $|f|$ est également intégrable.
On rappelle le théorème

Soit f une fonction bornée sur $[a,b]$.
Si pour tout $\epsilon > 0$ il existe g Riemann-intégrable sur $[a,b]$ tel que

$$\sup_{[a,b]} |f(x) - g(x)| \leq \epsilon$$

Alors f est Riemann-intégrable.
Et on pourra utiliser une forme de l'inégalité triangulaire.

Allez à : Correction exercice 8

Exercice 9.

Soient a et b deux réels fixés, avec $a < b$. On note $C_a([a,b])$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[a,b]$ vers $\mathbb{R}$ et $\mathcal{E}_0$ l'espace vectoriel des fonctions en escalier de $[a,b]$ vers $\mathbb{R}$ nulles en a.

1. Montrer que $C_a([a,b])$ et $\mathcal{E}_0$ sont en somme directe.
2. Montrer que l'espace $C_a([a,b]) \oplus \mathcal{E}_0$ est égal à l'espace des fonctions continues par morceaux de $[a,b]$ vers $\mathbb{R}$.

Allez à : Correction exercice 9

Exercice 10.

Calculer la limite, si elle existe, des suites suivantes :

$$S_{1,n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k}; \qquad S_{2,n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{(n+k)^2}; \qquad S_{3,n} = n\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{k^2};$$

$$S_{4,n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}; \qquad S_{5,n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{k^2+n^2}; \qquad S_{6,n} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{n-k}{n^3+n^2k}}$$

Allez à : Correction exercice 10

Exercice 11.

Calculer, si elle existe

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{e^t}{1+t^n} dt$$

Allez à : Correction exercice 11

Exercice 12.

Soit $I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$

1. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.
2. Calculer I_n.
3. En déduire que

$$I_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{n}{k} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

Allez à : Correction exercice 12

Exercice 13.

Soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\, dt$

1. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.
2. En déduire I_{2p} et I_{2p+1}.
3. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et strictement positive.
4. En déduire que $I_n \sim I_{n+1}$.

5. Calculer nI_nI_{n+1}.
6. Donner alors un équivalent simple de I_n.

Allez à : Correction exercice 13

Exercice 14.

Soit $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$

1. En majorant la fonction intégrée, montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 0$.
2. Calculer $I_n + I_{n+1}$.
3. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)$

Allez à : Correction exercice 14

Exercice 15.

On pose pour tout $n \geq 0$

$$I_n = \int_1^e (\ln(t))^n dt$$

1. Calculer I_0 et I_1
2. Pour tout $n \geq 1$ trouver une relation entre I_n et I_{n-1} et pour tout $n \geq 2$ en déduire une relation entre I_n et I_{n-2}.
3. Déterminer I_n pour tout $n \geq 0$.

Allez à : Correction exercice 15

Exercice 16.

Calculer par récurrence :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{du}{\cos^n(u)}$$

Allez à : Correction exercice 16

Exercice 17.

Calculer par récurrence :

$$J_n = \int_1^e (\ln(u))^n du$$

Allez à : Correction exercice 17

Exercice 18.

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, 2π périodique et impaire.

On pose

$$F(x) = \int_x^{x+2\pi} f(t)dt$$

1. A l'aide du changement de variable $u = -t$ calculer
$$F(-\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt$$
2. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(x)$, que peut-on en déduire sur F.
3. Calculer
$$\int_{2\pi}^{4\pi} f(t)dt$$

Allez à : Correction exercice 18

Exercice 19.

Soit F la fonction définie pour tout $x > 1$ par

$$F(x)=\int_{x-1}^{x^2-1}\frac{dt}{\ln(1+t)}$$

1. A l’aide de la formule de Taylor-Lagrange montrer que pour tout $t>0$:
$$t-\frac{t^2}{2}<\ln(1+t)<t$$
2. En déduire que pour tout $x\in\left]1,\sqrt{3}\right[$:
$$\ln(1+x)\le F(x)\le \ln(1+x)+\ln\left(\frac{|x-3|}{|x^2-3|}\right)$$
Puis
$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} F(x)$$
3. Calculer, pour tout >1, $F'(x)$.
4. En déduire que pour tout $x>1$, $F(x)>\ln(2)$.

Allez à : Correction exercice 19

Exercice 20.

Soit $I=]1,+\infty[$. On désigne par f l'application de I dans $\mathbb{R}$, définie, pour tout $x\in I$, par
$$f(x)=\int_x^{x^2}\frac{\ln(t)}{(t-1)^2}dt$$

Première partie

Dans cette partie on ne cherchera pas à exprimer f à l’aide de fonctions usuelles

1. Déterminer le signe de $f(x)$.
2. Justifier la dérivabilité de f sur I, et calculer $f'(x)$ pour tout $x\in I$, on exprimera $f'(x)$ de la manière la plus simple possible.
3.
   a) Montrer que pour tout $t\in I$,
   $$t-1-\frac{(t-1)^2}{2}<\ln(t)<t-1$$
   On pourra utiliser la formule de Taylor Lagrange entre 1 et t.

   b) En déduire l’existence et la valeur de
   $$\lim_{x\to 1^+} f(x)$$

Deuxième partie

1. Déterminer une primitive de la fonction $t\longmapsto\frac{\ln(t)}{(t-1)^2}$ à l’aide d’une intégration par parties.
2. Exprimer la fonction f à l’aide de fonctions usuelles de la façon la plus simple possible.

Allez à : Correction exercice 20

Exercice 21.

Soit F la fonction définie sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ par
$$F(x)=\int_x^{2x}\frac{dt}{\sin(t)}$$

1. Montrer que F est bien définie sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, puis qu’elle est de classe C^1 sur cet intervalle.
2. Calculer $F'(x)$, en déduire les variations de F sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.
3. A l’aide de la formule de Taylor-Lagrange montrer que pour tout $t\in[x,2x]\subset\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ (c’est-à-dire pour $x\in\left]0,\frac{\pi}{4}\right[$).

$$0 < t - \frac{t^2}{2} < \sin(t) < t$$

4. En déduire que
$$\frac{1}{t} < \frac{1}{\sin(t)} < \frac{1}{t} + \frac{1}{2-t}$$
5. Montrer que pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$
$$\ln(2) < F(x) < \ln(2) - \ln\left(\frac{2-2x}{2-x}\right)$$
6. En déduire la limite de $F(x)$ lorsque $x \to 0$.

Allez à : Correction exercice 21

Exercice 22.

Soit f la fonction définie sur $]-1,1[$ par :
$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+t)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$
Soit F la fonction définie sur $]-1,1[$ par :
$$F(x) = \int_{-x}^{x} f(t)dt$$

1. Montrer que f est continue sur $]-1,1[$.
2. En déduire que F est de classe C^1 sur $]-1,1[$.
3. Calculer $F'(x)$ pour $x \neq 0$ et calculer $F'(0)$.
4. Montrer que F est impaire.
5. Déterminer les variations de F sur $]0,1[$. Puis sur $]-1,0[$.

Allez à : Correction exercice 22

Exercice 23.

Soit $I = [a, b]$ et soient f et g deux fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ telles que:

f est décroissante et $g(I) \subset [0,1]$

et on pose $\lambda = \int_a^b g(t)dt$, $G(x) = \int_a^x g(t)dt$ et $F(x) = \int_a^{a+G(x)} f(t)dt - \int_a^x f(t)g(t)dt$

1. Montrer que F et G sont de classe C^1 sur I.
2. Montrer que pour tout $x \in I$, $a + G(x) \leq x$
3. Etudier les variations de F sur $I = [a, b]$.
4. En déduire l'inégalité
$$\int_a^b f(t)g(t)dt \leq \int_a^{a+\lambda} f(t)dt$$

Allez à : Correction exercice 23

Exercice 24.

Soit f une fonction dérivable et strictement monotone sur $[0, a]$ telle que $f(0) = 0$.

Soit g une fonction définie sur $[0, a]$ par :
$$g(x) = \int_0^x f(t)dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt - xf(x)$$

1. Montrer que g est dérivable.
2. Calculer g' et en déduire g.

Allez à : Correction exercice 24

Exercice 25.

Soit $0 < a < 1$. On considère

$$I = \int_a^{\frac{1}{a}} \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx$$

1. Montrer que

$$\int_1^a \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx = -\int_{\frac{1}{a}}^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx$$

On pourra utiliser le changement de variable $x = \frac{1}{t}$

2. En déduire la valeur de I.

Allez à : Correction exercice 25

Exercice 26.

Soit $a \in \left]-\pi, \pi\right[$. Les trois questions sont indépendantes.

Soient $F(a) = \int_0^a \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)} dx$, $G(a) = \int_0^a \frac{\cos(x)}{1+\cos(x)} dx$ et $H(a) = \int_0^a \frac{1}{1+\cos(x)} dx$

1. Calculer $F(a)$.
2. Le but de cette question est de calculer $G(a)$ à l'aide d'un changement de variable.
   a) A l'aide des règles de Bioche, déterminer le « bon changement de variable ».
   b) Calculer $G(a)$ à l'aide de ce changement de variable.
3. Trouver une relation élémentaire entre $G(a)$ et $H(a)$ et en déduire $H(a)$.

Allez à : Correction exercice 26

Exercice 27.

Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{4+t^4}}$

Soit $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par $g(x) = x \int_x^{2x} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{\sqrt{4+t^4}}\right) dt$

1. Montrer que f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. On admettra que f est impaire.
2. Calculer la dérivée de f et en déduire les variations de f.
   Et montrer que $\frac{1}{2\sqrt{5}} \leq \int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{4+t^4}} \leq \frac{1}{\sqrt{5}}$
3. Donner le développement limité de f à l'ordre 1 en 0 et en déduire une équation de la tangente au point d'abscisse 0.
4. Encadrer $\frac{1}{\sqrt{4+t^4}}$, en déduire un encadrement de $f(x)$, puis la limite de f en $+\infty$.
5. Montrer que $0 \leq \frac{1}{t^2} - \frac{1}{\sqrt{4+t^4}} \leq \frac{2}{t^6}$, puis montrer que

$$0 \leq g(x) \leq \frac{31}{80x^4}$$

   En déduire un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$.
6. Tracer sommairement le graphe de f sur $\mathbb{R}$.

Allez à : Correction exercice 27

Exercice 28.

Soit F l'application définie par :

$$F(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$$

1. Montrer que F est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. A l'aide du changement de variable $u = -t$, étudier la parité de F.
3. Montrer que pour tout $x > 0$:

$$0 < F(x) < \frac{1}{2x}$$

En déduire la limite de F en $+\infty$.

4. Calculer la dérivée de F et résoudre $F'(x) = 0$, pour $x > 0$.

Allez à : Correction exercice 28

Exercice 29.

Soit $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} F(x) = \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t} dt \\ F(0) = \ln(2) \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $x \neq 0$, F est dérivable.
2.
   a) A l'aide de la formule de Taylor Lagrange, montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ il existe $c \in]-|t|, |t|[$ tel que :
   $$e^{-t} = 1 - te^{-c}$$
   b) En déduire que pour tout $t \in [-1,1]$, $t \neq 0$.
   $$\frac{1}{e} < \frac{1}{t} - \frac{e^{-t}}{t} < e$$
   c) Trouver un encadrement de F et en déduire que F est continue en $x = 0$.
3. Pour tout $x \neq 0$, calculer la dérivée F' de F. F est-elle dérivable en 0 ? que peut-on en déduire sur l'allure de le graphe de F ?
4. Etudier les variations de F.
5. Montrer que pour tout $t \geq 1$, $\frac{e^{-t}}{t} \leq e^{-t}$, en déduire une majoration de F et sa limite en $+\infty$.
6. En reprenant l'égalité du 2. a), montrer que pour tout $t < 0$, $e^{-t} > 1 - t$ en déduire que pour tout $x < 0$
   $$F(x) > -\ln(2) - x$$
   En déduire la limite de F en $-\infty$.
7. Tracer l'allure du graphe de F.

Allez à : Correction exercice 29

Exercice 30.

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(t) = \frac{\ln(t)}{t-1}$ pour $t \neq 1$ et $f(1) = 1$

Soit F, la fonction définie sur $]0, +\infty[$ $F(x) = \int_x^{x^2} f(t) dt$

1. Montrer que f est continue sur $]0, +\infty[$.
2. Déterminer le signe de f sur $]0, +\infty[$ selon les valeurs de t.
3. Déterminer le signe de F sur $]0, +\infty[$ selon les valeurs de x.
4. Montrer que F est de classe C^1, calculer $F'(x)$ et en déduire les variations de F sur $]0, +\infty[$.

Allez à : Correction exercice 30

Exercice 31.

Soient $I = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{1-x}} dx$ et $I_{\varepsilon,a} = \int_\varepsilon^a \frac{\ln(x)}{\sqrt{1-x}} dx$

1. Calculer $\int \frac{2t^2}{t^2-1} dt$
2. A l'aide du changement de variable $t = \sqrt{1-x}$ calculer $\int \frac{\sqrt{1-x}}{x} dx$
3. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$F(x)=\int \frac{\ln(x)}{\sqrt{1-x}}dx=-2\ln(x)\sqrt{1-x}+4\sqrt{1-x}+2\ln\left(1-\sqrt{1-x)}\right)-2\ln\left(1+\sqrt{1-x}\right)+K$$

Où K est une constante réelle.

4. Montrer que I est une intégrale généralisée en 0 et en 1.
5. Montrer que I converge.
6. A l'aide d'un développement limité, à l'ordre 1, au voisinage de 0, de $x\to\sqrt{1-x}$:
   Calculer la limite en 0 de : $g(x)=-2\ln(x)\sqrt{1-x}+2\ln\left(1-\sqrt{1-x}\right)$, puis de $F(x)$.
7. Calculer $I_{\varepsilon,a}$. En déduire la valeur de I.

Allez à : Correction exercice 31

Exercice 32.

Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0,1]$ telle que $\forall x\in[0,1], f'(x)>0$, $f(0)=0$ et $f(1)=1$

1. Montrer, à l'aide du théorème des accroissements finis que

$$f\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\leq 1-\frac{a}{\sqrt{n}}$$

   Où $a\in\mathbb{R}^{+*}$ est une constante que l'on ne cherchera pas à déterminer.

2.
   Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \left(f(x)\right)^n dx=0$$

   On pourra poser

$$I_n=\int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}\left(f(x)\right)^n dx \qquad \text{et} \qquad J_n=\int_{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}^1 \left(f(x)\right)^n dx$$

   Et montrer que ces deux intégrales tendent vers 0.

Allez à : Correction exercice 32

Exercice 33.

Soit φ la fonction réelle définie sur R par:

$$\varphi(0)=0 \ \text{ et } \ \varphi(x)=e^{-\frac{1}{x^2}} \qquad \text{pour } x \text{ non nul}$$

et pour tout entier naturel $n\in N$, soit u_n la fonction réelle définie par :

$$u_n(x)=\frac{1}{x^n}\varphi(x)=\frac{1}{x^n}e^{-\frac{1}{x^2}} \qquad \text{pour } x \text{ non nul}$$

Première partie

1. Prouver que:
   $\lim_{x\to 0}u_n(x)=0$ pour tout n entier naturel
2. Montrer que φ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Montrer que la dérivée φ' est continue et vérifie :
   $\varphi'(0)=0$ et $\varphi'(x)=2u_3(x)$ pour x non nul
   En déduire la relation
   $2\varphi(x)=x^3\varphi'(x)$ pour tout x réel (1)
3. Etudier les variations de φ et tracer sommairement sa courbe représentative, en précisant les points d'inflexion éventuels.

Deuxième partie

Soit f la fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$f(0)=0 \quad \text{et} \quad f(x)=e^{\frac{1}{x^2}}\int_0^x \varphi(t)dt$$

4. Montrer que f est impaire.
5. Montrer que pour $x > 0$, on a :

$$0 \leq \int_0^x \varphi(t)dt \leq xe^{-\frac{1}{x^2}} \qquad (2)$$

6. En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}$.
7. Pour tout x non nul, montrer que f est dérivable et calculer sa dérivée $f'(x)$.
8. En utilisant (1), montrer que pour tout $x \geq 0$, on a la relation:

$$\int_0^x \varphi(t)dt = \frac{x^3}{2}\varphi(x) - \frac{3}{2}\int_0^x t^2\varphi(t)dt \qquad (3)$$

   En déduire que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$
9. Pour x non nul, calculer la limite de $\frac{f(x)}{x^3}$ lorsque x tend vers 0. (On pourra appliquer la règle de l'Hospital au quotient $\frac{F(x)}{G(x)}$ où $F(x) = \int_0^x \varphi(t)dt$ et $G(x) = x^3\varphi(x)$).

   En déduire le développement limité de f à l'ordre 3 en 0.

Allez à : Correction exercice 33

CORRECTIONS

Correction exercice 1.

Remarque :

Si on coupe l'intervalle en n partie égale, une somme de Riemann associe à f sur $[a,b]$ est

$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{2i}{n} = \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n} = \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i$$

Si $a = 0$, $b = 2$ et $f(x) = x$.

De plus

$$S_n = \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{4}{n^2}\times\frac{n(n+1)}{2} = 2\frac{n+1}{n} \to 2 = \int_0^2 xdx$$

1. Cela ne semble pas être bon, vérifions le

$$\sum_{i=1}^{2n}\frac{i}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n} i = \frac{1}{n}\times\frac{2n(2n+1)}{2} = 2n + 1 \to +\infty$$

   Cette somme ne tend pas vers 2, ce n'est pas une somme de Riemann de f sur I.
2. Vu ainsi cela ne ressemble pas à la remarque préliminaire, pourtant, en utilisant le 1°), la somme est équivalente à celle-ci-dessus diviser par n et donc tend vers 2. Cela ne suffit pas à dire qu'il s'agit d'une somme de Riemann de f sur I, mais on va regarder de plus près.

   On coupe l'intervalle en $2n$ partie égale

$$S_n = \frac{b-a}{2n}\sum_{i=1}^{2n} f\left(a + i\frac{b-a}{2n}\right) = \frac{2}{2n}\sum_{i=1}^{2n} f\left(i\frac{2}{2n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n} i\frac{2}{2n} = \sum_{i=1}^{2n}\frac{i}{n^2}$$

   C'est bon.
3. D'après la remarque préliminaire

$$S_n = \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = S_n = 4\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2}$$

   Donc $2\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2}$ n'est pas une somme de Riemann de f sur I.

Remarque :

On aurait aussi pu calculer la limite de $2\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2}$ et voir qu'elle valait $1 \neq 2$.

4. Oui, voir la remarque préliminaire.

Allez à : Exercice 1

Correction exercice 2.

1. Le résultat du cours est :
   « si f est une fonction positive ou nulle, intégrable sur $[a,b]$ avec $a<b$, alors $\int_a^b f(t)dt \geq 0$ »
   $-f$ est une fonction positive ou nulle sur $[0,1]$ donc $\int_0^1 \big(-f(t)\big)dt \geq 0$, ce qui équivaut à $-\int_0^1 f(t)dt \geq 0$, d'où l'on déduit que $\int_0^1 f(t)dt \geq 0$.
2. $$\int_0^1 x^2dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} \neq 0$$
   C'est faux.
3. Dans l'intégrale
   $$\int_{-1}^1 f(t)dt$$
   On fait le changement de variable $u=-t \Leftrightarrow t=-u \Rightarrow dt=-du$
   $$t=-1 \Rightarrow u=1$$
   $$t=1 \Rightarrow u=-1$$
   $$\int_{-1}^1 f(t)dt = \int_1^{-1} f(-u)(-du) = \int_1^{-1} -f(u)(-du) = \int_1^{-1} f(u)du = -\int_{-1}^1 f(u)du = -\int_{-1}^1 f(t)dt$$
   La première égalité est le changement de variable, la seconde vient du fait que f est impair, la troisième est la simplification du produit de deux signes négatifs, la quatrième vient de l'interversion des bornes et la cinquième vient du fait que la variable d'intégration est une variable « muette » (on peut lui donner n'importe quel nom).
   D'où l'on déduit que
   $$2\int_{-1}^1 f(t)dt = 0 \Rightarrow \int_{-1}^1 f(t)dt = 0$$
   C'est vrai.
4. Prenons la fonction constante égale à 2.
   $$\int_0^1 2dt = [2t]_0^1 = 2 > 1$$
   C'est faux
5. Prenons la fonction constante égale à $\frac{3}{4} < 1$
   $$\int_{-1}^1 \frac{3}{4}dt = \left[\frac{3t}{4}\right]_{-1}^1 = \frac{3}{4} - \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{2} > 1$$
   C'est faux.
6. $$\forall x \in [-1,1], f(t) \leq 2 \Rightarrow \int_{-1}^1 f(t)dt \leq \int_{-1}^1 2dt \Rightarrow \int_{-1}^1 f(t)dt \leq [2t]_{-1}^1 = 2-(-2) = 4$$
   C'est vrai.
7. $$\int_{-1}^1 f(x)dx \leq \int_{-1}^1 x^3dx = 0$$
   Car $x \to x^3$ est impair et d'après la question 3°). Rien n'empêche de faire le calcul directement.
   C'est vrai.
8. D'après la formule de la moyenne il existe $x \in [0,1]$ tel que
   $$f(x) = \frac{1}{1-0}\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt = y$$
   C'est vrai.
9. D'après la formule de la moyenne il existe $x \in [-1,1]$ tel que
   $$f(x) = \frac{1}{1-(-1)}\int_{-1}^1 f(t)dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 f(t)dt = \frac{1}{2}y$$

Cela ne marche pas. On va chercher un contre-exemple, cherchons un truc simple, la fonction constante égale à $\frac{y}{2}$, $\int_{-1}^{1}\frac{y}{2}dt=\left[\frac{yt}{2}\right]_{-1}^{1}=\frac{y}{2}-\left(-\frac{y}{2}\right)=y$ et pourtant $\frac{y}{2}\neq 2y$ sauf pour $y=0$, c'est encore raté.
Prenons $f(t)=\frac{3}{2}yt^2$

$$\int_{-1}^{1}\frac{3}{2}yt^2dt=\frac{3}{2}\left[\frac{yt^3}{3}\right]_{-1}^{1}=\frac{3}{2}\left(\frac{y}{3}-\left(-\frac{y}{3}\right)\right)=\frac{3}{2}\times\frac{2y}{3}=y$$

Si $t\in[-1,1]$ alors $t^2\in[0,1]$ et donc $\left|\frac{3}{2}yt^2\right|\leq\frac{3}{2}|y|$ ce qui montre que $-\frac{3}{2}|y|<f(t)<\frac{3}{2}|y|$, $\forall t\in[-1,1], f(t)\neq y$. Il a fallu faire intervenir la valeur absolue car on ne sait pas si y est positif ou négatif.

Allez à : Exercice 2

Correction exercice 3.

1. Une fonction en escalier non continue est intégrable. C'est faux.
2. Si $a=0$, $b=1$, $f(x)=0$ pour $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2},1\right]$ et $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$.
   Supposons qu'il existe une primitive de f sur $[0,1]$ qui vérifie, $F(1)=0$.
   Sur l'intervalle $\left[0,\frac{1}{2}\right[$, les primitives de la fonction continue f sont les constantes, $F(x)=k_1$.
   Sur l'intervalle $\left]\frac{1}{2},1\right]$, les primitives de la fonction continue f sont les constantes, $F(x)=k_2$.
   Pour que $F(1)=0$ on doit prendre $k_2=0$.
   Le problème est en $\frac{1}{2}$, on veut que
   $$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{F(x)-F\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}}=f\left(\frac{1}{2}\right)=1$$
   Si x tend vers $\frac{1}{2}$ avec $x>\frac{1}{2}$,
   $$\frac{F(x)-F\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}}=\frac{-F\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}}$$
   Lorsque x tend vers $\frac{1}{2}$, avec $x>\frac{1}{2}$, le dénominateur tend vers 0^+, comme le numérateur est constant donc la limite ne peut pas être égale à 1. (on aurait pu faire le même raisonnement sur $\left[0,\frac{1}{2}\right[$).
   C'est faux.
3. Soit F définie par
   $$F(x)=-\int_{x}^{b}f(t)dt$$
   $$F'(x)=-\big(-f(x)\big)=f(x)$$
   F est une primitive de f. De plus $F(b)=-\int_b^b f(t)dt=0$
   C'est vrai.
4. Soit F une primitive de f sur $[a,b]$, Soit $M=\sup_{x\in[a,b]}|F(x)|\geq 0$
   G définie par $G(x)=F(x)+2M+1$ est aussi une primitive de f
   $$-M\leq F(x)\leq M\Rightarrow M+1\leq F(x)+2M+1\leq 3M+1\Rightarrow 0<M+1\leq G(x)$$
   $G(x)$ n'est jamais nulle, c'est faux.
5. Par la définition une primitive de f sur $[a,b]$ est une fonction F qui vérifie $\forall x\in[a,b], F'(x)=f(x)$
   C'est vrai, et même sur $[a,b]$.
6. Soit f définie par $f(x)=\frac{1}{x}$ sur $]0,1[$. f est continue. Les primitives de f sont de la forme
   $$F(x)=\ln(x)+k,\quad k\in\mathbb{R}$$
   Ces fonctions ne sont même pas définies en 0, donc certainement pas continues.

Allez à : Exercice 3

Correction exercice 4.

1. Soit F une primitive de f sur $[a,b]$, Soit $M = \sup_{x\in[a,b]} |F(x)| \geq 0$
   G définie par $G(x) = F(x) - 2M - 1$ est aussi une primitive de f
   $$-M \leq F(x) \leq M \Rightarrow -3M - 1 \leq F(x) - 2M - 1 \leq -M - 1 \Rightarrow G(x) \leq -M - 1 < 0$$
   Donc c'est faux.

Remarque :

Il ne faut pas confondre avec le résultat suivant : Si $a < b$ et si $f(x) \leq 0$ sur $[a,b]$ alors
$$\int_a^b f(t)dt \leq 0$$

2. Soit F une primitive de f sur un intervalle I. $F'(x) = f(x) \leq 0$ donc F est décroissante.
   C'est vrai.
3. Si pour toute fonction F continue sur $[a,b]$, il existe f continue telle que $\forall x \in [a,b], F'(x) = f(x)$ cela pose un problème cela voudrait que toutes les fonctions continues sont de classes C^1, ce qui est faux, trouvons un contre-exemple.
   Soit $F(x) = |x|$ sur $[-1,1]$, autrement dit $F(x) = -x$ sur $[-1,0]$ et $F(x) = x$ sur $[0,1]$, cette fonction est continue, si $x < 0$, $F'(x) = -1$ et si $x > 0$, $F'(x) = 1$. Les limites à gauche et à droite de $F'(x)$ en 0 sont différentes donc F n'est même pas dérivable en 0, ce n'est pas la primitive d'une fonction continue.

Allez à : Exercice 4

Correction exercice 5.

1.

$\int_a^b f(t)\sin(nt)\,dt$	
$u'(t) = \sin(nt)$	$u(t) = -\frac{1}{n}\cos(nt)$
$v(t) = f(t)$	$v'(t) = f'(t)$
$\int_a^b f(t)\sin(nt)\,dt = \left[-\frac{1}{n}\cos(nt)\,f'(t)\right]_a^b -$	$\int_a^b \left(-\frac{1}{n}\cos(nt)\right) f'(t)dt$

$$\int_a^b f(t)\sin(nt)\,dt = \left[-\frac{1}{n}\cos(nt)\,f'(t)\right]_a^b + \frac{1}{n}\int_a^b \cos(nt)\,f'(t)dt$$
$$= -\frac{1}{n}\cos(nb)\,f'(b) + -\frac{1}{n}\cos(na)\,f'(a) + \frac{1}{n}\int_a^b \cos(nt)\,f'(t)dt$$
$$\left|\frac{1}{n}\int_a^b \cos(nt)\,f'(t)dt\right| \leq \frac{1}{n}\int_a^b |\cos(nt)\,f'(t)|dt \leq \frac{1}{n}\int_a^b |f'(t)|dt$$

Car $|f'|$ est continue donc intégrable.
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\int_a^b |f'(t)|dt = 0$$
Par conséquent
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\int_a^b \cos(nt)\,f'(t)dt = 0$$
Comme
$$\lim_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{n}\cos(nb)\,f'(b) + -\frac{1}{n}\cos(na)\,f'(a)\right) = 0$$
On a
$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin(nt)\,dt = 0$$

2.
$$\int_\alpha^\beta \sin(nt)\,dt = \left[-\frac{1}{n}\cos(nt)\right]_\alpha^\beta = -\frac{1}{n}\cos(n\beta) + -\frac{1}{n}\cos(n\alpha) \to 0$$
Soit χ une fonction en escalier sur $[a,b]$, il existe $t_0, t_1, \ldots, t_p$ et $y_0, y_1, \ldots, y_{p-1}$ tels que

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{p-1} < t_p = b$$

Les valeurs de χ en t_i n'ont pas d'importance.
Et

$$\forall i \in \{0,1,\dots,p-1\}, \forall t \in]t_i, t_{i+1}[, \chi(t) = y_i$$

Par conséquent

$$\int_a^b \chi(t)\sin(nt)\,dt = \sum_{i=0}^{p-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} y_i \sin(nt)\,dt = \sum_{i=0}^{p-1} y_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sin(nt)\,dt$$

$$= \sum_{i=0}^{p-1} y_i \left(-\frac{1}{n}\cos(nt_{i+1}) + \frac{1}{n}\cos(nt_i)\right) \to 0$$

Car une somme finie de termes qui tendent vers 0 tend vers 0.

3. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe une fonction en escalier χ telle que $\sup_{t\in[a,b]} |f(t) - \chi(t)| < \epsilon$

$$\left|\int_a^b \big(f(t) - \chi(t)\big)\sin(nt)\,dt\right| \le \int_a^b |f(t) - \chi(t)| \times |\sin(nt)| dt \le \int_a^b \epsilon dt = \epsilon(b-a)$$

Comme

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b \chi(t)\sin(nt)\,dt$$

Pour le ϵ choisit ci-dessus, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > N$

$$\left|\int_a^b \chi(t)\sin(nt)\,dt\right| < \epsilon$$

or

$$\int_a^b f(t)\sin(nt)\,dt = \int_a^b \big(f(t) - \chi(t) + \chi(t)\big)\sin(nt)\,dt$$

$$= \int_a^b \big(f(t) - \chi(t)\big)\sin(nt)\,dt + \int_a^b \chi(t)\sin(nt)\,dt$$

Donc

$$\left|\int_a^b f(t)\sin(nt)\,dt\right| \le \left|\int_a^b \big(f(t) - \chi(t)\big)\sin(nt)\,dt\right| + \left|\int_a^b \chi(t)\sin(nt)\,dt\right| \le \epsilon(b-a) + \epsilon$$

Cela montre bien que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin(nt)\,dt = 0$$

Allez à : Exercice 5

Correction exercice 6.

1. Pour tout $i = 1, \dots, n$, $]a_{i-1}, a_i[$ est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, il contient des rationnels donc un rationnel que l'on nomme x_i, par conséquent $f(x_i) = 1$ et des irrationnels donc un irrationnels (c'est-à-dire des éléments de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) que l'on nomme y_i par conséquent $f(y_i) = 0$.
2.

$$S_{D_1}(f) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(a_i - a_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1}) = (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \cdots + (a_n - a_{n-1})$$

$$= -a_0 + a_n = 0 + 1 = 1$$

$$S_{D_2}(f) = \sum_{i=1}^{n} f(y_i)(a_i - a_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} 0 \times (a_i - a_{i-1}) = 0$$

3.

$$L(f,D) = \sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-i}) \inf_{a_{i-1}\le x\le a_i} f(x) \le S_{D_2}(f) = 0 \Rightarrow \sup_D L(f,D) \le 0$$

$$U(f,D)=\sum_{i=1}^{n}(a_i-a_{i-i})\sup_{a_{i-1}\le x\le a_i}f(x)\ge S_{D_1}(f)=1\Rightarrow\inf_D U(f,D)\ge 1$$

$$\sup_D L(f,D)\neq\inf_D U(f,D)$$

f n'est pas intégrable.

Allez à : Exercice 6

Correction exercice 7.

1. Soit $D_1=\{a_0,a_1,\dots,a_n\}$ avec $\alpha=a_0<a_1<\dots<a_{n-1}<a_n=\beta$
   Soit $D_2=\{b_0,b_1,\dots,b_m\}$ avec $\alpha=b_0<b_1<\dots<b_{m-1}<b_m=\beta$
   Soient $x_0,x_1,\dots,x_{n-1}$ et $y_0,y_1,\dots,y_{m-1}$
   On définit deux fonctions en escalier
   $$\forall i\in\{1,2,\dots,n\},\forall x\in]a_{i-1},a_i[,\qquad f_1(x)=x_i$$
   $$\forall j\in\{1,2,\dots,m\},\forall x\in\left]b_{j-1},b_j\right[,\qquad f_2(x)=y_j$$
   Et peu importe les valeurs de f pour $x=a_i$ et de g pour $x=b_i$
   Soit $D=D_1\cup D_2$, il s'agit d'un ensemble fini donc il existe $c_0,c_1,\dots,c_p$ tels que $D=\{c_0,c_1,\dots,c_p\}$ et
   $$\alpha=c_0<c_1<\dots<c_p=\beta$$
   S'il existe $k\in\{1,2,\dots,p\}$ et $i_0\in\{1,2,\dots,n\}$ tels que $c_{k-1}<a_{i_0}<c_k$ il y a une contradiction car cela signifie que $a_{i_0}\notin D$ or $a_{i_0}\in D_1\subset D$. De même il n'existe pas de b_{j_0} entre deux c_k.
   Par conséquent pour tout $\in\{1,2,\dots,p\}$, il existe $i\in\{1,2,\dots,n\}$ $]c_{k-1},c_k[\subset]a_{k-1},a_k[$ et il existe $j\in\{1,2,\dots,m\}$ tel que $]c_{k-1},c_k[\subset\left]b_{j-1},b_j\right[$.
   On déduit de cela que pour tout $k\in\{1,2,\dots,p\}$ et pour tout $x\in]c_{k-1},c_k[$, $f_1(x)=x_i$ et $f_2(x)=y_j$ et donc
   $$f_1(x)f_2(x)=x_iy_j$$
   Cela montre que $f_1\times f_2$ est une fonction en escalier.
2. C'est faux, si on prend la fonction constante égale à 2 sur $[0,1]$, $\forall x\in[0,1],\ f(x)=2$
   $$f\circ f(x)=f\big(f(x)\big)=f(2)$$
   Mais f n'est pas définie pour $x=2$.

Allez à : Exercice 7

Correction exercice 8.

f est intégrable (donc bornée), pour tout $\epsilon>0$, il existe une fonction en escalier χ telle que
$$\sup_{[a,b]}|f(x)-\chi(x)|\le\epsilon$$
D'après l'inégalité triangulaire
$$\big||A|-|B|\big|\le|A-B|$$
Donc
$$\big||f(x)|-|\chi(x)|\big|\le|f(x)-\chi(x)|$$
Ce qui entraine que pour tout $\epsilon>0$, il existe une fonction en escalier (donc intégrable) telle que
$$\sup_{[a,b]}\big||f(x)|-|\chi(x)|\big|\le\sup_{[a,b]}|f(x)-\chi(x)|<\epsilon$$
Ce qui montre que $|f|$ est intégrable.

Allez à : Exercice 8

Correction exercice 9.

Remarque :

Une combinaison linéaire de fonctions continues et nulle en a est évidemment une fonction continue nulle en a donc $C_a([a,b])$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ (on aurait pu dire des fonctions définies sur $[a,b]$).
Une combinaison linéaire de fonction en escalier est évidemment une fonction continues par morceaux donc $\mathcal{E}_0$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$.
C'est ce qui justifie la question 1.

1. Il n'y a qu'à montrer que l'intersection est réduite au vecteur nulle (donc l'application nulle sur $[a,b]$ notée $\theta_{[a,b]}$). Soit $f \in C_a([a,b]) \oplus \mathcal{E}_0$
   Cette fonction est continue sur $[a,b]$ et $f(a) = 0$ d'une part et f est une fonction en escalier d'autre part.
   Une fonction continue et en escalier sur $[a,b]$ est constante (C'est assez évident pour pouvoir l'affirmer), comme $f(a) = 0$ cette constante est nulle, par conséquent $f = \theta_{[a,b]}$, on a bien
   $$C_a([a,b]) \cap \mathcal{E}_0 = \{\theta_{[a,b]}\}$$
2. On appelle E l'espaces de fonctions continues par morceaux, il faut montrer que
   $$C_a([a,b]) \oplus \mathcal{E}_0 = E$$

Remarque :

On ne peut pas utiliser le résultat sur les dimensions de $C_a([a,b])$ et de $\mathcal{E}_0$ car ces espaces vectoriels sont de dimension infini.
On va montrer que toute fonction f dans E se décompose en une somme d'une fonction g dans $C_a([a,b])$ et d'une fonction h dans $\mathcal{E}_0$ pour montrer que
$$C_a([a,b]) + \mathcal{E}_0 = E$$
Comme
$$C_a([a,b]) \cap \mathcal{E}_0 = \{\theta_{[a,b]}\}$$
On aura bien
$$C_a([a,b]) \oplus \mathcal{E}_0 = E$$

Allez à : Exercice 9

Première partie

On va d'abord considérer une fonction f qui n'admet qu'un point de discontinuité en $c \in [a,b]$.
Si $c \in]a,b[$. On appelle
$$f(c^-) = \lim_{x\to c^-} f(x) \quad \text{et} \quad f(c^+) = \lim_{x\to c^+} f(x)$$
$$g : x \in [a,b] \to \begin{cases} f(x) - f(a) & \text{si} \quad a \le x < c \\ f(c^-) - f(a) & \text{si} \quad x = c \\ f(x) + f(c^-) - f(c^+) - f(a) & \text{si} \quad c < x \le b \end{cases}$$
$$a \in [a,c[\Rightarrow g(a) = f(a) - f(a) = 0$$
$$\lim_{x\to c^-} g(x) = \lim_{x\to c^-} f(x) - f(a) = l_1 - f(a) = f(c)$$
$$\lim_{x\to c^+} g(x) = \lim_{x\to c^+} f(x) + f(c^-) - f(c^+) - f(a) = f(c^+) + f(c^-) - f(c^+) - f(a) = f(c^-) - f(a) = g(c)$$
g est continue en c, et pour $x \in [a,c[\cup]c,b]$ g est continue car f est continue sur $[a,c[$ et sur $]c,b]$.
Bref g est continue sur $[a,b]$ et $g(a) = 0$, autrement dit $g \in C_a([a,b])$.
Soit
$$h : [a,b] \to \begin{cases} f(a) & \text{si} \quad a \le x < c \\ f(a) - f(c^-) + f(c) & \text{si} \quad x = c \\ -f(c^-) + f(c^+) + f(a) & \text{si} \quad c \le x \le b \end{cases}$$
h est une fonction en escalier, $h \in E$.

$$\forall\in [a,b], g(x)+h(x)=\begin{cases} f(x)-f(a)+f(a) & \text{si} \quad a\le x<c \\ f(c^-)-f(a)+f(a)-f(c^-)+f(c) & \text{si} \quad x=c \\ f(x)+f(c^-)-f(c^+)-f(a)-f(c^-)+f(c^+)+f(a) & \text{si} \quad c<x\le b \end{cases}$$
$$=\begin{cases} f(x) & \text{si} \quad a\le x<c \\ f(c) & \text{si} \quad x=c \\ f(x) & \text{si} \quad c<x\le b \end{cases} = f(x)$$

On a montré l'existence de deux fonctions g dans $C_a([a,b])$ et d'une fonction h dans $\mathcal{E}_0$ telles que $f = g+h$.

C'est bien ce que l'on voulait.

Pour $c=a$ ou $c=b$ la méthode précédente ne marche pas tout-à-fait mais on peut l'adapter facilement.

Allez à : Exercice 9

Deuxième partie

On considère maintenant une fonction discontinue en deux points c et d, on appelle

$$f(d^-)=\lim_{x\to d^-} f(x) \qquad \text{et} \qquad f(d^+)=\lim_{x\to d^+} f(x)$$

$$g: x\in [a,b]\to \begin{cases} f(x)-f(a) & \text{si} \quad a\le x<c \\ f(c^-)-f(a) & \text{si} \quad x=c \\ f(x)+f(c^-)-f(c^+)-f(a) & \text{si} \quad c<x<d \\ f(d^-)+f(c^-)-f(c^+)-f(a) & \text{si} \quad x=d \\ f(x)+f(d^-)-f(d^+)+f(c^-)-f(c^+)-f(a) & \text{si} \quad d<x\le b \end{cases}$$

Et

$$h: [a,b]\to \begin{cases} f(a) & \text{si} \quad a\le x<c \\ f(a)-f(c^-)+f(c) & \text{si} \quad x=c \\ -f(c^-)+f(c^+)+f(a) & \text{si} \quad c<x<d \\ f(d)-f(d^-)-f(c^-)+f(c^+)+f(a) & \text{si} \quad x=d \\ -f(d^-)+f(d^+)-f(c^-)+f(c^+)+f(a) & \text{si} \quad d<x\le b \end{cases}$$

Je laisse au lecteur qui me lit encore le soin de vérifier que $g(a)=0$, que g est continue sur $[a,b]$, que h est une fonction en escalier (çà c'est trivial) et que $f=g+h$. Faire cela pour n points de discontinuités me parait bien compliqué à écrire, alors je vais faire une récurrence

Allez à : Exercice 9

Troisième partie

Soit f une fonction discontinue en n points notés $c_1<c_2<\cdots<c_n$, avec $a<c_1$ et $c_n<b$, on note

$$I_1=[a,c_1[;\ \ I_2=]c_1,c_2[;\dots;I_n=]c_{n-1},c_n[;I_{n+1}=]c_n,b]$$
$$\forall i\in\{1,n+1\},\forall x\in [a,b], f_i(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x\in I_i \\ 0 & \text{si} \quad x\notin I_i \end{cases}$$

Et f_i est nulle aux points de discontinuités (c'est juste pour simplifier la fin du raisonnement, on pourrait donner n'importe quelle valeurs aux points de discontinuités).

Toutes ces fonctions sont continues par morceaux.

Supposons que pour tout $k\in\{1,\dots,n+1\}$, $f_1+\cdots+f_k$ est la somme d'une fonction $g_k\in C_a([a,b])$ et d'une fonction $h_k\in E$ telles que $f_1+\cdots+f_k=g_k+h_k$, on appelle (H_k) cette proposition

f_1 est une fonction continue par morceaux, avec un seul point de discontinuité en c_1, d'après la première partie il existe deux fonctions g_1 dans $C_a([a,b])$ et d'une fonction h_1 dans $\mathcal{E}_0$ telles que $f_1=g_1+h_1$.

Montrons que (H_k) entraine (H_{k+1})

$$f_1+\cdots+f_k+f_{k+1}=(f_1+\cdots+f_k)+f_{k+1}$$

D'après (H_k) $f_1+\cdots+f_k=g_k+h_k$ où fonction $g_k\in C_a([a,b])$ et d'une fonction $h_k\in E$.

$$f_1+\cdots+f_k+f_{k+1}=g_k+h_k+f_{k+1}=(g_k+f_{k+1})+h_k$$

g_k+f_{k+1} est la somme d'une fonction continue et d'une fonction continue par morceaux, c'est donc une fonction continue par morceaux, f_{k+1} est discontinue en c_{k-1} et en c_k, donc g_k+f_{k+1} aussi, d'après la deuxième partie, on en déduit que g_k+f_{k+1} est la somme d'une fonction g_{k+1} continue sur $[a,b]$, nulle en a, et d'une fonction h_{k+1} en escalier,

$$f_1+\cdots+f_k+f_{k+1}=(g_k+f_{k+1})+h_k=g_{k+1}+h_{k+1}$$

La récurrence est montrée, on l'applique à $k=n+1$

$$f_1+\cdots+f_{n+1}=g_{n+1}+h_{n+1}$$

On a presque fini, pour tout $x\in[a,b]$, avec $x\neq c_i$ on a

$$f(x)=f_1(x)+\cdots+f_{n+1}(x)$$

Soit H la fonction définie par

$$\begin{cases}H(x)=0 \quad \text{si} \quad x\neq c_i\\ H(c_i)=f(c_i)\end{cases}$$

Donc pour tout $x\in[a,b]$

$$f(x)=g_{n+1}(x)+h_{n+1}(x)+H(x)$$

$h_{n+1}+H$ est une fonction en escalier et g_{n+1} est continue sur $[a,b]$ et nulle en a. C'est fini, il ne reste plus qu'à conclure. On vient de montrer que

$$C_a([a,b])+\mathcal{E}_0=E$$

Comme

$$C_a([a,b])\cap\mathcal{E}_0=\{\theta_{[a,b]}\}$$

On a bien

$$C_a([a,b])\oplus\mathcal{E}_0=E$$

Allez à : Exercice 9

Correction exercice 10.

Remarque préliminaire, si f est intégrable

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx$$

$$S_{1,n}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n+k}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Avec $f(x)=\frac{1}{1+x}$ donc

$$\lim_{n\to+\infty}S_{1,n}=\int_0^1\frac{dx}{1+x}=[\ln(1+x)]_0^1=\ln(2)-\ln(1)=\ln(2)$$

$$S_{2,n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{(n+k)^2}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Avec $f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$, donc

$$\lim_{n\to+\infty}S_{2,n}=\int_0^1\frac{dx}{(1+x)^2}=\left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^1=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$$

Dans cet exercice k ne varie pas de 0 (ou 1) à $n-1$ (ou n), il faut faire attention.

On pose $k'=k-n\Leftrightarrow k=k'+n$

$$k=n\Rightarrow k'=0$$

$$k=2n-1\Rightarrow k'=n-1$$

$$S_{3,n}=n\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{1}{k^2}=n\sum_{k'=0}^{n-1}\frac{1}{(k'+n)^2}$$

Ensuite rien n'empêche de renommer k' en k.

$$S_{3,n}=n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(k+n)^2}=n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n^2\left(\frac{k}{n}+1\right)^2}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\left(\frac{k}{n}+1\right)^2}=S_{2,n}$$

$$\lim_{n\to+\infty}S_{3,n}=\frac{1}{2}$$

$$S_{4,n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{2k}{n}\right)}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+2\frac{k}{n}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Avec $f(x)=\frac{1}{1+2x}$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} S_{4,n} = \int_0^1 \frac{dx}{1+2x} = \left[\frac{1}{2}\ln(1+2x)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln(3) - \frac{1}{2}\ln(1) = \ln(\sqrt{3})$$

Dans cet exercice k ne varie pas de 0 (ou 1) à $n-1$ (ou n), il faut faire attention.

$$S_{5,n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{k^2+n^2} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{n^2\left(\frac{k^2}{n^2}+1\right)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} \frac{\frac{k}{n}}{\frac{k^2}{n^2}+1}$$

Allez à : Exercice 10

Première méthode :

Attention cette dernière expression ne donne rien, si on coupe l'intervalle $[0,1]$ en n segments égaux la somme doit aller de 0 (ou 1) à $n-1$ (ou n) cela ne va pas, si on coupe l'intervalle $[0,2]$ en n segments égaux le pas de la subdivision est $\frac{2}{n}$ cela ne va pas non plus car on devrait voir apparaitre $f\left(\frac{2k}{n}\right)$ dans la somme , si on coupe l'intervalle $[0,2]$ en $2n$ segments égaux le pas de la subdivision le pas est $\frac{k}{n}$ et la somme va de 0 (ou 1) à $2n-1$ (ou $2n$), c'est mieux mais le « $\frac{b-a}{n}$ » devant la somme devient $\frac{b-a}{2n} = \frac{2-0}{2n} = \frac{1}{n}$,

$$S_{5,n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} \frac{\frac{k}{n}}{\frac{k^2}{n^2}+1} \to \int_0^2 \frac{xdx}{x^2+1} = \frac{1}{2}[\ln(1+x^2)]_0^2 = \frac{1}{2}\ln(5) - \frac{1}{2}\ln(1) = \ln(\sqrt{5})$$

Allez à : Exercice 10

Deuxième méthode

On coupe l'intervalle $[0,1]$ en $2n$ segments égaux, le pas de la subdivision est $\frac{1}{2n}$, il faut arranger la forme de cette somme :

$$S_{5,n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} \frac{\frac{k}{n}}{\frac{k^2}{n^2}+1} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} \frac{2\times\frac{k}{2n}}{4\times\left(\frac{k}{2n}\right)^2+1}$$

Le « $\frac{b-a}{n}$ » devant la somme devient $\frac{b-a}{2n} = \frac{1-0}{2n} = \frac{1}{2n}$

$$S_{5,n} = \frac{1}{n}\times\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2n} \frac{\frac{k}{2n}}{\left(\frac{k}{2n}\right)^2+\frac{1}{4}} = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} \frac{\frac{k}{2n}}{\left(\frac{k}{2n}\right)^2+\frac{1}{4}} \to \int_0^1 \frac{xdx}{x^2+\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\left[\ln\left(x^2+\frac{1}{4}\right)\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{4}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{4}\times 4\right) = \ln(\sqrt{5})$$

$$S_{6,n} = \sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{n-k}{n^3+n^2k}} = \sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{n\left(1-\frac{k}{n}\right)}{n^3\left(1+\frac{k}{n}\right)}} = \sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{1-\frac{k}{n}}{n^2\left(1+\frac{k}{n}\right)}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{1-\frac{k}{n}}{1+\frac{k}{n}}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Avec $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

$$\lim_{n\to+\infty} S_{6,n} = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$$

On fait le changement de variable.

$$t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \Leftrightarrow t^2 = \frac{1-x}{1+x} \Leftrightarrow t^2(1+x) = 1-x \Leftrightarrow t^2+xt^2 = 1-x \Leftrightarrow x+xt^2 = 1-t^2$$

$$\Leftrightarrow x(1+t^2) = 1-t^2 \Leftrightarrow x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \Rightarrow dx = \frac{-2t(1-t^2)-(1+t^2)2t}{(1+t^2)^2} = \frac{-4t}{(1+t^2)^2}$$

$$x = 0 \Rightarrow t = 1$$

$$x = 1 \Rightarrow t = 0$$

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = \int_1^0 t \times \frac{-4t}{(1+t^2)^2}dt = \int_0^1 \frac{4t^2}{(1+t^2)^2}dt$$

On décompose cette fraction en éléments simples

$$\frac{4t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{at+b}{1+t^2} + \frac{ct+d}{(1+t^2)^2}$$

Une petite ruse permet de ne pas se fatiguer

$$\frac{4t^2}{(1+t^2)^2} = 4\frac{t^2+1-1}{(1+t^2)^2} = 4\left(\frac{1}{t^2+1} - \frac{1}{(1+t^2)^2}\right)$$

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = 4\int_0^1 \left(\frac{1}{t^2+1} - \frac{1}{(1+t^2)^2}\right)dt = 4[\arctan(t)]_0^1 - 4\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^2}$$

$$= \pi - 4\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^2}$$

Dans cette dernière intégrale on fait le changement de variable $t = \tan(\theta) \Leftrightarrow \theta = \arctan(t)$

$$dt = (1+\tan^2(\theta))d\theta$$

$$t = 0 \Rightarrow \theta = \arctan(0) = 0$$

$$t = 1 \Rightarrow \theta = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1+\tan^2(\theta))d\theta}{\left((1+\tan^2(\theta))\right)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{1+\tan^2(\theta)} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(\theta)\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}(1+\cos(2\theta))d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left[\theta + \frac{1}{2}\sin(2\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\sin\left(2\times\frac{\pi}{4}\right) - 0 - \frac{1}{2}\sin(0)\right) = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$$

Et enfin

$$\lim_{n\to+\infty} S_{6,n} = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = \pi - 4\left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - 1$$

Allez à : Exercice 10

Correction exercice 11.

Pour $t \in [0,1[$, $t^n \to 0$ donc $\frac{e^t}{1+t^n} \to e^t$ mais on n'a pas le droit d'écrire

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{e^t}{1+t^n}dt = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} \frac{e^t}{1+t^n}dt = \int_0^1 e^t dt = e - 1$$

Mais on va essayer de le montrer, c'est un peu technique.

Pour tout $\epsilon > 0$

$$\left|\int_0^1 \frac{e^t}{1+t^n}dt - \int_0^1 e^t dt\right| = \left|\int_0^1 \left(\frac{e^t}{1+t^n} - e^t\right)dt\right| = \left|\int_0^1 \frac{t^n e^t}{1+t^n}dt\right|$$

$$= \left|\int_0^{1-\frac{\epsilon}{2e}} \frac{t^n e^t}{1+t^n}dt + \int_{1-\frac{\epsilon}{2e}}^1 \frac{t^n e^t}{1+t^n}dt\right| \le \left|\int_0^{1-\frac{\epsilon}{2e}} \frac{t^n e^t}{1+t^n}dt\right| + \left|\int_{1-\frac{\epsilon}{2e}}^1 \frac{t^n e^t}{1+t^n}dt\right|$$

Dans la première intégrale on majore t^n par $\left(1-\frac{\epsilon}{2e}\right)^n$, e^t par e et au dénominateur on minore $t^n + 1$ par 1.

$$\left|\int_0^{1-\frac{\epsilon}{2e}} \frac{t^n e^t}{1+t^n}dt\right| \le \int_0^{1-\frac{\epsilon}{2e}} \frac{\left(1-\frac{\epsilon}{2e}\right)^n e}{1}dt = \left(1-\frac{\epsilon}{2e}\right)^{n+1} e$$

Dans la seconde intégrale on majore t^n par 1, e^t par e et au dénominateur on minore $1 + t^n$ par 1

$$\left|\int_{1-\frac{\epsilon}{2e}}^1 \frac{t^n e^t}{1+t^n}dt\right| \le \int_{1-\frac{\epsilon}{2e}}^1 \frac{e}{1}dt = e\left(1-\left(1-\frac{\epsilon}{2e}\right)\right) = \frac{\epsilon}{2}$$

Ensuite on choisit n telle que

$$\left(1-\frac{\epsilon}{2e}\right)^{n+1} e \leq \frac{\epsilon}{2}$$

Comme $0 < 1 - \frac{\epsilon}{2e} < 1$ (On a choisit ϵ pour qu'il soit aussi petit que possible donc on peut s'arranger pour que $0 < 1 - \frac{\epsilon}{2e}$) par conséquent

$$\left(1-\frac{\epsilon}{2e}\right)^{n+1} \to_{n\to+\infty} 0$$

Ensuite on choisit $N \in \mathbb{N}$ telle que pour tout $n > N$

$$\left(1-\frac{\epsilon}{2e}\right)^{n+1} e \leq \frac{\epsilon}{2}$$

On reprend les majorations et pour tout $\epsilon > 0$, il existe N, tel que pour tout $n > N$

$$\left|\int_0^1 \frac{e^t}{1+t^n}dt - \int_0^1 e^t dt\right| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

C'est la définition de la limite

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{e^t}{1+t^n}dt = \int_0^1 e^t dt = [e^t]_0^1 = e - 1$$

Allez à : Exercice 11

Correction exercice 12.

1. $I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt = \int_0^1 1 \times (1-t^2)^n dt$

$\int_0^1 1 \times (1-t^2)^n dt$	
$u'(t) = 1$	$u(t) = t$
$v(t) = (1-t^2)^n$	$v'(t) = -2nt(1-t^2)^{n-1}$
$\int_0^1 (1-t^2)^n dt = [t(1-t^2)^n]_0^1 -$	$\int_0^1 t(-2nt(1-t^2)^{n-1})dt$

Pour $n \geq 1$, $[t(1-t^2)^n]_0^1 = 0$

$$I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt = -2n\int_0^1 (-t^2)(1-t^2)^{n-1}dt = t(1-t^2)^n - 2n\int_0^1 (1-t^2-1)(1-t^2)^{n-1}dt$$

$$= -2n\int_0^1 (1-t^2)(1-t^2)^{n-1}dt + 2n\int_0^1 (1-t^2)^{n-1}dt = -2nI_n + 2nI_{n-1}$$

Donc

$$(2n+1)I_n = 2nI_{n-1} \Leftrightarrow I_n = \frac{2n}{2n+1}I_{n-1}$$

C'est raté, cela donne une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1}, ce n'est pas grave, pour $n \geq 0$:

$$I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3}I_n$$

2.

$$I_n = \frac{2n}{2n+1}I_{n-1} = \frac{2n}{2n+1} \times \frac{2n-2}{2n-1}I_{n-2} = \frac{2n}{2n+1} \times \frac{2n-2}{2n-1} \times \frac{2n-4}{2n-3}I_{n-3}$$

Montrons par récurrence que pour tout $k \in \{1,2,\dots,n\}$

$$I_n = \frac{2n}{2n+1} \times \dots \times \frac{2n-2k+2}{2n-2k+3}I_{n-k}$$

Or

$$I_{n-k} = \frac{2(n-k)}{2(n-k)+1}I_{n-k-1} = \frac{2n-2k}{2n-2k+1}I_{n-k-1}$$

Donc

$$I_n = \frac{2n}{2n+1} \times \dots \times \frac{2n-2k+2}{2n-2k+3} \times \frac{2n-2k}{2n-2k+1}I_{n-k-1}$$

On prend $k = n$

$$I_n = \frac{2n}{2n+1} \times \frac{2n-2}{2n-1} \times \frac{2n-4}{2n-3} \times \dots \times \frac{2}{3}I_0$$

Et

$$I_0 = \int_0^1 (1-t^2)^0 dt = 1$$
$$I_n = \frac{2n}{2n+1} \times \frac{2n-2}{2n-1} \times \frac{2n-4}{2n-3} \times \dots \times \frac{2}{3}$$
Pour faire joli :
$$I_n = \frac{[2n \times 2(n-1) \times 2(n-2) \times \dots \times 2 \times 1]^2}{(2n+1)\times(2n)\times(2n-1)\times(2n-2)\times(2n-3)\times\dots\times 3\times 2} = \frac{[2^n \times n!]^2}{(2n+1)!} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$
En multipliant en haut et en bas par :
$$2n \times 2(n-1) \times 2(n-2) \times \dots \times 2(1) = 2n \times (2n-2) \times (2n-4) \times \dots \times 2$$

3.
$$\int_0^1 (1-t^2)^n dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k}(-t^2)^k\, dt = \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} \int_0^1 (-t^2)^k dt \right) = \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} (-1)^k \int_0^1 t^{2k} dt \right)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} (-1)^k \left[\frac{t^{2k+1}}{2k+1} \right]_0^1 \right) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k} \right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k}$$
D'après 2.
$$I_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

Allez à : Exercice 12

Correction exercice 13.

1. Le problème est qu'apparemment il n'y a qu'une fonction, si on fait comme « d'habitude » c'est-à-dire que l'on intègre le « 1 » on va faire apparaître un « t » qui ne donnera rien de bon, la bonne idée c'est d'écrire I_{n+2} de la façon suivante :
$$I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) \sin^{n+1}(t)\, dt$$

$I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) \sin^{n+1}(t)\, dt$	
$u'(t) = \sin(t)$	$u(t) = -\cos(t)$
$v(t) = \sin^{n+1}(t)$	$v'(t) = (n+1)\sin^n(t)\cos(t)$
$I_n = [-\cos(t)\sin^{n+1}(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} -$	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos(t))(n+1)\sin^n(t)\cos(t)\, dt$

$$I_{n+2} = [-\cos(t)\sin^{n+1}(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\cos^2(t)\, dt$$
$$= -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin^{n+1}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos(0)\sin^{n+1}(0) + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\left(1-\sin^2(t)\right)dt$$
$$= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\, dt - (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2}(t)\, dt = (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2}$$
Donc
$$(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n \Rightarrow I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$$

2. On pose $n = 2p-2$,
$$I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} I_{2p-2} = \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p-3}{2p-2} I_{2p-4} = \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p-3}{2p-2} \times \dots \times \frac{1}{2} I_0$$
En fait il faudrait faire une récurrence (mais c'est assez évident).
Et
$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0(t)\ dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}$$

$$I_{2p}=\frac{2p-1}{2p}\times\frac{2p-3}{2p-2}\times\dots\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}$$

On pose $n=2p-1$

$$I_{2p+1}=\frac{2p}{2p+1}I_{2p-1}=\frac{2p}{2p+1}\times\frac{2p-2}{2p-1}I_{2p-3}=\frac{2p}{2p+1}\times\frac{2p-2}{2p-1}\times\dots\times\frac{2}{3}I_1$$

Et

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^1(t)\ dt=[-\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}}=-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\cos(0)=1$$

$$I_{2p+1}=\frac{2p}{2p+1}\times\frac{2p-2}{2p-1}\times\dots\times\frac{2}{3}$$

3. Pour $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

$$0\le\sin(t)\le1\Rightarrow0\le\sin^{n+1}(t)\le\sin^n(t)$$

En intégrant entre 0 et $\frac{\pi}{2}$

$$0<I_{n+1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1}(t)\,dt<I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n(t)\,dt$$

Ce qui montre que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive et décroissante.

4. On déduit de la question précédente que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente (décroissante et minorée par 0). Si cette limite est non nulle, c'est fini, $I_n\sim l$ et $I_{n+1}\sim l$ entraine que $I_n\sim I_{n+1}$, seulement voilà pour l'instant rien n'empêche cette limite d'être nulle, auquel cas on ne peut pas conclure que $I_n\sim 0$, et au point où j'en suis j'ai bien l'impression que la limite est nulle (mais rien ne me permet de l'affirmer !).

Reprenons l'égalité $I_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}I_n$

$$0<I_{n+2}<I_{n+1}<I_n\Rightarrow0<\frac{n+1}{n+2}I_n<I_{n+1}<I_n\Rightarrow0<\frac{n+1}{n+2}<\frac{I_{n+1}}{I_n}<1$$

En faisant tendre n vers l'infini on trouve que :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{I_{n+1}}{I_n}=1$$

Autrement dit $I_{n+1}\sim I_n$

Remarque :

On ne connait toujours pas la valeur de la limite.

5. On ne connait que I_{2p} et I_{2p+1}, alors on va envisager deux cas, $n=2p$, puis $n=2p-1$.

$n=2p$

$$nI_nI_{n+1}=2pI_{2p}I_{2p+1}=2p\times\left(\frac{2p-1}{2p}\times\frac{2p-3}{2p-2}\times\dots\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\right)\times\left(\frac{2p}{2p+1}\times\frac{2p-2}{2p-1}\times\dots\times\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}\right)$$
$$=\frac{2p}{2p+1}\times\frac{\pi}{2}=\frac{n}{n+1}\times\frac{\pi}{2}$$

$n=2p-1$

$$nI_nI_{n+1}=(2p-1)I_{2p-1}I_{2p}$$
$$=(2p-1)\times\left(\frac{2p-2}{2p-1}\times\dots\times\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{2p-1}{2p}\times\frac{2p-3}{2p-2}\times\dots\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=\frac{2p-1}{2p}\times\frac{\pi}{2}=\frac{n}{n+1}\times\frac{\pi}{2}$$

Donc

$$nI_nI_{n+1}=\frac{n}{n+1}\times\frac{\pi}{2}$$

6.

$$nI_nI_{n+1}\sim nI_n^2\qquad et\qquad\frac{n}{n+1}\times\frac{\pi}{2}\sim\frac{\pi}{2}$$

Donc

$$I_n^2 \sim \frac{\pi}{2n} \Rightarrow I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

Car $I_n > 0$.

Remarque :

J'ai bien eu raison de me méfier parce que la limite de I_n est bien nulle. (En fait, je le savais mais je ne vous l'avais pas dit pour ménager le suspense).

Commentaires :

Ces intégrales sont connues sous le nom de « intégrales de Wallis »

Allez à : Exercice 13

Correction exercice 14.

1. Il faut majorer $\frac{x^n}{1+x}$, il y a deux options, soit majorer le numérateur, soit minorer le dénominateur, et on doit pouvoir trouver une primitive du majorant. $x^n \leq 1$, je ne vois pas mieux, et alors
$$0 \leq \frac{x^n}{1+x} \leq \frac{1}{1+x} \Rightarrow 0 < \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx < \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2)$$
Et là on est coincé, il n'y a plus de n, et la valeur à gauche et à droite sont distinctes cela ne donne rien.
On va minorée le dénominateur $\frac{1}{1+x^2}$, il y a deux possibilités :
Pour tout $n \geq 0$
$$0 \leq \frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{1+0} = 1 \Rightarrow 0 < I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx < \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1} \to 0$$
Donc $I_n \to 0$
Ou
Pour tout $n \geq 1$
$$0 \leq \frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{0+x} = \frac{1}{x} \Rightarrow 0 < I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx < \int_0^1 \frac{x^n}{x} dx = \int_0^1 x^{n-1} dx = \left[\frac{x^n}{n}\right]_0^1 = \frac{1}{n} \to 0$$
Donc $I_n \to 0$
Je préfère la première possibilité, mais les deux marchent.
2.
$$I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx + \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+1}}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^n(1+x)}{1+x} dx = \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$
3.
$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k = 1 - x + x^2 + \cdots + (-x)^{n-1} = \frac{1-(-x)^n}{1+x} = \frac{1}{1+x} + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{1+x}$$
En intégrant entre 0 et 1.
$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k \, dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x} + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{1+x}\right) dx$$
$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_0^1 x^k dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$$
$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 = [\ln(1+x)]_0^1 + (-1)^{n+1} I_n$$
$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) - (-1)^{n+1} I_n$$
Or

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k+1}=\frac{(-1)^0}{0+1}+\frac{(-1)^1}{1+1}+\frac{(-1)^2}{2+1}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n-1+1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

Donc

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}=\ln(2)+(-1)^{n+1}I_n\to\ln(2)$$

Allez à : Exercice 14

Correction exercice 15.

1.

$$I_0=\int_1^e dt=e-1$$

$$I_1=\int_1^e 1\times\ln(t)\,dt$$

A l'aide d'une intégration par partie

$I_1=\int_1^e 1\times\ln(t)\,dt$	
$u'(t)=1$	$u(t)=t$
$v(t)=\ln(t)$	$v'(t)=\frac{1}{t}$
$I_1=\int_1^e\ln(t)\,dt=[t\ln(t)]_1^e-$	$\int_1^e dt$

$$I_1=e\ln(e)-\ln(1)-(e-1)=1$$

2. pour $n\geq 1$

$I_n=\int_1^e 1\times(\ln(t))^n dt$	
$u'(t)=1$	$u(t)=t$
$v(t)=(\ln(t))^n$	$v'(t)=\frac{n}{t}(\ln(t))^{n-1}$
$I_n=\int_1^e(\ln(t))^n dt=[t(\ln(t))^n]_1^e-$	$n\int_1^e(\ln(t))^{n-1}dt$

$$I_n=e-nI_{n-1}$$

Pour $n\geq 2$

$$I_n=e-nI_{n-1}=e-n(e-(n-1)I_{n-2})=e(1-n)+n(n-1)I_{n-2}$$

3.

$$I_n=e(1-n)+n(n-1)I_{n-2}=e(1-n)+n(n-1)(e-(n-2)I_{n-3})$$
$$=e\big(1-n+n(n-1)\big)-n(n-1)(n-2)I_{n-3}$$
$$=e\big(1-n+n(n-1)\big)+(-1)^3\frac{n!}{(n-2)!}I_{n-3}$$

Montrons par récurrence sur k que

$$I_n=e\big(1-n+n(n-1)-\cdots+(-1)^{k-1}n(n-1)\dots(n-k+2)\big)+(-1)^k\frac{n!}{\big(n-(k-1)\big)!}I_{n-k}$$

$$I_n=e\big(1-n+n(n-1)-\cdots+(-1)^{k-1}n(n-1)\dots(n-k+2)\big)$$
$$+(-1)^k\frac{n!}{\big(n-(k-1)\big)!}\big(e-(n-k)I_{n-(k+1)}\big)$$

$$=e\left(1-n+n(n-1)-\cdots+(-1)^{k-1}n(n-1)\dots(n-k+2)+(-1)^k\frac{n!}{\big(n-(k-1)\big)!}(n-k)\right)$$
$$-(-1)^k\frac{n!}{\big(n-(k-1)\big)!}(n-k)I_{n-(k+1)}$$

$$= e\left(1 - n + n(n-1) - \cdots + (-1)^{k-1}n(n-1)\dots(n-k+2) + (-1)^k \frac{n!}{(n-(k-1))!}(n-k)\right)$$
$$- (-1)^k \frac{n!}{(n-(k-1))!}(n-k)I_{n-(k+1)}$$

Allez à : Exercice 15

Correction exercice 16.

Il faut écrire $\frac{1}{\cos^n(u)}$ en produit de deux fonctions donc on connait une primitive de l'une de ces fonctions. Pour $n \geq 2$.

$$\frac{1}{\cos^n(u)} = \frac{1}{\cos^2(u)} \times \frac{1}{\cos^{n-2}(u)}$$

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2(u)} \times \frac{1}{\cos^{n-2}(u)} du$	
$f'(u) = \frac{1}{\cos^2(u)}$	$f(u) = \tan(u)$
$g(u) = \frac{1}{\cos^{n-2}(u)} = \cos^{-n+2}(u)$	$g'(u) = (-n+2)\cos^{-n+1}(u)\,(-\sin(u))$
$I_n = \left[\frac{\tan(u)}{\cos^{n-2}(u)}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} -$	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(u)(-n+2)\cos^{-n+1}(u)\,(-\sin(u))du$

$$I_n = \left[\frac{\tan(u)}{\cos^{n-2}(u)}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(u)(-n+2)\cos^{-n+1}(u)\,(-\sin(u))du$$
$$= \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos^{n-2}\left(\frac{\pi}{4}\right)} + (-n+2)\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2(u)}{\cos(u)} \frac{1}{\cos^{n-1}(u)} du$$
$$= \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos^{n-2}\left(\frac{\pi}{4}\right)} + (-n+2)\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2(u)}{\cos^n(u)} du = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-2}} - (n-2)\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos^2(u)}{\cos^n(u)} du$$
$$= \left(\sqrt{2}\right)^{n-2} - (n-2)\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos^2(u)}{\cos^n(u)} du$$
$$= \left(\sqrt{2}\right)^{n-2} - (n-2)\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^n(u)} du - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^{n-2}(u)} du\right]$$
$$= \left(\sqrt{2}\right)^{n-2} - (n-2)[I_n - I_{n-2}] = \left(\sqrt{2}\right)^{n-2} - (n-2)I_n + (n-2)I_{n-2}$$

Donc

$$(n-1)I_n = \left(\sqrt{2}\right)^{n-2} + (n-2)I_{n-2}$$

Par récurrence approximative

$$I_n = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^{n-2}}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}I_{n-2}$$

$$I_n = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^{n-2}}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\left(\frac{\left(\sqrt{2}\right)^{n-4}}{n-3} + \frac{n-4}{n-3}I_{n-4}\right) = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^{n-2}}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \times \frac{\left(\sqrt{2}\right)^{n-4}}{n-3} + \frac{n-2}{n-1} \times \frac{n-4}{n-3}I_{n-4}$$

Si $n = 2p$, par une récurrence (que je n'ai pas envie de faire)

$$I_{2p} = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^{2p-2}}{2p-1} + \frac{2p-2}{2p-1} \times \frac{\left(\sqrt{2}\right)^{2p-4}}{2p-3} + \frac{2p-2}{2p-1} \times \frac{2p-4}{2p-3} \times \frac{\left(\sqrt{2}\right)^{2p-6}}{2p-5} + \cdots + \frac{2p-2}{2p-1} \times \frac{2p-4}{2p-3} \times \dots$$
$$\times \frac{2}{1} I_0$$

Avec

$$I_0=\int_0^{\frac{\pi}{4}}1\times du=\frac{\pi}{4}$$

Si $n=2p+1$, par une récurrence (que je n'ai pas envie de faire)

$$I_{2p+1}=\frac{\left(\sqrt{2}\right)^{2p-1}}{2p}+\frac{2p-1}{2p}\times\frac{\left(\sqrt{2}\right)^{2p-3}}{2p-2}+\frac{2p-1}{2p}\times\frac{2p-3}{2p-2}\times\frac{\left(\sqrt{2}\right)^{2p-5}}{2p-4}+\cdots+\frac{2p-1}{2p}\times\frac{2p-3}{2p-2}\times\dots\times\frac{3}{2}I_1$$

Avec les règles de Bioche on voit que l'on peut faire le changement de variable $t=\sin(u)$

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{du}{\cos(u)}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos(u)\,du}{\cos^2(u)}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos(u)\,du}{1-\sin^2(u)}$$

On pose $t=\sin(u)\Rightarrow dt=\cos(u)\,du$

$$u=0\Rightarrow t=\sin(0)=0$$

$$u=\frac{\pi}{4}\Rightarrow t=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos(u)\,du}{1-\sin^2(u)}=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1}{1-t^2}dt=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\frac{\frac{1}{2}}{1-t}+\frac{\frac{1}{2}}{1+t}\right)dt=\frac{1}{2}[-\ln(1-t)+\ln(1+t)]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)-\ln\left(\frac{1}{1}\right)\right)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right)$$

Allez à : Exercice 16

Correction exercice 17.

$\int_1^e 1\times(\ln(u))^n du$	
$f'(u)=1$	$f(u)=u$
$g(u)=(\ln(u))^n$	$g'(u)=\frac{n(\ln(u))^{n-1}}{u}$
$J_n=[u\times(\ln(u))^n]_1^e-$	$\int_1^e u\times\frac{n(\ln(u))^{n-1}}{u}du$

$$J_n=[u\times(\ln(u))^n]_1^e-n\int_1^e(\ln(u))^{n-1}du=e\times(\ln(e))^n-1\times(\ln(1))^n-nJ_{n-1}=e-nJ_{n-1}$$

$$\begin{aligned}J_n=e-nJ_{n-1}&=e-n(e-(n-1)J_{n-2})=e(1-n)+n(n-1)J_{n-2}\\&=e(1-n)+n(n-1)(e-(n-2)J_{n-3}\\&=e\big(1-n+n(n-1)\big)-n(n-1)(n-2)J_{n-3}\\&=e\left(\frac{n!}{0!}-\frac{n!}{1!}+\frac{n!}{2!}\right)+(-1)^3n(n-1)(n-2)J_{n-3}\\&=e\left(\frac{n!}{n!}-\frac{n!}{(n-1)!}+\frac{n!}{(n-2)!}\right)+(-1)^3\frac{n!}{(n-3)!}J_{n-3}\end{aligned}$$

Montrons par récurrence sur k que :

$$J_n=e\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\frac{n!}{(n-i)!}+(-1)^k\frac{n!}{(n-k)!}J_{n-k}$$

Pour $k=1$, c'est l'égalité $J_n=e-nJ_{n-1}$.

Si

$$J_n=e\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\frac{n!}{(n-i)!}+(-1)^k\frac{n!}{(n-k)!}J_{n-k}$$

Alors, comme $J_{n-k}=e-(n-k)J_{n-k-1}$

$$J_n=e\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\frac{n!}{(n-i)!}+(-1)^k\frac{n!}{(n-k)!}\big(e-(n-k)J_{n-k-1}\big)$$
$$=e\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\frac{n!}{(n-i)!}+(-1)^{k+1}\frac{n!}{(n-k-1)!}J_{n-k-1}$$
$$=e\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\frac{n!}{(n-i)!}+(-1)^{k+1}\frac{n!}{\big(n-(k+1)\big)!}J_{n-(k+1)}$$

La relation est vérifiée donc elle est vraie pour tout k, appliquons ce résultat à $k=n$

$$J_n=e\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\frac{n!}{(n-i)!}+(-1)^n\frac{n!}{(n-k)!}J_{n-n}=e\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\frac{n!}{(n-i)!}+(-1)^n\frac{n!}{(n-n)!}J_0$$

Avec $J_0=\int_1^e 1\times du=e-1$

$$J_n=e\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\frac{n!}{(n-i)!}+(-1)^n\frac{n!}{(n-k)!}J_{n-n}=e\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\frac{n!}{(n-i)!}+(-1)^n\frac{n!}{(n-n)!}(e-1)$$
$$=e\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\frac{n!}{(n-i)!}+(-1)^{n+1}n!$$

Allez à : Exercice 17

Correction exercice 18.

1.

$$u=-t\Leftrightarrow t=-u\Rightarrow dt=-du$$
$$t=-\pi\Rightarrow u=\pi$$
$$t=\pi\Rightarrow u-\!\!-\pi$$
$$f(t)=f(-u)=-f(u)$$
$$\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt=\int_{\pi}^{-\pi}\big(-f(u)\big)(-du)=\int_{\pi}^{-\pi}f(u)du=-\int_{-\pi}^{\pi}f(u)du=-\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt$$

Par conséquent

$$2\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt=0\Rightarrow\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt=0$$

2. f est continue et $x\to x+2\pi$ est dérivable donc F est dérivable.

$$F'(x)=f(x+2\pi)-f(x)=f(x)-f(x)=0$$

F' est nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$ donc F est constante.

3.

$$\int_{2\pi}^{4\pi}f(t)dt=F(2\pi)=F(-\pi)=\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt=0$$

La seconde égalité vient du fait que F est constante, la troisième vient du 1.

Allez à : Exercice 18

Correction exercice 19.

1. On pose $f(t)=\ln(1+t)$ pour tout $t>0$. Cette fonction est C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$, on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange à n'importe quel ordre, donc avec un reste à l'ordre 2.

$$f'(t)=\frac{1}{1+t}\qquad\text{et}\qquad f''(t)=-\frac{1}{(1+t)^2}$$

Il existe $c\in]0,t[$ tel que

$$f(t)=f(0)+tf'(0)+\frac{t^2}{2}f''(c)=t-\frac{t^2}{2}\times\frac{1}{(1+c)^2}$$

Il est clair que $f(t) < t$ et d'autre part

$$0 < c < t \Rightarrow 1 < 1 + c < 1 + t \Rightarrow 1 < (1 + c)^2 < (1 + t)^2 \Rightarrow \frac{1}{(1+t)^2} < \frac{1}{(1+c)^2} < 1 \Rightarrow \frac{-t^2}{2(1+t)^2}$$

$$> -\frac{t^2}{2}\frac{1}{(1+c)^2} > -\frac{t^2}{2} \Rightarrow t - \frac{-t^2}{2(1+t)^2} > t - \frac{t^2}{2}\frac{1}{(1+c)^2} > t - \frac{t^2}{2}$$

L'inégalité de droite montre que $\ln(1+t) > t - \frac{t^2}{2}$. On a donc montré les deux inégalités.

2. Pour tout $x \in \left]1, \sqrt{3}\right[$

$$1 < x < \sqrt{3} \Rightarrow 1 < x < x^2 < 3 \Rightarrow 0 < x - 1 < t < x^2 - 1 < 2$$

Comme $t - \frac{t^2}{2} = \frac{t}{2}(2 - t)$ est le produit de deux réels positifs ($t > 0$ et $2 - t > 0$), $t - \frac{t^2}{2} > 0$

$$0 < t - \frac{t^2}{2} < \ln(1+t) < t$$

$$\Rightarrow \frac{1}{t} < \frac{1}{\ln(1+t)} < \frac{1}{t - \frac{t^2}{2}}$$

$$\Rightarrow \int_{x-1}^{x^2-1} \frac{dt}{t} \leq \int_{x-1}^{x^2-1} \frac{dt}{\ln(1+t)} \leq \int_{x-1}^{x^2-1} \frac{dt}{t - \frac{t^2}{2}}$$

$$\Rightarrow [\ln(t)]_{x-1}^{x^2-1} \leq F(x) \leq \int_{x-1}^{x^2-1} \frac{-2}{t(t-2)} dt$$

$$\Rightarrow \ln(x^2 - 1) - \ln(x - 1) \leq F(x) \leq \int_{x-1}^{x^2-1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t-2}\right) dt$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{x^2 - 1}{x - 1}\right) \leq F(x) \leq [\ln(t) - \ln|t - 2|]_{x-1}^{x^2-1}$$

$$\Rightarrow \ln(x+1) \leq F(x) \leq \ln(x+1) - \ln|x^2 - 3| + \ln|x - 3| = \ln(1+x) + \ln\left(\frac{|x-3|}{|x^2-3|}\right)$$

Ce qui est bien l'inégalité demandée.

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \ln\left(\frac{|x-3|}{|x^2-3|}\right) = \ln\left(\frac{|-2|}{|-2|}\right) = \ln(1) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \ln(1+x) = \ln(2)$$

Par conséquent

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} F(x) = \ln(2)$$

3. Pour tout $x > 1$

$$F'(x) = \frac{2x}{\ln(1 + x^2 - 1)} - \frac{1}{\ln(1 + x - 1)} = \frac{2x}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln(x)} = \frac{2x}{2\ln(x)} - \frac{1}{\ln(x)} = \frac{x-1}{\ln(x)}$$

4. $x > 1$ entraine que $x - 1 > 0$ et que $\ln(x) > 1$, donc $F'(x) > 0$, F est une fonction strictement croissante sur $]1, +\infty[$ et $\lim_{x \to 1} F(x) = \ln(2)$, par conséquent, pour tout $x > 1$, on a $F(x) > \ln(2)$.

Allez à : Exercice 19

Correction exercice 20.

Première partie

1. Si $x > 1$ alors $x^2 > x$ et si $t \geq x > 1$ alors $\ln(t) > 0$ donc $f(x) > 0$
2.

$$t \to \frac{\ln(t)}{(t-1)^2}$$

Est continue et $x \to x^2$ est dérivable donc f est dérivable.

$$f'(x)=\frac{\ln(x^2)}{(x^2-1)^2}\times 2x-\frac{\ln(x)}{(x-1)^2}=\frac{4x\ln(x)}{(x-1)^2(x+1)^2}-\frac{\ln(x)}{(x-1)^2}$$
$$=\frac{\ln(x)}{(x-1)^2(x+1)^2}(4x-(x+1)^2)=\frac{\ln(x)}{(x-1)^2(x+1)^2}(4x-x^2-2x-1)$$
$$=-\frac{\ln(x)}{(x-1)^2(x+1)^2}(x^2-2x+1)=-\frac{\ln(x)}{(x+1)^2}$$

3.

a) La formule de Taylor Lagrange pour la fonction ln entre 1 et $t>1$ dit qu'il existe $c\in]1,t[$ tel que

$$\ln(t)=\ln(1)+(t-1)\ln'(1)+\frac{(t-1)^2}{2}\ln''(c)\Leftrightarrow \ln(t)=t-1-\frac{(t-1)^2}{2c^2}$$
$$1<c<t\Leftrightarrow 1<c^2<t^2\Leftrightarrow \frac{1}{t^2}<\frac{1}{c^2}<1\Leftrightarrow \frac{(t-1)^2}{2t^2}<\frac{(t-1)^2}{2c^2}<\frac{(t-1)^2}{2}$$
$$\Leftrightarrow -\frac{(t-1)^2}{2}<-\frac{(t-1)^2}{2c^2}<-\frac{(t-1)^2}{2t^2}\Leftrightarrow t-1-\frac{(t-1)^2}{2}<t-1-\frac{(t-1)^2}{2c^2}$$
$$<t-1-\frac{(t-1)^2}{2t^2}\Leftrightarrow t-1-\frac{(t-1)^2}{2}<\ln(t)<t-1-\frac{(t-1)^2}{2t^2}$$

Comme $t-1-\frac{(t-1)^2}{2t^2}<t-1$, on a bien

$$t-1-\frac{(t-1)^2}{2}<\ln(t)<t-1$$

b) On divise par $(t-1)^2>0$

$$\frac{1}{t-1}-\frac{1}{2}<\frac{\ln(t)}{(t-1)^2}<\frac{1}{t-1}$$

Comme $x<x^2$ on intègre

$$\int_x^{x^2}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{2}\right)dt\le f(x)\le\int_x^{x^2}\frac{1}{t-1}dt\Leftrightarrow\left[\ln(t-1)-\frac{t}{2}\right]_x^{x^2}\le f(x)\le[\ln(t-1)]_x^{x^2}$$
$$\Leftrightarrow \ln(x^2-1)-\frac{x^2}{2}-\ln(x-1)+\frac{x}{2}\le f(x)\le\ln(x^2-1)-\ln(x-1)$$
$$\Leftrightarrow \ln(x+1)+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2}\le f(x)\le \ln(x+1)$$

On fait tendre x vers 1^+ et on trouve que

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\ln(2)$$

Allez à : Exercice 20

Deuxième partie

1.

$$\int\frac{\ln(t)}{(t-1)^2}dt=\int\frac{1}{(t-1)^2}\ln(t)\,dt$$

$\int\frac{1}{(t-1)^2}\ln(t)\,dt$	
$u'(t)=\frac{1}{(t-1)^2}$	$u(t)=-\frac{1}{t-1}$
$v(t)=\ln(t)$	$v'(t)=\frac{1}{t}$
$f(x)=\left[-\frac{\ln(t)}{t-1}\right]-$	$\int-\frac{1}{(t-1)t}dt$

$$\int\frac{\ln(t)}{(t-1)^2}dt=\left[-\frac{\ln(t)}{t-1}\right]-\int-\frac{1}{(t-1)t}dt=-\frac{\ln(t)}{t-1}+\int\frac{1}{t(t-1)}dt$$

Or

$$\frac{1}{t(t-1)}=\frac{a}{t}+\frac{b}{t-1}$$

On multiplie par t, puis $t=0$

$$a=\left[\frac{1}{t-1}\right]_{t=0}=-1$$

On multiplie par $t-1$, puis $t=1$

$$b=\left[\frac{1}{t}\right]_{t=1}=1$$

$$\int\frac{\ln(t)}{(t-1)^2}dt=-\frac{\ln(t)}{t-1}+\int\left(-\frac{1}{t}+\frac{1}{t-1}\right)dt=-\frac{\ln(t)}{t-1}-\ln(t)+\ln(t-1)$$

2.

$$\begin{aligned}f(x)=\left[-\frac{\ln(t)}{t-1}-\ln(t)+\ln(t-1)\right]_x^{x^2}&\\ &=-\frac{\ln(x^2-1)}{x^2-1}-\ln(x^2)+\ln(x^2-1)-\left(-\frac{\ln(x)}{x-1}-\ln(x)+\ln(x-1)\right)\\ &=-\frac{\ln(x^2)}{x^2-1}+\frac{\ln(x)}{x-1}-2\ln(x)+\ln(x)+\ln\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)\\ &=-\frac{2\ln(x)}{(x-1)(x+1)}+\frac{\ln(x)}{x-1}-\ln(x)+\ln\left(\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}\right)\\ &=\frac{\ln(x)}{(x-1)(x+1)}(-2+x+1)-\ln(x)+\ln(x+1)\\ &=\frac{\ln(x)}{(x-1)(x+1)}(x-1)-\ln(x)+\ln(x+1)=\frac{\ln(x)}{x+1}-\ln(x)+\ln(x+1)\\ &=\ln(x+1)-\frac{x}{x+1}\ln(x)\end{aligned}$$

Allez à : Exercice 20

Correction exercice 21.

Remarque : il est sans doute possible de faire cet exercice d'une autre façon si on sait qu'une primitive de $t\to\frac{1}{\sin(t)}$ est $t\to\ln\left(\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right)$

1.

$$x\le t\le 2x\Rightarrow 0<x\le t\le 2x<2\times\frac{\pi}{2}=\pi\Rightarrow 0<\sin(t)$$

Donc $t\to\frac{1}{\sin(t)}$ est continue sur $[x,2x]$, ce qui montre que F est définie, continue et dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

2.

$$F'(x)=\frac{2}{\sin(2x)}-\frac{1}{\sin(x)}=\frac{2}{2\sin(x)\cos(x)}-\frac{1}{\sin(x)}=\frac{1}{\sin(x)\cos(x)}-\frac{1}{\sin(x)}=\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)\cos(x)}$$

Pour tout $\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ $1-\cos(x)>0$, $\cos(x)>0$ et $\sin(x)>0$, donc $F'(x)>0$

Cette fonction est strictement croissante.

3. comme sin est C^∞ sur $\mathbb{R}$ on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, il existe $c\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ tel que

$$\sin(t)=\sin(0)+t\sin'(0)+\frac{t^2}{2}\sin''(c)$$

Donc

$$\sin(t) = t - \frac{t^2}{2}\cos(t)$$

Pour $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $0 < \cos(t) < 1$ donc

$$-\frac{t^2}{2} < -\frac{t^2}{2}\cos(t) < 0$$

Ce qui entraine que

$$t - \frac{t^2}{2} < t - \frac{t^2}{2}\cos(t) < t$$

Autrement dit

$$t - \frac{t^2}{2} < \sin(t) < t$$

D'autre part

$$t - \frac{t^2}{2} = \frac{t}{2}(2 - t)$$

$$t > 0 \text{ et } t < \frac{\pi}{2} < 2$$

Entraine que $t - \frac{t^2}{2} > 0$

4.

Par conséquent

$$\frac{1}{t} < \frac{1}{\sin(t)} < \frac{1}{t - \frac{t^2}{2}} = \frac{2}{t(2-t)} = \frac{1}{t} + \frac{1}{2-t} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t-2}$$

A l'aide d'une décomposition en élément simple.

5.

On intègre entre x et $2x$ (on a bien $x < 2x$)

$$\int_x^{2x} \frac{dt}{t} < \int_x^{2x} \frac{dt}{\sin(t)} < \int_x^{2x} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t-2}\right) dt \Leftrightarrow [\ln(t)]_x^{2x} < F(x) < [\ln(t) - \ln(t-2)]_x^{2x}$$

$$\Leftrightarrow \ln(2x) - \ln(x) < F(x) < \ln(2x) - \ln(2x-2) - (\ln(x) + \ln(x-2)) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{2x}{x}\right) < F(x) < \ln\left(\frac{2x}{x}\right) - \ln\left(\frac{2x-2}{x-2}\right) \Leftrightarrow \ln(2) < F(x) < \ln(2) - \ln\left(\frac{2x-2}{x-2}\right)$$

6.

Comme

$$\lim_{x \to 0} \ln\left(\frac{2x-2}{x-2}\right) = \ln(1) = 0$$

On a d'après le théorème des gendarmes

$$\lim_{x \to 0} F(x) = \ln(2)$$

Allez à : Exercice 21

Correction exercice 22.

1.

$$\frac{\ln(1+t)}{t} = \frac{t + o(t)}{t} = 1 + o(1) \to 1 = f(0)$$

Donc f est continue en 0, pour $t \neq 0$ f est le quotient de fonctions continues.

2. Les bornes sont des fonctions de classe C^1 ($x \to -x$ et $x \to x$) et f est continue donc F est de classe C^1.
3. Pour $x \neq 0$

$$F'(x)=f(x)-(-1)f(-x)=f(x)+f(-x)=\frac{\ln(1+x)}{x}+\frac{\ln(1-x)}{-x}=\frac{1}{x}(\ln(1+x)-\ln(1-x))$$
$$=\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

On sait déjà que F est C^1 en 0, donc $F'(0)$ est la limite de $F'(x)$ lorsque $x\to 0$

$$F'(x)=\frac{1}{x}(\ln(1+x)-\ln(1-x))=\frac{1}{x}\big(x+o(x)-(-x+o(x)\big)=\frac{1}{x}\big(2x+o(x)\big)=2+o(1)\to 2$$

Donc $F'(0)=2$.

4.
$$F(-x)=\int_x^{-x}f(t)dt=-\int_{-x}^{x}f(t)dt=-F(x)$$

F est impaire.

5. Pour $0<x<1$, $1+x>1-x>0$ donc $\frac{1+x}{1-x}>1$, par conséquent $F'(x)=\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)>0$ ce qui montre que F est croissante sur $]0,1[$

Pour $-1<x<0$, $0<1+x<1-x$ donc $\frac{1+x}{1-x}<1$, par conséquent $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)<0$ et alors $F'(x)=\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)>0$ ce qui montre que F est croissante sur $]-1,0[$.

Allez à : Exercice 22

Correction exercice 23.

1. g est continue sur I donc G est de classe C^1 sur I. Comme f et g sont continues sur I, $f\times g$ est continue sur I et et $x\to\int_a^x f(t)g(t)dt$ est de classe C^1 sur I, de plus f est continue sur I et $x\to a+G(x)$ est de classe C^1 sur I par conséquent F est de classe C^1 sur I.
2. Comme $\forall t\in I, g(t)\le 1$ alors $\int_a^x g(t)dt\le\int_a^x 1\times dt$, autrement dit
$$G(x)\le x-a$$
Ce qui entraine que $a+G(x)\le x$
3.
$$F'(x)=f\big(a+G(x)\big)G'(x)-f(x)g(x)=f\big(a+G(x)\big)g(x)-f(x)g(x)$$
$$=g(x)\Big(f\big(a+G(x)\big)-f(x)\Big)$$
$$\forall x\in[a,b], g(x)\ge 0$$
D'autre part, comme f est décroissante $f\big(a+G(x)\big)\ge f(x)\Rightarrow f\big(a+G(x)\big)-f(x)\ge 0$, de plus pour $x\in[0,1]$ $g(x)\ge 0$ donc $F'(x)=g(x)\Big(f\big(a+G(x)\big)-f(x)\Big)\ge 0$.
On en déduit que F est croissante sur I.
4.
$$F(a)=\int_a^{a+G(a)}f(t)dt-\int_a^a f(t)g(t)dt=0$$
Et F est croissante donc $F(b)\ge 0$
Donc
$$\int_a^{a+G(b)}f(t)dt-\int_a^b f(t)g(t)dt\ge 0\Leftrightarrow\int_a^{a+\lambda}f(t)dt\ge\int_a^b f(t)g(t)dt$$

Allez à : Exercice 23

Correction exercice 24.

1. f est continue donc $x \to \int_0^x f(t)dt$ est dérivable, f est strictement monotone et continue donc admet une bijection réciproque continue f^{-1} et f est dérivable par conséquent $x \to \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt$ est dérivable et enfin $x \to xf(x)$ est dérivable, ce qui fait de g une fonction dérivable.
2. $g'(x) = f(x) + f^{-1}\big(f(x)\big)f'(x) - f(x) - xf'(x) = 0$
   g est donc constante sur un intervalle donc pour tout $x \in [0, a]$,
$$g(x) = g(0) = \int_0^0 f(t)dt + \int_0^{f(0)} f^{-1}(t)dt - 0f(0) = 0$$

Allez à : Exercice 24

Correction exercice 25.

Remarque : les trois intégrales de cet exercice sont définies car $x \to \frac{\ln(x)}{1+x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$

1. $x = \frac{1}{t} \Leftrightarrow t = \frac{1}{x}$
$$dx = -\frac{dt}{t^2}$$
$$x = 1 \Rightarrow t = \frac{1}{1} = 1$$
$$x = \frac{1}{a} \Rightarrow t = a$$
$$\frac{\ln(x)}{1+x^2} = \frac{\ln\left(\frac{1}{t}\right)}{1+\frac{1}{t^2}} = \frac{t^2(-\ln(t))}{t^2+1}$$
   Donc
$$\int_1^{\frac{1}{a}} \frac{\ln(x)}{1+x^2}dx = \int_1^a \frac{t^2(-\ln(t))}{t^2+1}\frac{dt}{t^2} = -\int_1^a \frac{\ln(t)}{t^2+1}dt = -\int_1^a \frac{\ln(x)}{x^2+1}dx$$
2.
$$I = \int_a^{\frac{1}{a}} \frac{\ln(x)}{1+x^2}dx = \int_a^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2}dx + \int_1^{\frac{1}{a}} \frac{\ln(x)}{1+x^2}dx = -\int_1^a \frac{\ln(x)}{1+x^2}dx + \int_1^{\frac{1}{a}} \frac{\ln(x)}{1+x^2}dx = 0$$

Allez à : Exercice 25

Correction exercice 26.

1. $F(a) = \int_0^a \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}dx = [-\ln(1+\cos(x)]_0^a = -\ln(1+\cos(a)) + \ln(2)$
2.
   a)
$$\frac{\cos(-x)}{1+\cos(-x)}d(-x) = -\frac{\cos(x)}{1+\cos(x)}dx \neq \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}dx$$
$$\frac{\sin(\pi-x)}{1+\cos(\pi-x)}d(\pi-x) = -\frac{\sin(x)}{1-\cos(x)}dx \neq \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}dx$$
$$\frac{\sin(x+\pi)}{1+\cos(x+\pi)}d(x+\pi) = \frac{-\sin(x)}{1-\cos(x)}dx \neq \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}dx$$
   On doit faire le changement de variable $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

   b) $x = 2\arctan(t)$ donc $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\cos(x) = \frac{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, si $x = 0$ alors $t = \tan\left(\frac{0}{2}\right) = 0$ et si $x = a$ alors $t = \tan\left(\frac{a}{2}\right)$

$$G(a)=\int_0^a \frac{\cos(x)}{1+\cos(x)}dx=\int_0^{\tan\left(\frac{a}{2}\right)} \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2dt}{1+t^2}=\int_0^{\tan\left(\frac{a}{2}\right)}\frac{1-t^2}{1+t^2}dt$$
$$=\int_0^{\tan\left(\frac{a}{2}\right)}\frac{2-(1+t^2)}{1+t^2}dt=\int_0^{\tan\left(\frac{a}{2}\right)}\left(\frac{2}{1+t^2}-1\right)dt$$
$$=2\int_0^{\tan\left(\frac{a}{2}\right)}\frac{1}{1+t^2}dt-\int_0^{\tan\left(\frac{a}{2}\right)}dt=2[\arctan(t)]_0^{\tan\left(\frac{a}{2}\right)}-\tan\left(\frac{a}{2}\right)$$
$$=2\arctan\left(\tan\left(\frac{a}{2}\right)\right)-\tan\left(\frac{a}{2}\right)=2\frac{a}{2}-\tan\left(\frac{a}{2}\right)=a-\tan\left(\frac{a}{2}\right)$$

$\arctan\left(\tan\left(\frac{a}{2}\right)\right)=\frac{a}{2}$ car $\frac{a}{2}\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

3. $G(a)+H(a)=\int_0^a\frac{\cos(x)}{1+\cos(x)}dx+\int_0^a\frac{1}{1+\cos(x)}dx=\int_0^a\frac{\cos(x)+1}{1+\cos(x)}dx=\int_0^a dx=a$

   Donc $H(a)=a-G(a)=\tan\left(\frac{a}{2}\right)$

Allez à : Exercice 26

Correction exercice 27.

1. $t\to\frac{1}{\sqrt{4+t^4}}$ est continue sur $\mathbb{R}$, $x\to 2x$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Donc f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, donc dérivable.
2. Pour tout $x\in\mathbb{R}$.

$$f'(x)=\frac{2}{\sqrt{4+16x^4}}-\frac{1}{\sqrt{4+x^4}}=\frac{1}{\sqrt{1+4x^4}}-\frac{1}{\sqrt{4+x^4}}=\frac{\sqrt{4+x^4}-\sqrt{1+4x^4}}{\sqrt{1+4x^4}\sqrt{4+x^4}}$$
$$=\frac{4+x^4-1-4x^4}{\left(\sqrt{4+x^4}+\sqrt{1+4x^4}\right)\sqrt{1+4x^4}\sqrt{4+x^4}}$$
$$f'(x)=\frac{3(1-x^4)}{\left(\sqrt{4+x^4}+\sqrt{1+4x^4}\right)\sqrt{1+4x^4}\sqrt{4+x^4}}=\frac{3(1-x^2)(1+x^2)}{\left(\sqrt{4+x^4}+\sqrt{1+4x^4}\right)\sqrt{1+4x^4}\sqrt{4+x^4}}$$

   Donc $f'(x)$ a le même signe que $1-x^2$.
   Si $x\in]-\infty,-1[$ f est décroissante.
   Si $x\in]-1,1[$ f est croissante.
   Si $x\in]1,+\infty[$ f est décroissante.

$$1\le t\le 2\Leftrightarrow 1\le t^2\le 16\Leftrightarrow\sqrt{5}\le\sqrt{t^2+4}\le 2\sqrt{5}\Leftrightarrow\frac{1}{2\sqrt{5}}\le\frac{1}{\sqrt{t^2+4}}\le\frac{1}{\sqrt{5}}$$

   En intégrant entre 1 et 2, on trouve que $\frac{1}{2\sqrt{5}}\le f(1)\le\frac{1}{\sqrt{5}}$
3. $f(0)=0$, $f'(0)=\frac{1}{2}$ donc $f(x)=\frac{1}{2}x+o(x)$ et une équation de la tangente est $y=\frac{1}{2}x$
4. $0\le\frac{1}{\sqrt{4+t^4}}\le\frac{1}{\sqrt{t^4}}=\frac{1}{t^2}$ et $x\le 2x$donc $\int_x^{2x}0dx\le\int_x^{2x}\frac{1}{\sqrt{4+t^4}}dx\le\int_x^{2x}\frac{1}{t^2}dx$

   On en déduit que $0\le f(x)\le\left[\frac{-1}{t}\right]_x^{2x}=\frac{1}{2x}$ et que $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$
5.

$$\frac{1}{t^2}-\frac{1}{\sqrt{4+t^4}}=\frac{\sqrt{4+t^4}-t^2}{t^2\sqrt{4+t^4}}=\frac{4+t^4-t^4}{\left(\sqrt{4+t^4}+t^2\right)t^2\sqrt{4+t^4}}=\frac{4}{\left(\sqrt{4+t^4}+t^2\right)t^2\sqrt{4+t^4}}\le\frac{4}{(t^2+t^2)t^2t^2}$$
$$=\frac{2}{t^6}$$

   Et il est clair que $\frac{4}{\left(\sqrt{4+t^4}+t^2\right)t^2\sqrt{4+t^4}}\ge 0$

   Comme $x\le 2x$, on a

$$0 \leq \int_x^{2x} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{\sqrt{4+t^4}}\right) dt \leq \int_x^{2x} \frac{2}{t^6} dt = \left[-\frac{2}{5t^5}\right]_x^{2x} = -\frac{1}{80x^5} + \frac{2}{5x^5} = \frac{31}{80x^5}$$

On multiplie tout cela par $x > 0$

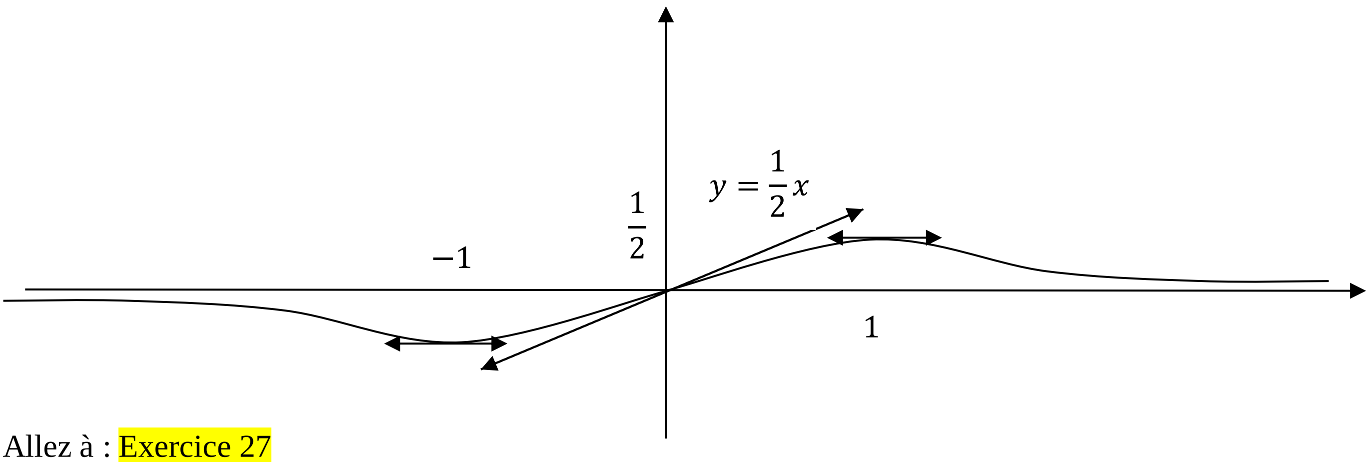
$$0 \leq g(x) \leq \frac{31}{80x^4}$$

D'où $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$

D'autre part, $g(x) = x\left(\int_x^{2x} \frac{1}{t^2} dt - f(x)\right) = x\left[-\frac{1}{t}\right]_x^{2x} - xf(x) = \frac{1}{2} - xf(x)$

Donc $\lim_{x \to +\infty} xf(x) = \frac{1}{2}$, où encore $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$.

6. D'après la question 2°) $\frac{1}{2\sqrt{5}} \leq f(1) \leq \frac{1}{\sqrt{5}}$, $f(1)$ est « en gros » compris entre $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{2}$ si on approxime $\sqrt{5}$ avec 2.



Allez à : Exercice 27

Correction exercice 28.

1. $t \to \frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, $x \to 2x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc F est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2.

$$F(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$$

$u = -t \Leftrightarrow t = -u \Rightarrow dt = -du$

$$t = -x \Rightarrow u = x$$
$$t = -2x \Rightarrow u = 2x$$
$$F(-x) = \int_x^{2x} \frac{-du}{\sqrt{(-u)^4 + (-u)^2 + 1}} = -\int_x^{2x} \frac{du}{\sqrt{u^4+u^2+1}} = -F(x)$$

F est impaire.

3.

$$0 < \frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}} < \frac{1}{\sqrt{t^4}} = \frac{1}{t^2}$$

Et $x < 2x$ entraine que

$$\int_x^{2x} 0dt = 0 < \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}} < \int_x^{2x} \frac{dt}{t^2} = \left[-\frac{1}{t}\right]_x^{2x} = -\frac{1}{2x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{2x}$$

Par conséquent

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$$

4.

$$F'(x) = \frac{2}{\sqrt{(2x)^4+(2x)^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^4+x^2+1}} = \frac{2\sqrt{x^4+x^2+1} - \sqrt{16x^4+4x^2+1}}{\sqrt{16x^4+4x^2+1}\times\sqrt{x^4+x^2+1}}$$
$$= \frac{4(x^4+x^2+1)-(16x^4+4x^2+1)}{\sqrt{16x^4+4x^2+1}\times\sqrt{x^4+x^2+1}\left(2\sqrt{x^4+x^2+1}-\sqrt{16x^4+4x^2+1}\right)}$$
$$= \frac{3-12x^4}{\sqrt{16x^4+4x^2+1}\times\sqrt{x^4+x^2+1}\left(2\sqrt{x^4+x^2+1}-\sqrt{16x^4+4x^2+1}\right)}$$
$$= \frac{3(1-4x^4)}{\sqrt{16x^4+4x^2+1}\times\sqrt{x^4+x^2+1}\left(2\sqrt{x^4+x^2+1}-\sqrt{16x^4+4x^2+1}\right)}$$

Donc

$$\begin{cases} F'(x) = 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-4x^4 = 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 = \dfrac{1}{4} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Allez à : Exercice 28

Correction exercice 29.

1. Si $x > 0$, $0 < x < 2x$ et pour tout $t \in [x, 2x]$, $t \to \frac{e^{-t}}{t}$ est continue donc F est de classe C^1.

   Si $x < 0$, $2x < x < 0$ et pour tout $t \in [2x, x]$, $t \to \frac{e^{-t}}{t}$ est continue donc F est de classe C^1.

   Donc pour tout $x \neq 0$, F est dérivable.

2.
   a) $t \to e^{-t}$ est suffisamment dérivable pour admettre une formule de Taylor Lagrange à l'ordre 1. Il existe c dans l'intervalle $0, t$, c'est-à dire $]t, 0[$ si $t < 0$ et $]0, t[$ si $t > 0$ (donc dans $]-$ -$|t|, |t|[$ tel que :

   $$f(t) = f(0) + tf'(c) \Leftrightarrow e^{-t} = 1 + t(-e^{-c}) = 1 - te^{-c}$$

   b) Comme $-1 < c < 1$ on a : $-1 < -c < 1$ et donc $e^{-1} < e^{-c} < e^1$
   D'autre part

   $$e^{-c} = \frac{1}{t} - \frac{e^{-t}}{t}$$

   Ce qui entraine que

   $$\frac{1}{e} < \frac{1}{t} - \frac{e^{-t}}{t} < e$$

   c) Si $x > 0$ alors $x < 2x$

   $$\int_x^{2x} \frac{1}{e} dt \leq \int_x^{2x} \left(\frac{1}{t} - \frac{e^{-t}}{t}\right) dt \leq \int_x^{2x} e dt \Leftrightarrow \frac{1}{e}(2x - x) \leq \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt - F(x) \leq e(2x - x)$$
   $$\Leftrightarrow \frac{x}{e} \leq [\ln(t)]_x^{2x} - F(x) \leq ex \Leftrightarrow \frac{x}{e} \leq \ln(2x) - \ln(x) - F(x) \leq ex \Leftrightarrow \frac{x}{e} \leq \ln(2) - F(x) \leq ex$$

   Lorsque x tend vers 0^+, $\frac{x}{e}$ et ex tendent vers 0^+ donc $F(x)$ tend vers $\ln(2) = F(0)$ ce qui montre que F est continue à droite.
   Si $x < 0$ alors $2x < x$

$$\int_{2x}^{x}\frac{1}{e}dt \le \int_{2x}^{x}\left(\frac{1}{t}-\frac{e^{-t}}{t}\right)dt \le \int_{2x}^{x}edt \Leftrightarrow \frac{1}{e}(x-2x) \le \int_{2x}^{x}\frac{1}{t}dt - \int_{2x}^{x}\frac{e^{-t}}{t}dt \le e(x-2x)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{x}{e} \le [\ln(t)]_{2x}^{x} + F(x) \le -ex \Leftrightarrow -\frac{x}{e} \le \ln(x)-\ln(2x)+F(x) \le -ex \Leftrightarrow -\frac{x}{e} \le -\ln(2)+F(x) \le -ex$$

Lorsque x tend vers 0^-, $\frac{x}{e}$ et ex tendent vers 0^- donc $F(x)$ tend vers $\ln(2)=F(0)$ ce qui montre que F est continue à gauche.

Finalement F est continue en 0.

3.

$$F'(x)=\frac{e^{-2x}}{2x}\times 2-\frac{e^{-x}}{x}=\frac{e^{-2x}-e^{-x}}{x}=\frac{e^{-x}}{x}(e^{-x}-1)$$

$$F'(x)=\frac{e^{-x}}{x}(1-x+o(x)-1)=\frac{e^{-x}\big(-x+o(x)\big)}{x}=e^{-x}\big(-1+o(1)\big)$$

$$\lim_{x\to 0}F'(x)=\lim_{x\to 0}e^{-x}\big(-1+o(1)\big)=-1$$

Le graphe de F admet une tangente oblique en $x=0$ de pente -1.

4. Si $x<0$ alors $e^{-x}-1>0$ et donc $F'(x)<0$
Si $x>0$ alors $e^{-x}-1<0$ et donc $F'(x)<0$
Si $x=0$ alors $F'(0)=-1<0$
F est décroissante sur $\mathbb{R}$

5.

$$t\ge 1 \Leftrightarrow 0\le \frac{1}{t}\le 1 \Leftrightarrow 0\le \frac{e^{-t}}{t}\le e^{-t}$$

Donc, puisque si $x>0$, $x<2x$

$$0\le \int_{x}^{2x}\frac{e^{-t}}{t}dt \le \int_{x}^{2x}e^{-t}dt=[-e^{-t}]_{x}^{2x}=-e^{-2x}+e^{-x}\to_{(x\to+\infty)}0$$

$$\lim_{x\to\infty}F(x)=0$$

6. Il existe $c\in]t,0[$ tel que $e^{-t}=1-te^{-c}$

$$t<c<0 \Leftrightarrow 0<-c<-t \Leftrightarrow e^{0}<e^{-c}<e^{-t} \Rightarrow 1<e^{-c} \Rightarrow -t<-te^{-c}$$

Car $-t>0$, puis on rajoute 1 de chaque côté pour obtenir

$$1-t<1-te^{-c}=e^{-t}$$

On multiplie cette inégalité par $t<0$

$$\frac{1-t}{t}>\frac{e^{-t}}{t}$$

Ensuite on intègre entre $2x$ et x, car pour $x<0$, $2x<x$

$$\int_{2x}^{x}\frac{1-t}{t}dt > \int_{2x}^{x}\frac{e^{-t}}{t}dt \Leftrightarrow \int_{2x}^{x}\left(\frac{1}{t}-1\right)dt > -F(x) \Leftrightarrow [\ln(t)-t]_{2x}^{x} > -F(x)$$

$$\Leftrightarrow \ln(x)-x-(\ln(2x)-2\mathrm{x}) > -F(x) \Leftrightarrow x-\ln\left(\frac{x}{2x}\right) > -F(x) \Leftrightarrow F(x) > -x+\ln\left(\frac{1}{2}\right)=-x-\ln(2)$$

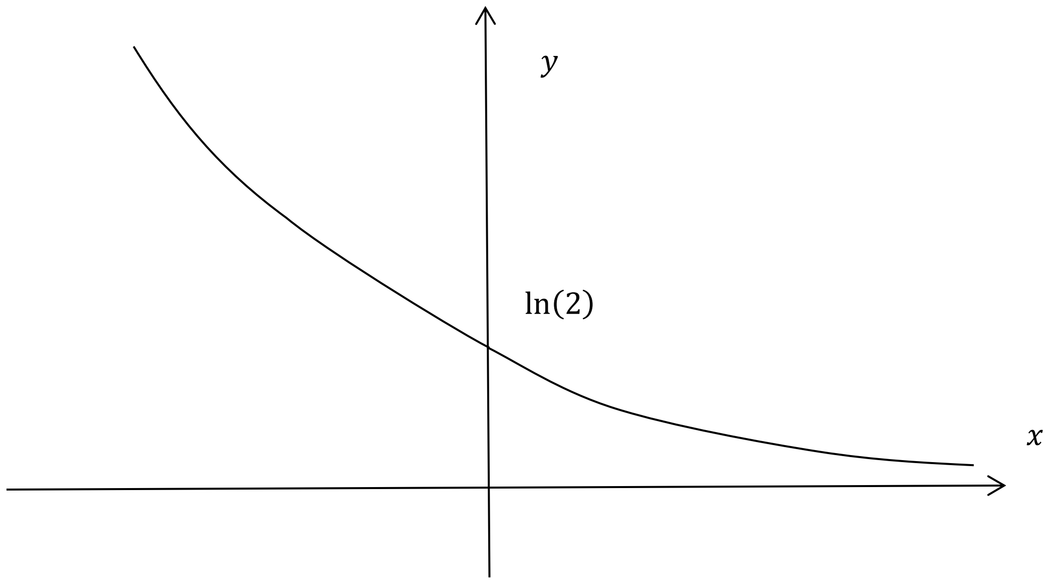
Comme

$$\lim_{x\to-\infty}-\ln(2)-x=+\infty$$

On a

$$\lim_{x\to-\infty}F(x)=+\infty$$

7.



Allez à : Exercice 29

Correction exercice 30.

1. Si $t > 0$ et $t \neq 1$, f est le quotient de fonctions continues donc f est continue.
   Pour $t = 1$, on fait le changement de variable $u = t - 1$, $t = 1 + u$,
   $f(t) = \frac{\ln(t)}{t-1} = \frac{\ln(1+u)}{u} = \frac{u+o(u)}{u} = 1 + o(1)$ donc $\lim_{t\to 1} f(t) = \lim_{u\to 0}\big(1 + o(1)\big) = 1 = f(1)$
   f est continue, l'intégrale est faussement impropre.
2. Si $0 < t < 1$, $\ln(t) < 0$ et $t - 1 < 0$ donc $f(t) > 0$
   Si $t > 1$, $\ln(t) > 0$ et $t - 1 > 0$ donc $f(t) > 0$.
   Si $t = 1$, $f(1) = 1 > 0$
   Donc pour tout $t > 0$, $f(t) > 0$.
3. Si $0 < x < 1$ alors $x^2 < x$, comme $f(t) > 0$, $F(x) < 0$.
   Si $x > 1$ alors $x^2 > x$, comme $f(t) > 0$, $F(x) > 0$.
4. f est continue et $x \to x^2$ est de classe C^1 donc F est de classe C^1.
$$F'(x) = \frac{2x\ln(x^2)}{x^2-1} - \frac{\ln(x)}{x-1} = \frac{4x\ln(x)}{x^2-1} - \frac{(x+1)\ln(x)}{x^2-1} = \frac{(3x-1)}{(x+1)}\frac{\ln(x)}{x-1} = \frac{(3x-1)}{(x+1)}f(x)$$
   Comme $f(x) > 0$ et que $x + 1 > 0$ car $x > 0$, $F'(x)$ a le même signe que $3x - 1$.
   Si $0 < x < \frac{1}{3}$, $F'(x) < 0$ et F est décroissante.
   Si $x > \frac{1}{3}$, $F'(x) > 0$ et F est croissante.

Allez à : Exercice 30

Correction exercice 31.

1.
$$\frac{2t^2}{t^2-1} = \frac{2t^2-2+2}{t^2-1} = \frac{2(t^2-1)+2}{t^2-1} = 2 + \frac{2}{t^2-1}$$
$$\frac{2}{t^2-1} = \frac{2}{(t-1)(t+1)} = \frac{a}{t-1} + \frac{b}{(t+1)}$$
   Je multiplie par $t - 1$, puis $t = 1$
$$a = \left[\frac{2}{t+1}\right]_{t=1} = 1$$
   Je multiplie par $t + 1$, puis $t = -1$
$$b = \left[\frac{2}{t-1}\right]_{t=-1} = -1$$

Donc

$$\frac{2}{t^2-1}=\frac{2}{(t-1)(t+1)}=\frac{1}{t-1}+\frac{-1}{t+1}$$

$$\int \frac{2t^2}{t^2-1}dt=2t+\ln|t-1|-\ln|t+1|+K=2t+\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+K$$

2.

$t=\sqrt{1-x}\Leftrightarrow t^2=1-x\Leftrightarrow x=1-t^2$ donc $dx=-2tdt$

$$\int\frac{\sqrt{1-x}}{x}dx=\int\frac{t}{1-t^2}(-2dt)=\int\frac{2t^2}{t^2-1}dt=2t+\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+K$$

$$=2\sqrt{1-x}+\ln\left|\frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}+1}\right|+K$$

3.

$$F(x)=\int\frac{\ln(x)}{\sqrt{1-x}}dx=\left[-2\sqrt{1-x}\ln(x)\right]+\int 2\sqrt{1-x}\frac{1}{x}dx$$

$$F(x)=-2\sqrt{1-x}\ln(x)+4\sqrt{1-x}+2\ln\left|\frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}+1}\right|+K$$

$$F(x)=-2\sqrt{1-x}\ln(x)+4\sqrt{1-x}+2\ln\left(1-\sqrt{1-x}\right)-2\ln\left(1+\sqrt{1-x}\right)+K$$

K a changé en cours de route, est-ce bien grave ? J'ai enlevé les valeurs absolues parce que j'en ai le droit.

4. $x\to\frac{\ln(x)}{\sqrt{1-x}}$ n'est pas définie en 0 et 1, donc cette fonction n'est pas continue, il s'agit d'une intégrale généralisée en 0 et en 1.

5. En 0. $\frac{\ln(x)}{\sqrt{1-x}}\sim\ln(x)$, $x^{\frac{1}{2}}\ln(x)\to 0$ et $\frac{1}{2}<1$, donc l'intégrale converge en 0.

   En 1, on pose $t=1-x$, $x=1-t$, $\frac{\ln(x)}{\sqrt{1-x}}=\frac{\ln(1+t)}{\sqrt{t}}\sim\frac{t}{\sqrt{t}}=\sqrt{t}\to 0$, l'intégrale est faussement impropre (généralisée) en 1 donc l'intégrale converge en 1.

6. $g(x)=-2\ln(x)\sqrt{1-x}+2\ln\left(1-\sqrt{1-x)}\right)$

$$g(x)=-2\ln(x)\left(1-\frac{x}{2}+o(x)\right)+2\ln\left(1-\left(1-\frac{x}{2}+o(x)\right)\right)$$

$$=-2\ln(x)+x\ln(x)\left(1+o(1)\right)+2\ln\left(\frac{x}{2}+o(x)\right)$$

$$=-2\ln(x)+x\ln(x)\left(1+o(1)\right)+2\ln\left(x\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)\right)$$

$$=-2\ln(x)+x\ln(x)\left(1+o(1)\right)+2\ln(x)+2\ln\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)$$

$$=x\ln(x)\left(1+o(1)\right)+2\ln\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)$$

Comme $\lim_{x\to0}x\ln(x)=0$, $\lim_{x\to0}g(x)=\lim_{x\to0}\left(2\ln\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)\right)=-2\ln(2)$

$$\lim_{x\to0}F(x)=-2\ln(2)+4-2\ln(2)+K=4-4\ln(2)+K$$

7.

$$I_{\varepsilon,a}=\int_\varepsilon^a\frac{\ln(x)}{\sqrt{1-x}}dx=F(a)-F(\epsilon)$$

$$I_{\varepsilon,a}=2\sqrt{1-a}\ln(a)-4\sqrt{1-a}+2\ln\left(1-\sqrt{1-a}\right)-2\ln\left(1+\sqrt{1-a}\right)-(2\sqrt{1-\varepsilon}\ln(\varepsilon)$$
$$-4\sqrt{1-\varepsilon}+2\ln\left(1-\sqrt{1-\varepsilon}\right)-2\ln\left(1+\sqrt{1-\varepsilon}\right)$$

Clairement $F(1)=K$ et $F(0)=\lim_{\epsilon\to 0}F(\varepsilon)\ =4-4\ln(2)+K$

Donc $I=F(1)-F(0)=4-4\ln(2)$

Allez à : Exercice 31

Correction exercice 32.

1. f est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$, on peut appliquer le théorème des accroissements finis, par conséquent il existe $c\in]0,1[$ tel que :
$$f\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=f(1)+\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}-1\right)f'(c)=1-\frac{1}{\sqrt{n}}f'(c)$$
Comme f' est continue sur un intervalle fermé borné $[0,1]$, f' est borné et atteint ses bornes donc il existe x_m et x_M dans $[0,1]$ tels que pour tout $c\in]0,1[$
$$f'(x_m)\le f'(c)\le f'(x_M)$$
Or $f'(x_m)>0$ donc
$$0<f'(x_m)\le f'(c)$$
Ce qui montre que
$$1-\frac{1}{\sqrt{n}}f'(c)\le 1-\frac{1}{\sqrt{n}}f'(x_m)$$
Puis on pose $a=f'(x_m)$ pour montrer le résultat.
2.
$$I_n=\int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}\big(f(x)\big)^n dt\le\int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}\left(f\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^n dt$$
Car f est croissante
$$I_n\le\left(f\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^n\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)<\left(f\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^n=e^{n\ln\left(f\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)}$$
$$n\ln\left(f\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)<n\ln\left(1-\frac{a}{\sqrt{n}}\right)=n\left(-\frac{a}{\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)=-\sqrt{n}\big(a+o(1)\big)$$
Comme $\forall x\in[0,1]$, $0\le f(x)$
$$0\le I_n\le e^{-\sqrt{n}(a+o(1))}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$
$$0\le J_n=\int_{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}^1\big(f(x)\big)^n dx\le\int_{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}^1 dx$$
Car $\forall x\in[0,1]$, $0\le f(x)\le 1$
$$0\le J_n=\int_{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}^1\big(f(x)\big)^n dx\le 1-\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\frac{1}{\sqrt{n}}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$
D'après le théorème des gendarmes I_n et J_n tendent vers 0, puis d'après la relation de Chasles
$$\int_0^1\big(f(x)\big)^n dt=I_n+J_n$$
Donc
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\big(f(x)\big)^n dt=0$$

Allez à : Exercice 32

Correction exercice 33.

Première partie

1. On pose $X=\frac{1}{x}$, Pour $x\neq 0$, $u_n(x)=X^n e^{-X^2}$

$$\lim_{x\to 0} u_n(x) = \lim_{X\to\infty} X^n e^{-X^2} = 0$$

Car l'exponentielle l'emporte sur les fonctions polynômes.

2. On peut faire le même changement de variable qu'à la question 1°) ou remarquer que $u_0(x) = \varphi(x)$ d'où l'on déduit que : $\lim_{x\to 0} u_0(x) = \lim_{x\to 0} \varphi(x) = 0 = \varphi(0)$

   Donc φ est continue en 0, pour $x \neq 0$, φ est continue en tant que composée de fonctions continues.

$$\varphi'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} = 2u_3(x)$$

   Donc, en utilisant la première question $\lim_{x\to 0} \varphi'(x) = 0$, comme de plus φ est continue en 0, on en déduit que φ est dérivable en 0 et $\varphi'(0) = \lim_{x\to 0} \varphi'(x) = 0$. (Et même de classe C^1). Pour $x \neq 0$, φ' est dérivable en tant que composée de fonctions dérivable.

   Pour $x \neq 0$, $\varphi'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} = \frac{2}{x^3}\varphi(x)$ donc $x^3\varphi'(x) = 2\varphi(x)$

   Pour $x = 0$, $x^3\varphi'(x) = o^3 \times 0 = 0$ et $2\varphi(x) = 2 \times 0 = 0$, il y a aussi égalité.

3. Pour $x < 0$, $\varphi'(x) < 0$ donc φ est décroissante.

   Pour $x > 0$, $\varphi'(x) > 0$ donc φ est croissante.

   L'étude des points d'inflexion n'est plus vraiment au programme, mais je rappelle que le graphe d'une fonction deux fois dérivable admet un point d'inflexion si et seulement si la dérivée seconde s'annule en changeant de signe.

   Pour $x \neq 0$, $\varphi''(x) = -\frac{6}{x^4} e^{-\frac{1}{x^2}} + \frac{2}{x^3}\left(\frac{2}{x^3}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} = \frac{2}{x^6}(-3x^2 + 2)e^{-\frac{1}{x^2}}$

   Pour $x = 0$, $\varphi''(x) = -6u_4(x) + 4u_6(x)$ donc sa limite en 0 est nulle.

   Il y a trois valeurs qui annulent $\varphi''(x)$, $-\sqrt{\frac{2}{3}}$, 0 et $\sqrt{\frac{2}{3}}$,

   Pour x proche de 0 et non nul, il est clair que $\varphi''(x) > 0$ donc il n'y a pas de points d'inflexion en 0.

   Par contre $-3x^2 + 2$ change de signe en $\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$, donc φ admet un point d'inflexion en chacun de ces points.

Allez à : Exercice 33

Deuxième partie

4.

$$f(-x) = e^{\frac{1}{(-x)^2}} \int_0^{-x} \varphi(t)dt = e^{\frac{1}{x^2}} \int_0^{-x} \varphi(t)dt$$

   Je fais le changement de variable $t = -u$ dans l'intégrale, $dt = -du$, $\varphi(t) = \varphi(-u) = e^{\frac{1}{(-u)^2}} = \varphi(u)$

   Si $t = 0$ alors $u = 0$ et si $t = -x$ alors $u = x$ donc

$$f(-x) = e^{\frac{1}{(-x)^2}} \int_0^{-x} \varphi(t)dt = e^{\frac{1}{x^2}} \int_0^{x} \varphi(u)(-du) = -f(x)$$

   f est impaire.

5.

   Pour $x > 0$, φ est croissante donc $0 < t < x$ entraine $0 = \varphi(0) < \varphi(t) < \varphi(x)$

   J'intègre entre 0 et x : $\int_0^x 0dx \leq \int_0^x \varphi(t)dt \leq \int_0^x \varphi(x)dx \Leftrightarrow 0 \leq \int_0^x \varphi(t)dt \leq x\varphi(x)$

6. Je multiplie ces inégalités par $e^{\frac{1}{x^2}}$: $0 \leq e^{\frac{1}{x^2}} \int_0^x \varphi(t)dt \leq x\varphi(x)e^{\frac{1}{x^2}} = x$

   Je fais tendre x vers 0^+, j'en déduis que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$, f est continue en 0.

   Comme f est impaire la limite en 0^- est $-0 = 0 = f(0)$.

Pour $x \neq 0$, φ continue entraine $x \to \int_0^x \varphi(t)dt$ est dérivable donc continue. Pour $x \neq 0$ $x \to e^{\frac{1}{x^2}}$ est continue, f est le produit de deux fonctions continues, f est continue.

7. $x \to \int_0^x \varphi(t)dt$ est dérivable (on l'a déjà vu) et $x \to e^{\frac{1}{x^2}}$ est dérivable pour $x \neq 0$, donc f est dérivable.
On calcule $f'(x)$ pour $x \neq 0$, $f'(x) = -\frac{2}{x^3}e^{\frac{1}{x^2}}\int_0^x \varphi(t)dt + e^{\frac{1}{x^2}}\varphi(x) = -\frac{2}{x^3}e^{\frac{1}{x^2}}\int_0^x \varphi(t)dt + 1$

8. (1) est $t^3\varphi'(t) = 2\varphi(t)$ en changeant x en t.
Donc $\int_0^x 2\varphi(t)dt = \int_0^x t^3\varphi'(t)dt$
J'intègre la seconde intégrale par partie (en intégrant $\varphi'(t)$ et en dérivant t^3)
$$2\int_0^x \varphi(t)dt = [t^3\varphi(t)]_0^x - \int_0^x 3t^2\varphi(t)dt = x^3\varphi(x) - 3\int_0^x t^2\varphi(t)dt$$
C'est bien ce qu'il fallait montrer. (il reste à diviser par 2)
Je vais tenter quelque chose de classique mais qui ne permet pas de conclure.
$$f'(x) = -\frac{2}{x^3}e^{\frac{1}{x^2}}\int_0^x \varphi(t)dt + 1 = -\frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x^2}}\left(x^3\varphi(x) - 3\int_0^x t^2\varphi(t)dt\right) + 1$$
$$= -1 + e^{\frac{1}{x^2}}\frac{3\int_0^x t^2\varphi(t)dt}{x^3} + 1 = \frac{3e^{\frac{1}{x^2}}\int_0^x t^2\varphi(t)dt}{x^3}$$
J'aurais aimé pouvoir calculer la limite de $f'(x)$ en 0 mais la limite de $\frac{3e^{\frac{1}{x^2}}\int_0^x t^2\varphi(t)dt}{x^3}$ n'a rien de simple, si j'avais trouvé cette limite j'aurais conclu de la façon suivante :
$f'(x)$ admet une limite en 0 et f est continue en 0 donc f est dérivable en 0 (et même C^1).
Dans ce cas la bonne solution est de revenir à la définition de la dérivée, c'est-à-dire au taux de variation.
$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{e^{\frac{1}{x^2}}\int_0^x \varphi(t)dt}{x} = \frac{x^3e^{\frac{1}{x^2}}\varphi(x) - 3e^{\frac{1}{x^2}}\int_0^x t^2\varphi(t)dt}{2x} = \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}e^{\frac{1}{x^2}}\frac{\int_0^x t^2\varphi(t)dt}{x}$$
Il reste à calculer la limite en 0 de $\frac{\int_0^x t^2\varphi(t)dt}{xe^{-\frac{1}{x^2}}} = \frac{\int_0^x t^2\varphi(t)dt}{x\varphi(x)}$, on pourrait appliquer la règle de l'Hospital, mais on a vu que pour $0 \leq t \leq x$ on a $0 \leq \varphi(t) \leq \varphi(x)$, donc pour $x > 0$, $0 < \int_0^x t^2\varphi(t)dt < \varphi(x)\int_0^x t^2dt = \frac{\varphi(x)x^3}{3}$
Par conséquent : $0 < \frac{\int_0^x t^2\varphi(t)dt}{x\varphi(x)} < \frac{x^2}{2}$, d'où l'on déduit que la limite en 0^+ de $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ est nulle, f étant impaire, on en déduit qu'en 0^- la limite est aussi nulle.
On en déduit que f est dérivable et que $f'(0) = 0$.

Remarque :
On ne peut pas conclure que f est C^1 en 0.

9. $\frac{F(x)}{G(x)}$ est une forme indéterminée lorsque $x \to 0$, si $\frac{F'(x)}{G'(x)}$ admet une limite en 0 c'est la même que celle de $\frac{F(x)}{G(x)}$.
$F'(x) = \varphi(x)$ et $G'(x) = 3x^2\varphi(x) + x^3\varphi'(x) = 3x^2\varphi(x) + 2\varphi(x) = (3x^2+2)\varphi(x)$
$$\frac{F'(x)}{G'(x)} = \frac{\varphi(x)}{(3x^2+2)\varphi(x)} = \frac{1}{3x^2+2}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{3x^2+2} = \frac{1}{2}$$
Donc $\frac{F(x)}{G(x)}$ admet une limite en 0 qui est la même que celle de $\frac{F'(x)}{G'(x)}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{G(x)}=\frac{1}{2}$$

Or $\frac{F(x)}{G(x)}=\frac{\int_0^x \varphi(t)dt}{x^3\varphi(x)}=\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}\int_0^x \varphi(t)dt}{x^3}=\frac{f(x)}{x^3}$, donc $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}=\frac{1}{2}$

Cette limite s'écrit aussi $\frac{f(x)}{x^3}=\frac{1}{2}+o(1)$ avec $\lim_{x\to 0}o(1)=0$

En multipliant par x^3 on obtient : $f(x)=\frac{1}{2}x^3+o(x^3)$

C'est le développement limité de f à l'ordre 3.

Allez à : Exercice 33

Intégrales Généralisées

Exercice 1.

Montrer la convergence et calculer la valeur des intégrales :

$$I_1=\int_0^{+\infty} t^3e^{-t}dt\,;\quad I_2=\int_1^{+\infty}\frac{1}{t\sqrt{t^2+1}}dt\,;\quad I_3=\int_0^{+\infty}\frac{t\ln(t)}{(t^2+1)^2}dt$$

Allez à : Correction exercice 1

Exercice 2.

Les intégrales généralisées suivantes convergentes ou divergentes ?

$$I_1=\int_2^{+\infty}\ln(t)\,dt\,;\ I_2=\int_0^{2}\ln(t)\,dt\,;I_3=\int_0^{+\infty}e^{-4t}dt\,;I_4=\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt\,;I_5=\int_0^{+\infty}\frac{t^5}{(t^4+1)\sqrt{t}}dt$$

$$I_6=\int_0^{\pi}\ln(\sin(t))\,dt\,;I_7=\int_2^{+\infty}\left(1-\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right)dt\,;I_8=\int_0^{1}\sin\left(\frac{1}{t}\right)dt\,,I_9=\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty}\ln\left(\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right)dt$$

Allez à : Correction exercice 2

Exercice 3.

1. Soit F la fonction définie par :

$$F(x)=\int_1^{x}\frac{\ln(1+t^2)}{t^2}dt$$

   Calculer $F(x)$.

2. En déduire que l'intégrale

$$I=\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+t^2)}{t^2}dt$$

   Est convergente et déterminer sa valeur.

Allez à : Correction exercice 3

Exercice 4.

1. Calculer

$$F(x)=\int_1^{x}\frac{1}{t\sqrt{t^2+1}}dt$$

   A l'aide du changement de variable $u=\sqrt{t^2+1}$

2. Montrer avec les règles de Riemann que

$$I=\int_1^{+\infty}\frac{1}{t\sqrt{t^2+1}}dt$$

   Converge.

3. Calculer

$$I=\int_1^{+\infty}\frac{1}{t\sqrt{t^2+1}}dt$$

Allez à : Correction exercice 4

Exercice 5.

Etudier la convergence des intégrales :

$$I_1=\int_2^{+\infty}\frac{dt}{t(\ln(t))^2}\,;I_2=\int_3^{+\infty}\frac{\arctan(t)}{t^2+2t+7}dt$$

Allez à : Correction exercice 5

Exercice 6.

Etudier la convergence de l'intégrale

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{t^x+t^{2-x}}{t^3+\sqrt{t}}dt$$

Selon les valeurs de $x\in\mathbb{R}$

Allez à : Correction exercice 6

Exercice 7.

Soient a et b deux paramètres réels. Discuter selon leurs valeurs de la convergence de

$$\int_2^{+\infty}\frac{dt}{t^a(\ln(t))^b}$$

On pourra :

a) Lorsque $a\neq 1$, utiliser les règles de Riemann.

b) Lorsque $a=1$, calculer explicitement $\int_2^A\frac{dt}{t(\ln(t))^b}$ pour A réel destiné à tendre vers $+\infty$.

Allez à : Correction exercice 7

Exercice 8.

1. Soit $\alpha>0$. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t^{\alpha+1}}dt$ converge.

   En déduire que $\int_1^{+\infty}\frac{\cos(t)}{t^{\alpha}}dt$ converge (intégrer par partie).

2. Montrer que $\int_1^{+\infty}\frac{\cos^2(t)}{t}dt$ diverge (linéariser $\sin^2(t)$)

   En déduire que $\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin(t)}{t}\right|dt$ diverge.

   Vérifier que quand $t\to+\infty$

$$\frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}\sim\frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}+\frac{\cos^2(t)}{t}$$

   Mais que pourtant $\int_1^{+\infty}\frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}dt$ et $\int_0^{+\infty}\left(\frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}+\frac{\cos^2(t)}{t}\right)dt$ ne sont pas de même nature.

Allez à : Correction exercice 8

Exercice 9.

1. Démontrer la convergence de l'intégrale $\int_0^1\frac{x-1}{\ln(x)}dx$.
2. Montrer que, pour tout $x\in]0,1[$, $\frac{x-1}{x}\leq\ln(x)<x-1$.
3. Pour $X\in]0,1[$, démontrer l'égalité :

$$\int_0^X\frac{xdx}{\ln(x)}=\int_0^{X^2}\frac{dx}{\ln(x)}$$

4. En déduire un encadrement de $\int_0^X\frac{x-1}{\ln(x)}dx$ et montrer que

$$\int_0^1\frac{x-1}{\ln(x)}dx=\ln(2)$$

Allez à : Correction exercice 9

Exercice 10.

Soient f et g deux fonctions continues et strictement positives toutes deux définies sur un même intervalle $[a,b[$ (où b peut-être un réel ou désigner $+\infty$), équivalentes au voisinages de b.

On sait bien sûr que les deux intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont de même nature.

Montrer que si ces intégrales convergent, alors $\int_x^b f(t)dt$ et $\int_x^b g(t)dt$ sont équivalentes lorsque x tend vers b par valeurs strictement inférieures.

Allez à : Correction exercice 10

Exercice 11.

Soit $I=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(t)}{t^2+a^2}dt$ avec $a>0$.

Pour tout $\varepsilon>0$ et pour tout $X>0$ on définit : $I_{\varepsilon,X}=\int_\varepsilon^X\frac{\ln(t)}{t^2+a^2}dt$

1. Montrer que I est une intégrale convergente.
2. A l'aide du changement de variable $t=\frac{a^2}{x}$ montrer que :

$$I_{\varepsilon,X}=-\frac{2\ln(a)}{a}\arctan\left(\frac{a}{X}\right)+\frac{2\ln(a)}{a}\arctan\left(\frac{a}{\varepsilon}\right)+\int_{\frac{a^2}{\varepsilon}}^{\frac{a^2}{X}}\frac{\ln(t)}{t^2+a^2}dt$$

3. En faisant tendre ε vers 0 et X vers $+\infty$ dans l'équation ci-dessus et en déduire une relation vérifiée par I, puis la valeur de I.

Allez à : Correction exercice 11

Corrections

Correction exercice 1.

-

$$\lim_{t\to+\infty}t^2\times t^3e^{-t}=0$$

D'après les règles de Riemann $t^\alpha f(t)\to 0$ en $+\infty$ avec $\alpha>1$ montre que I_1 converge.

On cherche une primitive de $t\to t^3e^{-t}$ de la forme

$$F(t)=(at^3+bt^2+ct+d)e^{-t}$$

$$\begin{aligned}F'(t)&=(3at^2+2bt+c)e^{-t}-(at^3+bt^2+ct+d)e^{-t}\\&=(-at^3+(3a-b)t^2+(2b-c)t+c-d)e^{-t}\end{aligned}$$

$$(-at^3+(3a-b)t^2+(2b-c)t+c-d)e^{-t}=t^3e^{-t}\Leftrightarrow\begin{cases}-a=1\\3a-b=0\\2b-c=0\\c-d=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=-3\\c=-6\\d=-6\end{cases}$$

$$\int_0^X t^3e^{-t}dt=[(-t^3-3t^2-6t-6)e^{-t}]_0^X=(-X^3-3X^2-6X-6)e^{-X}+6\to_{X\to+\infty}6$$

$$I_1=6$$

Allez à : Exercice 1

- La fonction est positive

$$\frac{1}{t\sqrt{t^2+1}}\sim_{+\infty}\frac{1}{t^2}$$

Il s'agit d'une fonction de Riemann intégrable $\alpha=2>1$

On fait le changement de variable $u=t^2+1\Leftrightarrow t=\sqrt{u-1}$ dans l'intégrale

$$\int_1^X\frac{1}{t\sqrt{t^2+1}}dt=\int_1^X\frac{tdt}{t^2\sqrt{t^2+1}}$$

On retrouve « presque » $du=2tdt$ au numérateur

$$t=1\Rightarrow u=1^2+1=2\qquad\text{et}\qquad t=X\Rightarrow u=X^2+1$$

$$\int_1^X\frac{tdt}{t^2\sqrt{t^2+1}}=\frac{1}{2}\int_2^{X^2+1}\frac{du}{(u-1)\sqrt{u}}$$

On fait le changement de variable $v=\sqrt{u}\Leftrightarrow u=v^2$, $du=2vdv$

$$u=2\Rightarrow v=\sqrt{2}\qquad et\qquad u=X^2+1\Rightarrow v=\sqrt{X^1+1}$$

$$\frac{1}{2}\int_{2}^{X^2+1}\frac{du}{(u-1)\sqrt{u}}=\frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{X^2+1}}\frac{2vdv}{(v^2-1)v}=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{X^2+1}}\frac{dv}{v^2-1}$$

$$\frac{1}{v^2-1}=\frac{1}{(v-1)(v+1)}=\frac{\frac{1}{2}}{v-1}+\frac{-\frac{1}{2}}{v+1}$$

$$\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{X^2+1}}\frac{dv}{v^2-1}=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{X^2+1}}\left(\frac{1}{v-1}-\frac{1}{v+1}\right)dv=[\ln|v-1|-\ln|v+1|]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{X^2+1}}=\left[\ln\left|\frac{v-1}{v+1}\right|\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{X^2+1}}$$

$$=\ln\left|\frac{\sqrt{X^2+1}-1}{\sqrt{X^2+1}+1}\right|-\ln\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right|$$

$$\ln\left|\frac{\sqrt{X^2+1}-1}{\sqrt{X^2+1}+1}\right|=\ln\left|\frac{X\left(\sqrt{1+\frac{1}{X^2}}-\frac{1}{X}\right)}{X\left(\sqrt{1+\frac{1}{X^2}}+\frac{1}{X}\right)}\right|=\ln\left|\frac{\sqrt{1+\frac{1}{X^2}}-\frac{1}{X}}{\sqrt{1+\frac{1}{X^2}}+\frac{1}{X}}\right|\to 0$$

$$-\ln\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right|=\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)=\ln\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}=2\ln\left(\sqrt{2}-1\right)$$

Donc $I_2=2\ln\left(\sqrt{2}-1\right)$

Allez à : Exercice 1

- Il y a deux problèmes, un en 0 et un autre en $+\infty$.

$$\lim_{t\to 0}\frac{t\ln(t)}{(t^2+1)^2}=0$$

Donc la fonction à intégrer est prolongeable par continuité en 0, elle est intégrable

En l'infini

$$\frac{t\ln(t)}{(t^2+1)^2}\sim\frac{\ln(t)}{t^3}$$

$$t^2\times\frac{\ln(t)}{t^3}=\frac{\ln(t)}{t}\to 0$$

D'après les règles de Riemann $t^\alpha f(t)\to_{+\infty} 0$ avec $\alpha>1$, la fonction est intégrable. On pose

$$I_3(\epsilon,X)=\int_0^X\frac{t\ln(t)}{(t^2+1)^2}dt$$

Puis on fait une intégration par partie

$\int_\epsilon^X\frac{t\ln(t)}{(t^2+1)^2}dt$	
$u'(t)=\frac{t}{(t^2+1)^2}$	$u(t)=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{t^2+1}$
$v(t)=\ln(t)$	$v'(t)=\frac{1}{t}$
$\int_\epsilon^X\frac{t\ln(t)}{(t^2+1)^2}dt=\left[-\frac{1}{2}\times\frac{1}{t^2+1}\ln(t)\right]_\epsilon^X-$	$\left(-\frac{1}{2}\right)\int_\epsilon^X\frac{1}{t(t^2+1)}dt$

$$\int_{\epsilon}^{X}\frac{t\ln(t)}{(t^2+1)^2}dt=\left[-\frac{1}{2}\times\frac{1}{t^2+1}\ln(t)\right]_{\epsilon}^{X}+\frac{1}{2}\int_{\epsilon}^{X}\frac{1}{t(t^2+1)}dt$$
$$=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{X^2+1}\ln(X)+\frac{1}{2}\times\frac{1}{\epsilon^2+1}\ln(\epsilon)+\frac{1}{2}\int_{\epsilon}^{X}\left(\frac{1}{t}-\frac{t}{t^2+1}\right)dt$$
$$=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{X^2+1}\ln(X)+\frac{1}{2}\times\frac{1}{\epsilon^2+1}\ln(\epsilon)+\frac{1}{2}\left[\ln(t)-\frac{1}{2}\ln(t^2+1)\right]_{\epsilon}^{X}$$
$$=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{X^2+1}\ln(X)+\frac{1}{2}\times\frac{1}{\epsilon^2+1}\ln(\epsilon)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\ln(X)-\frac{1}{2}\ln(X^2+1)-\ln(\epsilon)-\frac{1}{2}\ln(\epsilon^2+1)\right)$$
$$=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{X^2+1}\ln(X)+\frac{1}{2}\ln(\epsilon)\left(\frac{1}{\epsilon^2+1}-1\right)+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{X}{\sqrt{X^2+1}}\right)-\frac{1}{4}\ln(\epsilon^2+1)$$
$$=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{X^2+1}\ln(X)-\frac{1}{2}\ln(\epsilon)\frac{\epsilon^2}{\epsilon^2+1}+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{X^2}}}\right)-\frac{1}{4}\ln(\epsilon^2+1)$$

Maintenant il n'y a plus de forme indéterminée compliquée, la limite est nulle

$$I_3=0$$

Remarque :

Il existe une bonne ruse pour cette intégrale, sachant que l'intégrale converge on peut faire le changement de variable $t=\frac{1}{u}\Leftrightarrow u=\frac{1}{t}$, $dt=-\frac{du}{u^2}$

$$t=0^+\Rightarrow u=+\infty$$
$$t=+\infty\Rightarrow u=0$$

$$I_3=\int_0^{+\infty}\frac{t\ln(t)}{(t^2+1)^2}dt=\int_{+\infty}^{0}\frac{\frac{1}{u}\ln\left(\frac{1}{u}\right)}{\left(\frac{1}{u^2}+1\right)^2}\left(-\frac{du}{u^2}\right)=-\int_0^{+\infty}\frac{1}{u}\frac{-\ln(u)}{\left(\frac{1+u^2}{u^2}\right)^2}\left(-\frac{du}{u^2}\right)$$
$$=-\int_0^{+\infty}\frac{1}{u^3}\frac{\ln(u)}{\frac{(1+u^2)^2}{u^4}}du=-\int_0^{+\infty}\frac{u\ln(u)}{(u^2+1)^2}du=-I_3$$

Donc $I_3=0$

Allez à : Exercice 1

Correction exercice 2.

- Il y a un problème en $+\infty$, soit on sait qu'une primitive de ln est $t\to t\ln(t)-t$ et cette primitive tend vers l'infini, soit on applique les règles de Riemann en $+\infty$ avec $\alpha=\frac{1}{2}\leq 1$

$$t^{\frac{1}{2}}\ln(t)\to+\infty$$

I_1 diverge.

Allez à : Exercice 2

- Il y a un problème en 0, soit on sait qu'une primitive de ln est $t\to t\ln(t)-t$ et cette primitive tend vers une limite finie 0 donc l'intégral converge, soit on applique les règles de Riemann en 0 avec $\alpha=\frac{1}{2}<1$

$$t^{\frac{1}{2}}\ln(t)\to 0$$

I_2 converge.

Allez à : Exercice 2

-

$$I_3=\int_0^{+\infty} e^{-4t}dt=\left[-\frac{1}{4}e^{-4t}\right]_0^{+\infty}=0+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

I_3 converge.

Allez à : Exercice 2

- Problème en $+\infty$

$$t^2e^{-t^2}\to 0$$

D'après les règles de Riemann $x^\alpha f(x)\to 0$ avec $\alpha>1$ entraine que la fonction est intégrable en $+\infty$

Allez à : Exercice 2

- Il y a un problème en 0 et un en $+\infty$

En $+\infty$

$$\frac{t^5}{(t^4+1)\sqrt{t}}\sim\sqrt{t}=\frac{1}{t^{-\frac{1}{2}}}$$

Il s'agit d'une fonction de Riemann avec $\alpha=-\frac{1}{2}\leq 1$ donc l'intégrale I_5 diverge (ce qui est évident, si on essaye d'intégrer $t\to\sqrt{t}$ on voit clairement le problème en $+\infty$). I_4 diverge.

Du coup il est inutile d'étudier l'intégrabilité en 0 mais cela ne posait pas de problème

$$\frac{t^5}{(t^4+1)\sqrt{t}}\sim\frac{t^5}{\sqrt{t}}=t^{\frac{9}{2}}$$

La fonction est prolongeable par continuité en 0.

Allez à : Exercice 2

- Il y a deux problèmes un en 0 et un autre en π

En 0

$$\ln(sin(t))=\ln\big(t+o(t)\big)=\ln\big(t+o(t)\big)=\ln\big(t\big(1+o(1)\big)=\ln(t)+\ln\big(1+o(1)\big)\sim\ln(t)$$

On applique les règles de Riemann en 0 avec $\alpha=\frac{3}{2}>1$

$$t^{\frac{3}{2}}\ln(t)\to 0$$

L'intégrale converge en 0

En π, on pose $u=\pi-t\to 0$ (c'est mieux que $u=t-\pi$)

$$\ln(\sin(t))=\ln(sin(u-\pi))=\ln(sin(u))$$

Comme précédemment l'intégrale converge.

Finalement l'intégrale I_6 converge.

Allez à : Exercice 2

- Il y a un problème en $+\infty$

$$1-\cos\left(\frac{1}{t}\right)=1-\left(1-\frac{\left(\frac{1}{t}\right)^2}{2!}+o\left(\frac{1}{t^2}\right)\right)=\frac{1}{2t^2}+o\left(\frac{1}{t^2}\right)\sim\frac{1}{2t^2}$$

Il s'agit d'une fonction de Riemann avec $\alpha=2$ intégrable en $+\infty$. I_7 converge.

Allez à : Exercice 2

- Il y a un problème en 0, mais attention on ne peut pas faire de développement limité de $t\to\sin\left(\frac{1}{t}\right)$ car la variable $\frac{1}{t}$ tend vers l'infini. On pose $I_8(\epsilon)=\int_\epsilon^1\sin\left(\frac{1}{t}\right)dt$, puis on fait le changement de variable $u=\frac{1}{t}\Leftrightarrow t=\frac{1}{u}$, $dt=-\frac{du}{u^2}$. $t=\epsilon\Rightarrow u=\frac{1}{\epsilon}$ et $t=1\Rightarrow u=1$

$$I_8(\epsilon)=\int_\epsilon^1\sin\left(\frac{1}{t}\right)dt=\int_1^{\frac{1}{\epsilon}}\sin(u)\left(-\frac{du}{u^2}\right)=-\int_1^{\frac{1}{\epsilon}}\frac{\sin(u)}{u^2}du$$

$\frac{1}{\epsilon}\to+\infty$ il s'agit de voir si la fonction $u\to\frac{\sin(u)}{u^2}$ est intégrable en $+\infty$

$$\left|\frac{\sin(u)}{u^2}\right| \le \frac{1}{u^2}$$

Il s'agit d'une fonction de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$ intégrable en $+\infty$ donc la fonction $u \to \frac{\sin(u)}{u^2}$ est absolument intégrable en $+\infty$ donc intégrable et I_8 converge.

Allez à : Exercice 2

- Attention il y a deux problèmes en $\frac{2}{\pi}$ parce que $\cos\left(\frac{2}{\frac{2}{\pi}}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et un autre en $+\infty$

En $\frac{2}{\pi}$ on pose $u = t - \frac{2}{\pi} \Leftrightarrow t = u + \frac{2}{\pi}$

$$\ln\left(\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right) = \ln\left(\cos\left(\frac{1}{u+\frac{2}{\pi}}\right)\right) = \ln\left(\cos\left(\frac{1}{\frac{2}{\pi}\left(1+\frac{\pi}{2}u\right)}\right)\right) = \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{1}{1+\frac{\pi}{2}u}\right)\right)$$

$$= \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{\pi}{2}u+o(u)\right)\right)\right) = \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi^2}{4}u+o(u)\right)\right)$$

$$= \ln\left(\sin\left(\frac{\pi^2}{4}u+o(u)\right)\right) = \ln\left(\frac{\pi^2}{4}u+o(u)\right) = \ln\left(\frac{\pi^2}{4}\right) + \ln\big(u+o(u)\big) \sim \ln(u)$$

$$u^{\frac{1}{2}}\ln(u) \to 0$$

Lorsque u tend vers 0, d'après les règles de Riemann si $u^\alpha f(u) \to 0$ avec $\alpha < 1$ alors la fonction est intégrable en 0 donc $t \to \ln\left(\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right)$ est intégrable en $\frac{2}{\pi}$

En $+\infty$

$$\ln\left(\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right) = \ln\left(1 - \frac{\left(\frac{1}{t}\right)^2}{2!} + o\left(\frac{1}{t^2}\right)\right) = -\frac{1}{2t^2} + o\left(\frac{1}{t^2}\right) \sim -\frac{1}{2t^2}$$

Il s'agit d'une fonction de Riemann intégrable en $+\infty$ avec $\alpha = 2 > 1$

Allez à : Exercice 2

Correction exercice 3.

1.

$F(x) = \int_1^x \frac{\ln(1+t^2)}{t^2}dt$

$u'(x) = \frac{1}{t^2}$ $\qquad u(x) = -\frac{1}{t}$

$v(x) = \ln(1+t^2)$ $\qquad v'(x) = \frac{2t}{1+t^2}$

$F(x) = \left[-\frac{1}{t}\ln(1+t^2)\right]_1^x$ $\qquad - \int_1^x \frac{2t}{-t(t^2+1)}dt$

$$F(x) = \left[-\frac{1}{t}\ln(1+t^2)\right]_1^x + 2\int_1^x \frac{1}{1+t^2}dt = -\frac{1}{x}\ln(1+x^2) + \ln(2) + 2\arctan(x) - 2\arctan(1)$$

$$= -\frac{1}{x}\ln(1+x^2) + \ln(2) + 2\arctan(x) - \frac{\pi}{2}$$

2.

$$\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x}\ln(1+x^2) = 0$$

Et

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$$

Donc $F(x)$ admet une limite finie, ce qui signifie que I converge et

$$I=\lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{\ln(1+t^2)}{t^2}dt=\ln(2)+\pi-\frac{\pi}{2}=\ln(2)+\frac{\pi}{2}$$

Allez à : Exercice 3

Correction exercice 4.

1. $u=\sqrt{t^2+1}\Leftrightarrow u^2=t^2+1\Leftrightarrow t^2=u^2-1\Leftrightarrow t=\sqrt{u^2-1}$

   Ce qui entraine que

$$dt=\frac{2udu}{2\sqrt{u^2-1}}=\frac{udu}{\sqrt{u^2-1}}$$

$$t=1\Rightarrow u=\sqrt{2}$$

$$t=X\Rightarrow u=\sqrt{X^2+1}$$

$$F(x)=\int_1^x \frac{1}{t\sqrt{t^2+1}}dt=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{X^2+1}}\frac{1}{\sqrt{u^2-1}u}\frac{udu}{\sqrt{u^2-1}}=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{X^2+1}}\frac{du}{u^2-1}$$

   Il existe a et b deux réels tels que :

$$\frac{1}{u^2-1}=\frac{1}{(u-1)(u+1)}=\frac{a}{u-1}+\frac{b}{u+1}$$

   On multiplie par $u-1$, puis $u=1$

$$a=\left[\frac{1}{u+1}\right]_{u=1}=\frac{1}{2}$$

   On multiplie par $u+1$, puis $u=-1$

$$b=\left[\frac{1}{u-1}\right]_{u=1}=-\frac{1}{2}$$

$$F(x)=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{X^2+1}}\frac{du}{u^2-1}=\frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{X^2+1}}\left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\right)du=\frac{1}{2}[\ln|u-1|-\ln|u+1|]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{X^2+1}}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{X^2+1}}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{X^2+1}-1}{\sqrt{X^2+1}+1}\right|-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right|$$

2. $\frac{3}{2}>1$ et

$$\lim_{t\to+\infty}t^{\frac{3}{2}}\frac{1}{t\sqrt{t^2+1}}=0$$

   Donc $\frac{1}{t\sqrt{t^2+1}}$ est intégrable en $+\infty$

3. Première méthode

$$F(x)=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{X\left(\sqrt{1+\frac{1}{X^2}}-\frac{1}{X^2}\right)}{X\left(\sqrt{1+\frac{1}{X^2}}+\frac{1}{X^2}\right)}\right|-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+\frac{1}{X^2}}-\frac{1}{X^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{X^2}}+\frac{1}{X^2}}\right|-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)\xrightarrow[X\to+\infty]{}-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)=-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{2-1}\right)$$

$$=-\ln\left(\sqrt{2}-1\right)$$

   Deuxième méthode, on pose $t=\sqrt{X^2+1}\to+\infty$

$$F(x)=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right|\xrightarrow[t\to+\infty]{}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right|$$

Allez à : Exercice 4

Correction exercice 5.

- Il y a un problème en $+\infty$. Malheureusement les règles de Riemann ne marchent, essayons quand même

Convergence

$$t^\alpha \frac{1}{t(\ln(t))^2}=\frac{t^{\alpha-1}}{(\ln(t))^2}\to 0$$

Impose que $\alpha \leq 1$ mais pour utiliser la règle de Riemann concluant à la convergence en $+\infty$ il faut que α soit strictement supérieur à 1

Divergence

$$t^\alpha \frac{1}{t(\ln(t))^2}=\frac{t^{\alpha-1}}{(\ln(t))^2}\to +\infty$$

Impose que $\alpha > 1$ mais pour utiliser la règle de Riemann concluant à la divergence en $+\infty$ il faut que α soit inférieur ou égal à 1.

Dans ce cas on fait autrement

$$I_1(X)=\int_2^X \frac{dt}{t(\ln(t))^2}=\left[-\frac{1}{\ln(t)}\right]_2^X=-\frac{1}{\ln(X)}+\frac{1}{\ln(2)}\to\frac{1}{\ln(2)}$$

Donc I_1 converge.

Allez à : Exercice 5

- t^2+2t+7 n'est jamais nul

$$\left|\frac{\arctan(t)}{t^2+2t+7}\right|<\frac{\frac{\pi}{2}}{t^2}=\frac{\pi}{2t^2}$$

Il s'agit d'une fonction de Riemann intégrable en $+\infty$ avec $\alpha=2$. Donc I_2 converge.

Allez à : Exercice 5

Correction exercice 6.

Il y a deux problème, un en 0 et un $+\infty$

En 0, $t^3+\sqrt{t}\sim\sqrt{t}$

Si $x\geq 2-x \Leftrightarrow x\geq 1$, alors $t^x+t^{2-x}\sim t^{2-x}$

Donc

$$\frac{t^x+t^{2-x}}{t^3+\sqrt{t}}\sim\frac{t^{2-x}}{\sqrt{t}}=\frac{1}{t^{x-\frac{3}{2}}}$$

Il s'agit d'une fonction de Riemann convergente (en 0) si et seulement si $x-\frac{3}{2}<1\Leftrightarrow x<\frac{5}{2}$

$x\geq 1$ et $x<\frac{5}{2}$. Il y a convergence pour $x\in\left[1,\frac{5}{2}\right[$

Si $x\leq 2-x\Leftrightarrow x\leq 1$, alors $t^x+t^{2-x}\sim t^x$

Donc

$$\frac{t^x+t^{2-x}}{t^3+\sqrt{t}}\sim\frac{t^x}{\sqrt{t}}=\frac{1}{t^{\frac{1}{2}-x}}$$

Il s'agit d'une fonction de Riemann convergente si et seulement si $\frac{1}{2}-x<1\Leftrightarrow x>-\frac{1}{2}$

$x\leq 1$ et $x>-\frac{1}{2}$. Il y a convergence si $n\in\left]-\frac{1}{2},1\right]$

Finalement il y a convergence en 0 si et seulement si $x\in\left]-\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right[$

En $+\infty$, $t^3+\sqrt{t}\sim t^3$

Si $x\leq 2-x\Leftrightarrow x\leq 1$, alors $t^x+t^{2-x}\sim t^{2-x}$

Donc

$$\frac{t^x+t^{2-x}}{t^3+\sqrt{t}}\sim\frac{t^{2-x}}{t^3}=\frac{1}{t^{x+1}}$$

Il s'agit d'une fonction de Riemann convergente (en $+\infty$) si et seulement si $n+1>1 \Leftrightarrow n>0$
$x \leq 1$ et $x>0$. il y a convergence pour $x \in]0,1]$.
Si $x \geq 2-x \Leftrightarrow x \geq 1$, alors $t^x+t^{2-x} \sim t^x$
Donc

$$\frac{t^x+t^{2-x}}{t^3+\sqrt{t}} \sim \frac{t^x}{t^3} = \frac{1}{t^{3-x}}$$

Il s'agit d'une fonction de Riemann convergente (en $+\infty$) si et seulement si $3-x>1 \Leftrightarrow x<2$
$x \geq 1$ et $x<2$. Il y a convergence si $x \in [1,2[$
Finalement il y a convergence en $+\infty$ si et seulement si $x \in]0,2[$
I_3 converge si et seulement si $x \in]0,2[\cap \left]-\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right[=]0,2[$

Allez à : Exercice 6

Correction exercice 7.

a)

Si $a>1$, on choisit $\alpha \in]1,a[$

$$t^\alpha \frac{1}{t^a(\ln(t))^b} = \frac{t^{\alpha-a}}{(\ln(t))^b} \to 0$$

Lorsque $t \to +\infty$
D'après les règles de Riemann l'intégrale converge en $+\infty$ car $\alpha>1$
Si $a<1$, on choisit $\alpha \in]a,1[$

$$t^\alpha \frac{1}{t^a(\ln(t))^b} = \frac{t^{\alpha-a}}{(\ln(t))^b} \to +\infty$$

Lorsque $t \to +\infty$
D'après les règles de Riemann l'intégrale diverge en $+\infty$ car $\alpha<1$

b) Si $b \neq 1$

$$\int \frac{1}{t\,(\ln(t))^b}dt = \int (\ln(t))^{-b} \times \frac{1}{t}dt = \frac{(\ln(t))^{-b+1}}{-b+1}+K$$

Si $-b+1>0 \Leftrightarrow b<1$

$$(\ln(t))^{-b+1} \to +\infty$$

Lorsque $t \to +\infty$ alors l'intégrale diverge
Si $-b+1<0 \Leftrightarrow b>1$

$$(\ln(t))^{-b+1} \to 0$$

Lorsque $t \to +\infty$ alors l'intégrale converge
Si $b=1$

$$\int \frac{dt}{t\ln(t)} = \ln(ln(t))+K \to +\infty$$

Lorsque $t \to +\infty$ alors l'intégrale diverge.

Allez à : Exercice 7

Correction exercice 8.

1. Il y a un problème en $+\infty$

$$\left|\frac{\sin(t)}{t^{\alpha+1}}\right| \leq \frac{1}{t^{\alpha+1}}$$

Or $\alpha+1>1$, donc il s'agit d'une fonction de Riemann intégrable en $+\infty$, donc $t \to \frac{\sin(t)}{t^{\alpha+1}}$ est absolument intégrable et donc intégrable.

$\int_1^{+X} \frac{\sin(t)}{t^{\alpha+1}} dt$	
$u'(t) = \frac{1}{t^{\alpha+1}} = t^{-\alpha-1}$	$u(t) = \frac{t^{-\alpha}}{-\alpha}$
$v(t) = \sin(t)$	$v'(t) = \cos(t)$
$\int_1^X \frac{\sin(t)}{t^{\alpha+1}} dt = \left[\frac{t^{-\alpha}}{-\alpha}\sin(t)\right]_1^X -$	$\int_1^X \left(\frac{t^{-\alpha}}{-\alpha}\right)\cos(t)\,dt$

$$\int_1^X \frac{\sin(t)}{t^{\alpha+1}} dt = \left[\frac{t^{-\alpha}}{-\alpha}\sin(t)\right]_1^X + \frac{1}{\alpha}\int_1^X t^{-\alpha}\cos(t)\,dt = -\frac{\sin(X)}{\alpha X^\alpha} + \frac{\sin(1)}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}\int_1^X \frac{\cos(t)}{t^\alpha} dt$$

Soit encore

$$\int_1^X \frac{\sin(t)}{t^{\alpha+1}} dt = \left[\frac{t^{-\alpha}}{-\alpha}\sin(t)\right]_1^X + \frac{1}{\alpha}\int_1^X t^{-\alpha}\cos(t)\,dt = -\frac{\sin(X)}{\alpha X^\alpha} + \frac{\sin(1)}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}\int_1^X \frac{\cos(t)}{t^\alpha} dt$$

$$\int_1^X \frac{\cos(t)}{t^\alpha} dt = \alpha \int_1^X \frac{\sin(t)}{t^{\alpha+1}} dt + \frac{\sin(X)}{X^\alpha} - \sin(1)$$

Les termes de droites admettent une limite lorsque $X \to +\infty$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^\alpha} dt$ converge.

2.

$$\frac{\cos^2(t)}{t} = \frac{1+\cos(2t)}{2t} = \frac{1}{2t} + \frac{\cos(2t)}{2t}$$

$$\int_1^X \frac{\cos(2t)}{2t} dt = \frac{1}{2}\int_2^{2X} \frac{\cos(u)}{u} du = \frac{1}{2}\int_1^{2X} \frac{\cos(u)}{u} du + \frac{1}{2}\int_2^{1} \frac{\cos(u)}{u} du$$

En faisant le changement de variable $u = 2t$

La première intégrale converge grâce au 1. et la seconde est finie donc $\frac{\cos(2t)}{2t}$ est intégrable en $+\infty$, et comme $\frac{1}{2t}$ n'est pas intégrable en $+\infty$ (fonction de Riemann avec $\alpha = 1$) par conséquent $\frac{\cos^2(t)}{t}$ n'est pas intégrable en $+\infty$ (la somme d'une intégrale divergente et d'une intégrale convergente diverge).

Comme $|\cos(t)| < 1$ on a $\cos^2(t) \leq |\cos(t)|$ et donc

$$\frac{\cos^2(t)}{t} \leq \frac{|\cos(t)|}{t}$$

La première fonction n'étant pas intégrable en $+\infty$ la seconde ne l'ai pas n'ont plus. Autrement dit $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos(t)}{t}\right| dt$ diverge

$$\frac{\frac{\cos(t)}{\sqrt{t}} + \frac{\cos^2(t)}{t}}{\frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}} = 1 + \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}} \to 1$$

Donc

$$\frac{\cos(t)}{\sqrt{t}} \sim \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}} + \frac{\cos^2(t)}{t}$$

$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}} dt$ converge grâce au 1.

$\frac{\cos(t)}{\sqrt{t}} + \frac{\cos^2(t)}{t}$ est la somme d'une fonction intégrable en $+\infty$ et d'une qui ne l'ai pas donc $\int_1^{+\infty} \left(\frac{\cos(t)}{\sqrt{t}} + \frac{\cos^2(t)}{t}\right) dt$ diverge.

Remarque :

Le résultat qui veut que deux fonctions équivalentes en $+\infty$ soit de même nature nécessite que ces deux fonctions soient de signes constants (positif dans la cours, mais pour négatif cela revient au même) or ces deux fonctions sont parfois positives et parfois négatives.

Allez à : Exercice 8

Correction exercice 9.

1. Il y a deux problème en 0 et en 1
En 0 :
$$x^{\frac{1}{2}}\frac{x-1}{\ln(x)}\to 0$$
D'après les règles de Riemann en 0 si $x^{\alpha}f(x)\to 0$ avec $\alpha<0$ alors la fonction est intégrable en 0.
En 1 on pose $t=1-x\to 0$
$$\frac{x-1}{\ln(x)}=\frac{-t}{\ln(1-t)}=\frac{-t}{-t+o(t)}=\frac{1}{1+o(1)}\to 1$$
La fonction est prolongeable par continuité en 1 par $f(1)=1$ donc la fonction est intégrable.
2. A l'aide de la formule de Taylor-Lagrange appliquée à la fonction $f(x)=\ln(x)$ il existe $c\in]x,1[$ tel que
$$f(x)=f(1)+(x-1)f'(c)$$
$$\ln(x)=(x-1)\times\frac{1}{c}$$
$$x<c<1\Leftrightarrow 1<\frac{1}{c}<\frac{1}{x}\Leftrightarrow x-1>\frac{x-1}{c}>\frac{x-1}{x}$$
Car $x-1<0$, on en déduit que
$$x-1>\ln(x)>\frac{x-1}{x}$$
3. On fait le changement de variable $t=x^2$, $dt=2xdx$, $x=0\Rightarrow t=0$ et $x=X\Rightarrow t=X^2$
$$\int_0^X\frac{xdx}{\ln(x)}=\frac{1}{2}\int_0^{X^2}\frac{dt}{\ln(t^2)}=\frac{1}{2}\int_0^{X^2}\frac{dt}{2\ln(t)}=\int_0^{X^2}\frac{dt}{\ln(t)}=\int_0^{X^2}\frac{dx}{\ln(x)}$$
4.
$$\int_0^X\frac{x-1}{\ln(x)}dx=\int_0^X\frac{x}{\ln(x)}dx-\int_0^X\frac{1}{\ln(x)}dx=\int_0^{X^2}\frac{1}{\ln(x)}dx-\int_0^X\frac{1}{\ln(x)}dx=\int_X^{X^2}\frac{1}{\ln(x)}dx$$
A partir de
$$\frac{x-1}{x}<\ln(x)<x-1$$
En divisant par $x-1<0$
$$\frac{1}{x-1}>\frac{1}{\ln(x)}>\frac{x}{x-1}$$
$$\int_X^{X^2}\frac{x}{x-1}dx\le\int_X^{X^2}\frac{1}{\ln(x)}dx\le\int_X^{X^2}\frac{1}{x-1}dx$$
$$\int_X^{X^2}\frac{x}{x-1}dx=\int_X^{X^2}\frac{x-1+1}{x-1}dx=\int_X^{X^2}dx+\int_X^{X^2}\frac{1}{x-1}dx=X^2-X+\ln\left(\frac{X^2-1}{X-1}\right)$$
$$=X(X-1)+\ln(X+1)$$
$$\int_X^{X^2}\frac{1}{x-1}dx=\ln(X+1)$$
On en déduit que
$$X(X-1)+\ln(X+1)\le\int_X^{X^2}\frac{1}{\ln(x)}dx=\int_0^X\frac{x-1}{\ln(x)}dx\le\ln(X+1)$$
En faisant tendre X vers 1on trouve que
$$\int_0^1\frac{x-1}{\ln(x)}dx=\ln(2)$$

Allez à : Exercice 9

Correction exercice 10.

On pose

$$F(x)=\int_x^b f(t)dt \qquad \text{et} \qquad G(x)=\int_x^b g(t)dt$$

D’après le théorème des accroissements finis généralisés (pour deux fonctions), entre x et $X>x$, il existe $c\in]x,X[$ tel que

$$\left(F(x)-\lim_{X\to b^-}F(X)\right)G'(c_x)=\left(G(x)-\lim_{X\to b^-}F(X)\right)F'(c_x)$$

On a

$$F'(x)=-f(x) \qquad \text{et} \qquad G'(x)=-g(x)$$

Et

$$\lim_{X\to b^-}F(X)=0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{X\to b^-}F(X)$$

Donc

$$F(x)g(c_x)=G(x)f(c_x)$$

Comme f et g sont équivalentes au voisinage de b, il existe une fonction ϵ tendant vers 0 lorsque $x\to b^-$ tel que

$$\frac{f(x)}{g(x)}=1+\epsilon(x)\Leftrightarrow f(x)=g(x)\big(1+\epsilon(x)\big)$$

Donc

$$F(x)g(c_x)=G(x)g(c_x)\big(1+\epsilon(c_x)\big)$$

g ne peut être identiquement nulle lorsque l’on s’approche de b^- sinon f et g ne peuvent pas être équivalente, bref on simplifie par $g(c_x)$

$$F(x)=G(x)\big(1+\epsilon(c_x)\big)$$

Comme $c\in]x,b^-[$

$$\lim_{x\to b^-}\epsilon(c_x)=0$$

Ce qui montre que $F\sim G$

Allez à : Exercice 10

Remarque :

En 1988 c’est tombé à l’agrégation de mathématiques, il n’y en a pas un sur dix qui a su faire !

Correction exercice 11.

1. En 0. $\frac{\mathrm{Ln}(t)}{t^2+a^2}\sim\frac{\ln(t)}{a^2}$

   $t^{\frac{1}{2}}\frac{\ln(t)}{a^2}\to 0$ et $\frac{1}{2}<1$, d’après les règles de Riemann, l’intégrale $\int_0\frac{\ln(t)}{a^2}dt$ converge.

   $\frac{\ln(t)}{a^2}$ est de signe constant au voisinage de 0 donc l’intégrale $\int_0\frac{\ln(t)}{t^2+a^2}dt$ converge.

   En $+\infty$. $\frac{\mathrm{Ln}(t)}{t^2+a^2}\sim\frac{\ln(t)}{t^2}$

   $t^{\frac{3}{2}}\frac{\ln(t)}{t^2}\to 0$ et $\frac{3}{2}>1$, d’après les règles de Riemann, l’intégrale $\int^{+\infty}\frac{\ln(t)}{t^2}dt$ converge.

   $\frac{\ln(t)}{t^2}$ est de signe constant en $+\infty$ donc $\int^{+\infty}\frac{\ln(t)}{t^2+a^2}dt$.

   Finalement I converge.

2. $dt=-\frac{a^2}{x^2}dx$ et $\frac{\ln(t)}{t^2+a^2}=\frac{\ln\left(\frac{a^2}{x}\right)}{\frac{a^4}{x^2}+a^2}$

3. Si $t=\varepsilon$ alors $x=\frac{a^2}{\varepsilon}$ et si $t=X$ alors $x=\frac{a^2}{X}$

$$I_{\varepsilon,X} = \int_{\varepsilon}^{X} \frac{\ln(t)}{t^2+a^2} dt = \int_{\frac{a^2}{\varepsilon}}^{\frac{a^2}{X}} \frac{\ln\left(\frac{a^2}{x}\right)}{\frac{a^4}{x^2}+a^2}\left(-\frac{a^2}{x^2}\right) dx = \int_{\frac{a^2}{\varepsilon}}^{\frac{a^2}{X}} \frac{\ln(a^2)-\ln(x)}{\left(\frac{a^2}{x^2}+1\right)a^2}\left(-\frac{a^2}{x^2}\right) dx = -\int_{\frac{a^2}{\varepsilon}}^{\frac{a^2}{X}} \frac{2\ln(a)-\ln(x)}{a^2+x^2} dx$$

$$= -2\ln(a) \int_{\frac{a^2}{\varepsilon}}^{\frac{a^2}{X}} \frac{1}{a^2+x^2} dx + \int_{\frac{a^2}{\varepsilon}}^{\frac{a^2}{X}} \frac{\ln(x)}{a^2+x^2} dx = -2\ln(a)\left[\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)\right]_{\frac{a^2}{\varepsilon}}^{\frac{a^2}{X}} + \int_{\frac{a^2}{\varepsilon}}^{\frac{a^2}{X}} \frac{\ln(x)}{a^2+x^2} dx$$

$$= -2\frac{\ln(a)}{a}\arctan\left(\frac{a}{X}\right) + 2\frac{\ln(a)}{a}\arctan\left(\frac{a}{\varepsilon}\right) + \int_{\frac{a^2}{\varepsilon}}^{\frac{a^2}{X}} \frac{\ln(x)}{a^2+x^2} dx$$

4. $\mathrm{Lim}_{\varepsilon\to 0^+} \frac{a^2}{\varepsilon} = +\infty$ et $\lim_{X\to+\infty} \frac{a^2}{X} = 0$ donc $\lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+\\ X\to+\infty}} \int_{\frac{a^2}{\varepsilon}}^{\frac{a^2}{X}} \frac{\ln(x)}{a^2+x^2} dx = \int_{+\infty}^{0} \frac{\ln(x)}{a^2+x^2} dx = -I$

$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \arctan\left(\frac{a}{\varepsilon}\right) = \frac{\pi}{2}$ et $\lim_{X\to+\infty} \arctan\left(\frac{a}{X}\right) = \arctan(0) = 0$

En faisant tendre ε vers 0 et X vers l'infini dans la relation ci-dessous on a :

$$I = \frac{2\times\ln(a)}{a}\frac{\pi}{2} - I$$

D'où

$$I = \frac{\ln(a)}{a}\frac{\pi}{2}$$

Allez à : Exercice 11

Equations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

Exercice 1.

Résoudre

$$y''-3y'+2y=2x^2-6x+4\quad (E)$$

Allez à : Correction exercice 1

Exercice 2.

Résoudre

$$y''-3y'=2\quad (E)$$

Allez à : Correction exercice 2

Exercice 3.

Résoudre

$$y''-3y'+2y=e^{-x}\quad (E)$$

Allez à : Correction exercice 3

Exercice 4.

Résoudre

$$y''-3y'+2y=36xe^{-x}\quad (E)$$

Allez à : Correction exercice 4

Exercice 5.

Résoudre

$$y''-3y'+2y=xe^{x}$$

Allez à : Correction exercice 5

Exercice 6.

Résoudre

$$y''+2y'+y=2e^{-x}\quad (E)$$

Allez à : Correction exercice 6

Exercice 7.

Résoudre

$$y''+2y'+5y=5\cos(2x)-3\sin(2x)\quad (E)$$

Allez à : Correction exercice 7

Exercice 8.

Résoudre

$$y''+2y'+5y=(4x+6)\cos(x)+(-2x+6)\sin(x)\quad (E)$$

Allez à : Correction exercice 8

Exercice 9.

Résoudre

$$y''+y=\sin(x)\quad (E)$$

Allez à : Correction exercice 9

Exercice 10.

Résoudre

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-x}(6\cos(x) - 3\sin(x)) \quad (E)$$

Allez à : Correction exercice 10

Exercice 11.

Résoudre

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-x}(2\cos(2x) + 4\sin(2x))$$

Allez à : Correction exercice 11

Exercice 12.

Résoudre

$$y'' - 3y' + 2y = e^{-x} + 6x$$

Allez à : Correction exercice 12

Exercice 13.

Résoudre

$$y'' + 4y = \cos^2(x)$$

Allez à : Correction exercice 13

Exercice 14.

Soit $k \in \mathbb{R}$

1. Selon les valeurs de k résoudre
$$y'' - (1 + k)y' + ky = 0$$
2. Selon les valeurs de k résoudre
$$y'' - (1 + k)y' + ky = e^{2x}$$

Allez à : Correction exercice 14

Exercice 15.

Soit $k \in \mathbb{R}$

1. Selon les valeurs de k résoudre
$$y'' - (1 + k)y' + ky = 0$$
2. Selon les valeurs de k résoudre
$$y'' - (1 + k)y' + ky = e^{2x}$$

Allez à : Correction exercice 15

CORRECTIONS

Correction exercice 1.

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \quad (E')$$
$$r^2 - 3r + 2 = 0 \Leftrightarrow r = 1 \text{ ou } r = 2$$

Donc la solution générale de (E') est $\varphi(x) = \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{2x}$

On cherche une solution particulière de la forme

$$\varphi_P(x) = Ax^2 + Bx + C$$
$$\varphi_P'(x) = 2Ax + B$$
$$\varphi_P''(x) = 2A$$

On remplace cela dans (E), pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\varphi_P''(x) - 3\varphi_P'(x) + 2\varphi_P(x) = 2x^2 - 6x + 4 \Leftrightarrow 2A - 3(2Ax + B) + 2(Ax^2 + Bx + C) = 2x^2 - 6x + 4$$

$$\Leftrightarrow 2Ax^2 + (-6A + 2B)x + 2A - 3B + 2C = 2x^2 - 6x + 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 2A = 2 \\ -6A + 2B = -6 \\ 2A - 3B + 2C = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ -6 + 2B = -6 \\ 2 - 3B + 2C = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \\ C = 1 \end{cases}$$

On en déduit que $\varphi_P(x) = x^2 + 1$

Et la solution générale de (E) est :

$$\varphi(x) = \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{2x} + x^2 + 1$$

Allez à : Exercice 1

Correction exercice 2.

$$y'' - 3y' = 0 \quad (E')$$

L'équation caractéristique de (E') est : $r^2 - 3r = 0 \Leftrightarrow r = 0$ ou $r = 3$

La solution générale de (E') est :

$$\varphi(x) = \lambda_1 + \lambda_2 e^{3x}$$

0 est une solution simple de l'équation caractéristique et le degré du polynôme 2 est 0 donc il existe une solution particulière de (E) de la forme

$$\varphi_P(x) = Ax$$

$$\varphi_P'(x) = A \quad \text{et} \quad \varphi_P''(x) = 0$$

On remplace cela dans (E)

$$\varphi_P''(x) - 3\varphi_P'(x) = 2 \Leftrightarrow -3A = 2 \Leftrightarrow A = -\frac{2}{3}$$

Donc

$$\varphi_P(x) = -\frac{2}{3}x$$

Et la solution générale de (E)

$$\varphi(x) = \lambda_1 + \lambda_2 e^{3x} - \frac{2}{3}x$$

Remarque :

Si on pose $z' = y$ alors (E) devient

$$z' - 3z = 2$$

Il s'agit d'une équation du premier ordre dont la solution est :

$$\psi(x) = \mu e^{3x} - \frac{2}{3}$$

Il ne reste plus qu'à intégrer cette équation pour retrouver la solution générale ci-dessus.

Allez à : Exercice 2

Correction exercice 3.

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \quad (E')$$

$$r^2 - 3r + 2 = 0 \Leftrightarrow r = 1 \text{ ou } r = 2$$

Donc la solution générale de (E') est $\varphi(x) = \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{2x}$

Le second membre est le produit d'une constante 1 (donc d'un polynôme de degré 0) par une exponentielle avec $\alpha = -1$, -1 n'est pas solution de l'équation caractéristique de (E') donc (E) admet une solution particulière de la forme

$$\varphi_P(x) = Ae^{-x}$$

$$\varphi'_P(x) = -Ae^{-x} \quad \text{et} \quad \varphi''_P(x) = Ae^{-x}$$

On remplace cela dans (E)

$$\varphi''_P(x) - 3\varphi'_P(x) + 2\varphi_P(x) = e^{-x} \Leftrightarrow Ae^{-x} - 3(-e^{-x}) + 2Ae^{-x} = e^{-x} \Leftrightarrow 6A = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{6}$$

Donc

$$\varphi_P(x) = \frac{1}{6}e^{-x}$$

Et la solution générale de (E) est

$$\varphi(x) = \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{2x} + \frac{1}{6}e^{-x}$$

Allez à : Exercice 3

Correction exercice 4.

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \ \ (E')$$

$$r^2 - 3r + 2 = 0 \Leftrightarrow r = 1 \ \text{ ou } \ r = 2$$

Donc la solution générale de (E') est $\varphi(x) = \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{2x}$

Le second membre est le produit d'un polynôme de degré 1 par une exponentielle avec $\alpha = -1$, or -1 n'est pas solution de l'équation caractéristique de (E') donc (E) admet une solution particulière de la forme

$$\varphi_P(x) = (Ax + B)e^{-x}$$

$$\varphi'_P(x) = Ae^{-x} - (Ax + B)e^{-x} = (-Ax + A - B)e^{-x}$$

$$\varphi''_P(x) = -Ae^{-x} - (-Ax + A - B)e^{-x} = (Ax - 2A + B)e^{-x}$$

On remplace cela dans (E)

$$\begin{aligned}
&\varphi''_P(x) - 3\varphi'_P(x) + 2\varphi_P(x) = 36xe^{-x} \\
&\Leftrightarrow (Ax - 2A + B)e^{-x} - 3(-Ax + A - B)e^{-x} + 2(Ax + B)e^{-x} = 36e^{-x} \\
&\Leftrightarrow (6Ax - 5A + 6B)e^{-x} = 36xe^{-x} \Leftrightarrow \begin{cases} 6A = 36 \\ -5A + 6B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 6 \\ B = 5 \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc

$$\varphi_P(x) = (6x + 5)e^{-x}$$

Et la solution générale de (E) est :

$$\varphi(x) = \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{2x} + (6x + 5)e^{-x}$$

Allez à : Exercice 4

Correction exercice 5.

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \ \ (E')$$

$$r^2 - 3r + 2 = 0 \Leftrightarrow r = 1 \text{ ou } r = 2$$

Donc la solution générale de (E') est $\varphi(x) = \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{2x}$

Le second membre est le produit d’un polynôme de degré 1 par une exponentielle avec $\alpha = 1$, or 1 est solution de l’équation caractéristique de (E') donc (E) admet une solution particulière de la forme

$$\varphi_P(x) = x(Ax + B)e^x = (Ax^2 + Bx)e^x$$

$$\varphi_P'(x) = (2Ax + B)e^x + (Ax^2 + Bx)e^x = (Ax^2 + (2A + B)x + B)e^x$$

$$\begin{aligned}\varphi_P''(x) &= (2Ax + 2A + B)e^x + (Ax^2 + (2A + B)x + B)e^x \\ &= (Ax^2 + (4A + B)x + 2A + 2B)e^x\end{aligned}$$

On remplace cela dans (E)

$$\begin{aligned}&\varphi_P''(x) - 3\varphi_P'(x) + 2\varphi_P(x) = xe^x \\ &\Leftrightarrow (Ax^2 + (4A + B)x + 2A + 2B)e^x - 3(Ax^2 + (2A + B)x + B)e^x \\ &+ 2(Ax^2 + Bx)e^x = xe^x \\ &\Leftrightarrow (A - 3A + 2A)x^2 + (4A + B - 6A - 3B + 2B)x + 2A + 2B - 3B = x \\ &\Leftrightarrow -2Ax + 2A - B = x \Leftrightarrow \begin{cases} -2A = 1 \\ 2A - B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{1}{2} \\ B = -1 \end{cases}\end{aligned}$$

Donc

$$\varphi_P(x) = x\left(-\frac{1}{2}x - 1\right)e^x = \left(-\frac{1}{2}x^2 - x\right)e^x$$

Et la solution générale de (E) est :

$$\varphi(x) = \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{2x} + \left(-\frac{1}{2}x^2 - x\right)e^x = \lambda_2 e^{2x} + \left(-\frac{1}{2}x^2 - x + \lambda_1\right)e^x$$

Allez à : Exercice 5

Correction exercice 6.

$$y'' + 2y' + y = 0 \ \ (E)$$

$$r^2 + 2r + 1 = 0 \Leftrightarrow (r + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow r = -1$$

-1 est une racine double de l’équation caractéristique de (E') donc la solution générale de (E') est :

$$\varphi(x) = (\lambda_1 + \lambda_2 x)e^{-x}$$

Le second membre est le produit d’une constante 2 (donc d’un polynôme de degré 0) par une exponentielle avec $\alpha = -1$, -1 est solution double de l’équation caractéristique de (E') donc (E) admet une solution particulière de la forme

$$\varphi_P(x) = Ax^2 e^{-x}$$

$$\varphi_P'(x) = 2Ax - Ax^2 e^{-x} = A(-x^2 + 2x)e^{-x}$$

$$\varphi_P''(x) = A\big((-2x + 2)e^{-x} - (-x^2 + 2x)e^{-x}\big) = A(x^2 - 4x + 2)e^{-x}$$

On remplace cela dans (E)

$$\varphi_P''(x)+2\varphi_P'(x)+\varphi_P(x)=2e^{-x}\Leftrightarrow A(x^2-4x+2)e^{-x}+2A(-x^2+2x)e^{-x}+Ax^2e^{-x}$$
$$=2e^{-x}\Leftrightarrow (A-2A+A)x^2+(-4A+4A)x+2A=2\Leftrightarrow A=1$$

Donc

$$\varphi_P(x)=x^2e^{-x}$$

Et la solution générale de (E) est :

$$\varphi(x)=(\lambda_1+\lambda_2x)e^{-x}+x^2e^{-x}=(\lambda_1+\lambda_2x+x^2)e^{-x}$$

Allez à : Exercice 6

Correction exercice 7.

$$y''+2y'+5y=0\quad (E')$$

$$r^2+2r+5=0\Leftrightarrow r=-1+2i\quad \text{ou}\quad r=-1-2i$$

La solution générale de (E') est :

$$\varphi(x)=e^{-x}(\lambda_1\cos(2x)+\lambda_2\sin(2x))$$

Ici $\omega=2$ et $2i$ n'est pas une racine de l'équation caractéristique, donc (E) admet une solution particulière de la forme

$$\varphi_P(x)=A\cos(2x)+B\sin(2x)$$

$$\varphi_P'(x)=-2A\sin(2x)+2B\cos(2x)$$

$$\varphi_P''(x)=-4A\cos(2x)-4B\sin(2x)$$

On remplace cela dans (E)

$$\varphi_P''(x)+2\varphi_P'(x)+5\varphi_P(x)=5\cos(2x)-3\sin(2x)$$
$$\Leftrightarrow -4A\cos(2x)-4B\sin(2x)+2(-2A\sin(2x)+2B\cos(2x))$$
$$+5(A\cos(2x)+B\sin(2x))=5\cos(2x)-3\sin(2x)$$
$$\Leftrightarrow (-4A+5A+4B)\cos(2x)+(-4B-4A+5B)\sin(2x)$$
$$=5\cos(2x)-3\sin(2x)\Leftrightarrow\begin{cases}A+4B=5\\-4A+B=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=1\\B=1\end{cases}$$

Donc $\varphi_P(x)=\cos(2x)+\sin(2x)$

Et la solution générale de (E) est :

$$\varphi(x)=e^{-x}(\lambda_1\cos(2x)+\lambda_2\sin(2x))+\cos(2x)+\sin(2x)$$

Allez à : Exercice 7

Correction exercice 8.

$$y''+2y'+5y=0\quad (E')$$

$$r^2+2r+5=0\Leftrightarrow r=-1+2i\quad \text{ou}\quad r=-1-2i$$

La solution générale de (E') est :

$$\varphi(x)=e^{-x}(\lambda_1\cos(2x)+\lambda_2\sin(2x))$$

Ici $\omega = 1$ et i n'est pas une racine de l'équation caractéristique, est un polynôme de degré 1, donc (E) admet une solution particulière de la forme

$$\varphi_P(x) = (Ax + B)\cos(x) + (Cx + D)\sin(x)$$

$$\begin{aligned}\varphi_P'(x) &= A\cos(x) - (Ax + B)\sin(x) + C\sin(x) + (Cx + D)\cos(x)\\ &= (Cx + D + A)\cos(x) + (-Ax - B + C)\sin(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_P''(x) &= C\cos(x) - (Cx + D + A)\sin(x) - A\sin(x) + (-Ax - B + C)\cos(x)\\ &= (-Ax - B + 2C)\cos(x) + (-Cx - D - 2A)\sin(x)\end{aligned}$$

On remplace cela dans (E)

$$\begin{aligned}&\varphi_P''(x) + 2\varphi_P'(x) + 5\varphi_P(x) = (4x + 6)\cos(x) + (-2x + 6)\sin(x)\\
&\Leftrightarrow (-Ax - B + 2C)\cos(x) + (-Cx - D - 2A)\sin(x)\\
&+ 2\big((Cx + D + A)\cos(x) + (-Ax - B + C)\sin(x)\big)\\
&+ 5\big((Ax + B)\cos(x) + (Cx + D)\sin(x)\big)\\
&= (4x + 6)\cos(x) + (-2x + 6)\sin(x)\\
&\Leftrightarrow \big((-A + 2C + 5A)x - B + 2C + 2D + 2A + 5B\big)\cos(x)\\
&+ \big((-C - 2A + 5C)x - D - 2A - 2B + 2C + 5D\big)\sin(x)\\
&= (4x + 6)\cos(x) + (-2x + 6)\sin(x)\\
&\Leftrightarrow \big((4A + 2C)x + 2A + 4B + 2C + 2D\big)\cos(x)\\
&+ \big((-2A + 4C)x - 2A - 2B + 2C + 4D\big)\sin(x)\\
&= (4x + 6)\cos(x) + (-2x + 6)\sin(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 4A + 2C = 4\\ 2A + 4B + 2C + 2D = 6\\ -2A + 4C = -2\\ -2A - 2B + 2C + 4D = 6\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2A + C = 2\\ A + 2B + C + D = 3\\ -A + 2C = -1\\ -A - B + C + 2D = 3\end{cases}\end{aligned}$$

Résolvons d'abord

$$\begin{matrix} L_1\\ L_2\end{matrix}\begin{cases} 2A + C = 2\\ -A + 2C = -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1\\ L_1 + 2L_2\end{matrix}\begin{cases} 2A + C = 2\\ 5C = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1\\ C = 0\end{cases}$$

On remet cela dans les deux autres équations

$$\begin{aligned}&\begin{cases} A + 2B + C + D = 3\\ -A - B + C + 2D = 3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2B + D = 3\\ -1 - B + 2D = 3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1\\ L_2\end{matrix}\begin{cases} 2B + D = 2\\ -B + 2D = 4\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1\\ L_1 + 2L_2\end{matrix}\begin{cases} 2B + D = 2\\ 5D = 10\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2B + D = 2\\ D = 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0\\ D = 2\end{cases}\end{aligned}$$

Donc $\varphi_P(x) = x\cos(x) + 2\sin(x)$

Et la solution générale de (E) est :

$$\varphi(x) = e^{-x}(\lambda_1\cos(2x) + \lambda_2\sin(2x)) + x\cos(x) + 2\sin(x)$$

Allez à : Exercice 8

Correction exercice 9.

$$y'' + y = 0 \quad (E')$$

$$r^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow r = -i \quad \text{ou} \quad r = i$$

La solution générale de (E') est $\varphi(x) = \lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \sin(x)$

$\omega = 1$ et $i\omega = i$ est solution de l'équation caractéristique de (E') donc (E) amet une solution particulière de la forme

$$\varphi_P(x) = x(A\cos(x) + B\sin(x))$$

$$\begin{aligned}\varphi_P'(x) &= A\cos(x) + B\sin(x) + x(-A\sin(x) + B\cos(x))\\ &= (Bx + A)\cos(x) + (-Ax + B)\sin(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_P''(x) &= B\cos(x) - (Bx + A)\sin(x) - A\sin(x) + (-Ax + B)\cos(x)\\ &= (-Ax + 2B)\cos(x) + (-Bx - 2A)\sin(x)\end{aligned}$$

On remplace cela dans (E)

$$\begin{aligned}&\varphi_P''(x) + \varphi_P(x) = \sin(x)\\ &\Leftrightarrow (-Ax + 2B)\cos(x) + (-Bx - 2A)\sin(x) + x(A\cos(x) + B\sin(x))\\ &= \sin(x) \Leftrightarrow 2B\cos(x) - 2A\sin(x) = \sin(x) \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{1}{2} \\ B = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Donc

$$\varphi_P(x) = -\frac{x}{2}\cos(x)$$

Et la solution générale de (E) est

$$\varphi(x) = \lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \sin(x) - \frac{x}{2}\cos(x)$$

Allez à : Exercice 9

Correction exercice 10.

$$y'' + 2y' + 5y = 0 \quad (E')$$

$$r^2 + 2r + 5 = 0 \Leftrightarrow r = -1 + 2i \quad \text{ou} \quad r = -1 - 2i$$

La solution générale de (E') est :

$$\varphi(x) = e^{-x}(\lambda_1 \cos(2x) + \lambda_2 \sin(2x))$$

$\alpha = -1$ et $\omega = 1$ donc $\alpha + i\omega = -1 + i$ n'est pas une racine de l'équation caractéristique de (E'), donc (E) admet une solution particulière de la forme

$$\varphi_P(x) = e^{-x}(A\cos(x) + B\sin(x))$$

$$\begin{aligned}\varphi_P'(x) &= -e^{-x}(A\cos(x) + B\sin(x)) + e^{-x}(-A\sin(x) + B\cos(x))\\ &= e^{-x}\big((-A + B)\cos(x) + (-A - B)\sin(x)\big)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_P''(x)&\\ &= -e^{-x}\big((-A + B)\cos(x) + (-A - B)\sin(x)\big)\\ &\quad + e^{-x}(-(-A + B)\sin(x) + (-A - B)\cos(x))\end{aligned}$$

$$= e^{-x}(-2B\cos(x) + 2A\sin(x))$$

On remet cela dans (E)

$$\begin{aligned}\varphi_P''(x)+2\varphi_P'(x)+5\varphi_P(x)=e^{-x}(6\cos(x)-3\sin(x))\\ \Leftrightarrow e^{-x}(-2B\cos(x)+2A\sin(x))\\ +2e^{-x}\big((-A+B)\cos(x)+(-A-B)\sin(x)\big)+5e^{-x}(A\cos(x)+B\sin(x))\\ =e^{-x}(6\cos(x)-3\sin(x))\\ \Leftrightarrow(-2B-2A+2B+5A)\cos(x)+(2A-2A-2B+5B)\sin(x)\\ =6\cos(x)-3\sin(x)\Leftrightarrow 3A\cos(x)+3B\sin(x)=6\cos(x)-3\sin(x)\\ \Leftrightarrow\begin{cases}3A=6\\3B=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=2\\B=-1\end{cases}\end{aligned}$$

Donc

$$\varphi_P(x)=e^{-x}(2\cos(x)-\sin(x))$$

Et la solution générale de (E) est :

$$\varphi(x)=e^{-x}(\lambda_1\cos(2x)+\lambda_2\sin(2x))+e^{-x}(2\cos(x)-\sin(x))$$

Allez à : Exercice 10

Correction exercice 11.

$$y''+2y'+5y=0\quad(E')$$

$$r^2+2r+5=0\Leftrightarrow r=-1+2i\quad\text{ou}\quad r=-1-2i$$

La solution générale de (E') est :

$$\varphi(x)=e^{-x}(\lambda_1\cos(2x)+\lambda_2\sin(2x))$$

$\alpha=-1$ et $\omega=2$ donc $\alpha+i\omega=-1+2i$ est une racine de l'équation caractéristique de (E'), donc (E) admet une solution particulière de la forme

$$\varphi_P(x)=xe^{-x}(A\cos(2x)+B\sin(2x))$$

Là, on a un problème, φ_P est un produit de trois termes, la dérivée est la somme de trois termes qui eux-mêmes sont le produit de trois termes, la dérivée la somme de neuf termes qui eux-mêmes sont le produit de trois termes, certes on pourrait arranger φ_P' et φ_P'' en regroupant des termes et en mettant e^{-x} en facteur mais il vaut mieux utiliser l'exponentielle complexe.

$$\begin{aligned}\varphi_P(x)=xe^{-x}(A\cos(2x)+B\sin(2x))=xe^{-x}\left(A\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2}+B\frac{e^{2ix}-e^{-2ix}}{2i}\right)\\ =x\frac{e^{-x}}{2}\left(e^{2ix}(A-iB)+e^{-2ix}(A+iB)\right)=\\ =x\frac{1}{2}\left(e^{(-1+2i)x}(A+iB)+e^{(-1-2i)x}(A-iB)\right)=x\frac{1}{2}Re\left(e^{(-1+2i)x}(A+iB)\right)\end{aligned}$$

On pose alors $C=A+iB$

$$\varphi_P(x)=x\frac{1}{2}Re(e^{z_0x}C)$$

$$\varphi_P'(x)=x\frac{1}{2}Re(z_0e^{z_0x}C)+\frac{1}{2}Re(e^{z_0x}C)$$

$$\begin{aligned}\varphi_P''(x) &= x\frac{1}{2}Re(z_0^2e^{z_0x}C)+\frac{1}{2}Re(z_0e^{z_0x}C)+\frac{1}{2}Re(z_0e^{z_0x}C)\\ &= x\frac{1}{2}Re(z_0^2e^{z_0x}C)+\frac{1}{2}\times 2Re(z_0e^{z_0x}C)\end{aligned}$$

On remet cela dans (E)

$$\begin{aligned}&\varphi_P''(x)+2\varphi_P'(x)+5\varphi_P(x)=e^{-x}(2\cos(2x)+4\sin(2x))\\ &\Leftrightarrow x\frac{1}{2}Re(z_0^2e^{z_0x}C)+2\times\frac{1}{2}Re(z_0e^{z_0x}C)\\ &+2\left(x\frac{1}{2}Re(z_0e^{z_0x}C)+\frac{1}{2}Re(e^{z_0x}C)\right)+5\left(x\frac{1}{2}Re(e^{z_0x}C)\right)\\ &=e^{-x}(2\cos(2x)+4\sin(2x))\\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}Re\big(xz_0^2e^{z_0x}C+2z_0e^{z_0x}C+2\big(xRe(z_0e^{z_0x}C)+Re(e^{z_0x}C)\big)+5xe^{z_0x}C\big)\\ &=e^{-x}(2\cos(2x)+4\sin(2x))\\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}Re(xe^{z_0x}C(z_0^2+2z_0+5)+2z_0e^{z_0x}C+2e^{z_0x}C)\\ &=e^{-x}(2\cos(2x)+4\sin(2x))\end{aligned}$$

Comme $z_0^2+2z_0+5=0$

$$\begin{aligned}\varphi_P''(x)+2\varphi_P'(x)+5\varphi_P(x)=e^{-x}(2\cos(2x)+4\sin(2x))&\Leftrightarrow\frac{1}{2}Re(2z_0e^{z_0x}C+2e^{z_0x}C)\\ =e^{-x}(2\cos(2x)+4\sin(2x))&\Leftrightarrow\frac{1}{2}Re\big(2e^{z_0x}C(z_0+1)\big)\\ =e^{-x}(2\cos(2x)+4\sin(2x))&\Leftrightarrow Re\big(e^{z_0x}C(z_0+1)\big)\\ =e^{-x}(2\cos(2x)+4\sin(2x))&\end{aligned}$$

Il reste à calculer la partie réelle de

$$\begin{aligned}2e^{z_0x}C(z_0+1)&=2e^{(-1+2i)x}(A+iB)\big((-1+2i)+1\big)=2e^{-x}e^{2ix}(A+iB)2i\\ &=4ie^{-x}(\cos(2x)+i\sin(2x))(A+iB)\\ &=4ie^{-x}\big(\mathrm{A}\cos(2x)-B\sin(2x)+i(B\cos(2x)+A\sin(2x))\big)\\ &=e^{-x}\big(-4B\cos(2x)-4A\sin(2x)+i(4\cos(2x)-4B\sin(2x))\big)\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\varphi_P''(x)+2\varphi_P'(x)+5\varphi_P(x)=e^{-x}(2\cos(2x)+4\sin(2x))&\Leftrightarrow\frac{1}{2}Re\big(e^{z_0x}C(2z_0+1)\big)\\ =e^{-x}(2\cos(2x)+4\sin(2x))&\Leftrightarrow\frac{1}{2}(-4B\cos(2x)-4A\sin(2x))\\ =2\cos(2x)+4\sin(2x)&\Leftrightarrow -2B\cos(2x)-2A\sin(2x)\\ =2\cos(2x)+4\sin(2x)&\Leftrightarrow\begin{cases}-2B=2\\-2A=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}B=-1\\A=-2\end{cases}\end{aligned}$$

Donc

$$\varphi_P(x)=xe^{-x}(-2\cos(2x)-\sin(2x))$$

Et la solution générale de (E) est :

$$\varphi_P(x) = e^{-x}(A\cos(2x) + B\sin(2x)) + xe^{-x}(-2\cos(2x) - \sin(2x))$$
$$= e^{-x}\big((A - 2x)\cos(2x) + (B - x)\sin(2x)\big)$$

Allez à : Exercice 11

Correction exercice 12.

On appelle φ_{P_1} une solution particulière de $y'' - 3y' + 2y = e^{-x}$

On appelle φ_{P_2} une solution particulière de $y'' - 3y' + 2y = 6x$

-1 n'est pas solution de l'équation caractéristique donc il existe une solution particulière de $y'' - 3y' + 2y = e^{-x}$ de la forme

$$\varphi_{P_1}(x) = Ae^{-x}$$

Ce qui entraine que $\varphi'_{P_1}(x) = -Ae^{-x}$ et $\varphi''_{P_1}(x) = Ae^{-x}$ ce que l'on remplace dans l'équation

$$\varphi''_{P_1}(x) - 3\varphi'_{P_1}(x) + 2\varphi_{P_1}(x) = e^{-x} \Leftrightarrow Ae^{-x} - 3(-Ae^{-x}) + 2Ae^{-x} = e^{-x} \Leftrightarrow 6A = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{6}$$

$$\varphi_{P_1}(x) = \frac{1}{6}e^{-x}$$

$6x$ est un polynôme de degré 1 donc il existe une solution particulière de $y'' - 3y' + 2y = 6x$ de la forme

$$\varphi_{P_2}(x) = Ax + B$$

Ce qui entraine que $\varphi'_{P_2}(x) = A$ et $\varphi_{P_2}(x) = 0$, ce que l'on remplace dans l'équation

$$\varphi''_{P_2}(x) - 3\varphi'_{P_2}(x) + 2\varphi_{P_2}(x) = 6x \Leftrightarrow 0 - 3A + 2(Ax + B) = 6x \Leftrightarrow 2Ax - 3A + 2B = 6x$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2A = 6 \\ -3A + 2B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 3 \\ B = \frac{9}{2} \end{cases}$$

$$\varphi_{P_2}(x) = 3x + \frac{9}{2}$$

On solution particulière de $y'' - 3y' + 2y = e^{-x} + 6x$ est

$$\varphi_P(x) = \varphi_{P_1}(x) + \varphi_{P_2}(x) = \frac{1}{6}e^{-x} + 3x + \frac{9}{2}$$

Et la solution générale de $y'' - 3y' + 2y = e^{-x} + 6x$ est

$$\varphi(x) = \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{2x} + \frac{1}{6}e^{-x} + 3x + \frac{9}{2}$$

Allez à : Exercice 12

Correction exercice 13.

L'équation caractéristique de $y'' + 4y = 0$ est $r^2 + 4 = 0$, ses racines est $r_1 = -2i$ et $r_2 = 2i$, la solution générale de $y'' + 4y = 0$ est

$$\varphi(x) = \lambda_1\cos(2x) + \lambda_2\sin(2x)$$

$\cos^2(x)$ n'est pas de la forme $e^{\alpha x}(P(x)\cos(\omega x) + Q(x)\sin(\omega x))$ donc il faut linéariser $\cos^2(x)$, c'est-à-dire $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$

On pose $f_1(x) = \frac{1}{2}$ et $f_2(x) = \frac{1}{2}\cos(2x)$

On appelle φ_{P_1} une solution particulière de $y'' + 4y = \frac{1}{2}$, la théorie veut qu'il existe une solution particulière de la forme $\varphi_{P_1}(x) = A$, mais il est clair que

$$\varphi_{P_1}(x) = \frac{1}{8}$$

Est une solution particulière.

On appelle φ_{P_2} une solution particulière de $y'' + 4y = \frac{1}{2}\cos(2x)$

Ici $\alpha + i\omega = 0 + 2i = 2i$ est solution de l'équation caractéristique de $y'' + 4y = 0$, donc il existe une solution particulière de $y'' + 4y = \frac{1}{2}\cos(2x)$ de la forme

$$\varphi_{P_2}(x) = x(A\cos(2x) + B\sin(2x))$$

Ce qui entraine que

$$\begin{aligned}\varphi'_{P_2}(x) &= A\cos(2x) + B\sin(2x) + x(-2A\sin(2x) + 2B\cos(2x)) \\ &= (2Bx + A)\cos(2x) + (-2Ax + B)\sin(2x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi''_{P_2}(x) &= 2B\sin(2x) - 2(2Bx + A)\sin(2x) - 2A\sin(2x) + 2(-2Ax + B)\cos(2x) \\ &= (-4Ax + 4B)\cos(2x) + (-4Bx - 4A)\sin(2x)\end{aligned}$$

Ce que l'on remplace dans l'équation

$$\begin{aligned}\varphi''_{P_2}(x) + 4\varphi_{P_2}(x) &= \frac{1}{2}\cos(2x) \\ &\Leftrightarrow (-4Ax + 4B)\cos(2x) + (-4Bx - 4A)\sin(2x) + 4x(A\cos(2x) + B\sin(2x)) \\ &= \frac{1}{2}\cos(2x) \Leftrightarrow 4B\cos(2x) - 4A\sin(2x) = \frac{1}{2}\cos(2x) \Leftrightarrow \begin{cases} -4A = 0 \\ 4B = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = \frac{1}{8} \end{cases}\end{aligned}$$

Donc $\varphi_{P_2}(x) = \frac{x}{8}\sin(2x)$, par conséquent une solution particulière de $y'' + 4y = \cos^2(x)$ est :

$$\varphi_P(x) = \varphi_{P_1}(x) + \varphi_{P_2}(x) = \frac{1}{8} + \frac{x}{8}\sin(2x)$$

Et la solution générale est :

$$\varphi(x) = \lambda_1\cos(2x) + \lambda_2\sin(2x) + \frac{1}{8} + \frac{x}{8}\sin(2x)$$

Allez à : Exercice 13

Correction exercice 14.

1. L'équation caractéristique est $r^2 - (1+k)r + k = 0$, le discriminant vaut
$$\Delta = (1+k)^2 - 4k = 1 + 2k + k^2 - 4k = 1 - 2k + k^2 = (1-k)^2$$
Si $k = 1$ alors il y a une racine réelle double $r_0 = 1$, la solution de l'équation est :

$$y = (\lambda_1 + \lambda_2 x)e^x$$

Si $k \neq 1$ alors il y a deux racines réelles distinctes

$$r_1 = \frac{1 + k - (1 - k)}{2} = k \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{1 + k + (1 - k)}{2} = 1$$

La solution de l'équation est

$$y = \lambda_1 e^{kx} + \lambda_2 e^x$$

2. Si $k \neq 2$, il existe une solution particulière de la forme

$$\varphi_P(x) = Ae^{2x}$$

Donc

$$\varphi_P'(x) = 2Ae^{2x} \quad \text{et} \quad \varphi_P''(x) = 4Ae^{2x}$$

En remplaçant dans l'équation

$$\varphi_P''(x) - (1 + k)\varphi_P'(x) + k\varphi_P(x) = e^{2x} \Leftrightarrow 4Ae^{2x} - (1 + k)2Ae^{2x} + kAe^{2x} = e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow A(4 - 2(1 + k) + k) = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{2 - k}$$

Par conséquent

$$\varphi_P(x) = \frac{1}{2 - k}e^{2x}$$

Si $k = 1$ la solution générale est

$$y = (\lambda_1 + \lambda_2 x)e^x + e^{2x}$$

Si $k \neq 1$ et $k \neq 2$ la solution générale est

$$y = \lambda_1 e^{kx} + \lambda_2 e^x + \frac{1}{2 - k}e^{2x}$$

Si $k = 2$, il existe une solution particulière de la forme

$$\varphi_P(x) = Axe^{2x}$$

Donc

$$\varphi_P'(x) = 2Axe^{2x} + Ae^{2x} = (2Ax + A)e^{2x} \quad \text{et} \quad \varphi_P''(x) = 2Ae^{2x} + 2(2Ax + A)e^{2x} = (4Ax + 4A)e^{2x}$$

Par conséquent

$$\varphi_P''(x) - 3\varphi_P'(x) + 2\varphi_P(x) = e^{2x} \Leftrightarrow (4Ax + 4A)e^{2x} - 3(2Ax + A)e^{2x} + 2Axe^{2x} = e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow 4Ax + 4A - 3(2Ax + A) + 2Ax = 1 \Leftrightarrow (4A - 6A + 2A)x + 4A - 3A = 1 \Leftrightarrow A = 1$$

Dans ce cas la solution générale est

$$y = \lambda_1 e^{2x} + \lambda_2 e^x + xe^{2x}$$

Allez à : Exercice 14

Correction exercice 15.

3. L'équation caractéristique est $r^2 - (1 + k)r + k = 0$, le discriminant vaut

$$\Delta = (1 + k)^2 - 4k = 1 + 2k + k^2 - 4k = 1 - 2k + k^2 = (1 - k)^2$$

Si $k = 1$ alors il y a une racine réelle double $r_0 = 1$, la solution de l'équation est :

$$y = (\lambda_1 + \lambda_2 x)e^x$$

Si $k \neq 1$ alors il y a deux racines réelles distinctes

$$r_1 = \frac{1 + k - (1 - k)}{2} = k \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{1 + k + (1 - k)}{2} = 1$$

La solution de l'équation est

$$y = \lambda_1 e^{kx} + \lambda_2 e^x$$

4. Si $k \neq 2$, il existe une solution particulière de la forme

$$\varphi_P(x) = Ae^{2x}$$

Donc

$$\varphi_P'(x) = 2Ae^{2x} \quad \text{et} \quad \varphi_P''(x) = 4Ae^{2x}$$

En remplaçant dans l'équation

$$\varphi_P''(x) - (1+k)\varphi_P'(x) + k\varphi_P(x) = e^{2x} \Leftrightarrow 4Ae^{2x} - (1+k)2Ae^{2x} + kAe^{2x} = e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow A(4 - 2(1+k) + k) = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{2-k}$$

Par conséquent

$$\varphi_P(x) = \frac{1}{2-k}e^{2x}$$

Si $k = 1$ la solution générale est

$$y = (\lambda_1 + \lambda_2 x)e^{x} + e^{2x}$$

Si $k \neq 1$ et $k \neq 2$ la solution générale est

$$y = \lambda_1 e^{kx} + \lambda_2 e^{x} + \frac{1}{2-k}e^{2x}$$

Si $k = 2$, il existe une solution particulière de la forme

$$\varphi_P(x) = Axe^{2x}$$

Donc

$\varphi_P'(x) = 2Axe^{2x} + Ae^{2x} = (2Ax + A)e^{2x}$ et $\varphi_P''(x) = 2Ae^{2x} + 2(2Ax + A)e^{2x} = (4Ax + 4A)e^{2x}$

Par conséquent

$$\varphi_P''(x) - 3\varphi_P'(x) + 2\varphi_P(x) = e^{2x} \Leftrightarrow (4Ax + 4A)e^{2x} - 3(2Ax + A)e^{2x} + 2Axe^{2x} = e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow 4Ax + 4A - 3(2Ax + A) + 2Ax = 1 \Leftrightarrow (4A - 6A + 2A)x + 4A - 3A = 1 \Leftrightarrow A = 1$$

Dans ce cas la solution générale est

$$y = \lambda_1 e^{2x} + \lambda_2 e^{x} + xe^{2x}$$

Allez à : Exercice 15

Formule de Taylor-Lagrange

Exercice 1.

Soit x un réel strictement positif et f une fonction sur $[0, x]$.

1. Quelles sont les hypothèses qui permettent d'écrire la formule de Taylor-Lagrange pour f sur $[0, x]$ à l'ordre 3 (c'est-à-dire avec un reste où intervient la dérivée troisième de f) ? Ecrire cette formule.
2. On pose $f(t) = \ln(1 + t)$. Justifier la possibilité d'écrire la formule de Taylor-Lagrange pour f à l'ordre 3, et écrire cette formule.

Allez à : Correction exercice 1

Exercice 2.

Soit a un réel strictement positif.

1. Ecrire la formule de Taylor-Lagrange pour la fonction cosinus hyperbolique, sur l'intervalle $[0, a]$, avec le reste à l'ordre 5.
2. Montrer que
$$0 \leq \mathrm{ch}(a) - 1 - \frac{a^2}{2!} - \frac{a^4}{4!} \leq \frac{a^5}{5!}\mathrm{sh}(a)$$
3. En déduire que :
$$\frac{433}{384} \leq \mathrm{ch}\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{433}{384} + \frac{1}{3840}$$

Allez à : Correction exercice 2

Exercice 3.

1. Ecrire la formule de Taylor-Lagrange pour la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ entre $a = 4$ et $b = 5$ avec un reste à l'ordre 2.
2. En déduire que $\frac{7}{16}$ une valeur approchée de $\frac{1}{\sqrt{5}}$ à $\frac{3}{256}$ près.

Allez à : Correction exercice 3

Exercice 4.

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = x^{\frac{1}{4}}$

1. Ecrire la formule de Taylor-Lagrange avec un reste à l'ordre 2 de f entre 16 et 17.
2. En déduire que
$$\frac{8317}{4096} < 17^{\frac{1}{4}} < \frac{65}{32}$$

Allez à : Correction exercice 4

Exercice 5.

1. Ecrire la formule de Taylor-Lagrange pour la fonction $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ entre 16 et 17 avec un reste à l'ordre 2.
2. Montrer que $\frac{31}{128}$ est une valeur approchée de $\frac{1}{\sqrt{17}}$ à 5×10^{-4} près.

Allez à : Correction exercice 15

Exercice 6. (Hors programme)

Montrer que pour tout $x \in [0,1[$:
$$x \leq \mathrm{argth}(x) \leq x + \frac{x^3}{3}\frac{1+3x^2}{(1-x^2)^3}$$

Allez à : Correction exercice 5

Exercice 7.

A l'aide de la formule de Taylor-Lagrange avec un reste à l'ordre 2 montrer que 10^{-2} est une valeur approchée à 5×10^{-5} près de $\sin(10^{-2})$.

Allez à : Correction exercice 7

Exercice 8.

1. Enoncer le théorème de Taylor-Lagrange, on notera $n + 1$ l'ordre du reste dans la formule.
2. Ecrire la conclusion de ce théorème lorsqu'on l'applique à la fonction $f: t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$, entre 100 et 101 et avec un reste à l'ordre 2.
3. En déduire un nombre décimal qui approche $\frac{1}{\sqrt{101}}$ avec une précision inférieur à 5×10^{-6} près.

Allez à : Correction exercice 8

Exercice 9.

Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$,

1. Montrer que

$$0 < e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} < \frac{x^3}{6} e^x$$

2. En déduire une valeur approchée de $e^{0,1}$ à 5×10^{-4} près.

Allez à : Correction exercice 9

Exercice 10.

Montrer que pour tout $t \in I =]1, +\infty[$,

$$t - 1 - \frac{(t-1)^2}{2} < \ln(t) < t - 1$$

On pourra utiliser la formule de Taylor Lagrange entre 1 et t.

Allez à : Correction exercice 10

Exercice 11.

1. Enoncé le théorème de Taylor-Lagrange.
2. Soit $f: [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \ln(1+t)$.
   Calculer les dérivées successives de f jusqu'à l'ordre 4.
3. En utilisant Taylor-Lagrange, en déduire l'encadrement de $\ln(2)$ suivant :

$$\frac{7}{12} \leq \ln(2) \leq \frac{157}{192}$$

Allez à : Correction exercice 11

Exercice 12.

1. Soit $a > 0$. Démontrer que

$$\left| \cos(a) - 1 + \frac{a^2}{2!} - \frac{a^4}{4!} \right| \leq \frac{a^5}{5!}$$

2. En déduire que

$$\frac{337}{384} - \frac{1}{3840} \leq \cos\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{337}{384} + \frac{1}{3840}$$

Allez à : Correction exercice 12

Exercice 13.

Démontrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$:

$$1 - \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9} - \frac{14x^3}{81} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \leq 1 - \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9}$$

Allez à : Correction exercice 13

Exercice 14.

Démontrer que

$$\left| e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!}\right)\right| \leq \frac{3}{9!}$$

En déduire une valeur approchée de e à 10^{-5} près.

Allez à : Correction exercice 14

Exercice 15.

Inégalités de Kolmogorov

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, de classe C^2. On suppose que f et f'' sont bornées, et on pose :

$$M_0 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|\,, M_2 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)|$$

(M_0 et M_2 sont donc des nombres réels tels que, pour tout x réel, on a $|f(x)| \leq M_0$ et $|f''(x)| \leq M_2$. Le but de cet exercice est de prouver que f' est bornée, et de majorer $M_1 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)|$ en fonction de M_0 et M_2. Soit $x \in \mathbb{R}$, et $h > 0$.

1. Appliquer la formule de Taylor-Lagrange à f entre x et $x + h$ à l'ordre 2.
2. En déduire l'inégalité :

$$|f'(x)| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}$$

En particulier, si on choisit $h = 1$, on obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$|f'(x)| \leq 2M_0 + \frac{M_2}{2}$$

Ce qui prouve que f' est bornée, avec $M_1 \leq 2M_0 + \frac{M_2}{2}$. On se propose de trouver une meilleure majoration :

3. Etudier la fonction $h \to \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}$ sur $]0, +\infty[$.
4. En déduire que $M_1 \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$

Allez à : Correction exercice 15

Exercice 16.

Soit $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^2 vérifiant $f(0) = f'(0) = f'(1) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $|f''(c)| \geq 4$.

Indication, on pourra appliquer la formule de Taylor-Lagrange entre 0 et $\frac{1}{2}$, puis entre $\frac{1}{2}$ et 1.

Allez à : Correction exercice 16

Exercice 17.

Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ vérifiant la propriété suivante : il existe un polynôme de degré impair tel que pour tout $n \geq 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leq |P(x)|$$

1. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f^{(n)}(a) = 0$ pour tout $n \geq 0$.
2. En déduire que f est identiquement nulle.
3. Le résultat subsiste-t-il si on suppose que P est de degré pair ?

Allez à : Correction exercice 17

Exercice 18.

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe C^∞ et $\lambda>0$ vérifiant :

$$\begin{cases} f^{(n)}(0)=0,\forall n\geq 0\\ \sup\limits_{\mathbb{R}}\left|f^{(n)}(x)\right|\leq \lambda^n n! \end{cases}$$

1. Montrer que $f=0$ sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{\lambda},\frac{1}{\lambda}\right[$.
2. Montrer que $f=0$ sur $\mathbb{R}$.

Allez à : Correction exercice 18

Exercice 19.

Soient a et b deux réels tels que $a<b$ et $f\in C^3([a,b])$.

1. Montrer qu'il existe $c_1\in\left]\frac{a+b}{2},b\right[$ tel que :
$$f(b)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{b-a}{2}f'\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(b-a)^2}{8}f''\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(b-a)^3}{48}f'''(c_1)$$
2. Montrer qu'il existe $c_2\in\left]a,\frac{a+b}{2}\right[$ tel que :
$$f(a)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{b-a}{2}f'\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(b-a)^2}{8}f''\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{(b-a)^3}{48}f'''(c_2)$$
3. Montrer qu'il existe $c\in]a,b[$ tel que :
$$f(b)=f(a)+(b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(b-a)^3}{24}f'''(c)$$

On utilisera bien sur les questions 1. et 2. et on pourra appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à f'''.

Allez à : Correction exercice 19

CORRECTIONS

Correction exercice 1.

1. Si f est de classe C^2 sur $[0,x]$ et de classe C^3 sur $]0,x[$ on peut appliquer la formule de Taylor à l'ordre 3.
   Il existe $c\in]0,x[$ tel que :
   $$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2}f''(0)+\frac{x^3}{6}f^{(3)}(c)$$
2. f est $C^{+\infty}$ sur $]-1,+\infty[$ donc sur $[0,x]$, on peut écrire la formule de Taylor-Lagrange à n'importe quel ordre.
   $f(0)=0$, $f'(t)=\frac{1}{1+t}\Rightarrow f'(0)=1$, $f''(t)=-\frac{1}{(1+t)^2}\Rightarrow f''(0)=-1$ et $f^{(3)}(t)=\frac{2}{(1+t)^3}$
   Il existe $c\in]0,x[$.
   $$f(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\times\frac{2}{(1+c)^3}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3(1+c)^3}$$

Allez à : Exercice 1

Correction exercice 2.

1. Les dérivées de ch sont
   $\mathrm{ch}'(t)=\mathrm{sh}(t)$, $\mathrm{ch}''(t)=\mathrm{ch}(t)$, $\mathrm{ch}^{(3)}(t)=\mathrm{sh}(t)$, $\mathrm{ch}^{(4)}(t)=\mathrm{ch}(t)$ et $\mathrm{ch}^{(5)}(t)=\mathrm{sh}(t)$
   ch est une fonction de classe C^5(et même C^∞) sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0,a]$. Il existe $c\in]0,a[$ tel que :
   $$\mathrm{ch}(a)=\mathrm{ch}(0)+\mathrm{sh}(0)\,a+\mathrm{ch}(0)\frac{a^2}{2!}+\mathrm{sh}(0)\frac{a^3}{3!}+\mathrm{ch}(0)\frac{a^4}{4}+\frac{a^5}{5!}\mathrm{sh}(c)=1+\frac{a^2}{2}+\frac{a^4}{24}+\frac{a^5}{120}\mathrm{sh}(c)$$
2. D'après la question précédente

$$\operatorname{ch}(a)-1-\frac{a^2}{2}-\frac{a^4}{24}=\frac{a^5}{120}\operatorname{sh}(c)$$

Or sh est une fonction croissante sur $[0,a]$, donc $\operatorname{sh}(0)<\operatorname{sh}(c)<\operatorname{sh}(a)$

Donc, puisque $a>0$:

$$\frac{a^5}{120}\operatorname{sh}(0)<\frac{a^5}{120}\operatorname{sh}(c)<\frac{a^5}{120}\operatorname{sh}(a)\Leftrightarrow 0<\operatorname{ch}(a)-1-\frac{a^2}{2}-\frac{a^4}{24}<\frac{a^5}{120}\operatorname{sh}(a)$$

On a même des inégalités strictes.

3. On prend $a=\frac{1}{2}$.

$$0<\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\right)-1-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2}-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{24}<\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{120}\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{24}<\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\right)<1+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{24}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{120}\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$1+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{24}=1+\frac{1}{8}+\frac{1}{384}=\frac{384+48+1}{384}=\frac{433}{384}$$

Et

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{120}=\frac{1}{32\times 120}=\frac{1}{3840}$$

De plus

$$\frac{1}{2}<\ln(2)\Rightarrow \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\right)<\operatorname{sh}(\ln(2))=\frac{e^{\ln(2)}-e^{-\ln(2)}}{2}=\frac{2-\frac{1}{2}}{2}=\frac{3}{4}<1$$

Donc

$$\frac{433}{384}<\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\right)<\frac{433}{384}+\frac{1}{3840}\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\right)<\frac{433}{384}+\frac{1}{3840}$$

Allez à : Exercice 2

Correction exercice 3.

1. f est C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange sur $[4,5]$.

$$f(x)=x^{-\frac{1}{2}};\quad f'(x)=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}};\quad f''(x)=\frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}=\frac{3}{4}\times\frac{1}{x^{\frac{5}{2}}}$$

$$f(4)=\frac{1}{\sqrt{4}}=\frac{1}{2};\qquad f'(4)=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{4^{\frac{3}{2}}}=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2^3}=-\frac{1}{16};$$

Il existe $c\in\,]4,5[$ tel que :

$$f(5)=f(4)+(5-4)f'(4)+\frac{(5-4)^2}{2}f''(c)$$

Donc

$$\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{16}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{c^{\frac{5}{2}}}=\frac{7}{16}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{c^{\frac{5}{2}}}>\frac{7}{16}$$

$$c>4\Leftrightarrow c^{\frac{5}{2}}>4^{\frac{5}{2}}=2^5=32\Leftrightarrow\frac{1}{c^{\frac{5}{2}}}<\frac{1}{32}$$

Donc

$$\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{7}{16}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{c^{\frac{5}{2}}}<\frac{7}{16}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{32}=\frac{7}{16}+\frac{3}{256}$$

On en déduit les encadrements

$$\frac{7}{16}<\frac{1}{\sqrt{5}}<\frac{7}{16}+\frac{3}{256}$$

Ce qui montre que $\frac{7}{16}$ est une valeur approchée de $\frac{1}{\sqrt{5}}$ à $\frac{3}{256}$ près.

Allez à : Exercice 3

Correction exercice 4.

1.

$$f(x)=x^{\frac{1}{4}}\Rightarrow f(16)=(16)^{\frac{1}{4}}=(2^4)^{\frac{1}{4}}=2$$

$$f'(x)=\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}\Rightarrow f'(16)=\frac{1}{4}\times(2^4)^{-\frac{3}{4}}=\frac{1}{4}\times 2^{-3}=\frac{1}{32}$$

$$f''(x)=-\frac{3}{16}x^{-\frac{7}{4}}\Rightarrow f''(c)=-\frac{3}{16}c^{-\frac{7}{4}}$$

Il existe $c\in]16,17[$ tel que

$$f(17)=f(16)+f'(16)(17-16)+f''(c)\frac{(17-16)^2}{2!}\Leftrightarrow 17^{\frac{1}{4}}=2+\frac{1}{32}-\frac{3}{32}c^{-\frac{7}{4}}$$

2.

$$16<c<17\Rightarrow 2<c^{\frac{1}{4}}<17^{\frac{1}{4}}\Rightarrow 2^7<c^{\frac{7}{4}}<17^{\frac{7}{4}}\Rightarrow 17^{-\frac{7}{4}}<c^{-\frac{7}{4}}<2^{-7}$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{32}2^{-7}<-\frac{3}{32}c^{-\frac{7}{4}}<-\frac{3}{32}\times 17^{-\frac{7}{4}}\Rightarrow -\frac{3}{32\times 128}<-\frac{3}{32}c^{-\frac{7}{4}}<0$$

$$\Rightarrow 2+\frac{1}{32}-\frac{3}{4096}<2+\frac{1}{32}-\frac{3}{32}c^{-\frac{7}{4}}<2+\frac{1}{32}$$

$$\Rightarrow\frac{8192+128-3}{4096}<17^{\frac{1}{4}}<\frac{65}{32}$$

$$\Rightarrow\frac{8317}{4096}<17^{\frac{1}{4}}<\frac{65}{32}$$

Allez à : Exercice 4

Correction exercice 5.

1. f est C^1 sur $[16,17]$ et deux fois dérivable sur $]16,17[$ donc on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange entre 16 et 17. Donc il existe $c\in]16,17[$ tel que :

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}=x^{-\frac{1}{2}}\Rightarrow f(16)=\frac{1}{4}$$

$$f'(x)=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\Rightarrow f'(16)=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{16^{\frac{3}{2}}}=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{4^3}=-\frac{1}{128}$$

$$f''(x)=\frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}$$

$$f(17)=f(16)+(17-16)f'(16)+(17-16)\frac{f''(c)}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{17}}=\frac{1}{4}-\frac{1}{128}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{c^{\frac{5}{2}}}=\frac{32}{4\times 32}-\frac{1}{128}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{c^{\frac{5}{2}}}=\frac{31}{128}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{c^{\frac{5}{2}}}$$

2. D'après 1.

$$\frac{1}{\sqrt{17}}>\frac{31}{128}\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{17}}-\frac{31}{128}>0$$

Et

$$c>16\Rightarrow c^{\frac{5}{2}}>16^{\frac{5}{2}}=4^5=1024\Rightarrow\frac{1}{c^{\frac{5}{2}}}<\frac{1}{1024}\Rightarrow\frac{3}{8}\times\frac{1}{c^{\frac{5}{2}}}<\frac{3}{8}\times\frac{1}{1024}<\frac{4}{8}\times\frac{1}{1000}=0{,}5\times 10^{-3}$$
$$=5\times 10^{-4}$$

Ce qui montre que

$$\frac{1}{\sqrt{17}}<\frac{31}{128}+5\times 10^{-4}\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{17}}-\frac{31}{128}<5\times 10^{-4}$$

Finalement

$$-5\times 10^{-4}<0<\frac{1}{\sqrt{17}}-\frac{31}{128}<5\times 10^{-4}$$

$\frac{31}{128}$ est bien une valeur approchée de $\frac{1}{\sqrt{17}}$ à 5×10^{-4} près.

Allez à : Exercice 5

Correction exercice 6. (Hors programme)

argth est une fonction de classe C^2 sur $[0,x]$ et dérivable sur $]0,x[$, on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 3. Pour $x>0$

$f(t)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)=\frac{1}{2}\ln(1+t)-\frac{1}{2}\ln(1-t)$, d'où $f(0)=0$

Donc $f'(t)=\frac{1}{2}(1+t)^{-1}+\frac{1}{2}(1-t)^{-1}$, d'où $f'(0)=1$

$f"(t)=-\frac{1}{2}(1+t)^{-2}+\frac{1}{2}(1-t)^{-2}$ d'où $f"(0)=0$

$f^{(3)}(t)=(1+t)^{-3}+(1-t)^{-3}$, d'où

$f^{(3)}(c)=\frac{1}{(1+c)^3}+\frac{1}{(1-c)^3}=\frac{(1+c)^3+(1-c)^3}{(1-c^2)^3}=\frac{1+3c+3c^2+c^3+1-3c+3c^2-c^3}{(1-c^2)^3}=2\frac{1+3c^2}{(1-c^2)^3}$

Il existe c dans l'intervalle $]0,x[$ tel que :

$$\operatorname{argth}(x)=x+\frac{x^3}{6}2\frac{1+3c^2}{(1-c^2)^3}=x+\frac{x^3}{3}\frac{1+3c^2}{(1-c^2)^3}$$

$0<c<x$ donc $0<c^2<x^2$ d'où $1+3c^2<1+3x^2$

Et $0<1-x^2<1-c^2<1$ entraine que $1<\frac{1}{1-c^2}<\frac{1}{1-x^2}$ et que donc $1<\frac{1}{(1-c^2)^3}<\frac{1}{(1-x^2)^3}$

On en déduit que $0<\frac{1+3c^2}{(1-c^2)^3}<\frac{1+3x^2}{(1-x^2)^3}$

On multiplie ces inégalité par $\frac{x^3}{3}>0$, $0<\frac{x^3}{3}\frac{1+3c^2}{(1-c^2)^3}<\frac{x^3}{3}\frac{1+3x^2}{(1-x^2)^3}$, il ne reste qu'à ajouter x à ces inégalités pour conclure.

Si $x=0$ les égalités sont vérifiées trivialement.

Allez à : Exercice 5

Correction exercice 7.

$$f(t)=\sin(t)\Rightarrow f(0)=0$$
$$f'(t)=\cos(t)\Rightarrow f'(0)=1$$
$$f''(t)=-\sin(t)$$

f est C^1 sur $[0,10^{-2}]$ et C^2 sur $]0,10^{-2}[$ car f est C^∞ sur $\mathbb{R}$. Il existe $c\in]0,10^{-2}[$

$$\sin(10^{-2})=\sin(0)+(10^{-2}-0)\cos(0)+\frac{(10^{-2}-0)^2}{2}(-\sin(c))\Leftrightarrow \sin(10^{-2})$$
$$=10^{-2}-\frac{10^{-4}}{2}\sin(c)\Leftrightarrow \sin(10^{-2})-10^{-2}=-5\times 10^{-5}\sin(c)$$
$$\Rightarrow |\sin(10^{-2})-10^{-2}|=5\times 10^{-5}|\sin(c)|\Rightarrow |\sin(10^{-2})-10^{-2}|\leq 5\times 10^{-5}$$

Donc 10^{-2} est une valeur approchée de $\sin(10^{-2})$ à 5×10^{-5}

Allez à : Exercice 7

Correction exercice 8.

1. Si f est une application de classe C^n sur $[a,b]$ et de classe C^{n+1} sur $]a,b[$ alors il existe $c\in\,]a,b[$ tel que

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+\cdots+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

2.

$$f(t)=t^{-\frac{1}{2}}\Rightarrow f(100)=\frac{1}{\sqrt{100}}=\frac{1}{10}$$

$$f'(t)=-\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{t\sqrt{t}}\Rightarrow f'(100)=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{100\times\sqrt{100}}=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{1000}=-\frac{1}{2000}$$

$$f''(t)=-\frac{1}{2}\times\left(-\frac{3}{2}\right)t^{-\frac{5}{2}}=\frac{3}{4}\times\frac{1}{t^2\sqrt{t}}\Rightarrow f''(c)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{c^2\sqrt{c}}$$

Il existe $c\in\left]100,101\right[$

$$\frac{1}{\sqrt{101}}=\frac{1}{10}+(101-100)\times\left(-\frac{1}{2000}\right)+\frac{(101-100)^2}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{c^2\sqrt{c}}=\frac{1}{10}-\frac{1}{2000}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{c^2\sqrt{c}}$$

3.

$$\left|\frac{1}{\sqrt{101}}-\frac{1}{10}+\frac{1}{2000}\right|=\frac{3}{8}\times\frac{1}{c^2\sqrt{c}}$$

$$100<c<101\Leftrightarrow 100^2\sqrt{100}<c^2\sqrt{c}<101^2\sqrt{101}\Rightarrow 10^5<c^2\sqrt{c}\Rightarrow\frac{1}{c^2\sqrt{c}}<10^{-5}\Rightarrow\frac{3}{8}\times\frac{1}{c^2\sqrt{c}}$$

$$<\frac{3}{8}\times10^{-5}<5\times\frac{3}{40}\times10^{-5}<5\times\frac{4}{40}\times10^{-5}=5\times10^{-6}$$

Donc

$$\left|\frac{1}{\sqrt{101}}-\frac{1}{10}+\frac{1}{2000}\right|<5\times10^{-5}$$

Une valeur approchée à 5×10^{-5} de $\frac{1}{\sqrt{101}}$ est

$$\frac{1}{10}-\frac{1}{2000}=\frac{199}{2000}=0{,}0995$$

Allez à : Exercice 8

Correction exercice 9.

1. L'exponentielle est une fonction C^∞ donc on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange avec un reste à l'ordre 3. Il existe $c\in\left]0,x\right[$ tel que :

$$e^x=e^0+xe^0+\frac{x^2}{2!}e^0+\frac{x^3}{3!}e^c=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}e^c$$

$$0<e^c<e^x\Rightarrow 0<\frac{x^3}{6}e^c<\frac{x^3}{6}e^x$$

Car l'exponentielle est croissante et que $x>0$, par conséquent

$$1+x+\frac{x^2}{2}<1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}e^c<1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}e^x$$

Ce qui entraine que

$$1+x+\frac{x^2}{2}<e^x<1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}e^x$$

Soit encore

$$0<e^x-1-x-\frac{x^2}{2}<\frac{x^3}{6}e^x$$

2. On pose $x=0{,}1=10^{-1}$

$$0<e^{0{,}1}-1-\frac{1}{10}-\frac{1}{200}<\frac{10^{-3}}{6}e^{0{,}1}<\frac{10^{-3}}{6}\times3=0{,}5\times10^{-3}=5\times10^{-4}$$

Donc

$$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{200}=1+0{,}1+0{,}005=1{,}105$$

Est une valeur approchée de $e^{0{,}1}$ à 5×10^{-4} près.

Allez à : Exercice 9

Correction exercice 10.

La formule de Taylor Lagrange pour la fonction ln entre 1 et $t > 1$ dit qu'il existe $c \in]1, t[$ tel que

$$\ln(t) = \ln(1) + (t-1)\ln'(1) + \frac{(t-1)^2}{2}\ln''(c) \Leftrightarrow \ln(t) = t - 1 - \frac{(t-1)^2}{2c^2}$$

$$1 < c < t \Leftrightarrow 1 < c^2 < t^2 \Leftrightarrow \frac{1}{t^2} < \frac{1}{c^2} < 1 \Leftrightarrow \frac{(t-1)^2}{2t^2} < \frac{(t-1)^2}{2c^2} < \frac{(t-1)^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{(t-1)^2}{2} < -\frac{(t-1)^2}{2c^2} < -\frac{(t-1)^2}{2t^2} \Leftrightarrow t - 1 - \frac{(t-1)^2}{2} < t - 1 - \frac{(t-1)^2}{2c^2} < t - 1 - \frac{(t-1)^2}{2t^2}$$

$$\Leftrightarrow t - 1 - \frac{(t-1)^2}{2} < \ln(t) < t - 1 - \frac{(t-1)^2}{2t^2}$$

Comme $t - 1 - \frac{(t-1)^2}{2t^2} < t - 1$, on a bien

$$t - 1 - \frac{(t-1)^2}{2} < \ln(t) < t - 1$$

Allez à : Exercice 10

Correction exercice 11.

1. Si f est une application de classe C^n sur $[a, b]$ et de classe C^{n+1} sur $]a, b[$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

2.

$$f'(t) = \frac{1}{1+t} = (1+t)^{-1}$$

$$f''(t) = -(1+t)^{-2} = -\frac{1}{(1+t)^2}$$

$$f'''(t) = -(-2)(1+t)^{-3} = \frac{2}{(1+t)^3}$$

$$f^{(4)}(t) = 2(-3)(1+t)^{-4} = -\frac{6}{(1+t)^4}$$

Remarque :

Il est très maladroit de dériver ces fonctions comme des quotients et donc d'utiliser la formule $\left(\frac{u}{v}\right)'$, il est bien préférable de s'apercevoir que ces fonctions sont de la forme u^α et que leur dérivée sont de la forme $\alpha u^{\alpha-1}u'$.

3. On va utiliser la formule avec $a = 0$, $b = 1$ et $n = 3$ (donc le reste est à l'ordre 4)

Il existe $c \in]0,1[$

$$f(1) = f(0) + (1-0)f'(0) + \frac{(1-0)^2}{2!}f''(1) + \frac{(1-0)^3}{3!}f'''(0) + \frac{(1-0)^4}{4!}f^{(4)}(c)$$

$$\ln(2) = \ln(1) + 1 + \frac{1}{2!}\times(-1) + \frac{1}{3!}\times 2 + \frac{1}{4!}\times\left(-\frac{6}{(1+c)^4}\right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\times\frac{1}{(1+c)^4}$$

$$= \frac{6-3+2}{6} - \frac{1}{4}\times\frac{1}{(1+c)^4} = \frac{5}{6} - \frac{1}{4}\times\frac{1}{(1+c)^4}$$

$$0 < c < 1 \Rightarrow 1 < 1 + c < 2 \Rightarrow 1 < (1+c)^4 < 2^4 = 16 \Rightarrow \frac{1}{16} < \frac{1}{(1+c)^4} < 1 \Rightarrow \frac{1}{64} < \frac{1}{4(1+c)^4} < \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{4} < -\frac{1}{(1+c)^4} < -\frac{1}{64} \Rightarrow \frac{5}{6} - \frac{1}{4} < \frac{5}{6} - \frac{1}{(1+c)^4} < \frac{5}{6} - \frac{1}{64}$$

$$\Rightarrow \frac{10-3}{12} < \ln(2) < \frac{5\times 32}{6\times 32} - \frac{3}{64\times 3} \Rightarrow \frac{7}{12} < \ln(2) < \frac{157}{192}$$

Allez à : Exercice 11

Correction exercice 12.

1. cos est C^{∞} sur $\mathbb{R}$ donc on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange à n'importe quel ordre et sur n'importe quel intervalle, on va l'appliquer entre 0 et $a > 0$ avec un reste à l'ordre 5. On pose $f(t) = \cos(t)$

   Il existe $c \in]0, a[$ tel que :
$$f(a) = f(0) + af'(0) + \frac{a^2}{2!}f''(0) + \frac{a^3}{3!}f^{(3)}(0) + \frac{a^4}{4!}f^{(4)}(0) + \frac{a^5}{5!}f^{(5)}(c)$$
$$f(0) = \cos(0) = 1$$
$$f'(t) = -\sin(t) \Rightarrow f'(0) = 0$$
$$f''(t) = -\cos(t) \Rightarrow f''(0) = -1$$
$$f^{(3)}(0) = \sin(t) \Rightarrow f^{(3)}(0) = 0$$
$$f^{(4)}(t) = \cos(t) \Rightarrow f^{(4)}(0) = 1$$
$$f^{(5)}(t) = -\sin(t)$$
$$\cos(a) = 1 - \frac{a^2}{2!} + \frac{a^4}{4!} - \frac{a^5}{5!}\sin(c)$$
   Ce qui entraine que
$$\cos(a) - 1 + \frac{a^2}{2!} - \frac{a^4}{4!} = -\frac{a^5}{5!}\sin(c)$$
   Maintenant on peut prendre la valeur absolue puis majorer la valeur absolu du sinus par 1.
$$\left|\cos(a) - 1 + \frac{a^2}{2!} - \frac{a^4}{4!}\right| = \left|-\frac{a^5}{5!}\sin(c)\right| = \frac{a^5}{5!}|\sin(c)| \le \frac{a^5}{5!}$$

2. On prend bien sur $a = \frac{1}{2}$
$$\left|\cos\left(\frac{1}{2}\right) - 1 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2!} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{4!}\right| \le \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{5!} \Leftrightarrow -\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{5!} \le \cos\left(\frac{1}{2}\right) - 1 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2!} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{4!} \le \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{5!}$$
$$\Leftrightarrow 1 - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{4!} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{5!} \le \cos\left(\frac{1}{2}\right) \le 1 - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{4!} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{5!}$$
   Il reste à simplifier les fractions
$$1 - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{4!} = 1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{16 \times 24} = \frac{384 - 48 + 1}{384} = \frac{337}{384}$$
$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{5!} = \frac{1}{32 \times 120} = \frac{1}{3840}$$
$$\frac{337}{384} - \frac{1}{3840} \le \cos\left(\frac{1}{2}\right) \le \frac{337}{384} + \frac{1}{3840}$$

Allez à : Exercice 12

Correction exercice 13.

Soit $x > 0$
$$f(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+t}} = (1+t)^{-\frac{1}{3}}$$
Pour $t > -1$ cette fonction est C^{∞} donc on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange à n'importe quel ordre et sur n'importe quel intervalle, on va l'appliquer entre 0 et $x > 0$ avec un reste à l'ordre 3. Il existe $c \in]0, x[$ tel que :

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f^{(3)}(c)$$

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt[3]{1+t}}=(1+t)^{-\frac{1}{3}}\Rightarrow f(0)=1$$

$$f'(t)=\left(-\frac{1}{3}\right)(1+t)^{-\frac{4}{3}}\Rightarrow f'(0)=-\frac{1}{3}$$

$$f''(t)=\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)(1+t)^{-\frac{7}{3}}\Rightarrow f''(0)=\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{4}{9}$$

$$f^{(3)}(t)=\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{7}{3}\right)(1+t)^{-\frac{10}{3}}\Rightarrow f^{(3)}(c)=\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{7}{3}\right)(1+c)^{-\frac{10}{3}}$$
$$=-\frac{28}{27}(1+c)^{-\frac{10}{3}}$$

$$(1+t)^{-\frac{1}{3}}=1-\frac{1}{3}x+\frac{4}{9}\times\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\times\frac{28}{27}(1+c)^{-\frac{10}{3}}=1-\frac{x}{3}+\frac{2x^2}{9}-\frac{14x^3}{81}(1+c)^{-\frac{10}{3}}$$

$$0<c<x\Rightarrow 1<1+c<1+x\Rightarrow 1<(1+c)^{\frac{10}{3}}<(1+x)^{\frac{10}{3}}\Rightarrow(1+x)^{-\frac{10}{3}}<(1+c)^{-\frac{10}{3}}<1$$

$$\Rightarrow-\frac{14x^3}{81}(1+x)^{-\frac{10}{3}}>-\frac{14x^3}{81}(1+c)^{-\frac{10}{3}}>-\frac{14x^3}{81}$$

$$\Rightarrow 1-\frac{x}{3}+\frac{2x^2}{9}-\frac{14x^3}{81}(1+x)^{-\frac{10}{3}}>1-\frac{x}{3}+\frac{2x^2}{9}-\frac{14x^3}{81}(1+c)^{-\frac{10}{3}}>1-\frac{x}{3}+\frac{2x^2}{9}-\frac{14x^3}{81}$$

$$\Rightarrow 1-\frac{x}{3}+\frac{2x^2}{9}-\frac{14x^3}{81}(1+x)^{-\frac{10}{3}}>\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}>1-\frac{x}{3}+\frac{2x^2}{9}-\frac{14x^3}{81}$$

$$\Rightarrow 1-\frac{x}{3}+\frac{2x^2}{9}-\frac{14x^3}{81}<\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}<1-\frac{x}{3}+\frac{2x^2}{9}-\frac{14x^3}{81}(1+x)^{-\frac{10}{3}}<1-\frac{x}{3}+\frac{2x^2}{9}$$

Car

$$-\frac{14x^3}{81}(1+x)^{-\frac{10}{3}}<0$$

Si $x=0$ alors les trois termes de ces inégalités sont nuls et dans ce cas il y a égalité. Pour tout $x\geq 0$

$$1-\frac{x}{3}+\frac{2x^2}{9}-\frac{14x^3}{81}\leq\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}\leq 1-\frac{x}{3}+\frac{2x^2}{9}$$

Allez à : Exercice 13

Correction exercice 14.

$f:t\to e^t$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ donc on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange à n'importe quel ordre et sur n'importe quel intervalle, on va l'appliquer entre 0 et $1>0$ avec un reste à l'ordre 9.

Il existe $c\in]0,1[$ tel que :

$$f(1)=f(0)+(1-0)f'(0)+\frac{(1-0)^2}{2!}f''(0)+\frac{(1-0)^3}{3!}f^{(3)}(0)+\frac{(1-0)^4}{4!}f^{(4)}(0)$$
$$+\frac{(1-0)^5}{5!}f^{(5)}(0)+\frac{(1-0)^6}{6!}f^{(6)}(0)+\frac{(1-0)^7}{7!}f^{(7)}(0)+\frac{(1-0)^8}{8!}f^{(8)}(0)$$
$$+\frac{(1-0)^9}{9!}f^{(9)}(c)$$

Or pour tout $k\geq 0$, $f^{(k)}(t)=e^t$ donc $f^{(k)}(0)=1$, on a donc

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}+\frac{1}{9!}e^c$$

Ce qui entraine que

$$e-\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}\right)=\frac{1}{9!}e^c$$

Puis on prend la valeur absolue et on majore e^c par $e^1=e$, puis e par 3

$$\left|e-\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}\right)\right|=\left|\frac{1}{9!}e^c\right|=\frac{1}{9!}e^c<\frac{1}{9!}e<\frac{3}{9!}$$

$$\frac{3}{9!}=\frac{3}{2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7\times 8\times 9}=\frac{1}{2\times 4\times 5\times 6\times 7\times 8\times 9}=\frac{1}{2\times 5}\times\frac{1}{4\times 6}\times\frac{1}{7\times 8\times 9}$$
$$<\frac{1}{10}\times\frac{1}{20}\times\frac{1}{7\times 8\times 9}=\frac{1}{10}\times\frac{5}{100}\times\frac{1}{7\times 8\times 9}=10^{-3}\times\frac{5}{7\times 8\times 9}=10^{-3}\times\frac{5}{504}$$
$$<10^{-3}\times\frac{5}{500}=10^{-3}\times\frac{1}{100}=10^{-5}$$

Par conséquent

$$1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}$$

Est une valeur approchée de e à 10^{-5} près.

Allez à : Exercice 14

Correction exercice 15.

1. f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange avec un reste à l'ordre 2. Il existe $c\in\,]x,x+h[$ tel que :

$$f(x+h)=f(x)+(x+h-x)f'(x)+\frac{(x+h-x)^2}{2!}f''(c)\Leftrightarrow f(x+h)$$
$$=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(c)$$

2. D'après 1. :

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(c)\Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{h}\left(f(x+h)-f(x)-\frac{h^2}{2}f''(c)\right)$$
$$\Rightarrow |f'(x)|=\frac{\left|f(x+h)-f(x)-\frac{h^2}{2}f''(c)\right|}{h}=\frac{\left|f(x+h)+\big(-f(x)\big)+\left(-\frac{h^2}{2}f''(c)\right)\right|}{h}$$
$$\leq\frac{|f(x+h)|+|-f(x)|+\left|-\frac{h^2}{2}f''(c)\right|}{h}=\frac{|f(x+h)|+|f(x)|+\frac{h^2}{2}|f''(c)|}{h}$$
$$\leq\frac{M_0+M_0+\frac{h^2}{2}M_2}{h}=\frac{2M_0}{h}+\frac{hM_2}{2}$$

Franchement j'ai fait des chichis parce que l'on peut très bien écrire directement que :

$$\left|f(x+h)-f(x)-\frac{h^2}{2}f''(c)\right|\leq|f(x+h)|+|f(x)|+\frac{h^2}{2}|f''(c)|$$

On rappelle l'inégalité triangulaire

$$|A+B+C|\leq|A|+|B|+|C|$$

On rappelle que l'inégalité suivante est en générale très fausse

$$|A-B|\leq|A|-|B|$$

Et puisqu'on est dedans rappelons que

$$\big||A|-|B|\big|\leq|A-B|$$

3. Posons $g(h)=\frac{2M_0}{h}+\frac{hM_2}{2}$, pour $h>0$.

$$g'(h)=-\frac{2M_0}{h^2}+\frac{M_2}{2}=\frac{-4M_0+h^2M_2}{2h^2}=\frac{M_2}{2h^2}\left(h^2-\frac{4M_0}{M_2}\right)=\frac{M_2}{2h^2}\left(h-2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}\right)\left(h+2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}\right)$$

Cette dérivée s'annule pour

$$h_0=2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}$$

Elle négative pour

$$0 < h < h_0$$

Et positive pour

$$h > h_0$$

Elle admet un minimum en h_0

$$g(h_0) = \frac{2M_0}{h_0} + \frac{h_0 M_2}{2} = \frac{2M_0}{2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}} + \frac{2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}M_2}{2} = \sqrt{M_0M_2} + \sqrt{M_0M_2} = 2\sqrt{M_0M_2}$$

On déduit de cela que pour tout h

$$g(h) \leq 2\sqrt{M_0M_2}$$

Or $|f'(x)| \leq g(h)$ donc pour tout x

$$|f'(x)| \leq 2\sqrt{M_0M_2}$$

Par conséquent

$$M_1 = \sup_{x\in\mathbb{R}}|f'(x)| \leq 2\sqrt{M_0M_2}$$

Allez à : Exercice 15

Correction exercice 16.

f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange avec un reste à l'ordre 2 entre 0 et $\frac{1}{2}$

Il existe $c_1 \in]0, h[$ tel que :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = f(0) + \left(\frac{1}{2} - 0\right)f'(0) + \frac{\left(\frac{1}{2} - 0\right)^2}{2!}f''(c_1)$$

Ce qui équivaut à

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}f''(c_1)$$

f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange avec un reste à l'ordre 2 entre $\frac{1}{2}$ et 1

Il existe $c_2 \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$ tel que :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) + \left(\frac{1}{2} - 1\right)f'(1) + \frac{\left(\frac{1}{2} - 1\right)^2}{2!}f''(c_2)$$

On rappelle que la formule « marche » aussi si $b = \frac{1}{2} < a = 1$

Ce qui équivaut à

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{8}f''(c_2)$$

On en déduit que

$$\frac{1}{8}f''(c_1) = 1 + \frac{1}{8}f''(c_2)$$

D'où

$$f''(c_1) - f''(c_2) = 8$$

Si $-4 < f''(c_1) < 4 \Leftrightarrow |f''(c_1)| < 4$ et $-4 < f''(c_2) < 4 \Leftrightarrow |f''(c_2)| < 4$ alors $-4 < -f(c_2) < 4$ et $-8 < f''(c_1) - f''(c_2) < 8$, l'inégalité de droite contredit $f''(c_1) - f''(c_2) = 8$, par conséquent soit $|f''(c_1)| \geq 4$, soit $|f''(c_2)| \geq 4$, il existe bien une valeur $c \in]0,1[$ tel que $|f''(c)| \geq 4$.

Allez à : Exercice 16

Correction exercice 17.

1. P est un polynôme de degré impair donc P admet une racine réelle (c'est une conséquent quasi-évidente du théorème des valeurs intermédiaire puisque les limites en $\pm\infty$ d'un polynôme sont $\pm\infty$ et que les polynômes sont des fonctions continues), appelons a cette racine
$$\left|f^{(n)}(a)\right| \leq |P(a)| = 0$$
2. On applique la formule de Taylor-Lagrange, avec reste à l'ordre $n+1$, sur $]a,x[$ ou $]x,a[$, selon que $a<x$ ou que $x<a$, intervalle que l'on nomme I, il existe $c \in I$ tel que
$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$
$$= \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$
Donc
$$|f(x)| = \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}\left|f^{(n+1)}(c)\right| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}|P(c)|$$
L'inégalité vient de l'hypothèse de l'énoncé. Puis comme P est une fonction continue sur un intervalle fermé borné, il existe M tel que pour tout $c \in I$, $|P(x)| \leq M$, par conséquent
$$|f(x)| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}M$$
Et enfin on fait tendre n vers l'infini, comme M ne dépend pas de n, $\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}M$ tend vers 0, on en déduit que $f(x)=0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Non, il suffit de prendre une fonction à dérivée bornée comme $f = \cos$, les dérivées successives de cette fonction sont $\pm\cos$ et $\pm\sin$ donc
$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leq 1$$
1 étant le polynôme constant égal à 1 (il s'agit donc d'un polynôme de degré pair), et pourtant $f \neq 0$.

Allez à : Exercice 17

Correction exercice 18.

1. On applique la formule de Taylor-Lagrange, avec reste à l'ordre n, sur $]0,x[$ ou $]x,0[$, selon que $0<x$ ou que $x<0$, intervalle que l'on nomme I, il existe $c \in I$ tel que
$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(0) + \frac{x^n}{n!}f^{(n+1)}(c) = \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(c)$$
On prend $x \in \left]-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}\right[\Leftrightarrow |x| < \frac{1}{\lambda}$
$$|f(x)| = \left|\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(c)\right| = \frac{|x|^n}{n!}\left|f^{(n)}(c)\right| \leq \frac{|x|^n}{n!}\sup_{\mathbb{R}}\left|f^{(n)}(x)\right| \leq (\lambda|x|)^n$$
Comme $\lambda|x| \in]0,1[$,
$$\lim_{n\to+\infty}(\lambda|x|)^n = 0$$
Cela montre que $f(x)=0$ pour tout $x \neq 0$. Comme $f^{(0)} = f$ la première condition entraine que $f(0)=0$. On aurait peut conclure aussi en invoquant la continuité de f en 0.
2. Soit
$$g(x) = f\left(x + \frac{1}{2\lambda}\right)$$
$$g^{(n)}(x) = f^{(n)}\left(x + \frac{1}{2\lambda}\right)$$
C'est évident, il faut quand même noter que la dérivée de g est la dérivée composée de f avec la fonction $x \to x + \frac{1}{2\lambda}$, dont la dérivée est 1, et que donc que $g'(x) = f'\left(x+\frac{1}{2\lambda}\right) \times 1$, les dérivées suivantes s'en déduisent par une récurrence bien évidente.
Reprenons

$$g^{(n)}(0) = f^{(n)}\left(\frac{1}{2\lambda}\right) = 0$$

Car $\frac{1}{2\lambda} \in \left]-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}\right[$, en utilisant la question 1°) pour g (au lieu de f) $g = 0$ sur $\left]-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}\right[$, comme

$$-\frac{1}{\lambda} < x < \frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow -\frac{1}{2\lambda} < x + \frac{1}{2\lambda} < \frac{3}{2\lambda}$$

On en déduit que $f = 0$ sur $\left]-\frac{1}{2\lambda}, \frac{3}{2\lambda}\right[$, et donc sur $\left]-\frac{1}{\lambda}, \frac{3}{2\lambda}\right[$, ce qui signifie que l'on a « agrandi » l'intervalle où f est nulle de $\frac{1}{2\lambda}$ à droite. Cela doit vous convaincre qu'en recommençant on pourra agrandir l'intervalle autant qu'on le souhaite à droite, et évidemment on peut faire pareil à gauche. Pour cela considérons les fonctions

$$g_p(x) = f\left(x + \frac{p}{2\lambda}\right), p \in \mathbb{N}$$

Et faisons un raisonnement par récurrence

$$H_p: \forall x \in \left]-\frac{1}{\lambda}, \frac{p+2}{2\lambda}\right[, f(x) = 0$$

H_0 est vraie c'est le 1°), H_1, c'est ce que nous venons de montrer.
Montrons que pour $p \geq 0$, $H_p \Rightarrow H_{p+1}$
Comme ci-dessus

$$g_{p+1}^{(n)}(x) = f^{(n)}\left(x + \frac{p+1}{2\lambda}\right)$$

Par conséquence

$$g_{p+1}^{(n)}(0) = f^{(n)}\left(\frac{p+1}{2\lambda}\right) = 0$$

Car $\frac{p+1}{2\lambda} \in \left]-\frac{1}{\lambda}, \frac{p+2}{2\lambda}\right[$ et d'après l'hypothèse de récurrence.
En utilisant le 1°) pour la fonction g_{p+1} au lieu de la fonction f

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}\right[, g_{p+1}(x) = 0$$

Ce qui entraine que

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}\right[, f\left(x + \frac{p+1}{2\lambda}\right) = 0$$

$$-\frac{1}{\lambda} < x < \frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow -\frac{1}{\lambda} + \frac{p+1}{2\lambda} < x + \frac{p+1}{2\lambda} < \frac{1}{\lambda} + \frac{p+1}{2\lambda} \Leftrightarrow \frac{p-1}{2\lambda} < x + \frac{p+1}{2\lambda} < \frac{p+3}{2\lambda}$$

On en déduit que f est nulle sur $\left]\frac{p-1}{2\lambda}, \frac{p+3}{2\lambda}\right[$, comme f était déjà nulle sur $\left]-\frac{1}{\lambda}, \frac{p+2}{2\lambda}\right[$, f est nulle sur

$$\left]-\frac{1}{\lambda}, \frac{p+3}{2\lambda}\right[$$

C'est bien la proposition H_{p+1}.
Ceci étant vraie pour tout p on en déduit que f est nulle sur

$$\left]-\frac{1}{\lambda}, +\infty\right[$$

Par un raisonnement analogue on en déduit que f est nulle sur $\left]-\infty, \frac{1}{\lambda}\right[$ et donc sur $\mathbb{R}$.

Allez à : Exercice 18

Correction exercice 19.

1.

f est C^2 sur $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ et C^3 sur $\left]\frac{a+b}{2}, b\right[$, on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange sur $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$

$$f(b)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\left(b-\frac{a+b}{2}\right)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{\left(b-\frac{a+b}{2}\right)^2}{2!}f''\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{\left(b-\frac{a+b}{2}\right)^3}{3!}f'''(c_1)$$
$$=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{b-a}{2}f'\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(b-a)^2}{8}f''\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(b-a)^3}{48}f'''(c_1)$$

2. f est C^2 sur $\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$ et C^3 sur $\left]a,\frac{a+b}{2}\right[$, on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange sur $\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$

$$f(a)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\left(a-\frac{a+b}{2}\right)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{\left(a-\frac{a+b}{2}\right)^2}{2!}f''\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{\left(a-\frac{a+b}{2}\right)^3}{3!}f'''(c_2)$$
$$=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{a-b}{2}f'\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(a-b)^2}{8}f''\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(a-b)^3}{48}f'''(c_2)$$
$$=f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{b-a}{2}f'\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(b-a)^2}{8}f''\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{(b-a)^3}{48}f'''(c_2)$$

3.

$$f(b)-f(a)$$
$$=\left(f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{b-a}{2}f'\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(b-a)^2}{8}f''\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(b-a)^3}{48}f'''(c_1)\right)$$
$$-\left(f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{b-a}{2}f'\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(b-a)^2}{8}f''\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{(b-a)^3}{48}f'''(c_2)\right)$$
$$=(b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(b-a)^3}{48}\left(f'''(c_1)+f'''(c_2)\right)$$
$$=(b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(b-a)^3}{24}\times\frac{f'''(c_1)+f'''(c_2)}{2}$$

$\frac{f'''(c_1)+f'''(c_2)}{2}$ est le milieu de $f'''(c_1)$ et de $f'''(c_2)$ donc $\frac{f'''(c_1)+f'''(c_2)}{2}$ est compris entre $f'''(c_1)$ et $f'''(c_2)$, autrement dit

Si $f'''(c_1)<f'''(c_2)$

$$\frac{f'''(c_1)+f'''(c_2)}{2}\in\left]f'''(c_1),f'''(c_2)\right[$$

Et si $f'''(c_2)<f'''(c_1)$

$$\frac{f'''(c_1)+f'''(c_2)}{2}\in\left]f'''(c_2),f'''(c_1)\right[$$

Comme f''' est continue sur $[a,b]$ donc sur $[c_1,c_2]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaire il existe $c\in[c_1,c_2]$ tel que

$$\frac{f'''(c_1)+f'''(c_2)}{2}=f'''(c)$$

Par conséquent

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(b-a)^3}{24}f'''(c)$$

Je n'ai pas traité le cas où $f'''(c_1)=f'''(c_2)$, mais dans ce cas $c=c_1$ ou $c=c_2$ convient de manière évidente.

Allez à : Exercice 19

Développements limités, équivalents et calculs de limites

Exercice 1.

Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre n des fonctions suivantes :

1. $f(x)=\frac{e^x}{(1+x)^3}\quad n=2$
2. $g(x)=\frac{\sin(x)}{1+\ln(1+x)}\quad n=3$
3. $h(x)=e^{\frac{\operatorname{sh}(x)}{x}}\quad n=1$
4. $i(x)=\sin(x^2)\quad n=6$

Allez à : Correction exercice 1

Exercice 2.

1. Ecrire le développement limité de $\frac{1}{1+x}$ au voisinage de 0, à l'ordre 3.
2. En déduire le développement limité de $\frac{1}{1+e^x}$ au voisinage de 0, à l'ordre 3.
3. Soit $f(x)=\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$. En utilisant ce qui précède, déterminer l'asymptote au graphe de f pour $x\to+\infty$.

Allez à : Correction exercice 2

Exercice 3.

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 6, au voisinage de 0, de :
$$f(x)=\ln(1+x)\sin(x)$$
2. Déterminer le développement limité à l'ordre 4, au voisinage de 0, de :
$$f(x)=\frac{e^x}{\cos(x)}$$

Allez à : Correction exercice 3

Exercice 4.

Soient u,v et f définies par :
$$u(x)=(x^3+x^2+x+1)^{\frac{1}{3}},v(x)=\sqrt{x^2+x+1}$$
$$f(x)=(x^3+x^2+x+1)^{\frac{1}{3}}-\sqrt{x^2+x+1}$$

1. Donner le développement limité de u,v et f au voisinage de 0 à l'ordre 2.
2. En déduire l'équation d'une droite asymptote au graphe de f en $+\infty$.
3. En déduire l'équation d'une droite asymptote au graphe de f en $-\infty$ et positionner f par rapport à cette asymptote.

Allez à : Correction exercice 4

Exercice 5.

Soit f la fonction pour tout $x\in\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\sqrt{1+x+x^2}$

1. Déterminer le développement limité de f, à l'ordre 2 au voisinage de 0.
2. En déduire l'équation de la tangente au point d'abscisse $x=0$ et la position de la tangente par rapport à la courbe.
3. Déterminer une équation de l'asymptote en $+\infty$ ainsi que la position de cette asymptote par rapport à la courbe.

Allez à : Correction exercice 5

Exercice 6.

Soit f l'application de $U =]-1,1[\cup]1,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, définie pour tout $x \in U$ par :

$$f(x) = (x^2 - 1)\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$

1. Donner le développement limité de f, à l'ordre 3, dans un voisinage de 0.
En déduire que le graphe de f admet une tangente (T) au point d'abscisse 0. Donner une équation cartésienne de (T) et préciser la position du graphe par rapport à (T).
2. En utilisant un développement asymptotique de f en $+\infty$, démontrer que le graphe de f admet une asymptote (A).
Donner une équation cartésienne de (A) et préciser la position du graphe de f par rapport à (A).

Allez à : Correction exercice 6

Exercice 7.

1. Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par
$$f(x) = \arctan(x)$$
En calculant le développement limité à l'ordre 4, au voisinage de 0 de la fonction dérivée f', en déduire le développement limité de f à l'ordre 5.
2. Calculer le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0 de la fonction g définie par
$$g(x) = \frac{\arctan(x) - x}{\sin(x) - x}$$

Allez à : Correction exercice 7

Exercice 8.

Déterminer le développement limité à l'ordre 6, au voisinage de 0, de la fonction :

$$f(x) = \arccos(x^2)$$

Allez à : Correction exercice 8

Exercice 9.

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \arctan(x+1)$$

1. Calculer le développement limité à l'ordre 3 de la fonction dérivée f' au voisinage de 0.
2. En déduire le développement limité à l'ordre 4 de f au voisinage de 0.

Allez à : Correction exercice 9

Exercice 10.

Déterminer le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 0 de la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\operatorname{ch}(x)\ln(1+x)}{\cos(x)}$$

Allez à : Correction exercice 10

Exercice 11.

Déterminer le développement limité en $x = a$ à l'ordre n de

1. $f(x) = e^{\cos(x)}$, $a = \frac{\pi}{2}$, $n = 2$.
2. $g(x) = \frac{\frac{\pi}{4} - \arctan(x)}{\ln(x)}$, $a = 1$, $n = 1$.

Allez à : Correction exercice 11

Exercice 12.

Déterminer le développement limité à l'ordre 4, au voisinage de $\frac{\pi}{3}$, de la fonction :

$$f(x) = \cos(x)$$

Allez à : Correction exercice 12

Exercice 13.

Déterminer le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 1 de la fonction

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x}}{x^2}$$

Allez à : Correction exercice 13

Exercice 14.

Déterminer le développement limité à l'ordre 1, au voisinage de 1 de la fonction définie par :

$$f(x) = x^{\frac{1}{x-1}}$$

Allez à : Correction exercice 14

Exercice 15.

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 4, au voisinage de $\frac{\pi}{2}$, de :

$$f(x) = e^{\sin(x)}$$

2. Donner un équivalent de $f(x) - e$, en $\frac{\pi}{2}$.
3. En déduire

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - e}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}$$

Allez à : Correction exercice 15

Exercice 16.

Justifier l'existence et calculer le développement limité à l'ordre 3, relatif à $\frac{\pi}{2}$, des applications suivantes :

1.

$$f(x) = \ln(\sin(x))$$

2.

$$f(x) = (1 + \cos(x))^{\frac{1}{x}}$$

Allez à : Correction exercice 16

Exercice 17.

1. Calculer un développement limité à l'ordre 2 en $x = 2$ de $f(x) = \ln(x)$ et de $g(x) = x^3 - x^2 - x - 2$.
2. En déduire

$$\lim_{x \to 2} \frac{\ln(x) - \ln(2)}{x^3 - x^2 - x - 2}$$

Allez à : Correction exercice 17

Exercice 18.

1. Calculer un développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de :

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

2. En déduire qu'on peut prolonger cette fonction par continuité en $x = 0$ et que la fonction ainsi prolongée admet une dérivée première en $x = 0$.
3. Calculer un développement limité à l'ordre 4 au voisinage de $x = 0$ de :

$$g(x) = \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$$

Allez à : Correction exercice 18

Exercice 19.

Justifier l'existence et calculer le développement limité à l'ordre 4, relatif à 0, de l'application suivante :

$$f(x) = \frac{x}{\sin(x)}$$

Allez à : Correction exercice 19

Exercice 20.

Déterminer le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de :

$$f(x) = \frac{\ln(\operatorname{ch}(x))}{x\ln(1+x)}$$

Allez à : Correction exercice 20

Exercice 21.

Déterminer le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de :

$$f(x) = \frac{\ln(\cos(x))}{x\ln(1-x)}$$

Allez à : Correction exercice 21

Exercice 22.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(\operatorname{ch}(x))}{\operatorname{sh}(x)}$$

1. Déterminer le développement limité de f, au voisinage de 0, à l'ordre 3.
2. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et que ce prolongement est dérivable en 0 (on donnera la valeur de $f'(0)$.

Allez à : Correction exercice 22

Exercice 23.

Déterminer le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 0 de la fonction

$$f(x) = \frac{\cos(x) - 1}{\ln(1+x)\operatorname{sh}(x)}$$

Allez à : Correction exercice 23

Exercice 24.

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 0, de :

$$f(x) = \ln(1 + \operatorname{sh}(x))$$

2. Déterminer le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de :

$$g(x) = \frac{\ln(1+\operatorname{sh}(x))}{\sin(x)}$$

3. Montrer que g est prolongeable par continuité en $x = 0$.

Allez à : Correction exercice 24

Exercice 25.

Soit f la fonction réelle définie par :

$$f(x) = 9\sin(x) - 11x\cos(x) + 2x\cos(2x)$$

1. Donner les développements limités en 0, à l'ordre 5, des fonctions $\sin(x)$, $\cos(x)$ et $\cos(2x)$.
2. En déduire la limite, lorsque x tend vers 0 ($x \neq 0$), de l'expression $\frac{f(2x)}{f(x)}$.

Allez à : Correction exercice 25

Exercice 26.

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 4, au voisinage de 0 de la fonction définie par :
$$h(x) = \frac{\sin(x)\operatorname{sh}(x)}{\sin(x^2)}$$
2. En déduire un équivalent de $h(x) - 1$ au voisinage de 0.

Allez à : Correction exercice 26

Exercice 27.

Justifier l'existence et calculer le développement limité à l'ordre n, relatif à 0, des applications suivantes :

1.
$$f(x) = \frac{x}{\sin(x)} \qquad n = 4$$
2.
$$f(x) = \frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{\operatorname{sh}^2(x)} \qquad n = 3$$
3.
$$f(x) = (\cos(2x))^{\frac{3}{x^2}} \qquad n = 4$$

Allez à : Correction exercice 27

Exercice 28.

1. Donner le développement limité à l'ordre 1, en 0 de $\sqrt{1 + 3X + 2X^2} - 1$
2. Calculer
$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x + 2} - x\right)$$

Allez à : Correction exercice 28

Exercice 29.

Déterminer le développement limité à l'ordre 5, au voisinage de 0 de la fonction

$$f(x) = \sin^3(x)\left(e^{x^2} - 1\right)$$

Allez à : Correction exercice 29

Exercice 30.

Ecrire le développement limité à l'ordre 3, en 0, de $\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2}$ et en déduire sa limite en 0.

Allez à : Correction exercice 30

Exercice 31.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\ln\left(e^x+\sqrt{e^{2x}+1}\right)$$

1. Déterminer le développement limité la fonction g définie par $g(X)=\ln\left(1+\sqrt{1+X}\right)$ à l'ordre 1, au voisinage de 0.
2. Montrer que $f(x)=x+\ln\left(1+\sqrt{1+e^{-2x}}\right)$, à l'aide de la question 1. montrer que f admet une asymptote oblique en $+\infty$, on déterminera la position du graphe de f par rapport à cette asymptote.

Allez à : Correction exercice 32

Exercice 32.

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 6, au voisinage de 0 de la fonction définie par $g(x)=\ln(1+x^3)$
2. Déterminer le développement limité à l'ordre 5, au voisinage de 0 de la fonction définie par $h(x)=\sqrt{1+x^2}-1$
3. En déduire le développement limité à l'ordre 4, au voisinage de 0 de la fonction définie par $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$
4. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et que la fonction ainsi prolongée est dérivable, on donnera $f'(0)$.
5. Déterminer la position de la courbe par rapport à la tangente au voisinage de 0.

Allez à : Correction exercice 32

Exercice 33.

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de : $(1+h)^{\frac{1}{h}}$.
2. En déduire le développement généralisé à l'ordre 2 de $\left(1+\frac{1}{X}\right)^X$ lorsque $X\to+\infty$.
3. En déduire

$$\lim_{x\to\infty} x^2\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-4\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}+3\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right]$$

Allez à : Correction exercice 33

Exercice 34.

Calculer

1.
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos(x)}{x^2}$$
2.
$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x^2-1}$$
3.
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+2}-x\right)$$
4.
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{\sin^2(x)}$$
5.
$$\lim_{x\to 1}\frac{(\ln(x))^2}{\operatorname{ch}(x-1)-1}$$

Allez à : Correction exercice 34

Exercice 35.

Calculer, si elles existent, les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{\tan(2x)};\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{x\tan(2x)};\quad \lim_{x\to 0}\frac{(1-e^x)\sin(x)}{x^2+x^3};\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos(x)-x}{\ln(1+\sin(x))-x}.$$

Allez à : Correction exercice 35

Exercice 36.

Déterminer la limite suivante, sans préjugée qu'elle existe :

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\cos(x)}-e^{\mathrm{ch}(x)}}{\cos(x)-\mathrm{ch}(x)}$$

Allez à : Correction exercice 36

Exercice 37.

Calculer les limites

1.
$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{2x}$$
2.
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\left(\frac{x}{\sin(x)}\right)^{\frac{\sin(x)}{x-\sin(x)}}$$

On pourra poser $X=\frac{x-\sin(x)}{\sin(x)}$

3.
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{e^{\sin(x)}-e^{\tan(x)}}{\sin(x)-\tan(x)}$$
4.
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{x\ln(1+x)}$$

Allez à : Correction exercice 37

Exercice 38.

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 1, au voisinage de 0 de la fonction définie par
$$f(X)=\frac{\ln(1+X)}{X}$$
2. Calculer
$$\lim_{x\to +\infty}x\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-e\right)$$

Allez à : Correction exercice 38

Exercice 39.

Soit f l'application définie par $f(x)=2x+\sin(x)$

1. Déterminer un développement limité de f à l'ordre 3 en $x=0$.
2. Montrer que f est une bijection et que sa bijection réciproque f^{-1} est de classe C^3, en déduire que f^{-1} a un développement limité à l'ordre 3.

   On note $f^{-1}(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+o(x^3)$ le développement limité de f^{-1} en 0.
3. En déduire le développement limité de f^{-1} en exploitant la relation $f^{-1}(f(x))=x$.

Allez à : Correction exercice 39

Exercice 40.

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ l'appliquation définie pour tout $x\in\mathbb{R}$ par $f(x)=xe^{x^2}$

1. Justifier que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ puis déterminer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de f.
2. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
3. On admet que f^{-1} est aussi C^∞ sur $\mathbb{R}$. Montrer que f^{-1} admet un développement limité à l'ordre 5 en 0 de la forme :

$$f^{-1}(x)=ax+bx^3+cx^5+o(x^5)$$

Où a,b et c sont des réels.

4. A partir de l'identité $f\left(f^{-1}(x)\right)=x$ valable pour tout $x\in\mathbb{R}$, déterminer a,b et c.

Allez à : Correction exercice 40

CORRECTIONS

Correction exercice 1.

1.

$$f(x)=e^x(1+x)^{-3}=\left(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\left(1-3x+\frac{(-3)(-4)}{2}x^2+o(x^2)\right)$$
$$=\left(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\left(1-3x+6x^2+o(x^2)\right)$$
$$=1+(-3+1)x+\left(6-3+\frac{1}{2}\right)x^2+o(x^2)=1-2x+\frac{7}{2}x^2+o(x^2)$$

2.

$$g(x)=\frac{\sin(x)}{1+\ln(1+x)}=\frac{x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{1+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)}$$

$$\begin{array}{l|l}
x \qquad -\frac{x^3}{6}+o(x^3) & 1+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3) \\ \cline{2-2}
x+x^2-\frac{x^3}{2}+o(x^3) & x-x^2+\frac{4}{3}x^3 \\ \cline{1-1}
-x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3) & \\
-x^2-x^3+o(x^3) & \\ \cline{1-1}
\frac{4}{3}x^3+o(x^3) & \\
\frac{4}{3}x^3+o(x^3) & \\ \cline{1-1}
o(x^3) &
\end{array}$$

Donc

$$g(x)=x-x^2+\frac{4}{3}x^3+o(x^3)$$

3.

$$h(x)=e^{\frac{\operatorname{sh}(x)}{x}}=e^{\frac{x+o(x^2)}{x}}=e^{1+o(x)}=e\times e^{o(x)}=e\left(1+o(x)\right)=e+o(x)$$

4.

$$i(x)=\sin(x^2)=x^2-\frac{x^6}{6}+o(x^6)$$

Allez à : Exercice 1

Correction exercice 2.

1.

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+o(x^3)$$

2.

Première méthode

$$\frac{1}{1+e^x}=\frac{1}{1+\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)}=\frac{1}{2+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)}$$

$$=\frac{1}{2\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}+o(x^3)\right)}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{1+X}=\frac{1}{2}\left(1-X+X^2-X^3+o(X^3)\right)$$

Avec

$$X=\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}+o(x^3)$$

$$X^2=\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}+o(x^3)\right)\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}+o(x^3)\right)=\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{8}+\frac{x^3}{8}+o(x^3)=\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{4}+o(x^3)$$

$$X^3=\frac{x^3}{8}+o(x^3)$$

Et

$$o(X^3)=o(x^3)$$

$$\frac{1}{1+e^x}=\frac{1}{2}\left(1-X+X^2-X^3+o(X^3)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}+o(x^3)\right)+\left(\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{4}+o(x^3)\right)-\left(\frac{x^3}{8}+o(x^3)\right)+o(x^3)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{2}+\left(-\frac{1}{12}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)x^3+o(x^3)\right)=\frac{1}{2}-\frac{x}{4}+\frac{x^3}{48}+o(x^3)$$

Allez à : Exercice 2

Deuxième méthode

$$\begin{array}{r|l}
1 & 2+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3) \\ \cline{2-2}
1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}+o(x^3) & \frac{1}{2}-\frac{x}{4}-\frac{x^3}{48} \\ \hline
-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{12}+o(x^3) & \\
-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{8}+o(x^3) & \\ \hline
\frac{x^3}{24}+o(x^3) & \\
-\frac{x^3}{24}+o(x^3) & \\ \hline
o(x^3) &
\end{array}$$

3. On pose $X=\frac{1}{x}$, $X\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$

$$f(x)=\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}=\frac{1}{X(1+e^X)}=\frac{1}{X}\left(\frac{1}{2}-\frac{X}{4}-\frac{X^3}{48}+o(X^3)\right)=\frac{1}{2X}-\frac{1}{4}-\frac{X^2}{48}+o(X^2)$$

$$=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{48x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$-\frac{1}{48x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$$

Donc $y=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}$ est asymptote au graphe en $+\infty$.

Allez à : Exercice 2

Correction exercice 3.

1.

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}+o(x^5)=x(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\frac{x^4}{5}+o(x^4))$$

$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)=x\left(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^4)\right)$$

Donc

$$\ln(1+x)\sin(x)=x^2\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\frac{x^4}{5}+o(x^4)\right)\left(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^4)\right)$$

$$\ln(1+x)\sin(x)=x^2\left(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}-\frac{x}{2}+\frac{x^3}{12}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^4}{18}-\frac{x^3}{4}+\frac{x^4}{5}+o(x^4)\right)$$

$$\ln(1+x)\sin(x)=x^2\left(1-\frac{x}{2}+x^2\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\right)+x^3(\frac{1}{12}-\frac{1}{4})+x^4(\frac{1}{120}-\frac{1}{18}+\frac{1}{5})+o(x^4)\right)$$

$$\ln(1+x)\sin(x)=x^2\left(1-\frac{x}{2}+\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{6}x^3+\frac{11}{72}x^4+o(x^4)\right)$$

$$\ln(1+x)\sin(x)=x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{6}-\frac{x^5}{6}+\frac{11x^6}{72}+o(x^6)$$

2.

$$\begin{array}{l|l}
1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+o(x^4) & 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4) \\
1\qquad-\frac{x^2}{2}\qquad+\frac{x^4}{24}+o(x^4) & \\
\hline
x+x^2+\frac{x^3}{6}\qquad+o(x^4) & 1+x+x^2+\frac{2}{3}x^3+\frac{x^4}{2}+o(x^4) \\
x\qquad-\frac{x^3}{2}\qquad+o(x^4) & \\
\hline
x^2+\frac{2}{3}x^3\qquad+o(x^4) & \\
x^2\qquad-\frac{x^4}{2}+o(x^4) & \\
\hline
\frac{2}{3}x^3+\frac{x^4}{2}+o(x^4) & \\
\frac{2}{3}x^3\qquad+o(x^4) & \\
\hline
\frac{x^4}{2}+o(x^4) & \\
\frac{x^4}{2}+o(x^4) & \\
\hline
o(x^4) &
\end{array}$$

Donc $\frac{e^x}{\cos(x)}=1+x+x^2+\frac{2}{3}x^3+\frac{x^4}{2}+o(x^4)$

Allez à : Exercice 3

Correction exercice 4.

1.

$$u(x)=(x^3+x^2+x+1)^{\frac{1}{3}}=(1+X)^{\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3}X+\frac{1}{3}\times\left(-\frac{2}{3}\right)\times\frac{X^2}{2}+o(X^2)$$
$$=1+\frac{1}{3}X-\frac{1}{9}X^2+o(X^2)$$

Avec

$$X=x+x^2+x^3=x+x^2+o(x^2)$$
$$X^2=x^2+o(x^2)$$
$$o(X^2)=o(x^2)$$
$$u(x)=1+\frac{1}{3}\big(x+x^2+o(x^2)\big)-\frac{1}{9}\big(x^2+o(x^2)\big)=1+\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}x^2+o(x^2)$$
$$v(x)=\sqrt{x^2+x+1}=(1+X)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}X-\frac{1}{8}X^2+o(X^2)$$

Avec

$$X=x+x^2$$
$$X^2=x^2+o(x^2)$$
$$o(X^2)=o(x^2)$$
$$v(x)=1+\frac{1}{2}(x+x^2)-\frac{1}{8}\big(x^2+o(x^2)\big)+o(x^2)=1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+o(x^2)$$

Donc

$$f(x)=1+\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}x^2-\left(1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2\right)+o(x^2)=-\frac{1}{6}x-\frac{11}{72}x^2+o(x^2)$$

La courbe admet une tangente d'équation $y=-\frac{1}{6}x$ à l'origine

2. On pose $X=\frac{1}{x}\to 0^+$, donc $X>0$.

$$f(x)=(x^3+x^2+x+1)^{\frac{1}{3}}-\sqrt{x^2+x+1}=\left(\frac{1}{X^3}+\frac{1}{X^2}+\frac{1}{X}+1\right)^{\frac{1}{3}}-\sqrt{\frac{1}{X^2}+\frac{1}{X}+1}$$
$$=\left(\frac{1+X+X^2+X^3}{X^3}\right)^{\frac{1}{3}}-\sqrt{\frac{1+X+X^2}{X^2}}=\frac{(1+X+X^2+X^3)^{\frac{1}{3}}}{X}-\frac{(1+X+X^2)^{\frac{1}{2}}}{X}$$
$$=\frac{f(X)}{X}=\frac{-\frac{1}{6}X-\frac{11}{72}X^2+o(X^2)}{X}=-\frac{1}{6}-\frac{11}{72}X+o(X)=-\frac{1}{6}-\frac{11}{72x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$$

La courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y=-\frac{1}{6}$ en $+\infty$

3. On pose $X=\frac{1}{x}\to 0^-$ donc $X<0$.

$$f(x)=(x^3+x^2+x+1)^{\frac{1}{3}}-\sqrt{x^2+x+1}=\left(\frac{1}{X^3}+\frac{1}{X^2}+\frac{1}{X}+1\right)^{\frac{1}{3}}-\sqrt{\frac{1}{X^2}+\frac{1}{X}+1}$$
$$=\left(\frac{1+X+X^2+X^3}{X^3}\right)^{\frac{1}{3}}-\sqrt{\frac{1+X+X^2}{X^2}}=\frac{(1+X+X^2+X^3)^{\frac{1}{3}}}{X}-\frac{(1+X+X^2)^{\frac{1}{2}}}{-X}$$
$$=\frac{u(X)+v(X)}{X}=\frac{1+\frac{1}{3}X+\frac{2}{9}X^2+o(x^2)+1+\frac{1}{2}X+\frac{3}{8}X^2+o(X^2)}{X}$$
$$=\frac{2+\frac{5}{6}X+\frac{43}{72}X^2+o(X^2)}{X}=\frac{2}{X}+\frac{5}{6}+\frac{43}{72}X+o(X)=2x+\frac{5}{6}+\frac{43}{72x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$$

La courbe admet une asymptote d'équation $y=\frac{5}{6}+2x$ en $-\infty$, comme au voisinage de $-\infty$

$$f(x)-\left(2x+\frac{5}{6}\right)=\frac{43}{72x}+o\left(\frac{1}{x}\right)<0$$

La courbe est au-dessous de l'asymptote.

Allez à : Exercice 4

Correction exercice 5.

1.

$$f(x)=\sqrt{1+X}=1+\frac{1}{2}X+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{X^2}{2}+o(X^2)=1+\frac{1}{2}X-\frac{1}{8}X^2+o(X^2)$$

Avec $X=x+x^2$, $X^2=x^2+o(x^2)$ et $o(X^2)=o(x^2)$

$$f(x)=1+\frac{1}{2}(x+x^2)-\frac{1}{8}\big(x^2+o(x^2)\big)+o(x^2)=1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+o(x^2)$$

2. Une équation de la tangente en 0 est $y=1+\frac{1}{2}x$

$$f(x)-\left(1+\frac{1}{2}x\right)=\frac{3}{8}x^2+o(x^2)=x^2\left(\frac{3}{8}+o(1)\right)$$

Cette expression est positive dans un voisinage de 0 donc la courbe est au-dessus de la tangente dans un voisinage de 0.

3. On pose $X=\frac{1}{x}\to 0$ lorsque $x\to+\infty$.

$$f(x)=\sqrt{1+\frac{1}{X}+\frac{1}{X^2}}=\sqrt{\frac{X^2+X+1}{X^2}}=\frac{\sqrt{X^2+X+1}}{|X|}=\frac{\sqrt{1+X+X^2}}{X}$$

Car $X>0$.

En utilisant le développement limité du 1. on en déduit que

$$f(x)=\frac{1+\frac{1}{2}X+\frac{3}{8}X^2+o(X^2)}{X}=\frac{1}{X}+\frac{1}{2}+\frac{3}{8}X+o(X)=x+\frac{1}{2}+\frac{3}{8x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Une équation de l'asymptote en $+\infty$ est $y=x+\frac{1}{2}$

$$f(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8x}+o\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}\left(\frac{3}{8}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

Cette expression est positive lorsque que $x\to+\infty$ donc la courbe est au-dessus de l'asymptote en $+\infty$.

Allez à : Exercice 5

Correction exercice 6.

1.

$$f(x)=(x^2-1)\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|=(x^2-1)[\ln|1+x|-\ln|1-x|]$$

Au voisinage de 0,

$$\begin{aligned}f(x)&=(x^2-1)[\ln(1+x)-\ln(1-x)]\\&=(x^2-1)\left[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)-\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)\right]\\&=(x^2-1)\left[2x+\frac{2}{3}x^3+o(x^3)\right]=2x^3-2x-\frac{2}{3}x^3+o(x^3)=-2x+\frac{4}{3}x^3+o(x^3)\end{aligned}$$

Une équation de la tangente en 0 est $y=-2x$, et comme $f(x)-(-2x)=\frac{4}{3}+o(x^3)$ est du signe de $\frac{4}{3}x^3$ lorsque x est proche de 0.

Si $x>0$ la tangente est au dessous de la courbe.

Si $x<0$ la tangente est au dessus de la courbe.

Remarque :

Attention au raisonnement suivant, si $f(x)=-2x+\frac{4}{3}x^3+o(x^3)$ alors $f'(x)=-2+4x^2+o(x^2)$, si $f'(x)$ admet un développement limité à l'ordre 2, par exemple parce que f' est de classe C^3 dans un voisinage de 0, alors ce développement est celui-là, autrement dit on ne peut pas dériver un développement limité sans justifier que la fonction dérivée admet un développement limité. Par contre on peut toujours intégrer un développement limité.

2. On pose $t=\frac{1}{x}$,

$$f(t)=\left(\frac{1}{t^2}-1\right)\ln\left|\frac{1+\frac{1}{t}}{1-\frac{1}{t}}\right|=\frac{1-t^2}{t^2}\ln\left|\frac{\frac{t+1}{t}}{\frac{t-1}{t}}\right|=\frac{1-t^2}{t^2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|$$

Lorsque $x\to+\infty$, $t\to 0$ et au voisinage de 0,

$$\frac{1-t^2}{t^2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|=-\frac{t^2-1}{t^2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|=-\frac{1}{t^2}\left(-2t+\frac{4}{3}t^3+o(t^3)\right)=\frac{2}{t}-\frac{4}{3}t+o(t)$$
$$=2x-\frac{4}{3x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$$

On trouve le développement limité en 0 de $\frac{t^2-1}{t^2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|$ à l'aide du 1.

$\lim_{x\to+\infty}-\frac{4}{3x}+o\left(\frac{1}{x}\right)=0$ donc la droite d'équation $y=-2x$ est asymptote à la courbe.

Comme $f(x)-2X=-\frac{4}{3x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$ est strictement négatif lorsque $x\to+\infty$, la courbe est au dessus de l'asymptote.

Allez à : Exercice 6

Correction exercice 7.

1.

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4+o(x^4)$$

En intégrant

$$f(x)=f(0)+x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+o(x^5)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+o(x^5)$$

Car $f(0)=\arctan(0)=0$

2.

$$g(x)=\frac{\arctan(x)-x}{\sin(x)-x}=\frac{x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+o(x^5)-x}{x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)-x}=\frac{-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+o(x^5)}{-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)}$$
$$=\frac{x^3\left(-\frac{1}{3}+\frac{x^2}{5}+o(x^2)\right)}{x^3\left(-\frac{1}{6}+\frac{x^2}{120}+o(x^2)\right)}=\frac{-\frac{1}{3}+\frac{x^2}{5}+o(x^2)}{-\frac{1}{6}+\frac{x^2}{120}+o(x^2)}=\frac{-\frac{1}{3}+\frac{x^2}{5}+o(x^2)}{-\frac{1}{6}\left(1-\frac{x^2}{20}+o(x^2)\right)}$$
$$=-6\left(-\frac{1}{3}+\frac{x^2}{5}+o(x^2)\right)\frac{1}{1-\frac{x^2}{20}+o(x^2)}$$
$$=-6\left(-\frac{1}{3}+\frac{x^2}{5}+o(x^2)\right)\left(1+\frac{x^2}{20}+o(x^2)\right)=-6\left(-\frac{1}{3}+\left(-\frac{1}{60}+\frac{1}{5}\right)x^2+o(x^2)\right)$$
$$=2-6\times\frac{11}{60}x^2+o(x^2)=2-\frac{11}{10}x^2+o(x^2)$$

Allez à : Exercice 7

Correction exercice 8.

$$f'(x)=\frac{-2x}{\sqrt{1-x^4}}=2x(1-x^4)^{-\frac{1}{2}}$$

$$(1-X)^{-\frac{1}{2}}=1-\left(-\frac{1}{2}\right)X+o(X)=1+\frac{1}{2}X+o(X)$$

Donc

$$f'(x)=-2x(1-x^4)^{-\frac{1}{2}}=-2x\left(1+\frac{1}{2}x^4+o(x^4)\right)=-2x-x^5+o(x^5)$$

Donc

$$f(x)=f(0)-x^2-\frac{x^6}{6}+o(x^6)=\frac{\pi}{2}-x^2-\frac{x^6}{6}+o(x^6)$$

Allez à : Exercice 8

Correction exercice 9.

$$f'(x)=\frac{1}{1+(1+x)^2}=\frac{1}{2+2x+x^2}$$

Première méthode : division suivant les puissances croissantes

$$\begin{array}{l|l}
1 & 2+2x+x^2 \\ \cline{2-2}
1+x+\frac{x^2}{2} & \frac{1}{2}-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4} \\ \hline
-x-\frac{x^2}{2} & \\
-x-x^2-\frac{x^3}{2} & \\ \hline
\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2} & \\
\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+o(x^3) & \\ \hline
o(x^3) &
\end{array}$$

Par conséquent

$$f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{2}+o(x^3)$$

Deuxième méthode

$$f'(x)=\frac{1}{2+2x+x^2}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{1+x+\frac{x^2}{2}}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{1+X}=\frac{1}{2}\times\left(1-X+X^2-X^3+o(X^3)\right)$$

Avec

$$X=x+\frac{x^2}{2}$$

$$X^2=\left(x+\frac{x^2}{2}\right)\left(x+\frac{x^2}{2}\right)=x^2+\frac{x^3}{2}+\frac{x^3}{2}+o(x^3)=x^2+x^3+o(x^3)$$

$$X^3=x^3+o(x^3)\quad\text{et}\quad o(X^3)=o(x^3)$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\frac{1}{2}\times\left(1-X+X^2-X^3+o(X^3)\right)\\
&=\frac{1}{2}\times\left(1-\left(x+\frac{x^2}{2}\right)+\left(x^2+x^3+o(x^3)\right)-\left(x^3+o(x^3)\right)+o(x^3)\right)\\
&=\frac{1}{2}\times\left(1-x+\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)=\frac{1}{2}-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+o(x^3)
\end{aligned}$$

On en déduit le développement de f à l'ordre 4 en déterminant une primitive du polynôme de Taylor de $f'(x)$

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}+o(x^4)=arctan(1)+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}+o(x^4)$$
$$=\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}+o(x^4)$$

Allez à : Exercice 9

Correction exercice 10.

$$\operatorname{ch}(x)\ln(1+x)=\left(1+\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)=x+\frac{x^2}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)x^3+o(x^3)$$
$$=x-\frac{x^2}{2}+\frac{5x^3}{6}+o(x^3)$$

$$\begin{array}{r|l}
x-\frac{x^2}{2}+\frac{5x^3}{6}+o(x^3) & 1-\frac{x^2}{2}+o(x^3) \\ \cline{2-2}
x\qquad-\frac{x^3}{2}+o(x^3) & x-\frac{x^2}{2}+\frac{4}{3}x^3 \\ \hline
-\frac{x^2}{2}+\frac{4}{3}x^3+o(x^3) & \\
-\frac{x^2}{2}\qquad\quad+o(x^3) & \\ \hline
\frac{4}{3}x^3+\ o(x^3) & \\
\frac{4}{3}x^3+\ o(x^3) & \\ \hline
o(x^3) &
\end{array}$$

$$\frac{\operatorname{ch}(x)\ln(1+x)}{\cos(x)}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{4}{3}x^3+o(x^3)$$

Allez à : Exercice 10

Correction exercice 11.

1. On pose $t=x-\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow x=t+\frac{\pi}{2}$, $\cos(x)=\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin(t)$

$$f(x)=e^{-\sin(t)}=e^{-t+o(t^2)}=e^T=1+T+\frac{T^2}{2!}+o(T^2)=1+\left(-t+o(t^2)\right)+\frac{t^2+o(t^2)}{2!}+o(t^2)$$

En posant $T=-t+o(t^2)$, $T^2=t^2+o(t^2)$ et $o(T^2)=o(t^2)$

$$f(x)=1+\left(-t+o(t^2)\right)+\frac{t^2+o(t^2)}{2!}+o(t^2)=1-t+\frac{t^2}{2}+o(t^2)$$
$$=1-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{2}+o\left(\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\right)$$

2. On pose $t=x-1\Leftrightarrow x=1+t$

$$g(x)=\frac{\frac{\pi}{4}-\arctan(1+t)}{\ln(1+t)}$$

Le dénominateur et le numérateur s'annulent en $t=0$. Il faut trouver un développement limité à l'ordre 2 (au moins) du numérateur et du dénominateur. Pour le dénominateur il n'y a pas de problème, par contre le développement limité de $h(t)=\frac{\pi}{4}-\arctan(1+t)$ ne fait pas parti des formules connues, pour cela on va chercher un développement à l'ordre 1 de sa dérivée.

$$h'(t)=-\frac{1}{1+(1+t)^2}=-\frac{1}{1+1+2t+t^2}=-\frac{1}{2+2t+t^2}=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{1+t+\frac{t^2}{2}}$$

$$=-\frac{1}{2}\big(1-t+o(t)\big)=-\frac{1}{2}+\frac{t}{2}+o(t)$$

Donc

$$h(t)=h(0)-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{4}+o(t^2)=\frac{\pi}{4}-\arctan(1)-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{4}+o(t^2)=-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{4}+o(t^2)$$

$$g(x)=\frac{-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{4}+o(t^2)}{t-t^2+o(t^2)}=\frac{-\frac{1}{2}+\frac{t}{4}+o(t)}{1-t+o(t)}=\left(-\frac{1}{2}+\frac{t}{4}+o(t)\right)\big(1+t+o(t)\big)$$

$$=-\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)t+o(t)=-\frac{1}{2}-\frac{t}{4}+o(t)=-\frac{1}{2}-\frac{x-1}{4}+o\big((x-1)\big)$$

Allez à : Exercice 11

Correction exercice 12.

Première méthode :

f est $C^{+\infty}$ donc f admet un développement limité à n'importe quel ordre, on peut appliquer la formule de Taylor-Young

$$f(0)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$$

$$f'(x)=-\sin(x)\Rightarrow f'(0)=-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f''(x)=-\cos(x)\Rightarrow f''\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$$

$$f^{(3)}(x)=\sin(x)\Rightarrow f^{(3)}\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f^{(4)}(x)=\cos(x)\Rightarrow f^{(4)}\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\cos(x)=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{4}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{12}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3+\frac{1}{48}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^4+o\left(\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^4\right)$$

Allez à : Exercice 12

Deuxième méthode

On pose $t=x-\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow x=t+\frac{\pi}{3}$

$$f(x)=\cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right)=\cos(t)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-\sin(t)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=\left(1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}+o(t^4)\right)\times\frac{1}{2}-\left(t-\frac{t^3}{3!}+o(t^4)\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{1}{4}t^2+\frac{\sqrt{3}}{12}t^3+\frac{1}{48}t^4+o(t^4)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{4}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{12}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3+\frac{1}{48}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^4+o\left(\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^4\right)$$

Allez à : Exercice 12

Correction exercice 13.

On pose $t = x - 1$, $x = 1 + t$

$$f(x) = \frac{\sqrt{2+t}}{(1+t)^2} = \sqrt{2}\left(1+\frac{t}{2}\right)^{\frac{1}{2}}(1+t)^{-2}$$

$$= \sqrt{2}\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{t}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{\left(\frac{t}{2}\right)^2}{2}+o(t^2)\right)\left(1-2t-2(-3)\frac{t^2}{2}+o(t^2)\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(1+\frac{t}{4}-\frac{t^2}{32}+o(t^2)\right)\left(1-2t+3t^2+o(t^2)\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(1+\left(-2+\frac{1}{4}\right)t+\left(3-\frac{1}{2}-\frac{1}{32}\right)t^2+o(t^2)\right) = \sqrt{2}\left(1-\frac{7}{4}t+\frac{79}{32}t^2+o(t^2)\right)$$

$$= \sqrt{2}-\frac{7\sqrt{2}}{4}(x-1)+\frac{79\sqrt{2}}{32}(x-1)^2+o((x-1)^2)$$

Allez à : Exercice 13

Correction exercice 14.

On pose $t = x - 1 \Leftrightarrow x = 1 + t$

$$f(x) = x^{\frac{1}{x-1}} = (1+t)^{\frac{1}{t}} = e^{\frac{1}{t}\ln(1+t)}$$

$$\frac{\ln(1+t)}{t} = \frac{t-\frac{t^2}{2}+o(t^2)}{t} = 1-\frac{t}{2}+o(t)$$

$$f(x) = e^{1-t+o(t)} = ee^{-t+o(t)} = e\left(1-\frac{t}{2}+o(t)\right) = e-e\frac{t}{2}+o(t) = e-e\frac{(x-1)}{2}+o\big((x-1)\big)$$

Allez à : Exercice 14

Correction exercice 15.

1. On pose $= x-\frac{\pi}{2}$, soit $x = t+\frac{\pi}{2}$,

$$f(x) = e^{\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)} = e^{\cos(t)} = e^{1-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{24}+o(t^4)} = ee^{-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{24}+o(t^4)} = ee^X = e(1+X+\frac{X^2}{2}+o(X^2)$$

Avec $X = -\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{24}+o(t^4)$, $X^2 = \frac{t^4}{4}+o(t^4)$ et $o(X^2) = o(t^4)$

$$f(x) = e\left(1-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{24}+o(t^4)+\frac{1}{2}\left(\frac{t^4}{4}+o(t^4)\right)+o(t^4)\right) = e-\frac{e}{2}t^2+\frac{e}{6}t^4+o(t^4)$$

$$= e-\frac{e}{2}(x-\frac{\pi}{2})^2+\frac{e}{6}(x-\frac{\pi}{2})^4+o\left((x-\frac{\pi}{2})^4\right)$$

2.

$$f(x)-e = -\frac{e}{2}(x-\frac{\pi}{2})^2+o\left((x-\frac{\pi}{2})^2\right)\underset{\frac{\pi}{2}}{\sim}-\frac{e}{2}(x-\frac{\pi}{2})^2$$

3.

$$\frac{f(x)-e}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}\underset{\frac{\pi}{2}}{\sim}-\frac{\frac{e}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2} = -\frac{e}{2}$$

donc

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)-e}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2} = -\frac{e}{2}$$

Allez à : Exercice 15

Correction exercice 16.

1. $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ et ln est $C^{+\infty}$ au voisinage de 1, donc f admet un développement limité à n'importe quel ordre.

   On pose $t = x - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = t + \frac{\pi}{2}$

$$f(x) = \ln\left(\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\right) = \ln(\cos(t)) = \ln\left(1 - \frac{t^2}{2} + o(t^3)\right) = \ln(1+T) = T - \frac{T^2}{2} + o(T^2)$$

   Avec

$$T = -\frac{t^2}{2} + o(t^3), \quad T^2 = o(t^3) \quad et \quad o(T^2) = o(t^3)$$

$$f(x) = T - \frac{T^2}{2} + o(T^2) = -\frac{t^2}{2} + o(t^3) = -\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{2} + o\left(\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3\right)$$

2. On pose $t = x - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = t + \frac{\pi}{2}$

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}\ln(1+\cos(x))} = e^{\frac{1}{t+\frac{\pi}{2}}\ln\left(1+\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\right)} = e^{\frac{1}{t+\frac{\pi}{2}}\ln(1-\sin(t))} = g(t)$$

   g est une fonction $C^{+\infty}$ au voisinage de 0 donc elle admet un développement limité à n'importe quel ordre. On fait d'abord un développement limité à l'ordre 3 de $\frac{1}{t+\frac{\pi}{2}}\ln(1-\sin(t))$

$$\frac{1}{t+\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} \times \frac{1}{1+\frac{2t}{\pi}} = \frac{2}{\pi} \times \frac{1}{1+T} = \frac{2}{\pi}\left(1 - T + T^2 - T^3 + o(T^3)\right)$$
$$= \frac{2}{\pi}\left(1 - \frac{2t}{\pi} + \left(\frac{2t}{\pi}\right)^2 - \left(\frac{2t}{\pi}\right)^3 + o(t^3)\right) = \frac{2}{\pi}\left(1 - \frac{2t}{\pi} + \frac{4t^2}{\pi^2} - \frac{8t^3}{\pi^3} + o(t^3)\right)$$

$$\ln(1-\sin(t)) = \ln\left(1 - t + \frac{t^3}{6} + o(t^3)\right) = \ln(1+T) = T - \frac{T^2}{2} + \frac{T^3}{3} + o(T^3)$$

   Avec $T = -t + \frac{t^3}{6} + o(t^3)$, $T^2 = \left(-t + \frac{t^3}{6} + o(t^3)\right)\left(-t + \frac{t^3}{6} + o(t^3)\right) = t^2 + o(t^3)$, $T^3 = t^3 + o(t^3)$ et $o(T^3) = o(t^3)$

$$\ln(1-\sin(t)) = T - \frac{T^2}{2} + \frac{T^3}{3} + o(T^3) = -t + \frac{t^3}{6} + o(t^3) - \frac{t^2 + o(t^3)}{2} + \frac{t^3 + o(t^3)}{3} + o(t^3)$$
$$= -t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{2} + o(t^3)$$

   Cette fois il fallait bien faire un développement limité à l'ordre 3 en T parce que le premier terme de T est en t.

$$\frac{1}{t+\frac{\pi}{2}}\ln(1-\sin(t))=\frac{2}{\pi}\times\frac{1}{\left(1+\frac{2t}{\pi}\right)}\ln\left(1-t+\frac{t^3}{6}+o(t^3)\right)$$
$$=\frac{2}{\pi}\left(1-\frac{2t}{\pi}+\frac{4t^2}{\pi^2}-\frac{8t^3}{\pi^3}+o(t^3)\right)\left(-t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{2}+o(t^3)\right)$$
$$=\frac{2}{\pi}\left(-t+\left(-\frac{2}{\pi}-\frac{1}{2}\right)t^2+\left(-\frac{4}{\pi^2}+\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\right)t^3+o(t^3)\right)$$
$$=\frac{2}{\pi}t-\left(\frac{4}{\pi}+1\right)t^2+\left(-\frac{8}{\pi^3}+\frac{2}{\pi^2}+\frac{1}{\pi}\right)t^3+o(t^3)$$
$$f(x)=e^{\frac{1}{t+\frac{\pi}{2}}\ln(1-\sin(t))}=e^{\frac{2}{\pi}t-\left(\frac{4}{\pi}+1\right)t^2+\left(-\frac{8}{\pi^3}+\frac{2}{\pi^2}+\frac{1}{\pi}\right)t^3+o(t^3)}=e^T=1+T+\frac{T^2}{2}+\frac{T^3}{6}+o(T^3)$$

Avec

$$T=\frac{2}{\pi}t-\left(\frac{4}{\pi}+1\right)t^2+\left(-\frac{8}{\pi^3}+\frac{2}{\pi^2}+\frac{1}{\pi}\right)t^3+o(t^3)$$
$$T^2=\left(\frac{2}{\pi}t-\left(\frac{4}{\pi}+1\right)t^2+\left(-\frac{8}{\pi^3}+\frac{2}{\pi^2}+\frac{1}{\pi}\right)t^3+o(t^3)\right)\left(\frac{2}{\pi}t-\left(\frac{4}{\pi}+1\right)t^2+\left(-\frac{8}{\pi^3}+\frac{2}{\pi^2}+\frac{1}{\pi}\right)t^3\right.$$
$$\left.+o(t^3)\right)=\frac{4}{\pi^2}t^2-\left(\frac{2}{\pi}\left(\frac{4}{\pi}+1\right)+\frac{2}{\pi}\left(\frac{4}{\pi}+1\right)\right)t^3+o(t^3)$$
$$=\frac{4}{\pi^2}t^2-\left(\frac{16}{\pi^2}+\frac{4}{\pi}\right)t^3+o(t^3)$$
$$T^3=\frac{8}{\pi^3}t^3+o(t^3)\quad et \quad o(T^3)=o(t^3)$$
$$f(x)=1+T+\frac{T^2}{2}+\frac{T^3}{6}+o(T^3)$$
$$=1+\frac{2}{\pi}t-\left(\frac{4}{\pi}+1\right)t^2+\left(-\frac{8}{\pi^3}+\frac{2}{\pi^2}+\frac{1}{\pi}\right)t^3+o(t^3)+\frac{\frac{4}{\pi^2}t^2-\left(\frac{16}{\pi^2}+\frac{4}{\pi}\right)t^3+o(t^3)}{2}$$
$$+\frac{\frac{8}{\pi^3}t^3+o(t^3)}{6}+o(t^3)$$
$$=1+\frac{2}{\pi}t+\left(-\frac{4}{\pi}-1+\frac{2}{\pi^2}\right)t^2+\left(-\frac{8}{\pi^3}+\frac{2}{\pi^2}+\frac{1}{\pi}-\frac{8}{\pi^2}-\frac{2}{\pi}+\frac{4}{3\pi^3}\right)t^3+o(t^3)$$
$$=1+\frac{2}{\pi}t+\left(\frac{2}{\pi^2}-\frac{4}{\pi}-1\right)t^2+\left(-\frac{20}{3\pi^3}-\frac{6}{\pi^2}-\frac{1}{\pi}\right)t^3+o(t^3)$$
$$=1+\frac{2}{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\left(\frac{2}{\pi^2}-\frac{4}{\pi}-1\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2+\left(-\frac{20}{3\pi^3}-\frac{6}{\pi^2}-\frac{1}{\pi}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3$$
$$+o\left(\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3\right)$$

Allez à : Exercice 16

Correction exercice 17.

1. On pose $t=x-2\Leftrightarrow x=t+2$

$$f(x)=\ln(t+2)=\ln\left(2\left(1+\frac{t}{2}\right)\right)=\ln(2)+\ln\left(1+\frac{t}{2}\right)=\ln(2)+\frac{t}{2}-\frac{\left(\frac{t}{2}\right)^2}{2}+o(t^2)$$
$$=\ln(2)+\frac{t}{2}-\frac{t^2}{8}+o(t^2)=\ln(2)+\frac{x-2}{2}-\frac{(x-2)^2}{8}+o((x-2)^2)$$

On peut utiliser la même méthode ou utiliser la formule de Taylor pour les polynômes de degré 3

$$g(x)=x^3-x^2-x-2=g(2)+g'(2)(x-2)+g''(2)\frac{(x-2)^2}{2!}+g'''(2)\frac{(x-2)^3}{3!}$$

$$g(2)=2^3-2^2-2-2=0$$
$$g'(x)=3x^2-2x-1\Rightarrow g'(2)=7$$
$$g''(x)=6x-2\Rightarrow g''(2)=10$$
$$g'''(x)=6\Rightarrow g'''(2)=6$$
$$g(x)=7(x-2)+5(x-2)^2+(x-2)^3=7(x-2)+5(x-2)^2+o\left((x-2)^2\right)$$

2.

$$\frac{\ln(x)-\ln(2)}{x^3-x^2-x-2}=\frac{\frac{x-2}{2}-\frac{(x-2)^2}{8}+o\left((x-2)^2\right)}{7(x-2)+5(x-2)^2+o\left((x-2)^2\right)}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{x-2}{8}+o(x-2)}{7+5(x-2)+o(x-2)}$$
$$\lim_{x\to 2}\frac{\ln(x)-\ln(2)}{x^3-x^2-x-2}=\frac{1}{14}$$

Allez à : Exercice 17

Correction exercice 18.

1. Comme on va diviser par x, il faut faire un d.l. de $\sin(x)$ à l'ordre 5.

$$f(x)=\frac{x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)}{x}=1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^4)$$

2.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\left(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^4)\right)=1$$

On peut prolonger f par continuité en posant $f(0)=1$.

f admet un d.l. à l'ordre 1, donc $f'(0)$ existe et $f'(0)=-\frac{1}{6}$ (le coefficient de x dans le d.l. de $f(x)$).

On rappelle que l'on ne peut pas conclure des résultats identiques sur les dérivées d'ordre supérieures si on n'a pas montré auparavant que la fonction admettait une dérivée à l'ordre voulue.

3.

$$g(x)=\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)=\ln\left(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^4)\right)=\ln(1+X)=X-\frac{X^2}{2}+\frac{X^3}{3}-\frac{X^4}{4}+o(X^4)$$

Avec $X=-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^4)$, $X^2=\frac{x^4}{36}+o(x^4)$ et $X^3=X^4=o(X^4)=o(x^4)$

Donc

$$g(x)=X-\frac{X^2}{2}+\frac{X^3}{3}-\frac{X^4}{4}+o(X^4)=-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}-\frac{\left(\frac{x^4}{36}\right)}{2}+o(x^4)=-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}-\frac{x^4}{72}+o(x^4)$$
$$=-\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{180}+o(x^4)$$

Allez à : Exercice 18

Correction exercice 19.

$f(x)$ tend vers 1 lorsque x tend vers 0, donc f est prolongeable par continuité 0, x et $\sin(x)$ sont $C^{+\infty}$ donc ces fonctions admettent des développement limité à n'importe quelle ordre, leur quotient aussi. Il va y avoir une simplification par x, donc il faut faire un développement limité du numérateur et du dénominateur à l'ordre 5, x est un polynôme de degré inférieur à 5, son développement limité est lui-même.

$$f(x)=\frac{x}{x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)}=\frac{1}{1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^4)}$$

Là, il y a deux techniques, soit la division suivant les puissances croissantes ou utiliser la formule $\frac{1}{1+X}$.

Je vais faire une division

$$\begin{array}{l|l}
1 & 1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^4) \\ \cline{2-2}
1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^4) & 1+\frac{x^2}{6}+\frac{7}{360}x^4 \\ \hline
\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{120}+o(x^4) & \\
\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{36}+o(x^4) & \\ \hline
\frac{7}{360}x^4+o(x^4) & \\
\frac{7}{360}x^4+o(x^4) & \\ \hline
o(x^4) &
\end{array}$$

$$f(x)=\frac{x}{\sin(x)}= 1+\frac{x^2}{6}+\frac{7}{360}x^4+o(x^4)$$

Allez à : Exercice 19

Correction exercice 20.

$$\ln(\operatorname{ch}(x))=\ln\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)=\ln(1+X)=X-\frac{X^2}{2}+o(X^2)$$

Avec $X=\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)$, $X^2=\frac{x^4}{4}+o(x^4)$ et $o(X^2)=o(x^4)$

Donc

$$\ln(\operatorname{ch}(x))=\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)-\frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4}+o(x^4)\right)+o(x^4)=\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+o(x^4)$$

$$x\ln(1+x)=x\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)=x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{3}+o(x^4)$$

$$f(x)=\frac{\ln(\operatorname{ch}(x))}{x\ln(1+x)}=\frac{\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+o(x^4)}{x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{3}+o(x^4)}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{x^2}{12}+o(x^2)}{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)}$$

$$\begin{array}{l|l}
\frac{1}{2}\qquad -\frac{x^2}{12}+o(x^2) & 1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3} \\
\frac{1}{2}-\frac{x}{4}+\frac{x^2}{6} & \\ \hline
\frac{x}{4}-\frac{x^2}{4}+o(x^2) & \frac{1}{2}+\frac{x}{4}-\frac{x^2}{8} \\
\frac{x}{4}-\frac{x^2}{8}+o(x^2) & \\ \hline
-\frac{x^2}{8}+o(x^2) & \\
-\frac{x^2}{8}+o(x^2) & \\ \hline
o(x^2) &
\end{array}$$

Donc $f(x)=\frac{1}{2}-\frac{x}{4}-\frac{x^2}{8}+o(x^2)$

Allez à : Exercice 20

Correction exercice 21.

$$\ln(\cos(x)) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) = \ln(1 + X) = X - \frac{X^2}{2} + o(X^2)$$

Avec $X = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$, $X^2 = \frac{x^4}{4} + o(x^4)$ et $o(X^2) = o(x^4)$

Donc

$$\ln(\cos(x)) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4} + o(x^4)\right) + o(x^4) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$$

$$x\ln(1 - x) = x\left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) = -x^2 - \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$$

$$f(x) = \frac{\ln(\cos(x))}{x\ln(1 - x)} = \frac{-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)}{-x^2 - \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{3} + o(x^4)} = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{x^2}{12} + o(x^2)}{-1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + o(x^2)} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{x^2}{12} + o(x^2)}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)}$$

$$\begin{array}{r|l}
\frac{1}{2} \qquad + \frac{x^2}{12} + o(x^2) & 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} \\
\frac{1}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{6} \qquad\qquad & \\
\hline
-\frac{x}{4} - \frac{x^2}{12} + o(x^2) & \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{24} \\
-\frac{x}{4} - \frac{x^2}{8} + o(x^2) & \\
\cline{1-1}
\frac{x^2}{24} + o(x^2) & \\
\frac{x^2}{24} + o(x^2) & \\
\cline{1-1}
o(x^2) &
\end{array}$$

Donc $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{24} + o(x^2)$

Allez à : Exercice 21

Correction exercice 22.

1.

$$\ln(\mathrm{ch}(x)) = \ln\left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

On pourra mettre x^2 en facteur au numérateur

$$\mathrm{sh}(x) = x + o(x)$$

On pourra mettre x en facteur au dénominateur

$$\frac{\ln(\mathrm{ch}(x))}{\mathrm{sh}(x)} = \frac{x^2 f_1(x)}{x g_1(x)} = x\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

Il suffit de faire un développement limité à l'ordre 4 au numérateur et 3 au dénominateur, car après simplificateur de x^2 par x, il y aura un x en facteur donc des développements à l'ordre 2 de f_1 et de g_1 suffisent

$$\ln(\mathrm{ch}(x)) = \ln\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) = \ln(1 + X) = X - \frac{X^2}{2} + o(X^2)$$

Avec $X = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$ et donc $X^2 = \frac{x^4}{4} + o(x^4)$ et $o(X^2 = o(x^4)$

$$\ln(\mathrm{ch}(x)) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) - \frac{\frac{x^4}{4} + o(x^4)}{2} + o(x^4) = \frac{x^2}{2} + \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{8}\right)x^4 + o(x^4)$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4) = x^2\left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{12} + o(x^2)\right)$$

$$\mathrm{sh}(x)=x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)=x\left(1+\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)$$

Par conséquent

$$f(x)=\frac{x^2\left(\frac{1}{2}-\frac{x^2}{12}+o(x^2)\right)}{x\left(1+\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)}=x\frac{\frac{1}{2}-\frac{x^2}{12}+o(x^2)}{1+\frac{x^2}{6}+o(x^2)}=x\left(\frac{1}{2}-\frac{x^2}{12}+o(x^2)\right)\left(1-\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)$$

$$=x\left(\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{12}-\frac{1}{12}\right)x^2+o(x^2)\right)=x\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}x^2+o(x^2)\right)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$$

2.

$$\lim_{x\to 0}f(x)=0$$

Donc il suffit de poser $f(0)=0$ pour prolonger f par continuité en 0.

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}x^3+o(x^3)}{x}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}x^2+o(x^2)\to\frac{1}{2}$$

Alors $f'(0)=\frac{1}{2}$.

Allez à : Exercice 22

Correction exercice 23.

$$\ln(1+x)\,\mathrm{sh}(x)\sim_0 x^2$$

Et

$$\cos(x)-1\sim_0-\frac{x^2}{2}$$

Donc on pourra mettre x^2 en facteur au numérateur et au dénominateur, puis simplifier par x^2, il faut donc faire des développements limités à l'ordre $2+3=5$ pour finalement obtenir un développement limité à l'ordre 3.

$$\cos(x)-1=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)-1=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)=x^2\left(-\frac{1}{2}+\frac{x^2}{24}+o(x^3)\right)$$

$$\ln(1+x)\,\mathrm{sh}(x)=\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o(x^4)\right)\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)$$

$$=x^2\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+o(x^3)\right)\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)$$

Je me suis contenter de faire des développements à l'ordre 4 parce que les deux factorisations par x (donc par x^2) permettent d'obtenir le produit de x^2 par un produit de développements limités à l'ordre 3 (qui donne un développement limité à l'ordre 3) c'est-à-dire un développement limité à l'ordre 5.

Si on avait fait des développements limités de $\ln(1+x)$ et de $\mathrm{sh}(x)$ à l'ordre 5, on aurait juste constaté que les deux termes de degré 5 n'auraient servi à rien (donc rien de bien grave).

$$\ln(1+x)\,\mathrm{sh}(x)=x^2\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+o(x^3)\right)\left(1+\frac{x^2}{6}+o(x^3)\right)$$

$$=x^2\left(1-\frac{x}{2}+\left[\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\right]x^2+\left[-\frac{1}{12}-\frac{1}{4}\right]x^3+o(x^3)\right)$$

$$=x^2\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right)$$

Donc

$$f(x)=\frac{x^2\left(-\frac{1}{2}+\frac{x^2}{24}+o(x^3)\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right)}=\frac{-\frac{1}{2}+\frac{x^2}{24}+o(x^3)}{1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}$$

Il reste à faire une division suivant les puissances croissantes

$$\begin{array}{r|l}
-\frac{1}{2}+\frac{1}{24}x^2+o(x^3) & 1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+o(x^3) \\ \cline{2-2}
-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3) & -\frac{1}{2}-\frac{1}{4}x+\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{24}x^3+o(x^3) \\ \cline{1-1}
-\frac{1}{4}x+\frac{7}{24}x^2-\frac{1}{6}x^3+o(x^3) & \\
-\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{8}x^3+o(x^3) & \\ \cline{1-1}
\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{24}x^3+o(x^3) & \\
\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{12}x^3+o(x^3) & \\ \cline{1-1}
\frac{1}{24}x^3+o(x^3) & \\
\frac{1}{24}x^3+o(x^3) & \\ \cline{1-1}
+o(x^3) &
\end{array}$$

Et finalement

$$f(x)=-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}x+\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{24}x^3+o(x^3)$$

Allez à : Exercice 23

Correction exercice 24.

1.

$$\ln(1+\mathrm{sh}(x))=\ln\left(1+x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)=\ln(1+X)=X-\frac{X^2}{2}+\frac{X^3}{3}+o(X^3)$$

Avec $X=x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$, $X^2=\left(x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)\left(x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)=x^2+o(x^3)$, $X^3=x^3+o(x^3)$ et $o(X^3)=o(x^3)$

$$\begin{aligned}\ln(1+\mathrm{sh}(x))&=X-\frac{X^2}{2}+\frac{X^3}{3}+o(X^3)=x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)-\frac{x^2+o(x^3)}{2}+\frac{x^3+o(x^3)}{3}+o(x^3)\\&=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+o(x^3)\end{aligned}$$

2.

$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$$

Donc

$$g(x)=\frac{\ln(1+\mathrm{sh}(x))}{\sin(x)}=\frac{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+o(x^3)}{x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}=\frac{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{1-\frac{x^2}{6}+o(x^2)}$$

$$=\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\times\frac{1}{1-\frac{x^2}{6}+o(x^2)}$$

$$\frac{1}{1-\frac{x^2}{6}+o(x^2)}=\frac{1}{1+X}=1-X+o(X)$$

Avec $X=-\frac{x^2}{6}+o(x^2)$ et $o(X)=o(x^2)$

$$\frac{1}{1-\frac{x^2}{6}+o(x^2)}=1+\frac{x^2}{6}+o(x^2)$$

On aurait aussi pu faire une division suivant les puissances croissantes

$$g(x)=\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\left(1+\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)=1-\frac{x}{2}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)x^2+o(x^2)$$

$$=1-\frac{x}{2}+\frac{2}{3}x^2+o(x^2)$$

3.

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{x}{2}+\frac{2}{3}x^2+o(x^2)\right)=1$$

donc g est prolongeable par continuité par la fonction définie par : $\begin{cases} g(x) & \text{si} \quad x\neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x=0 \end{cases}$

Allez à : Exercice 24

Correction exercice 25.

1.

$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)$$

$$\cos(x)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)$$

$$\cos(2x)=1-\frac{(2x)^2}{2}+\frac{(2x)^4}{24}+o(x^5)=1-2x^2+\frac{2x^4}{3}+o(x^5)$$

2.

$$f(x)=9\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\right)-11x\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)\right)+2x\left(1-2x^2+\frac{2x^4}{3}+o(x^5)\right)$$

$$=(9-11+2)x+\left(-\frac{9}{6}+\frac{11}{2}-4\right)x^3+\left(\frac{9}{120}-\frac{11}{24}+\frac{4}{3}\right)x^5+o(x^5)=\frac{19}{20}x^5+o(x^5)$$

$$f(2x)=\frac{19}{20}(2x)^5+o(x^5)=\frac{19\times 8}{5}x^5+o(x^5)=\frac{152}{5}x^5+o(x^5)$$

Donc

$$\frac{f(2x)}{f(x)}=\frac{\frac{19}{20}x^5+o(x^5)}{\frac{152}{5}x^5+o(x^5)}=\frac{\frac{19}{20}+o(1)}{\frac{152}{5}+o(1)}\sim\frac{19}{20}\times\frac{5}{19\times 8}=\frac{1}{32}$$

Et

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)}{f(x)}=\frac{1}{32}$$

Allez à : Exercice 25

Correction exercice 26.

1.

$$\begin{aligned}
\sin(x)\operatorname{sh}(x) &= \left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\right)\left(x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\right)\\
&= x^2\left(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^4)\right)\left(1+\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^4)\right)\\
&= x^2\left(1+\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)x^2+\left(\frac{1}{120}-\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{120}\right)x^4+o(x^4)\right)\\
&= x^2\left(1-\frac{1}{90}x^4+o(x^4)\right)=x^2-\frac{1}{90}x^6+o(x^6)
\end{aligned}$$

Donc

Il faut faire un développement limité au même ordre du dénominateur

$$\begin{aligned}
h(x) &= \frac{x^2-\frac{1}{90}x^6+o(x^6)}{x^2-\frac{x^6}{6}+o(x^6)}=\frac{1-\frac{1}{90}x^4+o(x^4)}{1-\frac{x^4}{6}+o(x^4)}=\left(1-\frac{1}{90}x^4+o(x^4)\right)\left(1+\frac{x^4}{6}+o(x^4)\right)\\
&= 1+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{90}\right)x^4+o(x^4)=1+\frac{7}{45}x^4+o(x^4)
\end{aligned}$$

2.

$$h(x)-1=\frac{7}{45}x^4+o(x^4)\sim\frac{7}{45}x^4$$

Allez à : Exercice 26

Correction exercice 27.

1. $f(x)$ tend vers 1 lorsque x tend vers 0, donc f est prolongeable par continuité 0, x et $\sin(x)$ sont $C^{+\infty}$ donc ces fonctions admettent des d.l. à n'importe quelle ordre, leur quotient aussi.

Il va y avoir une simplification par x, donc il faut faire un d.l. du numérateur et du dénominateur à l'ordre 5, x est un polynôme de degré inférieur à 5, son d.l. est lui-même.

$$f(x)=\frac{x}{x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)}=\frac{1}{1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^4)}$$

Là, il y a deux techniques, soit la division suivant les puissances croissantes ou utiliser la formule $\frac{1}{1+X}$.

Je vais faire une division

$$\begin{array}{l|l}
1 & 1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^4) \\ \cline{2-2}
1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^4) & 1+\frac{x^2}{6}+\frac{7}{360}x^4 \\ \cline{1-1}
\quad\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{120}+o(x^4) & \\
\quad\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{36}+o(x^4) & \\ \cline{1-1}
\qquad\frac{7}{360}x^4+o(x^4) & \\
\qquad\frac{7}{360}x^4+o(x^4) & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad o(x^4) &
\end{array}$$

$$f(x)=\frac{x}{\sin(x)}=1+\frac{x^2}{6}+\frac{7}{360}x^4+o(x^4)$$

2. Il faut évidemment réduire au même dénominateur

$$f(x)=\frac{1}{\sin^2(x)}-\frac{1}{\operatorname{sh}^2(x)}=\frac{\operatorname{sh}^2(x)-\sin^2(x)}{\sin^2(x)\operatorname{sh}^2(x)}$$

Le terme de plus petit degré du dénominateur est x^4 car $\sin^2(x)\operatorname{sh}^2(x)\sim_0 x^2\times x^2=x^4$

Pour que cette fonction admette un développement limité il faut que le terme de plus bas degré du numérateur soit en x^4.

$\operatorname{sh}^2(x)-\sin^2(x)$ est paire, cette fonction est nulle en 0, le terme en x^2 est $x^2-x^2=0$ car

$$\operatorname{sh}^2(x)-\sin^2(x)=\left(x-\frac{x^3}{6}+\cdots\right)^2-\left(x+\frac{x^3}{6}+\cdots\right)^2=x^2+\cdots-(x^2+\cdots)$$

Tout va bien, le terme de plus bas degré de cette fonction est en x^4 (le terme en x^3 est nul car la fonction est paire. Donc cette fonction admet un développement limité en 0 et il y aura une simplification par x^4. Pour faire un développement limité à l'ordre 4, il faut faire un développement limité à l'ordre $4+3=7$ du numérateur et du dénominateur.

$$\begin{aligned}\operatorname{sh}^2(x)&=\left(x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^6)\right)^2=x^2\left(1+\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^5)\right)^2\\&=x^2\left(1+\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^5)\right)\left(1+\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^5)\right)\\&=x^2\left(1+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)x^2+\left(\frac{1}{120}+\frac{1}{36}+\frac{1}{120}\right)x^4+o(x^5)\right)\\&=x^2\left(1+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{90}x^4+o(x^5)\right)=x^2+\frac{1}{3}x^4+\frac{1}{90}x^6+o(x^7)\end{aligned}$$

On remarquera que le développement limité à l'ordre 6 de $\operatorname{sh}(x)$ permet de trouver le développement limité à l'ordre 7 de $\operatorname{sh}^2(x)$

$$\begin{aligned}\sin^2(x)&=\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^6)\right)^2=x^2\left(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^5)\right)^2\\&=x^2\left(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^5)\right)\left(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^5)\right)\\&=x^2\left(1+\left(-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\right)x^2+\left(\frac{1}{120}+\frac{1}{36}+\frac{1}{120}\right)x^4+o(x^5)\right)\\&=x^2\left(1-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{90}x^4+o(x^5)\right)=x^2-\frac{1}{3}x^4+\frac{1}{90}x^6+o(x^7)\end{aligned}$$

$$\operatorname{sh}^2(x)-\sin^2(x)=x^2+\frac{1}{3}x^4+\frac{1}{90}x^6+o(x^7)-\left(x^2-\frac{1}{3}x^4+\frac{1}{90}x^6+o(x^7)\right)=\frac{2}{3}x^4+o(x^7)$$

$$\begin{aligned}\sin^2(x)\operatorname{sh}^2(x)&=\left(x^2+\frac{1}{3}x^4+o(x^5)\right)\left(x^2-\frac{1}{3}x^4+o(x^5)\right)\\&=x^4\left(1+\frac{x^2}{3}+o(x^3)\right)\left(1-\frac{x^2}{3}+o(x^3)\right)=x^4\big(1+o(x^3)\big)=x^4+o(x^7)\end{aligned}$$

$$f(x)=\frac{\operatorname{sh}^2(x)-\sin^2(x)}{\sin^2(x)\operatorname{sh}^2(x)}=\frac{\frac{2}{3}x^4+o(x^7)}{x^4+o(x^7)}=\frac{\frac{2}{3}+o(x^3)}{1+o(x^3)}=\frac{2}{3}+o(x^3)$$

3. $f(x)=(\cos(2x))^{\frac{3}{x^2}}=e^{\frac{3}{x^2}\ln(\cos(2x))}$

Il faut déjà faire un développement limité à l'ordre 4 de $\frac{3}{x^2}\ln(\cos(2x))$

On va diviser par x^2 donc il faut faire un développement limité de $\ln(\cos(2x))$ à l'ordre 6.

$$\ln(\cos(2x)) = \ln\left(1 - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{24} - \frac{(2x)^6}{720} + o(x^6)\right) = \ln\left(1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{4}{45}x^6 + o(x^6)\right)$$
$$= \ln(1+X) = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} + o(X^3)$$

Avec

$$X = -2x^2 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{4}{45}x^6 + o(x^6)$$
$$X^2 = \left(-2x^2 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{4}{15}x^6 + o(x^6)\right)\left(-2x^2 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{4}{15}x^6 + o(x^6)\right)$$
$$= 4x^4 + \left(-\frac{4}{3} - \frac{4}{3}\right)x^6 + o(x^6) = 4x^4 - \frac{8}{3}x^6 + o(x^6)$$
$$X^3 = -8x^6 + o(x^6)$$
$$o(X^3) = o(x^6)$$

Donc il était bien inutile de faire un développement limité à l'ordre 6 de $\ln(1+X)$, l'ordre 3 suffit car le terme de plus bas degré de X est x^2.

$$\ln(\cos(2x)) = \ln(1+X) = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} + o(X^3)$$
$$= -2x^2 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{4}{45}x^6 + o(x^6) - \frac{4x^4 - \frac{8}{3}x^6 + o(x^6)}{2} + \frac{-8x^6 + o(x^6)}{3} + o(x^6)$$
$$= -2x^2 - \frac{4}{3}x^4 - \frac{124}{45}x^6 + o(x^6)$$
$$\frac{3}{x^2}\ln(\cos(2x)) = \frac{3}{x^2}\left(-2x^2 - \frac{4}{3}x^4 - \frac{124}{45}x^6 + o(x^6)\right) = -6 - 4x^2 - \frac{124}{45}x^4 + o(x^4)$$
$$f(x) = e^{\frac{3}{x^2}\ln(\cos(2x))} = e^{-6-4x^2-\frac{19}{5}x^4+o(x^4)} = e^{-6}e^{-4x^2-\frac{124}{45}x^4+o(x^4)} = e^{-6}e^X$$
$$= e^{-6}\left(1 + X + \frac{X^2}{2} + o(X^2)\right)$$

Avec

$$X = -4x^2 - \frac{124}{45}x^4 + o(x^4)$$
$$X^2 = 16x^4 + o(x^4)\ \ et\ o(X^2) = o(x^4)$$
$$f(x) = e^{-6}\left(1 + X + \frac{X^2}{2} + o(X^2)\right) = e^{-6}\left(1 - 4x^2 - \frac{124}{45}x^4 + o(x^4) + \frac{16x^4 + o(x^4)}{2} + o(x^4)\right)$$
$$= e^{-6}\left(1 - 4x^2 + \frac{236}{45}x^4 + o(x^4)\right) = e^{-6} - 4e^{-6}x^2 + \frac{236e^{-6}}{45}x^4 + o(x^4)$$

Allez à : Exercice 27

Correction exercice 28.

1. $1 + \frac{1}{2} \times 3X + o(X) - 1 = \frac{3}{2}X + o(X)$
2. On pose $X = \frac{1}{x}$, X tend vers 0 lorsque x tend vers l'infini.

$$\sqrt{x^2+3x+2} - x = \sqrt{\frac{1}{X^2} + \frac{3}{X} + 2} - \frac{1}{X} = \sqrt{\frac{1+3X+2X^2}{X^2}} - \frac{1}{X} = \frac{\sqrt{1+3X+2X^2}}{X} - \frac{1}{X}$$

Car $X > 0$

$$\sqrt{x^2+3x+2} - x = \frac{\sqrt{1+3X+2X^2} - 1}{X} = \frac{\frac{3}{2}X + o(X)}{X} = \frac{3}{2} + o(1)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+2}-x\right)=\lim_{X\to 0}\left(\frac{3}{2}+o(1)\right)=\frac{3}{2}$$

Allez à : Exercice 28

Correction exercice 29.

$$f(x)=\sin^3(x)\left(e^{x^2}-1\right)=\left(x+o(x)\right)^3\left(1+x^2+o(x^2)-1\right)=\left(x^3+o(x^3)\right)\left(x^2+o(x^2)\right)$$
$$=x^3\left(1+o(1)\right)x^2\left(1+o(1)\right)=x^5\left(1+o(1)\right)=x^5+o(x^5)$$

Allez à : Exercice 29

Correction exercice 30.

Ni $\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$ ni $\frac{1}{x^2}$ n'admettent de développement limité en 0, il faut absolument réduire au même dénominateur.

$$\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2\cos(x)-\sin^2(x)}{x^2\sin^2(x)}$$

Le dénominateur s'annule en 0, il faut faire attention ! Le terme de plus bas degré est x^4, cela se voit. Si le terme de plus bas degré du numérateur est x^p avec $p<4$, la fonction n'admet pas de développement limité en 0.

Etudions brièvement $x^2\cos(x)-\sin^2(x)$, cette fonction s'annule en 0, il n'y a pas de terme constant, elle est paire donc il n'y a pas de terme en x et x^3, il reste à regarder le terme en x^2 : $x^2\cos(x)=x^2(1-\frac{x^2}{2}+\cdots)$ le premier terme est x^2, $(\sin(x))^2=\left(x-\frac{x^3}{6}+\cdots\right)^2$ donc le premier terme est aussi x^2, il n'y a pas de terme en x^2. Cette étude justifie le fait que cette fonction admet un développement limité en 0. De plus il y aura une simplification par x^4 il faut donc faire des développement limité à l'ordre $4+3=7$ pour pouvoir obtenir un développement limité à l'ordre 3.

$$x^2\cos(x)=x^2\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)\right)=x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{24}+o(x^7)$$

On notera qu'un développement limité à l'ordre 5 de $\cos(x)$ suffit pour obtenir un développement limité à l'ordre 7 de $x^2\cos(x)$.

$$\sin^2(x)=\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^6)\right)^2=x^2\left(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^5)\right)^2$$
$$=x^2\left(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^5)\right)\left(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^5)\right)$$
$$=x^2(1-\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)x^2+\left(\frac{1}{120}+\left(-\frac{1}{6}\right)\left(-\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{120}\right)x^4+o(x^5)$$
$$=x^2\left(1-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{45}x^4+o(x^5)\right)=x^2-\frac{1}{3}x^4+\frac{2}{45}x^6+o(x^7)$$

On notera qu'un développement limité à l'ordre 6 de $\sin(x)$ suffit pour obtenir un développement limité à l'ordre 7 de $\sin^2(x)$. Cela vient du fait que le développement limité de $\sin(x)$ commence par x.

On en déduit que :

$$x^2\cos(x)-\sin^2(x)=x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{24}+o(x^7)-\left(x^2-\frac{1}{3}x^4+\frac{2}{45}x^6+o(x^7)\right)$$
$$=-\frac{1}{6}x^4-\frac{1}{360}x^6+o(x^7)$$
$$x^2\sin^2(x)=x^2\left(x^2-\frac{1}{3}x^4+o(x^5)\right)=x^4-\frac{1}{3}x^6+o(x^7)$$

En faisant une troncature du développement limité de $\sin^2(x)$ trouver ci-dessus.

$$\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}-\frac{1}{x^2}=\frac{-\frac{1}{6}x^4-\frac{1}{360}x^6+o(x^7)}{x^4-\frac{1}{3}x^6+o(x^7)}=\frac{-\frac{1}{6}-\frac{1}{360}x^2+o(x^3)}{1-\frac{1}{3}x^2+o(x^3)}$$

La première (et plus délicate) partie est finie, il faut trouver le développement limité d'un quotient de fonction dont le dénominateur ne s'annule pas. On peut faire une division suivant les puissance croissante mais ici on peut appliquer la formule $\frac{1}{1+X}$, cela me parait plus simple.

$$\frac{-\frac{1}{6}-\frac{1}{360}x^2+o(x^3)}{1-\frac{1}{3}x^2+o(x^3)}=\left(-\frac{1}{6}-\frac{1}{360}x^2+o(x^3)\right)\times\frac{1}{1-\frac{1}{3}x^2+o(x^3)}$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{3}x^2+o(x^3)}=\frac{1}{1+X}=1-X+X^2+o(X^2)$$

Avec $X=-\frac{1}{3}x^2+o(x^3)$, $X^2=o(x^3)$ et $o(X^2)=o(x^3)$. On remarquera qu'un d.l. à l'ordre 1 du d.l. de $\frac{1}{1+X}=1-X+o(X)$ pose un problème parce que $o(X)=o(x^2)$ or on souhaite obtenir un d.l. à l'ordre 3.

$$\frac{1}{1-\frac{1}{3}x^2+o(x^3)}=\frac{1}{1+X}=1-X+X^2+o(X^2)$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{3}x^2+o(x^3)}=1-\left(-\frac{1}{3}x^2+o(x^3)\right)+o(x^3)+o(x^3)=1+\frac{1}{3}x^2+o(x^3)$$

On en déduit que :

$$\frac{-\frac{1}{6}-\frac{1}{360}x^2+o(x^3)}{1-\frac{1}{3}x^2+o(x^3)}=\left(-\frac{1}{6}-\frac{1}{360}x^2+o(x^3)\right)\times\frac{1}{1-\frac{1}{3}x^2+o(x^3)}$$

$$=\left(-\frac{1}{6}-\frac{1}{360}x^2+o(x^3)\right)\times\left(1+\frac{1}{3}x^2+o(x^3)\right)=-\frac{1}{6}+\left(-\frac{1}{18}-\frac{1}{360}\right)x^2+o(x^3)$$

$$=-\frac{1}{6}-\frac{7}{120}x^2+o(x^3)$$

$$\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}-\frac{1}{x^2}=-\frac{1}{6}-\frac{7}{120}x^2+o(x^3)$$

Et enfin

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{6}-\frac{7}{120}x^2+o(x^3)\right)=-\frac{1}{6}$$

Allez à : Exercice 30

Correction exercice 31.

1.

$$g(X)=\ln\left(1+1+\frac{1}{2}X+o(X)\right)=\ln\left(2+\frac{X}{2}+o(X)\right)=\ln\left(2\left(1+\frac{X}{4}+o(X)\right)\right)$$

$$=\ln(2)+\ln\left(1+\frac{X}{4}+o(X)\right)=\ln(2)+\frac{X}{4}+o(X)$$

2.

$$f(x)=\ln\left(e^x+\sqrt{e^{2x}(1+e^{-2x})}\right)=\ln\left(e^x+e^x\sqrt{1+e^{-2x}}\right)=\ln\left(e^x\left(1+\sqrt{1+e^{-2x}}\right)\right)$$

$$=\ln(e^x)+\ln\left(1+\sqrt{1+e^{-2x}}\right)=x+\ln\left(1+\sqrt{1+e^{-2x}}\right)$$

Lorsque $x \to +\infty$, $e^{-2x} \to 0$, on peut poser $X = e^{-2x}$ donc

$$\ln\left(1+\sqrt{1+e^{-2x}}\right) = \ln\left(1+\sqrt{1+X}\right) = \ln(2) + \frac{X}{4} + o(X) = \ln(2) + \frac{e^{-2x}}{4} + o(e^{-2x})$$

Par conséquent

$$f(x) = x + \ln(2) + \frac{e^{-2x}}{4} + o(e^{-2x})$$

Comme $\frac{e^{-2x}}{4} + o(e^{-2x}) \to 0$ lorsque $x \to +\infty$, la droite d'équation $y = x + \ln(2)$ est asymptote au graphe de f en $+\infty$.

$$f(x) - (x + \ln(2)) = \frac{e^{-2x}}{4} + o(e^{-2x}) = e^{-2x}\left(\frac{1}{4} + o(1)\right)$$

$\frac{1}{4} + o(1) > 0$ lorsque $x \to +\infty$, $e^{-2x} > 0$ ce qui entraine que $f(x) - (x + \ln(2)) > 0$, ce qui montre que le graphe est au-dessus de l'asymptote.

Allez à : Exercice 31

Correction exercice 32.

1.

$$(1+h)^{\frac{1}{h}} = e^{\frac{\ln(1+h)}{h}} = e^{\frac{h-\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{3}+o(h^3)}{h}} = e^{1-\frac{h}{2}+\frac{h^2}{3}+o(h^2)} = ee^X = e\left(1 + X + \frac{X^2}{2} + o(X^2)\right)$$

Avec $X = -\frac{h}{2} + \frac{h^2}{3} + o(h^2)$, $X^2 = \frac{h^2}{4} + o(h^2)$ et $o(X^2) = o(h^2)$.

Donc

$$(1+h)^{\frac{1}{h}} = e\left(1 + X + \frac{X^2}{2} + o(X^2)\right) = e\left(1 - \frac{h}{2} + \frac{h^3}{3} + o(h^2) + \frac{h^2}{8} + o(h^2) + o(h^2)\right)$$

$$= e - \frac{e}{2}h + \frac{11}{24}h^2 + o(h^2)$$

2. On pose $h = \frac{1}{X}$,

$$\left(1+\frac{1}{X}\right)^X = (1+h)^{\frac{1}{h}} = e - \frac{e}{2}h + \frac{11}{24}h^2 + o(h^2) = e - \frac{e}{2X} + \frac{11e}{24X^2} + o\left(\frac{1}{X^2}\right)$$

3.

$$x^2\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - 4\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x} + 3\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right]$$

$$= x^2\left[e - \frac{e}{2x} + \frac{11e}{24x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) - 4\left(e - \frac{e}{2\times 2x} + \frac{11e}{24\times(2x)^2} + o\left(\frac{1}{X^2}\right)\right)\right.$$
$$\left. + 3\left(e - \frac{e}{2\times 3x} + \frac{11e}{24\times(3x)^2} + o\left(\frac{1}{X^2}\right)\right)\right]$$

$$= x^2\left[e - \frac{e}{2x} + \frac{11e}{24x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) - 4\left(e - \frac{e}{4x} + \frac{11e}{24\times 4x^2} + o\left(\frac{1}{X^2}\right)\right)\right.$$
$$\left. + 3\left(e - \frac{e}{6x} + \frac{11e}{24\times 9x^2} + o\left(\frac{1}{X^2}\right)\right)\right]$$

$$= x^2\left[e - \frac{e}{2x} + \frac{11e}{24x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) - 4e + \frac{e}{x} - \frac{11e}{24x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) + 3e - \frac{e}{2x} + \frac{11e}{24\times 3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]$$

$$= x^2\left[+\frac{11e}{24\times 3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right] = \frac{11e}{72} + o(1)$$

Donc

$$\lim_{x\to\infty} x^2\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}-4\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}+3\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right]=\frac{11e}{72}$$

Allez à : Exercice 32

Correction exercice 33.

1.

$$g(x)=x^3-\frac{x^6}{2}+o(x^6)$$

2.

$$h(x)=(1+x^2)^{\frac{1}{2}}-1=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{x^4}{2}+o(x^5)-1=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o(x^5)$$

3.

$$f(x)=\frac{x^3-\frac{x^6}{2}+o(x^6)}{\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o(x^5)}=\frac{x^3\left(1-\frac{x^3}{2}+o(x^3)\right)}{x^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}x^2+o(x^3)\right)}=x\frac{1-\frac{x^3}{2}+o(x^3)}{\frac{1}{2}-\frac{1}{8}x^2+o(x^3)}$$

$$\begin{array}{l|l}
1 \qquad -\frac{x^3}{2}+o(x^3) & \frac{1}{2}-\frac{1}{8}x^2+o(x^3) \\ \cline{2-2}
1-\frac{x^2}{4} \qquad +o(x^3) & 2+\frac{x^2}{2}-x^3 \\ \hline
\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{2}+o(x^3) & \\
\frac{x^2}{4} \qquad +o(x^3) & \\ \hline
-\frac{x^3}{2}+o(x^3) & \\
-\frac{x^3}{2}+o(x^3) & \\ \hline
o(x^3) &
\end{array}$$

Donc

$$f(x)=x\left(2+\frac{x^2}{2}-x^3+o(x^3)\right)=2x+\frac{x^3}{2}-x^4+o(x^4)$$

4.

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(2x+\frac{x^3}{2}-x^4+o(x^4)\right)=0$$

On pose alors $f(0)=0$

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{2x+\frac{x^3}{2}-x^4+o(x^4)}{x}=\frac{x\left(2+\frac{x^2}{2}-x^3+o(x^3)\right)}{x}=2+\frac{x^2}{2}-x^3+o(x^3)\to 2$$

Ce qui montre que f est dérivable en 0 et que $f'(0)=2$

5. L'équation de la tangente en 0 est $y=2x$

$$f(x)-2x=\frac{x^3}{2}-x^4+o(x^4)=x^3\left(\frac{1}{2}-x+o(x)\right)$$

$\frac{1}{2}-x+o(x)>0$ lorsque x est proche de 0, par conséquent $f(x)-2x$ a le même signe que x^3

Si $x<0$, $f(x)-2x<0$ et la courbe est au-dessous de la tangente.

Si $x>0$, $f(x)-2x>0$ et la courbe est au-dessus de la tangente.

Allez à : Exercice 33

Correction exercice 34.

1.

$$\frac{e^{x^2}-\cos(x)}{x^2}=\frac{1+x^2+o(x^2)-\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)}{x^2}=\frac{\frac{3}{2}x^2+o(x^2)}{x^2}=\frac{3}{2}+o(1)$$

Donc

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{3}{2}+o(1)=\frac{3}{2}$$

2. On pose $t=x-1\Leftrightarrow x=1+t$

$$\frac{\ln(x)}{x^2-1}=\frac{\ln(1+t)}{(1+t)^2-1}=\frac{\ln(1+t)}{1+2t+t^2-1}=\frac{\ln(1+t)}{t(2+t)}=\frac{t+o(t)}{t(2+t)}=\frac{1+o(1)}{2+t}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x^2-1}=\lim_{t\to 0}\frac{1+o(1)}{2+t}=\frac{1}{2}$$

3. On pose $X=\frac{1}{x}$, X tend vers 0 lorsque x tend vers l'infini.

$$\sqrt{x^2+3x+2}-x=\sqrt{\frac{1}{X^2}+\frac{3}{X}+2}-\frac{1}{X}=\sqrt{\frac{1+3X+2X^2}{X^2}}-\frac{1}{X}=\frac{\sqrt{1+3X+2X^2}}{X}-\frac{1}{X}$$

Car $X>0$

$$\sqrt{x^2+3x+2}-x=\frac{\sqrt{1+3X+2X^2}-1}{X}=\frac{1+\frac{1}{2}\times 3X+o(X)-1}{X}=\frac{\frac{3}{2}X+o(X)}{X}=\frac{3}{2}+o(1)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+2}-x\right)=\lim_{X\to 0}\left(\frac{3}{2}+o(1)\right)=\frac{3}{2}$$

4.

$$e^x-1-x=1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)-1-x=\frac{x^2}{2}+o(x^2)\sim_0\frac{x^2}{2}$$

$$\sin^2(x)\sim_0 x^2$$

Donc

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{\sin^2(x)}=\frac{1}{2}$$

5.

On pose $t=x-1$, donc $t\to 0$ lorsque $x\to 1$

$$\frac{(\ln(x))^2}{\operatorname{ch}(x-1)-1}=\frac{(\ln(1+t))^2}{\operatorname{ch}(t)-1}$$

$$\operatorname{ch}(t)-1=1+\frac{t^2}{2}+o(t^2)-1=\frac{t^2}{2}+o(t^2)=t^2\left(\frac{1}{2}+o(t)\right)$$

$$(\ln(1+t))^2=\left(t+o(t)\right)^2=t^2\left(1+o(1)\right)^2=t^2\left(1+o(1)\right)$$

$$\frac{(\ln(x))^2}{\operatorname{ch}(x-1)-1}=\frac{(\ln(1+t))^2}{\operatorname{ch}(t)-1}=\frac{t^2\left(1+o(1)\right)}{t^2\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)}=\frac{1+o(1)}{\frac{1}{2}+o(1)}$$

Allez à : Exercice 34

Correction exercice 35.

$$\frac{\sin(3x)}{\tan(2x)}=\frac{3x+o(x)}{2x+o(x)}=\frac{x\left(3+o(1)\right)}{x\left(2+o(1)\right)}=\frac{3+o(1)}{2+o(1)}\xrightarrow[x\to 0]{}\frac{3}{2}$$

$$\frac{\sin(3x)}{x\tan(2x)}=\frac{3x+o(x)}{x\left(2x+o(x)\right)}=\frac{x\left(3+o(1)\right)}{x^2\left(2+o(1)\right)}=\frac{3+o(1)}{x\left(2+o(1)\right)}$$

Si $x\to 0^+$, $\frac{\sin(3x)}{x\tan(2x)}\to+\infty$ et si $x\to 0^-$, $\frac{\sin(3x)}{x\tan(2x)}\to-\infty$.

Mais $\frac{\sin(3x)}{x\tan(2x)}$ n'admet pas de limite en 0.

$$\frac{(1-e^x)\sin(x)}{x^2+x^3}=\frac{\big(1-(1-x+o(x))\big)\big(x+o(x)\big)}{x^2(1+x)}=\frac{\big(x+o(x)\big)\big(x+o(x)\big)}{x^2(1+x)}$$

$$=\frac{x^2\big(1+o(1)\big)\big(1+o(1)\big)}{x^2(1+x)}=\frac{\big(1+o(1)\big)\big(1+o(1)\big)}{(1+x)}\xrightarrow[x\to 0]{}1$$

$$\frac{e^x-\cos(x)-x}{\ln(1+\sin(x))-x}=\frac{1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)-\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)-x}{\ln\left(1+\big(x+o(x^2)\big)\right)-x}=\frac{x^2+o(x^2)}{x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-x}$$

$$=\frac{x^2\big(1+o(1)\big)}{x^2\left(-\frac{1}{2}+o(1)\right)}=\frac{1+o(1)}{-\frac{1}{2}+o(1)}\xrightarrow[x\to 0]{}-2$$

Allez à : Exercice 35

Correction exercice 36.

$$\cos(x)-\operatorname{ch}(x)=1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-\left(1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)=-x^2+o(x^2)=x^2\big(-1+o(1)\big)$$

$$e^{\cos(x)}-e^{\operatorname{ch}(x)}=e^{1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}-e^{1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)}=ee^{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}-ee^{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}$$

$$=e\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)-e\left(1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)=e\big(-x^2+o(x^2)\big)=x^2\big(-e+o(1)\big)$$

$$\frac{e^{\cos(x)}-e^{\operatorname{ch}(x)}}{\cos(x)-\operatorname{ch}(x)}=\frac{x^2\big(-e+o(1)\big)}{x^2\big(-1+o(1)\big)}=\frac{-e+o(1)}{-1+o(1)}$$

Par conséquent

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\cos(x)}-e^{\operatorname{ch}(x)}}{\cos(x)-\operatorname{ch}(x)}=e$$

Allez à : Exercice 36

Correction exercice 37.

1. On pose $X=\frac{1}{2x}\to 0$ lorsque $x\to+\infty$.

$$\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{2x}=\left(\frac{\frac{1}{X}+1}{\frac{1}{X}-1}\right)^{\frac{1}{X}}=\left(\frac{1+X}{1-X}\right)^{\frac{1}{X}}=e^{\frac{1}{X}\ln\left(\frac{1+X}{1-X}\right)}=e^{\frac{1}{X}(\ln(1+X)-\ln(1-X))}$$

$\frac{1}{X}(\ln(1+X)-\ln(1-X))$ est une forme indéterminée lorsque $X\to 0$ car le numérateur et le dénominateur tende vers 0. Le terme de plus bas degré du dénominateur est X (c'est le seul), il faut donc faire un d.l. à l'ordre 1 du numérateur.

$$\ln(1+X)-\ln(1-X)=X+o(X)-\big(-X+o(X)\big)=2X+o(X)$$

Donc

$$\frac{1}{X}(\ln(1+X)-\ln(1-X))=\frac{2X+o(X)}{X}=2+o(1)$$

Et

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{2x}=\lim_{X\to 0}e^{\frac{1}{X}(\ln(1+X)-\ln(1-X))}=\lim_{X\to 0}e^{2+o(1)}=e^2$$

2.

$$\left(\frac{x}{\sin(x)}\right)^{\frac{\sin(x)}{x-\sin(x)}} = e^{\frac{\sin(x)}{x-\sin(x)}\ln\left(\frac{x}{\sin(x)}\right)}$$

On peut toujours vérifier, il s'agit d'une forme indéterminée.

Il faut faire apparaître $X = \frac{x-\sin(x)}{\sin(x)}$,

$$X = \frac{x-\sin(x)}{\sin(x)} = \frac{x}{\sin(x)} - 1 \Leftrightarrow X + 1 = \frac{x}{\sin(x)}$$

Donc

$$\left(\frac{x}{\sin(x)}\right)^{\frac{\sin(x)}{x-\sin(x)}} = e^{\frac{\sin(x)}{x-\sin(x)}\ln\left(\frac{x}{\sin(x)}\right)} = e^{\frac{1}{X}\ln(1+X)}$$

Là on est forcément tenter d'utiliser la formule $\ln(1+X) = X + o(X)$ mais attention, il faut vérifier que $X \to 0$ lorsque $x \to 0$.

$$X = \frac{x-\sin(x)}{\sin(x)} = \frac{x}{\sin(x)} - 1$$

Soit on sait que la limite de $\frac{\sin(x)}{x}$ tend vers 1 lorsque $x \to 0$, donc $\frac{x}{\sin(x)}$ tend aussi vers 1, soit on ne le sait pas et on cherche un équivalent de X.

$$x - \sin(x) = x - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) = \frac{x^3}{6} + o(x^3) \sim \frac{x^3}{6}$$

Donc

$$X = \frac{x-\sin(x)}{\sin(x)} \sim \frac{\frac{x^3}{6}}{x} = \frac{x^2}{6} \to 0$$

C'est bon $X \to 0$

$$\left(\frac{x}{\sin(x)}\right)^{\frac{\sin(x)}{x-\sin(x)}} = e^{\frac{1}{X}\ln(1+X)} = e^{\frac{1}{X}(X+o(X))} = e^{1+o(1)}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \left(\frac{x}{\sin(x)}\right)^{\frac{\sin(x)}{x-\sin(x)}} = \lim_{X\to 0} e^{\frac{1}{X}\ln(1+X)} = \lim_{X\to 0} e^{1+o(1)} = e^1 = e$$

3.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{e^{\sin(x)} - e^{\tan(x)}}{\sin(x) - \tan(x)}$$

Bien sûr, il s'agit d'une forme indéterminée, il va falloir faire un développement limité, mais à quel ordre ?

Regardons le dénominateur, manifestement les termes en x s'annulent, il n'y a pas de terme en x^2, on va faire un développement limité du dénominateur à l'ordre 3.

$$\sin(x) - \tan(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) = -\frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

On va faire alors un développement limité du numérateur à l'ordre 3.

$$e^{\sin(x)} - e^{\tan(x)} = e^{x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)} - e^{x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)}$$

$e^{x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)} = e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o(u^3)$ avec

$u = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, $u^2 = x^2 + o(x^3)$ et $u^3 = x^3 + o(x^3)$ et $o(u^3) = o(x^3)$ donc

$$e^{x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)} = 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) + \frac{x^2 + o(x^3)}{2} + \frac{x^3 + o(x^3)}{6} + o(x^3) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

$e^{x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)} = e^v = 1 + v + \frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{6} + o(v^3)$ avec

$v = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, $v^2 = x^2 + o(x^3)$ et $v^3 = x^3 + o(x^3)$ et $o(v^3) = o(x^3)$ donc

$$e^{x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)} = 1 + \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) + \frac{x^2 + o(x^3)}{2} + \frac{x^3 + o(x^3)}{6} + o(x^3)$$
$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

Donc

$$e^{\sin(x)} - e^{\tan(x)} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3) - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3)\right) = -\frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

Et

$$\frac{e^{\sin(x)} - e^{\tan(x)}}{\sin(x) - \tan(x)} = \frac{-\frac{x^3}{2} + o(x^3)}{-\frac{x^3}{2} + o(x^3)} = \frac{-\frac{1}{2} + o(1)}{-\frac{1}{2} + o(1)} = \frac{1 + o(1)}{1 + o(1)} = 1 + o(1)$$
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{e^{\sin(x)} - e^{\tan(x)}}{\sin(x) - \tan(x)} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} (1 + o(1)) = 1$$

4.

$$\frac{\sin(x^2)}{x\ln(1+x)} \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{x \times x} = 1$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x\ln(1+x)} = 1$$

Allez à : Exercice 37

Correction exercice 38.

1.

$$\frac{\ln(1+X)}{X} = \frac{X - \frac{X^2}{2} + o(X^2)}{X} = 1 - \frac{X}{2} + o(X)$$

2. $X \to 0$ lorsque $x \to +\infty$

$$x\left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - e\right) = \frac{(1+X)^{\frac{1}{X}} - e}{X} = \frac{e^{\frac{\ln(1+X)}{X}} - e}{X} = \frac{e^{1-\frac{X}{2}+o(X)} - e}{X} = \frac{ee^{-\frac{X}{2}+o(X)} - e}{X} = e\frac{e^{-\frac{X}{2}+o(X)} - 1}{X}$$
$$= e\frac{1 - \frac{X}{2} + o(X) - 1}{X} = eX\frac{-\frac{1}{2} + o(1)}{X} = e\left(-\frac{1}{2} + o(1)\right) \to -\frac{e}{2}$$

Allez à : Exercice 38

Correction exercice 39.

1.

$$f(x) = 2x + x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) = 3x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

2.

$$f'(x) = 2 + \cos(x) \geq 1 > 0$$
$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

Donc f est une fonction strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, c'est une bijection.

Si f est une fonction strictement croissante donc f^{-1} est une fonction strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ (les $\mathbb{R}$ s'inversent), comme la dérivée de f n'est jamais nulle, $f^{-1'}$ est dérivable et

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(x)\big)}$$

$f^{-1'}$ est donc définie sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}$ car f' est continue. Par une récurrence quasi immédiate, on en déduit que f^{-1} est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et donc admet un développement limité à n'importe quel ordre.

3. $f(0) = 0$ on peut appliquer la formule du développement limité de f^{-1} à $f(x)$ au voisinage de $x = 0$.
$f^{-1}\big(f(x)\big) = x$

$$\Leftrightarrow a_0 + a_1\left(3x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) + a_2\left(3x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 + a_3\left(3x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3$$

$$+ o\left(\left(3x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3\right) = x \Leftrightarrow a_0 + a_1\left(3x - \frac{x^3}{6}\right) + a_2x^2 + a_3x^3 + o(x^3) = x$$

$$\Leftrightarrow a_0 + 3a_1x + a_2x^2 + \left(-\frac{a_1}{6} + a_3\right)x^3 + o(x^3) = x \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ 3a_1 = 1 \\ a_2 = 0 \\ -\frac{a_1}{6} + a_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = \frac{1}{3} \\ a_2 = 0 \\ a_3 = \frac{1}{18} \end{cases}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{18}x^3 + o(x^3)$$

Allez à : Exercice 39

Correction exercice 40.

1. f est le produit et la composée de fonction C^∞ donc f est C^∞ sur $\mathbb{R}$.

$$f(x) = x\left(1 + x^2 + \frac{(x^2)^2}{2!} + o(x^4)\right) = x + x^3 + \frac{x^5}{2} + o(x^5)$$

2.

$$f'(x) = e^{x^2} + x(2x)e^{x^2} = (1 + 2x^2)e^{x^2} > 0$$

Donc la fonction est strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

Par conséquent f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

3. f est impaire donc f^{-1} est aussi impaire par conséquent son développement limité n'a que des termes de degrés impairs.

4.

$$f\big(f^{-1}(x)\big) = x \Leftrightarrow f\big(ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5)\big) = x$$

On pose
$X = ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5)$
$X^2 = \big(ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5)\big)\big(ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5)\big) = a^2x^2 + 2abx^4 + o(x^5)$
$X^3 = a^3x^3 + (a^2b + 2a^2b)x^5 + o(x^5) = a^3x^3 + 3a^2bx^5 + o(x^5)$
$X^4 = a^4x^4 + o(x^5)$
$X^5 = a^5x^5 + o(x^5)$
D'après 1. on a

$$f(X)=X+X^3+\frac{X^5}{2}+o(X^5)=ax+bx^3+cx^5+a^3x^3+3a^2bx^5+\frac{a^5x^5}{2}+o(x^5)$$
$$=ax+(a^3+b)x^3+\left(\frac{a^5}{2}+3a^2b+c\right)x^5+o(x^5)$$

Par conséquent

$$f\left(f^{-1}(x)\right)=x\Leftrightarrow ax+(a^3+b)x^3+\left(\frac{a^5}{2}+3a^2b+c\right)x^5+o(x^5)=x\Rightarrow\left\{\begin{array}{r}a=1\\a^3+b=0\\\frac{a^5}{2}+3a^2b+c=0\end{array}\right.$$
$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}a=1\\b=-1\\c=\frac{5}{2}\end{array}\right.$$

Allez à : Exercice 40

Géométrie dans le plan

Exercice 1.

Montrer que l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que soient alignés les points d'affixe z, iz et i est un cercle de centre $\Omega\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ dont on donnera le rayon.

Allez à : Correction exercice 1 :

Exercice 2. (hors programme)

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et A, B deux points du plan, déterminer l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = \lambda$$

Selon les valeurs de λ.

On pourra faire intervenir I le milieu de $[A, B]$.

Allez à : Correction exercice 2 :

Exercice 3.

Soit h une homothétie de rapport k et h' une homothétie de rapport k' et de centres respectifs Ω, d'affixe ω, et Ω', d'affixe ω'.

1. Soit t une translation de vecteur $\vec{u}$. Montrer que les composés $h \circ t$ et $t \circ h$ sont des homothéties de rapport k.
2. Si $kk' \neq 1$, montrer que $h \circ h'$ est une homothétie de rapport kk' et que les centres de h, h' et $h \circ h'$ sont alignés.
3. Si $kk' = 1$, montrer que $h \circ h'$ est une translation.

Allez à : Correction exercice 3 :

Exercice 4.

Soit $z \in \mathbb{C}$. Soient M, d'affixe z, N, d'affixe iz et P d'affixe $2i$.

Montrer que si M, N et P sont alignés l'ensemble des points d'affixe z sont sur un cercle de centre Ω d'affixe $1 + i$, et dont on précisera le rayon.

Allez à : Correction exercice 4 :

Exercice 5.

On rappelle que

$$j = e^{\frac{2i\pi}{3}}; \quad j^2 = \bar{j} \quad \text{et que} \quad j^3 = 1$$

Soit r une transformation du plan qui a un point M associe le point M' d'affixe $M' = r(M)$ d'affixe $z' = -j^2 z + 1 + j^2$

Soit s une transformation du plan qui a un point M d'affixe z associe le point $M' = s(M)$ d'affixe $z' = -j^2 \bar{z} + 1 + j^2$

1. Montrer que r est une rotation du plan dont on donnera l'affixe du centre Ω et l'angle de la rotation.
2. Montrer que Ω est un point fixe de s.
3. Montrer que s est une symétrie orthogonale. (on ne demande pas l'axe de la symétrie).
4. Calculer l'affixe z'' du point $M'' = r \circ s(M)$, où M est un point d'affixe z. Que peut-on en déduire de $r \circ s$?

Allez à : Correction exercice 5 :

Exercice 6.

Soit f la transformation du plan complexe qui, à un point M d'affixe z associe le point d'affixe

$$z' = \left(-1 + i\sqrt{3}\right)z - i\sqrt{3}$$

1. Montrer que f est une similitude directe, dont on donnera le rapport et le centre.
2. Montrer que f est la composée d'une homothétie de centre O dont on donnera le rapport et d'une rotation, dont on donnera le centre et l'angle.

Allez à : Correction exercice 6 :

Exercice 7.

Soit f la transformation du plan complexe qui, à un point M d'affixe z associe le point d'affixe

$$z' = -i\bar{z} + 1 + i$$

Soit g la transformation du plan complexe qui, à un point M d'affixe z associe le point d'affixe

$$z' = i\bar{z} - 1 + i$$

1. Déterminer les points fixes de f et les points fixes de g.
   On posera $z = x + iy$
2. Soit $h = f \circ g$, quelle est cette transformation, que peut-on dire de son centre ?

Allez à : Correction exercice 7 :

Exercice 8.

On note A le point d'affixe $4 + 2i$ et O le point d'affixe 0.

Calculer les affixes des points B tels que le triangle OAB soit équilatéral.

Allez à : Correction exercice 8 :

Exercice 9.

Soit $A(1,1)$ et $B(-1,2)$ de deux points du plan.

Déterminer les points M tels que le triangle ABM soit équilatéral.

Allez à : Correction exercice 9 :

Exercice 10.

Soit f la similitude directe définie par $f(z) = az + b$, où $a, b \in \mathbb{C}$, avec $a = \rho e^{i\theta}$ et $\rho \neq 1$.

1. Montrer que f admet un unique point fixe ω.
2. Donner l'image d'un complexe z par la rotation r de centre ω et d'angle θ.
3. Donner l'image d'un complexe z par l'homothétie h de centre ω et de rapport ρ.
4. Donner l'image d'un complexe z par $r \circ h$ en fonction de a, b et z, que peut-on en conclure ?

Allez à : Correction exercice 10 :

Exercice 11.

On rappelle l'identification canonique de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{C}$ par l'application affixe et sa réciproque :

$$\begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C} \\ (x, y) \mapsto x + iy \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{c} \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2 \\ z \mapsto \left(Re(z), Im(z)\right) \end{array}$$

1. Rappeler l'effet sur $\mathbb{C}$ des transformations du plan suivantes :
   a) Pour tout $a \in \mathbb{C}$, la translation du vecteur d'affixe a.
   b) Pour tout $(a, \lambda) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$, l'homothétie de rapport λ et de centre d'affixe a.

c) Pour tout $(a,\theta)\in\mathbb{C}\times\mathbb{R}$, la rotation d'angle θ et de centre d'affixe a.
d) Pour tout $(a,\theta)\in\mathbb{C}\times\mathbb{R}$, la symétrie par rapport à un axe formant un angle θ avec l'axe réel et passant par un point d'affixe a.

2. Montrer que la composée de deux symétries est une translation ou une rotation.
3. Montrer que la composée de deux rotations est une translation ou une rotation.

Allez à : Correction exercice 11 :

Exercice 12.

Soient $\vec{u}=(-1,2)$, $\vec{v}=(3,-4)$, $\vec{w}=(-1,1)$,

1. Déterminer α et β réels tels que
$$\vec{w}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$$
2. Soient $\vec{t}=(x,y)$, exprimer $\vec{t}$ dans la base $(\vec{u},\vec{v})$, puis dans la base $(\vec{u},\vec{w})$.

Allez à : Correction exercice 12 :

Exercice 13.

Soit D la droite d'équation $x+y=0$ et D' la droite d'équation $-2y=0$, soit s la symétrie, par rapport à D parallèlement à D'.

1. Déterminer la matrice S, dans la base canonique de la symétrie s.
2. Déterminer la matrice S', dans la base $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$ où $\overrightarrow{e_1}=(1,-1)$ et $\overrightarrow{e_2}=(2,1)$, de cette symétrie.

Allez à : Correction exercice 13 :

Exercice 14.

Soit r la rotation d'angle θ et s la symétrie orthogonale dont la matrice dans la base canonique est :
$$S=\begin{pmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta)\\ \sin(\theta) & -\cos(\theta)\end{pmatrix}$$

1. Quelle est la matrice de $r\circ s$ dans la base canonique ?
2. Déterminer l'ensemble des points invariants de $r\circ s$, quelle est cette application linéaire ?

Allez à : Correction exercice 14 :

Exercice 15.

On appelle $\beta=(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$

Soit $p:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par sa matrice dans la base canonique par
$$P=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$
Soit s l'application linéaire dont l'image d'un vecteur $\vec{u}=(x,y)$ est :
$$s(\vec{u})=\left(\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y,\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}y\right)$$

1. Montrer que s est une application linéaire.
2. Donner un vecteur directeur de $\ker(p)$ et un vecteur directeur de $Im(p)$.
3. Déterminer la matrice S de s dans la base canonique et montrer que s est une symétrie.
4. Montrer que p est une projection.
5. Déterminer un vecteur directeur de l'ensemble des vecteurs invariants de s et un vecteur directeur de l'ensemble $E=\{\vec{u}\in\mathbb{R}^2,s(\vec{u})=-\vec{u}\}$
6. Soit $f=p\circ s$, déterminer la matrice M de f dans la base canonique.
7. Montrer que f est une projection.

8. Soit $\overrightarrow{u_1} = (1,1)$ et $\overrightarrow{u_2} = (4,7)$, montrer que $\beta' = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer la matrice de f dans la base β'.

Allez à : Correction exercice 15 :

Corrections

Correction exercice 1 :

Première méthode

Soit M le point d'affixe z, N le point d'affixe iz et A le point d'affixe i, ces trois points sont alignés si et seulement si $\det\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}\right) = 0$, ou, ce qui est équivalent à ce que

$$Im\left(\overline{(z-i)}(iz-i)\right) = 0 \Leftrightarrow \overline{(z-i)}(iz-i) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (\overline{z}+i)(iz-i) = (z-i)(-i\overline{z}+i) = 0$$

$$\Leftrightarrow i|z|^2 - i\overline{z} - z + 1 = -i|z|^2 + iz - \overline{z} + 1 \Leftrightarrow 2i|z|^2 - i\overline{z} - z - iz + \overline{z} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2i|z|^2 + (1-i)\overline{z} - (1+i)z = 0 \Leftrightarrow |z|^2 + \frac{1-i}{2i}\overline{z} - \frac{1+i}{2i}z = 0$$

$$\Leftrightarrow |z|^2 + \frac{-1-i}{2}\overline{z} - \frac{1-i}{2}z = 0 \Leftrightarrow |z|^2 = \frac{1+i}{2}\overline{z} + \frac{1-i}{2}z$$

$$\left\|\overrightarrow{\Omega M}\right\|^2 = \left|z - \frac{1+i}{2}\right|^2 = \left(z - \frac{1+i}{2}\right)\left(\overline{z} - \frac{1-i}{2}\right) = |z|^2 - \frac{1-i}{2}z - \frac{1+i}{2}\overline{z} + \frac{(1+i)(1-i)}{4}$$

$$= \frac{1+i}{2}\overline{z} + \frac{1-i}{2}z - \frac{1-i}{2}z - \frac{1+i}{2}\overline{z} + \frac{(1+i)(1-i)}{4} = \frac{1+1}{4} = \frac{1}{2}$$

Donc l'ensemble des solutions est le cercle centre $\Omega\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Deuxième méthode

Soit M le point d'affixe z, N le point d'affixe iz et A le point d'affixe i, ces trois points sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont colinéaires, ce qui équivaut à ce qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AN} \Leftrightarrow z - i = \lambda(iz - i) \Leftrightarrow z - i\lambda z = i - i\lambda \Leftrightarrow z = \frac{i(1-\lambda)}{1-i\lambda}$$

$$\left\|\overrightarrow{\Omega M}\right\| = \left|z - \frac{1+i}{2}\right| = \left|\frac{i(1-\lambda)}{1-\lambda i} - \frac{1+i}{2}\right| = \left|\frac{2i(1-\lambda) - (1+i)(1-\lambda i)}{2(1-\lambda i)}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\frac{2i(1-\lambda) - (1 - \lambda i + i + \lambda)}{1-\lambda i}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{-1-\lambda+i(2-2\lambda+\lambda-1)}{1-\lambda i}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\frac{-1-\lambda+i(1-\lambda)}{1-\lambda i}\right| = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{(1-\lambda)^2+(1+\lambda)^2}}{\sqrt{1+\lambda^2}} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{1-2\lambda+\lambda^2+1+2\lambda+\lambda^2}}{\sqrt{1+\lambda^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2+2\lambda^2}}{\sqrt{1+\lambda^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\sqrt{1+\lambda^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Et l'ensemble des points est le cercle de centre $\Omega\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Allez à : Exercice 1

Correction exercice 2 :

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = \lambda \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IM}\right).\left(\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IM}\right) = \lambda \Leftrightarrow \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{IM} = \lambda$$

Comme I est le milieu de $[A, B]$, $\overrightarrow{AI} = -\overrightarrow{BI}$

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = \lambda \Leftrightarrow -\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BI} - \overrightarrow{BI}.\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{BI} + \left\|\overrightarrow{IM}\right\|^2 = \lambda \Leftrightarrow -\left\|\overrightarrow{BI}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{IM}\right\|^2 = \lambda \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{IM}\right\|^2 = \lambda + \left\|\overrightarrow{BI}\right\|^2$$

Si $\lambda > -\left\|\overrightarrow{BI}\right\|^2$ alors l'ensemble des solutions est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{\lambda + \left\|\overrightarrow{BI}\right\|^2}$

Si $\lambda = -\left\|\overrightarrow{BI}\right\|^2$ alors l'ensemble des solutions est le point I.

Si $\lambda < -\left\|\overrightarrow{BI}\right\|^2$ alors l'ensemble des solutions est l'ensemble vide.

Allez à : Exercice 2

Correction exercice 3 :

1. Si t est la translation de vecteur $\vec{u}$ et soit a l'affixe du vecteur $\vec{u}$. Soit M un point d'affixe z, $M' = t(M)$ le point d'affixe z' et $M'' = h \circ t(M)$ le point d'affixe z'', donc il existe $k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $b \in \mathbb{C}$ tels que $z'' = kz' + b$

   On a

$$\begin{cases} M' = t(M) \\ h \circ t(M) = h\big(t(M)\big) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z' = z + a \\ z'' = kz' + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z' = z + a \\ z'' = k(z + a) + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z' = z + a \\ z'' = kz + ka + b \end{cases}$$

   On en déduit que $h \circ t$ est une homothétie de rapport k.

   Question non demandée : quel est son centre ?

   Pour cela on cherche son point fixe Ω_1 d'affixe ω_1

$$\omega_1 = k\omega_1 + ka + b \Leftrightarrow \omega_1(1 - k) = ka + b \Leftrightarrow \omega_1 = \frac{ka + b}{1 - k}$$

   Si de plus on exprimer l'affixe de ce centre en fonction de l'affixe de Ω le centre de h d'affixe ω. Le centre de h est le point fixe de h d'affixe $\omega = \frac{b}{1-k}$ (voir cours ou refaire cette petite démonstration) donc $b = \omega(1 - k)$, ce que l'on remplace dans

$$\omega_1 = \frac{ka + b}{1 - k} = \frac{ka + \omega(1 - k)}{1 - k} = \omega + \frac{ka}{1 - k}$$

   Si t est la translation de vecteur $\vec{u}$ et soit a l'affixe du vecteur $\vec{u}$. Soit M un point d'affixe z, $M' = h(M)$ le point d'affixe z' et $M'' = t \circ h(M)$ le point d'affixe z'', donc il existe $k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $b \in \mathbb{C}$ tels que $z' = kz + b$

$$\begin{cases} M' = h(M) \\ t \circ h(M) = t\big(h(M)\big) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z' = kz + b \\ z'' = z' + a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z' = kz + b \\ z'' = kz + b + a \end{cases}$$

   On en déduit que $t \circ h$ est une homothétie de rapport k.

   Question non demandée : quel est son centre ?

   Pour cela on cherche le point fixe Ω_2 d'affixe ω_2

$$\omega_2 = k\omega_2 + a + b \Leftrightarrow \omega_2 = \frac{a + b}{1 - k}$$

   Si de plus on exprimer l'affixe de ce centre en fonction de l'affixe de Ω le centre de h d'affixe ω. Le centre de h est le point fixe de h d'affixe $\omega = \frac{b}{1-k}$ (voir cours ou refaire cette petite démonstration) donc $b = \omega(1 - k)$, ce que l'on remplace dans

$$\omega_2 = \frac{a + b}{1 - k} = \frac{a + \omega(1 - k)}{1 - k} = \omega + \frac{a}{1 - k}$$

Allez à : Exercice 3

2. Soit M un point d'affixe z, $M' = h'(M)$ le point d'affixe z' et $M'' = h \circ h'(M)$ le point d'affixe z''.

   Il existe $k, k' \in \mathbb{R}$ avec $kk' \neq 1$ et $b, b' \in \mathbb{C}$ tels que

$$\begin{cases} z' = k'z + b' \\ z'' = kz' + b \end{cases}$$

Donc $z'' = k(k'z+b)+b' = kk'z+kb+b'$

Ce qui montre que $h \circ h'$ est une homothétie de rapport kk' car $kk' \neq 1$.

Le centre de h a pour affixe ω et celui de h' a pour affixe ω' tels que

$$\begin{cases} \omega = \dfrac{b'}{1-k'} \\ \omega' = \dfrac{b}{1-k} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = (1-k')\omega' \\ b' = (1-k)\omega \end{cases}$$

On en déduit que

$$z'' = kk'z+kb+b' = kk'z+k(1-k')\omega'+(1-k)\omega$$

Le centre de $h \circ h'$ est le point fixe Ω'' d'affixe ω''

$$\omega'' = kk'\omega''+k(1-k')\omega'+(1-k)\omega \Leftrightarrow \omega'' = \frac{k(1-k')\omega'+(1-k)\omega}{1-kk'}$$

$$\omega''-\omega = \frac{k(1-k')\omega'+(1-k)\omega}{1-kk'} - \omega = \frac{k(1-k')\omega'+(1-k)\omega-(1-kk')\omega}{1-kk'}$$

$$= \frac{k(1-k')\omega'-k\omega+kk'\omega}{1-kk'} = \frac{k\omega'(1-k')-k\omega(1-k')}{1-kk'}$$

$$= \frac{k(1-k')}{1-kk'}(\omega'-\omega)$$

Ce qui signifie que les vecteurs $\overrightarrow{\Omega\Omega''} = \frac{k(1-k')}{1-kk'}\overrightarrow{\Omega\Omega'}$

Donc les trois centres sont alignés.

Allez à : Exercice 3

3. Soit M un point d'affixe z, $M' = h'(M)$ le point d'affixe z' et $M'' = h \circ h'(M)$ le point d'affixe z''. Il existe $k, k' \in \mathbb{R}$ avec $kk' \neq 1$ et $b, b' \in \mathbb{C}$ tels que

$$\begin{cases} z' = k'z+b' \\ z'' = kz'+b \end{cases}$$

Donc $z'' = k(k'z+b)+b' = kk'z+kb+b' = z+kb+b'$

Ce qui montre que $h \circ h'$ est une translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $kb+b'$

On peut, si on veut exprimer l'affixe de ce vecteur en fonction de ω et de ω' les affixes des centres des deux homothéties. On a

$$\begin{cases} \omega = \dfrac{b'}{1-k'} \\ \omega' = \dfrac{b}{1-k} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = (1-k')\omega' \\ b' = (1-k)\omega \end{cases}$$

On en déduit que

$$z'' = kk'z+kb+b' = z+(k-1)\omega'+(1-k)\omega = z+(1-k)(\omega-\omega')$$

Allez à : Exercice 3

Correction exercice 4 :

M, N et P sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{PM} = \lambda\overrightarrow{PN}$ ce qui équivaut à

$$z-2i = \lambda(iz-2i) \Leftrightarrow z-i\lambda z = 2i-2i\lambda \Leftrightarrow z = 2i\frac{1-\lambda}{1-i\lambda}$$

$$|z-(1+i)| = \left|2i\frac{1-\lambda}{1-i\lambda}-(1+i)\right| = \left|\frac{2i(1-\lambda)-(1-i\lambda)(1+i)}{1-i\lambda}\right|$$
$$= \left|\frac{2i(1-\lambda)-(1+i-i\lambda+\lambda)}{1-i\lambda}\right| = \left|\frac{-(1+\lambda)+i(2-2\lambda+\lambda-1)}{1-i\lambda}\right|$$
$$= \left|\frac{-(1+\lambda)+i(1-\lambda)}{1-i\lambda}\right| = \frac{\sqrt{(1+\lambda)^2+(1-\lambda)^2}}{\sqrt{1+\lambda^2}}$$
$$= \frac{\sqrt{1+2\lambda+\lambda^2+1-2\lambda+\lambda^2}}{\sqrt{1+\lambda^2}} = \frac{\sqrt{2+2\lambda^2}}{\sqrt{1+\lambda^2}} = \sqrt{2}$$

Les points M sont sur le cercle de centre Ω d'affixe $1+i$ et de rayon $\sqrt{2}$.

Allez à : Exercice 4

Correction exercice 5 :

1. $-j^2 = e^{i\pi}e^{\frac{4i\pi}{3}} = e^{\frac{7i\pi}{3}} = e^{\frac{i\pi}{3}}$ donc r est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$, son point fixe vérifie $r(\Omega)=\Omega$ donc $\omega = -j^2\omega + 1 + j^2$, ce qui entraine que :
$$\omega = \frac{1+j^2}{1+j^2} = 1$$
2. L'affixe de $s(\Omega)$ est
$$-j^2 \times \overline{1} + 1 + j^2 = -j^2 + 1 + j^2 = 1$$
Ce qui montre que
$$s(\Omega) = \Omega$$
Autrement dit Ω est un point fixe de s.
3. L'affixe de l'image par s d'un point M est de la forme $a\overline{z}+b$, de plus
$$a\overline{b}+b = -j^2\left(\overline{1+j^2}\right)+1+j^2 = -j^2(1+j)+1+j^2 = -j^2-j^3+1+j^2 = 0$$
Donc s est une symétrie orthogonale.
4. Soit $M' = s(M)$ d'affixe $z' = -j^2\overline{z}+1+j^2$. Soit $M'' = r(M') = r\circ s(M)$ d'affixe $z'' = -j^2z'+1+j^2$, on a
$$z'' = -j^2z'+1+j^2 = -j^2(-j^2\overline{z}+1+j^2)+1+j^2 = j^4\overline{z}-j^2-j^4+1+j^2 = j\overline{z}+1-j$$
C'est de la forme $a\overline{z}+b$, il reste à vérifier que $a\overline{b}+b=0$ pour montrer qu'il s'agit d'une symétrie orthogonale.
$$a\overline{b}+b = j\left(\overline{1-j}\right)+1-j = j(1-j^2)+1-j = j-j^3+1-j = 0$$
$r\circ s$ est une symétrie orthogonale.

Allez à : Exercice 5

Correction exercice 6 :

1. z' est de la forme $az+b$ donc f est une similitude directe.
$\left|-1+i\sqrt{3}\right| = \sqrt{(-1)^2+3} = 2$ est le rapport de la similitude
Son centre d'affixe a vérifie
$$a = \left(-1+i\sqrt{3}\right)a - i\sqrt{3} \Leftrightarrow \left(2-i\sqrt{3}\right)a = -i\sqrt{3} \Leftrightarrow a = \frac{-i\sqrt{3}}{2-i\sqrt{3}} = \frac{\left(-i\sqrt{3}\right)\left(2+i\sqrt{3}\right)}{4+3} = \frac{3}{7}-\frac{2i\sqrt{3}}{7}$$

2. $\left|-1+i\sqrt{3}\right| = \sqrt{(-1)^2+3} = 2$

$$z' = 2\left(\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z - i\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}z - i\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

On appelle h l'homothétie de centre O rapport est 2, à un point M d'affixe z elle associe le point M' d'affixe $z' = 2z$

On appelle r la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ (car $\frac{2\pi}{3}$ est un argument du complexe de module 1 : $e^{\frac{2i\pi}{3}}$), à un point M d'affixe z elle associe le point d'affixe M' d'affixe $z' = e^{\frac{2i\pi}{3}}z - i\ \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$M'' = h\big(r(M)\big) \quad \text{et} \quad M' = r(M)$$

Equivaut à

$$\begin{cases} z'' = 2z' \\ z' = e^{\frac{2i\pi}{3}}z - i\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Donc

$$z'' = 2\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}z - i\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(-1+i\sqrt{3}\right)z - i\sqrt{3}$$

On a bien $f = h \circ r$. Il reste à trouver le centre de la rotation, c'est-à-dire son point fixe Ω d'affixe ω qui vérifie

$$\omega = \left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\omega - i\ \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\omega = -i\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \omega = \frac{-i\sqrt{3}}{\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-i\sqrt{3}\left(\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{-\frac{3}{2}+\frac{3i\sqrt{3}}{2}}{3} = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} = j$$

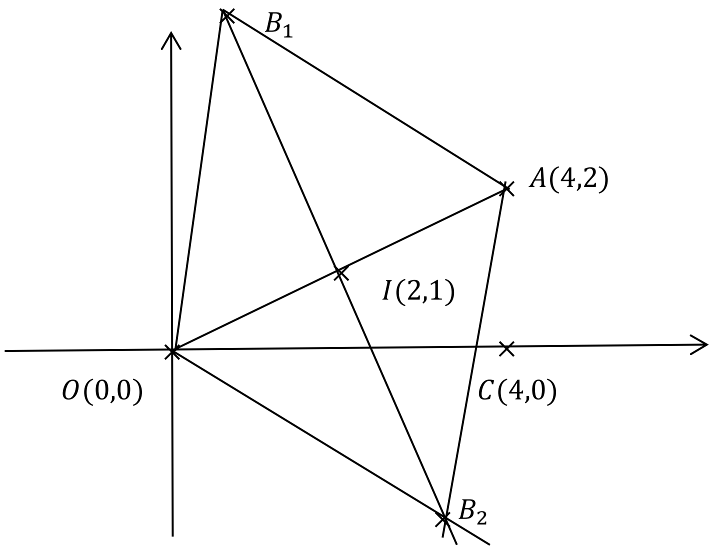
Allez à : Exercice 6

Correction exercice 7 :

1. On cherche les points d'affixe $z = x + iy$ tels que $f(M) = M$, ce qui équivaut à
$$z = -i\overline{z} + 1 + i \Leftrightarrow x + iy = -i(x - iy) + 1 + i = 1 - y + i(1 - x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - y \\ y = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow x + y = 1$$
Il s'agit d'une droite.
On cherche les points d'affixe $z = x + iy$ tels que $g(M) = M$, ce qui équivaut à
$$z = i\overline{z} - 1 + i \Leftrightarrow x + iy = i(x - iy) - 1 + i = -1 + y + i(1 + x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + y \\ y = 1 + x \end{cases} \Leftrightarrow y = 1 + x$$
Il s'agit d'une droite.
2. On pose $M'' = f\big(g(M)\big)$ et $M' = f(M)$ donc
$$\begin{cases} z'' = -i\overline{z'} + 1 + i \\ z' = i\overline{z} - 1 + i \end{cases}$$
Par conséquent
$$z'' = -i\overline{(i\overline{z} - 1 + i)} + 1 + i = -i(-iz - 1 - i) + 1 + i = -z + i - 1 + 1 + i = -z + 2i$$
h est à la fois une homothétie de rapport -1 et une rotation d'angle π, l'affixe de son centre vérifie
$$z = -z + 2i \Leftrightarrow z = i$$
On peut remarquer que c'est l'intersection des deux droites invariante de f et g.

Allez à : Exercice 7

Correction exercice 8 :



D'après le dessin il y a deux solutions

Première méthode (Mauvaise)

On appelle I le point d'affixe $2+i$, c'est le milieu de $[O,A]$

Les solutions sont sur la perpendiculaire à (OA), un point $M\ (x,y)$ de cette droite vérifie

$$\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{OA}=0\Leftrightarrow (x-2)\times 4+(y-1)\times 2=0\Leftrightarrow 4x+2y-10=0\Leftrightarrow 2x+y-5=0$$

Pour que le triangle OAB soit équilatéral, on doit rajouter la condition $\|\overrightarrow{OB}\|=\|\overrightarrow{OA}\|=\|\overrightarrow{AB}\|$

$$\|\overrightarrow{OA}\|=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

$$\|\overrightarrow{OB}\|=\sqrt{x^2+y^2}$$

Si ces deux distances sont égales la troisième $\|\overrightarrow{AB}\|$ sera égale au deux premières.

Donc

$$x^2+y^2=20$$

Il s'agit donc de trouver les points B vérifiant :

$$\begin{cases}2x+y-5=0\\ x^2+y^2=20\end{cases}$$

D'après la première équation, $y=-2x+5$, ce que l'on remplace dans la seconde.

$$x^2+(-2x+5)^2=20\Leftrightarrow x^2+4x^2-20x+25=20\Leftrightarrow 5x^2-20x+5=0\Leftrightarrow x^2-4x+1=0$$

Les racines de cette équation sont

$$x_1=\frac{4+2\sqrt{3}}{2}=2+\sqrt{3}\quad \text{et}\quad x_2=2-\sqrt{3}$$

On en déduit les ordonnées des points B solutions

$$y_1=-2\left(2+\sqrt{3}\right)+5=1-2\sqrt{3}\qquad \text{et}\qquad y_2=-2\left(2-\sqrt{3}\right)+5=1+2\sqrt{3}$$

Donc les deux solutions sont

$$B_1\ \left(2+\sqrt{3},1-2\sqrt{3}\right)\quad \text{et}\quad B_2\ \left(2-\sqrt{3},1+2\sqrt{3}\right)$$

Deuxième solution (La bonne)

Soit $\theta=\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}$

Par conséquent l'affixe z de B vérifie

$$z=e^{i\theta}(4+2i)$$

Autrement dit $\overrightarrow{OB}=R_\theta\left(\overrightarrow{0A}\right)$, où R_θ est la rotation de centre O et d'angle θ.

Si $\theta=\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}$ alors

$$z=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(4+2i)=2+i+2i\sqrt{3}-\sqrt{3}=2-\sqrt{3}+i\left(1+2\sqrt{3}\right)$$

Si $\theta=-\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}$ alors

$$z=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(4+2i)=2+i-2i\sqrt{3}+\sqrt{3}=2+\sqrt{3}+i\left(1-2\sqrt{3}\right)$$

Donc les deux solutions sont

$$B_1\ \left(2+\sqrt{3},1-2\sqrt{3}\right)\quad \text{et}\quad B_2\ \left(2-\sqrt{3},1+2\sqrt{3}\right)$$

Allez à : Exercice 8

Correction exercice 9 :

Soit M est l'image de B par la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de centre A, soit M est l'image de B par la rotation d'angle $-\frac{\pi}{3}$ et de centre A.

On pose $a=1+i$ l'affixe de A, $B=-1+2i$, l'affixe de B et $M(x,y)$ d'affixe $z=x+iy$

Dans le premier cas

$$z-a=e^{\frac{i\pi}{3}}(b-a)\Leftrightarrow z=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-1+2i-(1+i)\right)+1+i=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-2+i)+1+i$$

$$=-1-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\left(-\sqrt{3}+\frac{1}{2}\right)+1+i=-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\left(\frac{3}{2}-\sqrt{3}\right)$$

La première solution est $M_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}-\sqrt{3}\right)$

Dans le second cas

$$z-a=e^{-\frac{i\pi}{3}}(b-a)\Leftrightarrow z=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-1+2i-(1+i)\right)+1+i=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-2+i)+1+i$$

$$=-1+\frac{\sqrt{3}}{2}+i\left(\sqrt{3}+\frac{1}{2}\right)+1+i=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\left(\frac{3}{2}+\sqrt{3}\right)$$

La seconde solution est $M_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}+\sqrt{3}\right)$

Allez à : Exercice 9

Correction exercice 10 :

1. soit ω un éventuel point fixe

   $\omega=a\omega+b\Leftrightarrow\omega(1-a)=b\Leftrightarrow\omega=\frac{b}{1-a}$

   Car $a\neq 1$ vu que $|a|\neq 1$.

   Donc f admet un unique point fixe.

2. $$r(z)-\omega=e^{i\theta}(z-\omega)\Leftrightarrow r(z)=e^{i\theta}z+\omega\left(1-e^{(i\theta)}\right)$$

3. $$h(z)-\omega=\rho(z-\omega)\Leftrightarrow h(z)=e^{i\theta}z+\omega(1-\rho)$$

4. $$r(z)=e^{i\theta}z+\omega\left(1-e^{(i\theta)}\right)$$
   $$h(z)=\rho z+\omega(1-\rho)=z'$$

$$r \circ h(z) = r\big(h(z)\big) = r(z') = e^{i\theta}z' + \omega\big(1 - e^{(i\theta)}\big) = e^{i\theta}\big(\rho z + \omega(1-\rho)\big) + \omega\big(1 - e^{i\theta}\big)$$
$$= \rho e^{i\theta}z + \omega e^{i\theta} - \omega\rho e^{i\theta} + \omega - \omega e^{i\theta} = \rho e^{i\theta}z - \omega\rho e^{i\theta} + \omega = az - a\omega + \omega$$
$$= az + \omega(1-a) = az + \frac{b}{1-a}(1-a) = az + b = f(z)$$

Donc toute similitude directe de centre ω est la composée d'une rotation de centre ω et d'une homothétie de centre ω.

Il est important de montrer que le « a » et le « b » sont ceux de f.

Allez à : Exercice 10

Correction exercice 11 :

1.

a) Soit $M'\ (x', y')$ l'image de $M\ (x, y)$ par $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$ dont les coordonnés sont (a_1, a_2) avec $a = a_1 + ia_2$.

On a :

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = a_1 \\ y' - y = a_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + a_1 \\ y' = y + a_2 \end{cases}$$

Ce qui montre qu'à un point M d'affixe z la translation de vecteur $\vec{u} = (a_1, a_2)$ on associe le point M' d'affixe $z + a$.

Allez à : Exercice 11

b) Soit $M'\ (x', y')$ l'image de $M\ (x, y)$ par l'homothétie de centre $\Omega\ (a_1, a_2)$ (avec $a = a_1 + ia_2$) et de rapport λ, on a :

$$\overrightarrow{\Omega M'} = \lambda\overrightarrow{\Omega M} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - a_1 = \lambda(x - a_1) \\ y' - a_2 = \lambda(y - a_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = a_1 + \lambda(x - a_1) \\ y' = a_2 + \lambda(y - a_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = a_1(1-\lambda) + \lambda x \\ y' = a_2(1-\lambda) + \lambda y \end{cases}$$

Ce qui montre qu'à un point d'affixe M d'affixe z l'homothétie de centre $\Omega\ (a_1, a_2)$ (avec $a = a_1 + ia_2$) et de rapport λ on associe le point M' d'affixe $\lambda z + (1-\lambda)a$.

Allez à : Exercice 11

c) Soit $M'\ (x', y')$ l'image de $M\ (x, y)$ par la rotation de centre Ω le point d'affixe $a = a_1 + ia_2$, donc l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{\Omega M}$ et $\overrightarrow{\Omega M'}$ est θ.

$$\overrightarrow{\Omega M} = (x - a_1, y - a_2) \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{\Omega M'} = (x' - a_1, y' - a_2)$$

Au vecteur $\overrightarrow{\Omega M}$ on associe le complexe $z - a$ (avec $z = x + iy$) et au vecteur $\overrightarrow{\Omega M'}$ on associe le vecteur $z' - a$ (avec $z' = x' + iy'$). L'angle entre $\overrightarrow{\Omega M}$ et $\overrightarrow{\Omega M'}$ est θ donc

$$z' - a = e^{i\theta}(z - a)$$

Autrement dit l'image de $M\ (x, y)$ par la rotation de centre Ω le point d'affixe a est le point M' d'affixe

$$z' = a + e^{i\theta}(z - a)$$

Au vecteur $\overrightarrow{\Omega M}$ on associe le complexe $z - a$ (avec $z = x + iy$) et au vecteur $\overrightarrow{\Omega M'}$ on associe le vecteur $z' - a$ (avec $z' = x' + iy'$). L'angle entre $\overrightarrow{\Omega M}$ et $\overrightarrow{\Omega M'}$ est θ donc

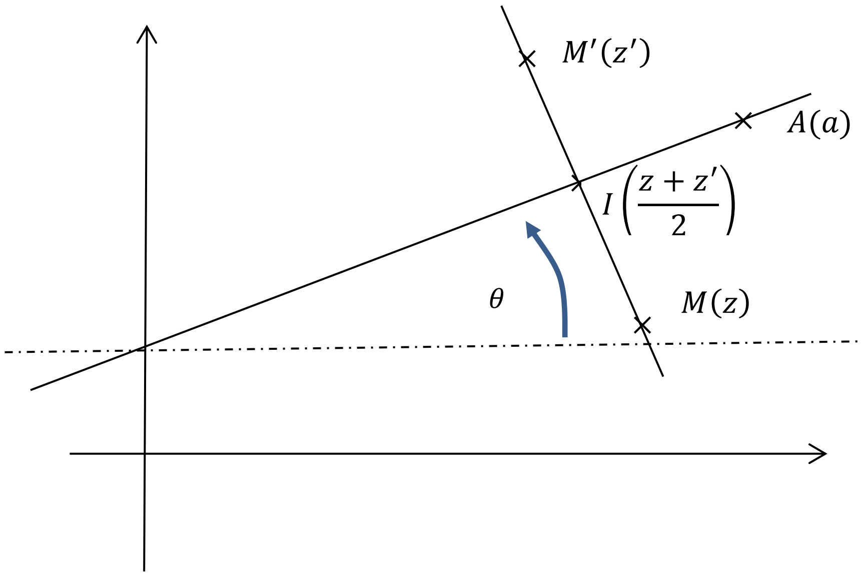
$$z' - a = e^{i\theta}(z - a)$$

Autrement dit l'image de $M\ (x, y)$ par la rotation de centre Ω le point d'affixe a est le point M' d'affixe

$$z' = a + e^{i\theta}(z - a)$$

Allez à : Exercice 11

d)



Un vecteur directeur de la droite passant par A faisant un angle θ avec l'axe des abscisses est $\overrightarrow{u(\theta)} = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ et donc d'affixe $\cos(\theta) + i\sin(\theta) = e^{i\theta}$.

Le point I, milieu de $[M, M']$ a pour affixe $\frac{z+z'}{2}$, A est le point d'affixe a.

M' est le symétrique de M par la symétrie par rapport à la droite passant par A faisant un angle θ avec l'axe des abscisses si et seulement si $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u(\theta)}$ et si $\overrightarrow{IA}$ est colinéaire à $\overrightarrow{u(\theta)}$, autrement dit si et seulement si $\overrightarrow{MM'}.\overrightarrow{IA} = 0$ et si $\det\left(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{u(\theta)}\right) = 0$

Nous allons utiliser les complexes, rappelons que si $\vec{u}$ a pour affixe a et $\vec{v}$ a pour affixe b alors :

$$Re(\overline{a}b) = \vec{u}.\vec{v} \quad \text{et} \quad Im(\overline{a}b) = \det(\vec{u}, \vec{v})$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{MM'}.\overrightarrow{u(\theta)} = 0 \\ \det\left(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{u(\theta)}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Re\left(\overline{(z'-z)}e^{i\theta}\right) = 0 \\ Im\left(\overline{\left(a - \frac{z+z'}{2}\right)}e^{i\theta}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{(z'-z)}e^{i\theta} \in i\mathbb{R} \\ \overline{\left(a - \frac{z+z'}{2}\right)}e^{i\theta} \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\overline{z'} - \overline{z})e^{i\theta} = -(z'-z)\overline{e^{i\theta}} \\ \overline{\left(a - \frac{z+z'}{2}\right)}e^{i\theta} = \overline{\overline{\left(a - \frac{z+z'}{2}\right)}e^{i\theta}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\overline{z'} - \overline{z})e^{i\theta} = -(z'-z)e^{-i\theta} \\ (2\overline{a} - \overline{z} - \overline{z'})e^{i\theta} = (2a - z - z')e^{-i\theta} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} (\overline{z'} - \overline{z})e^{2i\theta} = -z' + z \\ (2\overline{a} - \overline{z} - \overline{z'})e^{2i\theta} = 2a - z - z' \end{cases}$$

Le but est de trouver z' en fonction du reste, il suffit de calculer $L_1 + L_2$

$$(2\overline{a} - 2\overline{z})e^{2i\theta} = 2a - 2z'$$

Ce qui donne

$$z' = a - (\overline{a} - \overline{z})e^{2i\theta}$$

Si M' est le symétrique de M, d'affixe z, par la symétrie par rapport à la droite passant par A faisant un angle θ avec l'axe des abscisses, alors M' est le point d'affixe

$$z' = a - (\overline{a} - \overline{z})e^{2i\theta}$$

Allez à : Exercice 11

2. Si on appelle $s: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ l'application qui à z, l'affixe d'un point M, associe $z' = s(z)$, d'affixe M' le symétrique de M par la symétrie par rapport à la droite passant par A, d'affixe a et faisant un angle θ avec l'axe des abscisses, on a
$$z' = s(z) = a - (\overline{a} - \overline{z})e^{2i\theta}$$
Si on appelle $s': \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ l'application qui à z', l'affixe d'un point M', associe $z'' = s(z)$, d'affixe M'' le symétrique de M' par la symétrie par rapport à la droite passant par A', d'affixe a' et faisant un angle θ avec l'axe des abscisses, on a
$$s'(z') = a' - \left(\overline{a'} - \overline{z'}\right)e^{2i\theta'}$$
L'image d'un point M par composée de la symétrie par rapport à la droite passant par A, d'affixe a, et faisant un angle θ par rapport à l'axe des abscisses et la symétrie par rapport à la droite passant par A', d'affixe a', et faisant un angle θ' avec l'axe des abscisses est le point M'', d'affixe z'' qui vérifie
$$z'' = s' \circ s(z) = s'(z') = a' - \left(\overline{a'} - \overline{z'}\right)e^{2i\theta'} = a' - \left(\overline{a'} - \overline{a - (\overline{a} - \overline{z})e^{2i\theta}}\right)e^{2i\theta'}$$
$$= a' - \left(\overline{a'} - \overline{a} + (a - z)e^{-2i\theta}\right)e^{2i\theta'} = a' - \left(\overline{a'} - \overline{a}\right)e^{2i\theta'} - (a - z)e^{2i(\theta' - \theta)}$$
Si $\theta' = \theta[\pi] \Leftrightarrow \theta' = \theta + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ (ce qui est équivalent à dire que $2(\theta' - \theta) = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$) alors
$$z'' = a' - \left(\overline{a'} - \overline{a}\right)e^{2i\theta} - (a - z) = z + a' - a - \left(\overline{a'} - \overline{a}\right)e^{2i\theta}$$
Ce qui montre que $s' \circ s(z)$ est l'affixe d'un point M'' tel que
$$\overrightarrow{MM''} = \vec{u}$$
$a' - a - \left(\overline{a'} - \overline{a}\right)e^{2i\theta}$ étant l'affixe du vecteur $\vec{u}$.
Si $\theta \neq \theta'\ [\pi] \Leftrightarrow \theta - \theta' \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$, alors
$$z'' = a' - \left(\overline{a'} - \overline{a}\right)e^{2i\theta'} + (z - a)e^{2i(\theta' - \theta)} = a' - \left(\overline{a'} - \overline{a}\right)e^{2i\theta'} - ae^{2i(\theta' - \theta)} + ze^{2i(\theta' - \theta)}$$
Pour pouvoir affirmer qu'il s'agit de l'affixe d'un point M'' qui soit l'image d'un point M par une rotation de centre b et d'angle α , il faut montrer que
$$z'' = b + (z - b)e^{i\alpha} = b\left(1 - e^{i\alpha}\right) + ze^{i\alpha}$$
Il suffit de poser
$$\begin{cases} b\left(1 - e^{i\alpha}\right) = a' - \left(\overline{a'} - \overline{a}\right)e^{2i\theta'} - ae^{2i(\theta' - \theta)} \\ e^{i\alpha} = e^{2i(\theta' - \theta)} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} b\left(1 - e^{2i(\theta' - \theta)}\right) = a' - \left(\overline{a'} - \overline{a}\right)e^{2i\theta'} - ae^{2i(\theta' - \theta)} \\ e^{i\alpha} = e^{2i(\theta' - \theta)} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{a' - \left(\overline{a'} - \overline{a}\right)e^{2i\theta'} - ae^{2i(\theta' - \theta)}}{1 - e^{2i(\theta' - \theta)}} \\ \alpha = 2(\theta' - \theta) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$
Cela montre que, dans ce cas, la composée de deux symétries est bien une rotation.
Certes l'expression de b, l'affixe du centre, est assez obscure mais nous allons voir que ce point est bien celui que vous avez vu au lycée.
Pour introduire un peu de symétrie dans l'expression de b, on va multiplier le numérateur et le dénominateur par $e^{2i\theta}$
$$b = \frac{e^{2i\theta}\left(a' - \left(\overline{a'} - \overline{a}\right)e^{2i\theta'} - ae^{2i(\theta' - \theta)}\right)}{e^{2i\theta}\left(1 - e^{2i(\theta' - \theta)}\right)} = \frac{a'e^{2i\theta} - \left(\overline{a'} - \overline{a}\right)e^{2i(\theta + \theta')} - ae^{2i\theta'}}{e^{2i\theta} - e^{2i\theta'}}$$
Remarque : (non demandée par l'énoncé)
Déterminons le point d'intersection des droites D_θ, droite passant par le point A, d'affixe a et faisant en angle θ avec l'axe des abscisse et la droite $D_{\theta'}$ (droite passant par le point A', d'affixe a') et faisant en angle θ' avec l'axe des abscisse. Soit $B \in D_\theta \cap D_{\theta'}$

$$B\in D_\theta\cap D_{\theta'}\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R},\exists\lambda'\in\mathbb{R},$$
$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{u(\theta)}\\ \overrightarrow{A'B}=\lambda'\overrightarrow{u(\theta')}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b-a=\lambda e^{i\theta}\\ b-a'=\lambda' e^{i\theta'}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=a+\lambda e^{i\theta}\\ b=a'+\lambda' e^{i\theta'}\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}b=a+\lambda e^{i\theta}\\ a+\lambda e^{i\theta}=a'+\lambda' e^{i\theta'}\end{cases}$$

Le but est de trouver λ (ou λ') afin de trouver B. Seulement voilà, il n'y a qu'une équation et deux inconnue ($a+\lambda e^{i\theta}=a'+\lambda' e^{i\theta'}$). Mais il s'agit d'une inconnue complexe, cette équation est en fait deux équations l'équation de l'égalité des parties réelles et l'égalité des parties imaginaires. Il y a un moyen de trouver λ (où λ') avec une petite astuce, considérons le conjugué de cette équation $\overline{a+\lambda e^{i\theta}}=\overline{a'+\lambda' e^{i\theta'}}\Leftrightarrow \overline{a}+\lambda e^{-i\theta}=\overline{a'}+\lambda' e^{-i\theta'}$ car λ et λ' sont réels. Par conséquent λ et λ' vérifient

$$\begin{cases}a+\lambda e^{i\theta}=a'+\lambda' e^{i\theta'}\\ \overline{a}+\lambda e^{-i\theta}=\overline{a'}+\lambda' e^{-i\theta'}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda e^{i\theta}-\lambda' e^{i\theta'}=a'-a\\ \lambda e^{-i\theta}-\lambda' e^{-i\theta'}=\overline{a'}-\overline{a}\end{cases}$$

Appliquons le bon vieux théorème de Cramer (à condition que cela marche)

$$\begin{vmatrix}e^{i\theta} & -e^{i\theta'}\\ e^{-i\theta} & -e^{-i\theta'}\end{vmatrix}=-e^{i(\theta-\theta')}+e^{-i(\theta-\theta')}=-\left(e^{i(\theta-\theta')}-e^{-i(\theta-\theta')}\right)=-2i(\sin(\theta-\theta'))\neq 0$$

Car $\theta-\theta'\neq k\pi,k\in\mathbb{Z}$

On peut y aller avec le théorème de Cramer (qui marche même avec des complexes)

$$\begin{cases}\lambda=\dfrac{\begin{vmatrix}a'-a & -e^{i\theta'}\\ \overline{a'}-\overline{a} & -e^{-i\theta'}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}e^{i\theta} & -e^{i\theta'}\\ e^{-i\theta} & -e^{-i\theta'}\end{vmatrix}}=\dfrac{-e^{-i\theta'}(a'-a)+e^{i\theta'}\left(\overline{a'}-\overline{a}\right)}{-e^{i(\theta-\theta')}+e^{-i(\theta-\theta')}}\\[2ex] \lambda'=\dfrac{\begin{vmatrix}-e^{i\theta'} & a'-a\\ -e^{-i\theta'} & \overline{a'}-\overline{a}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}e^{i\theta} & -e^{i\theta'}\\ e^{-i\theta} & -e^{-i\theta'}\end{vmatrix}}=\dfrac{-\left(\overline{a'}-\overline{a}\right)e^{i\theta'}+(a'-a)e^{-i\theta'}}{-e^{i(\theta-\theta')}+e^{-i(\theta-\theta')}}\end{cases}$$

Par conséquent

L'affixe de B est

$$b=a+\frac{-e^{-i\theta'}(a'-a)+e^{i\theta'}\left(\overline{a'}-\overline{a}\right)}{-e^{i(\theta-\theta')}+e^{-i(\theta-\theta')}}e^{i\theta}$$
$$=\frac{a\left(-e^{i(\theta-\theta')}+e^{-i(\theta-\theta')}\right)+\left(-e^{-i\theta'}(a'-a)+e^{i\theta'}\left(\overline{a'}-\overline{a}\right)\right)e^{i\theta}}{-e^{i(\theta-\theta')}+e^{-i(\theta-\theta')}}$$
$$=\frac{-ae^{i(\theta-\theta')}+ae^{-i(\theta-\theta')}-e^{i(\theta'-\theta)}(a'-a)+e^{i(\theta+\theta')}\left(\overline{a'}-\overline{a}\right)}{-e^{i(\theta-\theta')}+e^{-i(\theta-\theta')}}$$
$$=\frac{ae^{i(\theta-\theta')}-ae^{i(\theta'-\theta)}-a'e^{i(\theta'-\theta)}+ae^{i(\theta'-\theta)}-\overline{a'}e^{i(\theta-\theta')}+\overline{a}e^{i(\theta-\theta')}}{-e^{i(\theta-\theta')}+e^{-i(\theta-\theta')}}$$
$$=\frac{ae^{i(\theta-\theta')}-a'e^{i(\theta'-\theta)}-\overline{a'}e^{i(\theta-\theta')}+\overline{a}e^{i(\theta-\theta')}}{-e^{i(\theta-\theta')}+e^{-i(\theta-\theta')}}$$
$$=\frac{ae^{i(\theta-\theta')}-a'e^{i(\theta'-\theta)}-\overline{a'}e^{i(\theta-\theta')}+\overline{a}e^{i(\theta-\theta')}}{-e^{i(\theta-\theta')}+e^{-i(\theta-\theta')}}\times\frac{e^{i(\theta+\theta')}}{e^{i(\theta+\theta')}}$$
$$=\frac{-ae^{2i\theta'}+\left(\overline{a'}-\overline{a}\right)e^{2i(\theta+\theta')}+a'e^{2i\theta}}{-e^{2i\theta}+e^{2i\theta'}}=\frac{a'e^{2i\theta}-\left(\overline{a'}-\overline{a}\right)e^{2i(\theta+\theta')}-ae^{2i\theta'}}{e^{2i\theta}-e^{2i\theta'}}$$

C'est justement le centre de la rotation.

Allez à : Exercice 11

3. On a vu que l'image de M d'affixe z par la rotation r de centre Ω le point d'affixe a et d'angle θ est le point M' d'affixe $z' = a + e^{i\theta}(z - a)$
Donc l'image de M', d'affixe z' par la rotation r' de centre Ω' le point d'affixe a' et d'angle θ' est le point M'' d'affixe $z'' = a' + e^{i\theta'}(z' - a')$
Donc l'image d'un point M, d'affixe z par $r' \circ r$ est le point M'' d'affixe
$z'' = a' + e^{i\theta'}(z' - a') = a' + e^{i\theta'}\left(a + e^{i\theta}(z - a) - a'\right) = a' + (a - a')e^{i\theta'} + e^{i(\theta+\theta')}(z - a)$
Si $\theta + \theta' = 0\ [2\pi]$ alors
$$z'' = a' + (a - a')e^{i\theta'} + z - a = z + (a - a')\left(e^{i\theta'} - 1\right)$$
Et alors $r' \circ r$ la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $(a - a')\left(e^{i\theta'} - 1\right)$
Si $\theta + \theta' \neq 0\ [2\pi]$ alors
$$z'' = a' + (a - a')e^{i\theta'} + e^{i(\theta+\theta')}(z - a) = a' + (a - a')e^{i\theta'} - ae^{i(\theta+\theta')} + ze^{i(\theta+\theta')}$$
Pour pouvoir affirmer qu'il s'agit de l'affixe d'un point M'' qui soit l'image d'un point M par une rotation de centre b et d'angle α , il faut montrer que
$$z'' = b + (z - b)e^{i\alpha} = b\left(1 - e^{i\alpha}\right) + ze^{i\alpha}$$
Il suffit de poser
$$\begin{cases} b\left(1 - e^{i\alpha}\right) = a' + (a - a')e^{i\theta'} - ae^{i(\theta+\theta')} \\ e^{i\alpha} = e^{i(\theta+\theta')} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} b\left(1 - e^{i(\theta+\theta')}\right) = a' + (a - a')e^{i\theta'} - ae^{i(\theta+\theta')} \\ e^{i\alpha} = e^{i(\theta+\theta')} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{a' + (a - a')e^{i\theta'} - ae^{i(\theta+\theta')}}{1 - e^{i(\theta+\theta')}} \\ \alpha = \theta + \theta' + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$
Cela montre que, dans ce cas, la composée de deux rotations est bien une rotation d'angle $\theta + \theta'$.
Question non demandée : où est le centre ?
Certes, il s'agit du point B d'affixe b, mais encore.
Transformons un peu b
$$b = \frac{a' + (a - a')e^{i\theta'} - ae^{i(\theta+\theta')}}{1 - e^{i(\theta+\theta')}} = \frac{a' + (a - a')e^{i\theta'} - ae^{i(\theta+\theta')}}{e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta+\theta'}{2}} - e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}\right)}$$
$$= \frac{a'e^{-i\frac{\theta+\theta'}{2}} + (a - a')e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}} - ae^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}}{e^{-i\frac{\theta+\theta'}{2}} - e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}}$$
Ainsi, l'expression
Donc

$$b-a=\frac{a'e^{-i\frac{\theta+\theta'}{2}}+(a-a')e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}}-ae^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}}{e^{-i\frac{\theta+\theta'}{2}}-e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}}-a$$

$$=\frac{a'e^{-i\frac{\theta+\theta'}{2}}+ae^{i\frac{\theta-\theta'}{2}}-a'e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}}-ae^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}-a\left(e^{-i\frac{\theta+\theta'}{2}}-e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}\right)}{e^{-i\frac{\theta+\theta'}{2}}-e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}}$$

$$=\frac{ae^{i\frac{\theta-\theta'}{2}}-a'e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}}-ae^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}+ae^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}}{e^{-i\frac{\theta+\theta'}{2}}-e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}}=\frac{(a-a')e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}}-(a-a')e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}}{e^{-i\frac{\theta+\theta'}{2}}-e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}}$$

$$=\frac{(a-a')\left(e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}}-e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}\right)}{e^{-i\frac{\theta+\theta'}{2}}-e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}}=(a-a')e^{i\frac{\theta}{2}}\frac{e^{-i\frac{\theta'}{2}}-e^{i\frac{\theta'}{2}}}{e^{-i\frac{\theta+\theta'}{2}}-e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}}$$

$$=(a-a')e^{i\frac{\theta}{2}}\frac{-2i\sin\left(\frac{\theta'}{2}\right)}{-2i\sin\left(\frac{\theta+\theta'}{2}\right)}=e^{i\frac{\theta}{2}}(a-a')\frac{\sin\left(\frac{\theta'}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta+\theta'}{2}\right)}$$

Ce qui montre que les droites vecteurs $\overrightarrow{\Omega B}$ et $\overrightarrow{\Omega'\Omega}$ font un angle $\frac{\theta}{2}$ car $\frac{\sin\left(\frac{\theta'}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta+\theta'}{2}\right)}\in\mathbb{R}^+$.

De même (ou presque) en changeant les rôles de a et a' ainsi que ceux de θ et θ'.

$$b-a'=e^{i\frac{\theta'}{2}}(a'-a)\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta+\theta'}{2}\right)}$$

Ce qui montre que les droites vecteurs $\overrightarrow{\Omega' B}$ et $\overrightarrow{\Omega\Omega'}$ font un angle $\frac{\theta'}{2}$ car $\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta+\theta'}{2}\right)}\in\mathbb{R}^+$.

Cela permet de placer le point.

Allez à : Exercice 11

Correction exercice 12 :

1.

$$\vec{w}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}\Leftrightarrow\alpha(-1,2)+\beta(3,-4)=(-1,1)\Leftrightarrow\begin{cases}-\alpha+3\beta=-1\\ 2\alpha-4\beta=1\end{cases}$$

$$\begin{vmatrix}-1&3\\2&-4\end{vmatrix}=4-6=-2\neq0$$

Il s'agit donc d'un système de Cramer

$$\alpha=\frac{\begin{vmatrix}-1&3\\1&-4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-1&3\\2&-4\end{vmatrix}}=-\frac{1}{2}$$

$$\beta=\frac{\begin{vmatrix}-1&-1\\2&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-1&3\\2&-4\end{vmatrix}}=-\frac{1}{2}$$

$$\vec{w}=-\frac{1}{2}\vec{u}-\frac{1}{2}\vec{v}\Leftrightarrow\vec{v}=-\vec{u}-2\vec{w}$$

2. On cherche α et β réels tels que

$$\vec{t}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}\Leftrightarrow\alpha(-1,2)+\beta(3,-4)=(x,y)\Leftrightarrow\begin{cases}-\alpha+3\beta=x\\ 2\alpha-4\beta=y\end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0$$

Il s'agit donc d'un système de Cramer

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} x & 3 \\ y & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{-4x - 3y}{-2} = 2x + \frac{3}{2}y$$

$$\beta = \frac{\begin{vmatrix} -1 & x \\ 2 & y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{-y - 2x}{-2} = x + \frac{1}{2}y$$

$$\vec{t} = \left(2x + \frac{3}{2}y\right)\vec{u} + \left(x + \frac{1}{2}y\right)\vec{v}$$

D'après 1, $\vec{v} = -\vec{u} - 2\vec{w}$, donc

$$\vec{t} = \left(2x + \frac{3}{2}y\right)\vec{u} - \left(x + \frac{1}{2}y\right)(\vec{u} + 2\vec{w}) = (x + y)\vec{u} - (2x + y)\vec{w}$$

Allez à : Exercice 12

Correction exercice 13 :

1. Un vecteur directeur de D est $\vec{u} = (1, -1) = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$, et un vecteur directeur de D' est $\vec{v} = (2,1) = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath}$
   On a $s(\vec{u}) = \vec{u}$ et $s(\vec{v}) = \vec{v}$ ce qui équivaut à

$$\begin{cases} s(\vec{\imath} - \vec{\jmath}) = \vec{\imath} - \vec{\jmath} \\ s(2\vec{\imath} + \vec{\jmath}) = -(2\vec{\imath} + \vec{\jmath}) = -2\vec{\imath} - \vec{\jmath} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} s(\vec{\imath}) - s(\vec{\jmath}) = \vec{\imath} - \vec{\jmath} \\ 2s(\vec{\imath}) + s(\vec{\jmath}) = -2\vec{\imath} - \vec{\jmath} \end{cases}$$

   $L_2 + L_1$ donne $3s(\vec{\imath}) = -\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$ et $2L_1 - L_2$ donne $-3s(\vec{\jmath}) = -4\vec{\imath} - \vec{\jmath}$
   Ce qui donne

$$\begin{cases} s(\vec{\imath}) = -\frac{1}{3}\vec{\imath} - \frac{2}{3}\vec{\jmath} \\ s(\vec{\jmath}) = -\frac{4}{3}\vec{\imath} + \frac{1}{3}\vec{\jmath} \end{cases}$$

   Donc

$$S = \operatorname{mat}_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}(s) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. $\vec{e_1}$ est un vecteur directeur de D donc $s(\vec{e_1}) = \vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ est un vecteur directeur de D' donc $s(\vec{e_2}) = -\vec{e_2}$
   Par conséquent

$$S' = \operatorname{mat}_{(\vec{e_1},\vec{e_2})}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Allez à : Exercice 13

Correction exercice 14 :

1.

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) & 2\sin(\theta)\cos(\theta) \\ 2\sin(\theta)\cos(\theta) & -\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix}$$

   Donc $r \circ s$ est une symétrie orthogonale.
2. Soit $\vec{u} = (x, y)$ un point invariant de $r \circ s$

$$\begin{pmatrix}\cos(2\theta) & \sin(2\theta)\\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos(2\theta)\,x+\sin(2\theta)\,y=x\\ \sin(2\theta)\,x-\cos(2\theta)\,y=y\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}(\cos(2\theta)-1)x+\sin(2\theta)\,y=0\\ \sin(2\theta)\,x-(\cos(2\theta)+1)y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2\sin^2(\theta)\,x+2\sin(\theta)\cos(\theta)\,y=0\\ 2\sin(\theta)\cos(\theta)\,x-2\cos^2(\theta)\,y=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}-\sin^2(\theta)\,x+\sin(\theta)\cos(\theta)\,y=0\\ \sin(\theta)\cos(\theta)\,x-\cos^2(\theta)\,y=0\end{cases}$$

Le déterminant de ce système est nul, donc ces deux équations sont proportionnelles, soit $\sin(\theta)\neq 0$ soit $\cos(\theta)\neq 0$, donc on peut simplifier l'une ou l'autre des équations, finalement l'ensemble des points invariants est

$$\sin(\theta)\,x-\cos(\theta)\,y=0$$

Et $r\circ s$ est la symétrie orthogonale par rapport à cette droite.

Allez à : Exercice 14

Correction exercice 15 :

1. Pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, pour tout $\lambda'\in\mathbb{R}$, pour tout $\vec{u}=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et pour tout $\overrightarrow{u'}=(x',y')\in\mathbb{R}^2$

$$s\left(\lambda\vec{u}+\lambda'\overrightarrow{u'}\right)=s(\lambda x+\lambda'x',\lambda y+\lambda'y')$$
$$=\left(\frac{2}{3}(\lambda x+\lambda'x')+\frac{1}{3}(\lambda y+\lambda'y'),\frac{4}{3}(\lambda x+\lambda'x')-\frac{1}{3}(\lambda y+\lambda'y')\right)$$
$$=\left(\lambda\left(\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y\right)+\lambda'\left(\frac{2}{3}x'+\frac{1}{3}y'\right),\lambda\left(\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}y\right)+\lambda'\left(\frac{4}{3}x'-\frac{1}{3}y'\right)\right)$$
$$=\lambda\left(\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y,\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}y\right)+\lambda'\left(\frac{2}{3}x'+\frac{1}{3}y',\frac{4}{3}x'-\frac{1}{3}y'\right)=\lambda s(x,y)+\lambda's(x',y')$$
$$=\lambda s(\vec{u})+\lambda s\left(\overrightarrow{u'}\right)$$

Donc s est linéaire.

2.

$$\vec{u}\in\ker(p)\Leftrightarrow p(\vec{u})=\vec{0}\Leftrightarrow PX=O=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow -x+2y=0\Leftrightarrow x=2y$$

Donc $\vec{u}=(2y,y)=(2,1)$

Un vecteur directeur de $\ker(p)$ est $(2,1)=2\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}$

Soit $\vec{v}\in Im(p)$, il existe $\vec{u}=(x,y)$ tel que

$$\vec{v}=p(\vec{u})=(-x+2y,-x+2y)=(-x+2y)(1,1)=(x+y)(\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2})$$

Un vecteur directeur de $Im(p)$ est $(1,1)=\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}$

3.

$$s(\overrightarrow{e_1})=s(1,0)=\left(\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right)\quad\text{et}\quad s(\overrightarrow{e_2})=s(0,1)=\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$$

Donc la matrice S est

$$S=\begin{array}{cc} \begin{matrix} s(\overrightarrow{e_1}) & s(\overrightarrow{e_2})\end{matrix} & \\ \begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix} & \begin{matrix}\overrightarrow{e_1}\\ \overrightarrow{e_2}\end{matrix}\end{array}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & -1\end{pmatrix}$$

$$S^2=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & -1\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & -1\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & -1\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}9 & 0\\ 0 & 9\end{pmatrix}=I$$

Et $s\neq\pm id$

Donc s est une symétrie.

Autre méthode

$$\det(S)=-\frac{1}{9}-\frac{8}{9}=-1\quad \text{et}\quad \operatorname{tr}(S)=a+d=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=0$$

Lorsque $S=\begin{pmatrix} a & c\\ b & d\end{pmatrix}$

Entraine que s est une symétrie

4.

$$P^2=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -1 & 2\end{pmatrix}=P$$

Et $p\neq id$ donc p est une projection

Autre méthode

$$\det(P)=-2+2=0\quad \text{et}\quad \operatorname{tr}(P)=-1+2=1$$

Entraine que p est une projection

5. Si $\vec{u}=(x,y)$ pose $X=\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}$ ses coordonnées dans la base canonique

$\vec{u}$ est invariant si et seulement si

$$s(\vec{u})=\vec{u}\Leftrightarrow SX=X\Leftrightarrow \begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{x}{3}+\frac{2y}{3}=x\\ \frac{4x}{3}-\frac{y}{3}=y\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}-\frac{2x}{3}+\frac{2y}{3}=0\\ \frac{4x}{3}-\frac{4y}{3}=0\end{cases}\Leftrightarrow x-y=0\Leftrightarrow y=x$$

Donc $\vec{u}=(x,x)=x(1,1)$, par conséquent un vecteur invariant non nul de s est $(1,1)=\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}$

$$\vec{u}\in E\Leftrightarrow s(\vec{u})=-\vec{u}\Leftrightarrow SX=-X\Leftrightarrow \begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{x}{3}+\frac{2y}{3}=-x\\ \frac{4x}{3}-\frac{y}{3}=-y\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{4x}{3}+\frac{2y}{3}=0\\ \frac{4x}{3}+\frac{2y}{3}=0\end{cases}\Leftrightarrow 2x+y=0\Leftrightarrow y=-2x$$

Donc $\vec{u}=(x,-2x)=x(1,-2)$

Un vecteur directeur de E est $(1,-2)=\overrightarrow{e_1}-2\overrightarrow{e_2}$

6. La matrice M de f dans la base canonique est :

$$M=PS=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -1 & 2\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & -1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & -1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}7 & -4\\ 7 & -4\end{pmatrix}$$

7.

$$M^2=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}7 & -4\\ 7 & -4\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}7 & -4\\ 7 & -4\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}7 & -4\\ 7 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & -4\\ 7 & -4\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}21 & -12\\ 21 & -12\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}7 & -4\\ 7 & -4\end{pmatrix}=M$$

Donc M est une projection.

Autre méthode

$$\det(M)=\frac{7}{3}\times\left(-\frac{4}{3}\right)+\frac{4}{3}\times\frac{7}{3}=0\quad \text{et}\quad \operatorname{tr}(P)=\frac{7}{3}-\frac{4}{3}=1$$

Entraine que f est une projection

8.

$\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ ne sont pas proportionnels donc ils forment une base de $\mathbb{R}^2$

On pose $X_{\overrightarrow{u_1}}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$ les coordonnées de $\overrightarrow{u_1}$ dans la base canonique

Les coordonnées de $f(\overrightarrow{u_1})$ dans la base β sont

$$MX_{\overrightarrow{u_1}}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}7 & -4\\ 7 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=X_{\overrightarrow{u_1}}$$

Donc $f(\overrightarrow{u_1})=\overrightarrow{u_1}$

On pose $X_{\overrightarrow{u_2}}=\begin{pmatrix}4\\ 7\end{pmatrix}$ les coordonnées de $\overrightarrow{u_1}$ dans la base canonique

Les coordonnées de $f(\overrightarrow{u_2})$ dans la base β sont

$$MX_{\overrightarrow{u_2}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \times X_{\overrightarrow{u_2}}$$

Donc $f(\overrightarrow{u_2}) = \vec{0}$

La matrice M' de f dans la base β' est donc

$$M' = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} f(\overrightarrow{u_1}) & f(\overrightarrow{u_2}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \overrightarrow{u_1} \\ \overrightarrow{u_2} \end{array}$$

Allez à : Exercice 15

Logique

Exercice 1 :

Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. Si Napoléon était chinois alors $3 - 2 = 2$
2. Soit Cléopâtre était chinoise, soit les grenouilles aboient.
3. Soit les roses sont des animaux, soit les chiens ont 4 pattes.
4. Si l'homme est un quadrupède, alors il parle.
5. Les roses ne sont ni des animaux, ni des fleurs.
6. Paris est en France ou Madrid est en chine.
7. La pierre ponce est un homme si et seulement si les femmes sont des sardines.
8. Les poiriers ne donnent pas de melons, et Cléopâtre n'est pas chinoise.

Aller à : Correction exercice 1 :

Exercice 2 :

Soient (P), (Q) et (R) trois propositions, donner la négation de

a) (P) et $\left(\text{non}(Q) \text{ ou } (R)\right)$

b) $\left((P) \text{ et } (Q)\right) \Rightarrow (R)$

Aller à : Correction exercice 2 :

Exercice 3 :

Soient A, B et C trois assertions. Pour chacune des assertions suivantes :

$(A_1) \equiv \left(A \text{ et } \text{non}(B)\right)$; $(A_2) \equiv \left(A \text{ ou } \text{non}(B)\right)$; $(A_3) \equiv \left(A \text{ ou } (B \text{ et } C)\right)$; $(A_4) \equiv \left(A \text{ et } (B \text{ ou } C)\right)$

$(A_5) \equiv \left(A \Rightarrow \text{non}(B)\right)$; $(A_6) \equiv (A \Rightarrow B)$; $(A_7) \equiv (\text{non}(A \text{ ou } B) \Rightarrow C)$; $(A_8) \equiv \left((A \text{ et } B) \Rightarrow \text{non}(C)\right)$

Ecrire sa négation.

Aller à : Correction exercice 3 :

Exercice 4 :

Donner la négation mathématique des phrases suivantes

1. Toutes les boules contenues dans l'urne sont rouges.
2. Certains nombres entiers sont pairs.
3. Si un nombre entier est divisible par 4, alors il se termine par 4.

Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

4. f est positive, c'est-à-dire « $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$ »
5. f est paire sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire « $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$ »

Aller à : Correction exercice 4 :

Exercice 5 :

Soient les propositions, (P) « J'ai mon permis de conduire » et (Q) « j'ai plus de 18 ans »

Les propositions $(P) \Rightarrow (Q)$ et $(Q) \Rightarrow (P)$ sont-elles vraies ? Que peut-on conclure ?

Aller à : Correction exercice 5 :

Exercice 6 :

Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. $(2 < 3)$ et $(2 \text{ divise } 4)$
2. $(2 < 3)$ et $(2 \text{ divise } 5)$
3. $(2 < 3)$ ou $(2 \text{ divise } 5)$
4. $(2 < 3)$ et $\text{non}(2 \text{ divise } 5)$

5. $\text{non}(2 < 3)$ ou $(2 \text{ divise } 5)$

Aller à : Correction exercice 6 :

Exercice 7 :

Soient A et B deux parties de $\mathbb{N}$. Ecrire en utilisant $\forall, \exists$ les assertions

$$A = \emptyset, A \cap B \neq \emptyset, A \subset B, A \not\subset B$$

Aller à : Correction exercice 7 :

Exercice 8 :

On considère la proposition (P) suivante :

(P) « Pour tout nombre réel x, il existe au moins un entier naturel N supérieur ou égal à x »

1. Ecrire la proposition (P) avec des quantificateurs.
2. Ecrire la négation avec des quantificateurs puis l'énoncer en français.

Aller à : Correction exercice 8 :

Exercice 9 :

Notons E l'ensemble des étudiants, S l'ensemble des jours de la semaine et pour un étudiant x, $h_j(x)$ son heure de réveil le jour j.

a) Ecrire avec des symboles mathématiques la proposition « Tout étudiant se réveille au moins un jour de la semaine avant 8h »
b) Ecrire la négation de cette proposition avec des symboles mathématiques puis en français.

Aller à : Correction exercice 9 :

Exercice 10 :

Soit $\mathbb{P} \subset \mathbb{N}$ l'ensemble des nombres premiers et A une partie de $\mathbb{N}$. Ecrire en utilisant $\forall, \exists$ les assertions A est une partie finie de $\mathbb{N}$, A est une partie infinie de $\mathbb{N}$.

Tout entier naturel $n \geq 2$ admet un diviseur premier, les éléments de A ont un diviseur premier commun, les éléments de A n'ont aucun diviseur premier commun.

Aller à : Correction exercice 10 :

Exercice 11 :

Soit n un entier naturel quelconque. Parmi les implications suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ? Donner leur contraposée et leur négation.

1. $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq 5) \Rightarrow (n > 3)$
2. $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq 5) \Rightarrow (n > 6)$
3. $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq 5) \Rightarrow (n \leq 6)$
4. $\forall n \in \mathbb{N}, (n < 1) \Rightarrow (2 \text{ divise } n)$
5. $\forall n \in \mathbb{N}, (n < 1) \Rightarrow (n \text{ divise } 2)$
6. $\forall n \in \mathbb{N}, (n < 2) \Rightarrow (n^2 = n)$

Aller à : Correction exercice 11 :

Exercice 12 :

Parmi les équivalences suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq 5) \Leftrightarrow (n > 4)$
2. $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq 5) \Leftrightarrow (n \geq 4)$
3. $\forall n \in \mathbb{N}, \big((n \geq 5) \text{ et } (n \text{ divise } 12)\big) \Leftrightarrow (n = 6)$

Aller à : Correction exercice 12 :

Exercice 13 :

Soient les 4 assertions suivantes :

a. $\exists x \in \mathbb{R}\, \forall y \in \mathbb{R}\; x + y > 0$
b. $\forall x \in \mathbb{R}\, \exists y \in \mathbb{R}\; x + y > 0$
c. $\forall x \in \mathbb{R}\, \forall y \in \mathbb{R}\; x + y > 0$
d. $\exists x \in \mathbb{R}\, \forall y \in \mathbb{R}\; y^2 > x$

1. Les assertions a, b, c et d sont-elles vraies ou fausses ?
2. Donner leur négation

Aller à : Correction exercice 13 :

Exercice 14 :

Soit $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres rationnels. Que signifie en mots les assertions suivantes

$\forall n \in \mathbb{N}, \exists l \in \mathbb{Z}, q_n = l,$

$$\exists l \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}, q_n = l, \quad \forall l \in \mathbb{Z}, \exists n \in \mathbb{N}, q_n = l, \quad \forall q \in \mathbb{Q}_{>0}, \forall n \in \mathbb{N}, |q_n| < q$$

Attention : il ne s'agit pas de faire la lecture à voix haute de ces quatre suites de symboles mais de traduire l'énoncé en phrase courte dont la compréhension est immédiate.

Aller à : Correction exercice 14 :

Exercice 15 :

1. Donner la négation de la phrase mathématique suivante :
$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, n \geq N \text{ et } p \geq 0 \Rightarrow \left|u_{n+p} - u_n\right| < \epsilon$$
2. Donner la contraposée de la phrase mathématique suivante :
$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, n \geq N \text{ et } p \geq 0 \Rightarrow \left|u_{n+p} - u_n\right| < \epsilon$$

Aller à : Correction exercice 15 :

Exercice 16 :

Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \qquad |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Donner la négation et la contraposée de cette phrase logique.

Allez à : Correction exercice 16 :

Exercice 17 :

Compléter, lorsque c'est possible, avec $\forall$ ou $\exists$ pour que les énoncés suivants soient vrais.

a) $\dots x \in \mathbb{R}, (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$
b) $\dots x \in \mathbb{R}, x^2 + 3x + 2 = 0$
c) $\dots x \in \mathbb{R}, 2x + 1 = 0$
d) $\dots x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x + 3 \neq 0$

Aller à : Correction exercice 17 :

Exercice 18 :

Les propositions suivantes sont-elles vraies ? Lorsqu'elles sont fausses, énoncer leur négation.

a) $\exists x \in \mathbb{N}, x^2 > 7$
b) $\forall x \in \mathbb{N}, x^2 > 7$
c) $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, y > x^2$
d) $\exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N}, y > x^2$

Aller à : Correction exercice 18 :

Corrections

Correction exercice 1 :

1. Il s'agit, ici d'une implication. « Napoléon est chinois » est faux et « $3-2=2$ » est faux, or la seule possibilité pour qu'une implication soit fausse est qu'une assertion vraie implique une assertion fausse, donc l'assertion 1. est vraie.
2. Une phrase, en français, du genre « soit …, soit … » se traduit mathématiquement par « … ou … » « Cléopâtre était chinoise » est faux et « les grenouilles aboient » est faux donc l'assertion 2. est fausse.
3. « les roses sont des animaux » est faux et « les chiens ont 4 pattes » est vrai, donc l'assertion 3. est vraie.
4. « l'homme est un quadrupède » est faux et «il parle » est vrai, donc l'assertion 4. est vraie.
5. « les roses ne sont ni des animaux, ni des fleurs » peut se traduire par « les roses ne sont pas des animaux et les roses ne sont pas des fleurs ». « les roses ne sont pas des animaux » est vrai et « les roses ne sont pas des fleurs » est faux donc « les roses ne sont ni des animaux, ni des fleurs » est faux. Avec un minimum de bon sens c'est assez évident !
6. « Paris est en France » est vrai et « Madrid est en chine » est faux, donc « Paris est en France ou Madrid est en chine » est vrai.
7. « la pierre ponce est un homme » est faux et «les femmes sont des sardines » est faux, une équivalence entre deux assertion fausse est vraie.
8. « les poiriers ne donnent pas de melons » est vrai et «Cléopâtre n'est pas chinoise » est vrai, donc « les poiriers ne donnent pas de melons, et Cléopâtre n'est pas chinoise » est vrai.

Aller à : Exercice 1 :

Correction exercice 2 :

a)

$$\begin{aligned}\text{non}\Big((P)\ \text{et}\ \big(\text{non}(Q)\ \text{ou}\ (R)\big)\Big) &\equiv \Big(\text{non}(P)\ \text{ou}\ \text{non}\big(\text{non}(Q)\text{ou}\ (R)\big)\Big)\\ &\equiv \big(\text{non}(P)\ \text{ou}\ \big((Q)\ \text{et}\ \text{non}(R)\big)\\ &\equiv \big(\text{non}(P)\ \text{ou}\ (Q)\big)\ \text{et}\ \big(\text{non}(P)\ \text{ou}\ \text{non}(R)\big)\\ &\equiv \big(\text{non}(P)\ \text{ou}\ (Q)\big)\ \text{et}\ \text{non}\big((\text{P})\ \text{et}\ (R)\big)\end{aligned}$$

Les deux dernières équivalences logiques me paraissent acceptables, parce qu'il y a souvent différentes façon d'exprimer une négation, ensuite il faut voir dans les exercices comment se présentent les propositions (P), (Q) et (R).

b)

$$\text{non}\Big(\big((P)\ \text{et}\ (Q)\big)\Rightarrow(R)\Big)\equiv\big((P)\ \text{et}\ (Q)\big)\ \text{et}\ \text{non}(\text{R})\equiv(P)\ \text{et}\ (Q)\ \text{et}\ \text{non}(\text{R})$$

Aller à : Exercice 2 :

Correction exercice 3 :

$$\text{non}(A_1)\equiv\text{non}\big(A\ \text{et}\ \text{non}(B)\big)\equiv\text{non}(A)\ \text{ou}\ \text{non}\big(\text{non}(B)\big)\equiv\text{non}(A)\ \text{ou}\ B$$

$$\text{non}(A_2)\equiv\text{non}\big(A\ \text{ou}\ \text{non}(B)\big)\equiv\text{non}(A)\ \text{et}\ \text{non}\big(\text{non}(B)\big)\equiv\text{non}(A)\ \text{et}\ B$$

$$\begin{aligned}\text{non}(A_3)\equiv\text{non}\big(A\ \text{ou}\ (B\ \text{et}\ C)\big)\equiv\text{non}(A)\ \text{et}\ \text{non}(B\ \text{et}\ C)&\equiv\text{non}(A)\ \text{et}\ \big(\text{non}(B)\ \text{ou}\ \text{non}(C)\big)\\ &\equiv\big(\text{non}(A)\ \text{et}\ \text{non}(B)\big)\ \text{ou}\ \big(\text{non}(A)\ \text{et}\ \text{non}(C)\big)\end{aligned}$$

Il y a d'autres expressions possibles de cette négation.

$$\begin{aligned}\text{non}(A_4)\equiv\text{non}\big(A\ \text{et}\ (B\ \text{ou}\ C)\big)\equiv\text{non}(A)\ \text{ou}\ \text{non}(B\ \text{ou}\ C)&\equiv\text{non}(A)\ \text{ou}\ \big(\text{non}(B)\ \text{et}\ \text{non}(C)\big)\\ &\equiv\big(\text{non}(A)\ \text{ou}\ \text{non}(B)\big)\ \text{et}\ \big(\text{non}(A)\ \text{ou}\ \text{non}(C)\big)\end{aligned}$$

Il y a d'autres expressions possibles de cette négation.

$$\text{non}(A_5) \equiv \text{non}\big(A \Rightarrow \text{non}(B)\big) \equiv \text{non}\big(\text{non}(A) \text{ ou } \text{non}(B)\big) \equiv \text{A et } B$$
$$\text{non}(A_6) \equiv \text{non}(A \Rightarrow B) \equiv \text{non}\big(\text{non}(A) \text{ ou } (\text{B})\big) \equiv (A) \text{ et } \text{non}(B)$$
$$\text{non}(A_7) \equiv \text{non}\big((\text{non}(A \text{ ou } B) \Rightarrow C)\big) \equiv \text{non}\big(\text{non}\big(\text{non}(A \text{ ou } B)\big) \text{ ou } C\big) \equiv \text{non}\big((A \text{ ou } B) \text{ ou } C\big)$$
$$\equiv \text{non}(A \text{ ou } B) \text{ et } \text{non}(C) \equiv \text{non}(A) \text{ et } \text{non}(B) \text{ et } \text{non}(C)$$
$$\text{non}(A_8) = \text{non}\big((A \text{ et } B) \Rightarrow \text{non}(C)\big) \equiv \text{non}\Big(\text{non}(A \text{ et } B) \text{ et } \text{non}\big(\text{non}(C)\big)\Big)$$
$$\equiv \text{non}(\text{non}(A \text{ et } B) \text{ et } \text{C}) \equiv (A \text{ et } B) \text{ ou } \text{non}(C) = \big(A \text{ ou } \text{non}(C)\big) \text{ et } (B \text{ ou } \text{non}(C)$$

Aller à : Exercice 3 :

Correction exercice 4 :

1. Il existe une boule qui n'est pas rouge dans l'urne. (La négation de « pour tout » est « il existe » et la négation « rouge » est « n'est pas rouge »).
2. Tous les nombres entiers sont pairs. (La négation de « il existe » (dans l'énoncé « certains » signifie « il existe ») est « tous ». Dans cette question on ne se demande pas si la proposition est vraie ou fausse.
3. Il s'agit d'une implication, la négation de $(P) \Rightarrow (Q)$ est : (P) et $\text{non}(Q)$ donc la négation demandée est « un nombre entier est divisible par 4 et il ne se termine pas par 4 ». Dans cette question on ne se demande pas si l'implication est vraie ou fausse.
4. $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) < 0$.
5. $\exists x \in \mathbb{R}, f(-x) \neq f(x)$

Aller à : Exercice 4 :

Correction exercice 5 :

$(P) \Rightarrow (Q)$ est vraie, par contre $(Q) \Rightarrow (P)$ est fausse, on en conclut que ces deux propositions ne sont pas équivalentes.

Aller à : Exercice 5 :

Correction exercice 6 :

1. $(2 < 3)$ est vrai et $(2 \text{ divise } 4)$ est vrai donc $(2 < 3)$ et $(2 \text{ divise } 4)$ est vrai.
2. $(2 < 3)$ est vrai et $(2 \text{ divise } 5)$ est faux, l'un des deux est faux donc $(2 < 3)$ et $(2 \text{ divise } 5)$ est faux.
3. $(2 < 3)$ est vrai et $(2 \text{ divise } 5)$ est faux, l'un des deux est vrai donc $(2 < 3)$ et $(2 \text{ divise } 5)$ est vrai.
4. $(2 < 3)$ est vrai et $\text{non}(2 \text{ divise } 5)$ est vrai, les deux sont vrais donc $(2 < 3)$ et $\text{non}(2 \text{ divise } 5)$ est vrai.
5. $(2 < 3)$ est vrai donc $\text{non}(2 < 3)$ est faux (on peut aussi dire que $\text{non}(2 < 3) \Leftrightarrow (2 \geq 3)$ qui est faux) et $(2 \text{ divise } 5)$ est faux par conséquent $\text{non}(2 < 3)$ ou $(2 \text{ divise } 5)$ est faux car les deux assertions sont fausses.

Aller à : Exercice 6 :

Correction exercice 7 :

$$\forall x \in \mathbb{N}, x \notin A, \qquad \exists x \in \mathbb{N}, x \in A, x \in B, \quad \forall x \in A, x \in B, \quad \exists x \in A, x \notin B$$

Aller à : Exercice 7 :

Correction exercice 8 :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, N \geq x$
2. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall N \in \mathbb{N}, N < x$. Il existe un réel tel que pour tout N entier, N est strictement inférieur à x.

Aller à : Exercice 8 :

Correction exercice 9 :

a) $\forall x \in E, \exists j \in S, h_j(x) < 8h$.

b) $\exists x \in E, \forall j \in S, h_j(x) \geq 8h$. Il y a un étudiant qui se lève à 8h ou après 8h tous les jours de la semaine. (Donc c'est un gros fainéant).

Aller à : Exercice 9 :

Correction exercice 10 :

$$\exists M \in \mathbb{N}, \forall n \in A, n < M, \qquad \forall M \in \mathbb{N}, \exists n \in A, n \geq M$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{P}, \exists k \in \mathbb{N}, n = kp, \qquad \exists p \in \mathbb{P}, \forall n \in A, \exists k \in \mathbb{N}, n = kp, \qquad \forall p \in \mathbb{P}, \exists n \in A, \forall k \in \mathbb{N}, n \neq kp$$

Aller à : Exercice 10 :

Correction exercice 11 :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq 5) \Rightarrow (n > 3)$ est vraie.
   Sa contraposée est $\forall n \in \mathbb{N}, (n \leq 3) \Rightarrow (n < 5)$ ou encore $\forall n \in \mathbb{N}, (n < 4) \Rightarrow (n \leq 4)$.
   (On rappelle que $\big((P) \Rightarrow (Q)\big) \equiv \big(\mathrm{non}(P) \text{ ou } (Q)\big)$ donc la négation de $\big((P) \Rightarrow (Q)\big)$ est
   $$\mathrm{non}\Big(\big(\mathrm{non}(P) \text{ ou } (Q)\big)\Big) \equiv \Big(\mathrm{non}\big(\mathrm{non}(P)\big) \text{ et } \mathrm{non}(Q)\Big) \equiv \big((P) \text{ et } \mathrm{non}(Q)\big)$$
   $$\mathrm{non}\big((n \geq 5) \Rightarrow (n > 3)\big) \equiv \big((n \geq 5) \text{ et } (n \leq 3)\big) \equiv \big((n > 4) \text{ et } (n < 4)\big)$$
   La négation est : $\exists n \in \mathbb{N}, (n \geq 5) \text{ et } (n \leq 3)$
2. $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq 5) \Rightarrow (n > 6)$ est faux car pour $n = 5$, $(n \geq 5)$ est vrai et $(n > 6)$ est faux (idem pour $n = 6$).
   Sa contraposée est $\forall n \in \mathbb{N}, (n \leq 6) \Rightarrow (n < 5) \equiv (n < 7) \Rightarrow (n < 5)$.
   Sa négation est $\big(\exists n \in \mathbb{N}, (n \geq 5) \text{ et } (n \leq 6)\big) \equiv \big(\exists n \in \mathbb{N}, (n > 4) \text{ et } (n < 7)\big)$
3. $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq 5) \Rightarrow (n \leq 6)$ est faux car pour $n = 7$, $(n \geq 5)$ est vrai et $(n \leq 6)$ est faux.
   Sa contraposée est $\forall n \in \mathbb{N}, (n \leq 6) \Rightarrow (n < 5) \equiv (n < 7) \Rightarrow (n < 5)$.
   Sa négation est
   $$\big(\exists n \in \mathbb{N}, (n \geq 5) \text{ et } (n > 6)\big) \equiv \big(\exists n \in \mathbb{N}, (n > 4) \text{ et } (n > 7)\big) \equiv \exists n \in \mathbb{N}, (n > 7)$$
4. $\forall n \in \mathbb{N}, (n < 1) \equiv (n = 0)$ si $(n < 1)$ est vrai alors $n = 0$ et comme $0 = 0 \times 2$, cela signifie que 2 divise 0, par conséquent $\forall n \in \mathbb{N}, (n < 1) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, (n \text{ divise } 2)$ est vrai.
   Il n'y a que cela à vérifier parce que si $n < 1$ est faux, quoiqu'il arrive à la conclusion, l'implication est vraie.
   On aura pu aussi voir que :
   $$(n \text{ divise } 2) \equiv (\exists k \in \mathbb{N}, n = 2k) \equiv (n \text{ est pair})$$
   Sa contraposée est $\big(\forall n \in \mathbb{N}, (n \text{ ne divise pas } 2) \Rightarrow (n \geq 1)\big) \equiv \forall n \in \mathbb{N}, (n \text{ est impair}) \Rightarrow (n \geq 1)$.
   Vu ainsi il est clair que la contraposée est vraie et que donc $\forall n \in \mathbb{N}, (n < 1) \Rightarrow (n \text{ divise } 2)$ est vrai.
   La négation est : $\exists\, n \in \mathbb{N}, (n < 1)$ et $(n \text{ ne divise pas } 2)$
5. Comme dans le 4. $\forall n \in \mathbb{N}, (n < 1) \equiv (n = 0)$ mais 0 ne divise pas 2, sinon cela signifierait qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $2 = k \times 0$ ce qui est faux par conséquent $\forall n \in \mathbb{N}, (n < 1) \Rightarrow (n \text{ divise } 2)$ est faux. En effet une assertion vraie ne peut pas impliquer une assertion fausse.
   La contraposée est $\forall n \in \mathbb{N}, (n \text{ ne divise pas } 2) \Rightarrow (n \geq 1)$.
   La négation est $\big(\exists n \in \mathbb{N}, (n < 1) \text{ et } (n \text{ ne divise pas } 2)\big)$. Vérifions que cette implication est vraie : soit $n = 0$ et $(n < 1)$ est vrai et $(0 \text{ ne divise pas } 2)$ est vrai ce qui entraine que $\big(\exists n \in \mathbb{N}, (n < 1) \text{ et } (n \text{ ne divise pas } 2)\big)$ est vrai.
6. $\forall n \in \mathbb{N}, (n < 2) \equiv (n \in \{0,1\})$, si $n = 0$ alors $n^2 = 0^2 = 0 = n$ et si $n = 1$ alors $n^2 = 1^2 = 1 = n$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, (n < 2) \Rightarrow (n^2 = n)$.
   La contraposée est $\forall n \in \mathbb{N}, (n^2 \neq n) \Rightarrow (n \geq 2)$

Sa négation est $\exists n \in \mathbb{N}, (n < 2)$ et $(n^2 \neq n)$.

Aller à : Exercice 11 :

Correction exercice 12 :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq 5) \Leftrightarrow (n > 4)$ car un entier strictement supérieur à 4 est supérieur ou égal à 5.
2. $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq 5) \Leftrightarrow (n \geq 4)$ est faux car pour $n = 4$, $(n \geq 4)$ est vrai et $(n \geq 5)$ est faux.
3. Les diviseurs entiers et positifs de 12 sont $\{1,2,3,4,6,12\}$ donc les diviseurs entiers et supérieurs ou égaux à 5 sont 6 et 12, bref, il suffit de dire que 12 rend vrai $\big((n \geq 5)$ et $(n$ divise $12)\big)$ et faux $(n = 6)$ pour pouvoir affirmer que $\forall n \in \mathbb{N}, \big((n \geq 5)$ et $(n$ divise $12)\big) \Leftrightarrow (n = 6)$ est faux.

Aller à : Exercice 12 :

Correction exercice 13 :

1. a. est faux car si un tel x existe, il suffit de prendre $y = -x - 1$ pour que $x + y > 0$ soit faux, en effet $x + (-x - 1) = -1 < 0$
   b. est vrai, car pour un x fixé, on choisit $y = -x + 1$ de façon à ce que $x + (-x + 1) = 1 > 0$.
   c. est faux car si on prend $x = y = -1$ alors $x + y = -2$ est faux et donc on n'a pas $x + y > 0$
   d. Il suffit de prendre $x = -1$, ainsi pour tout $y \in \mathbb{R}$, $y^2 > -1$, l'assertion est vraie.
2. a. $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists\ y \in \mathbb{R}\ x + y \leq 0$
   (on pourra montrer, à titre d'exercice que cette assertion quantifiée est vraie).
   b. $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ x + y \leq 0$
   (on pourra montrer, à titre d'exercice que cette assertion quantifiée est fausse).
   c. $\exists x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ x + y \leq 0$
   (on pourra montrer, à titre d'exercice que cette assertion quantifiée est vraie).
   d. $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ y^2 \leq x$

Aller à : Exercice 13 :

Correction exercice 14 :

La suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'entiers.
La suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante dont la valeur est entière.
La suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prend toutes les valeurs entières.
La suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et vaut 0.

Aller à : Exercice 14 :

Correction exercice 15 :

1.
$$\exists \epsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}, n \geq N \text{ et } p \geq 0 \text{ et } |u_{n+p} - u_n| \geq \epsilon$$
2.
$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, |u_{n+p} - u_n| \geq \epsilon \Rightarrow n < N \text{ ou } p < 0$$

Aller à : Exercice 15 :

Correction exercice 16 :

La négation est :
$$\exists \epsilon > 0, \forall \alpha > 0, \exists x \in \mathbb{R}, \quad |x - x_0| < \alpha \quad \text{et} \quad |f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon$$
La contraposée est
$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \alpha, \qquad |f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon \Rightarrow |x - x_0| \geq \alpha$$

Allez à : Exercice 16 :

Correction exercice 17 :

a) $\forall x \in \mathbb{R}, (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$
b) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 3x + 2 = 0$
c) $\exists x \in \mathbb{R}, 2x + 1 = 0$
d) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x + 3 \neq 0$ ou $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x + 3 \neq 0$

Aller à : Exercice 17 :

Correction exercice 18 :

a) Vraie
b) Fausse par exemple pour $x = 1$, la négation est : $\exists x \in \mathbb{N}, x^2 \leq 7$
c) Vraie
d) Fausse car la négation est manifestement vraie, la négation est : $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, y \geq x^2$.

Aller à : Exercice 18 :

Ensembles-Applications

Exercice 1 :

Soient $A=\{1,2,3\}$ et $B=\{0,1,2,3\}$. Décrire les ensembles $A\cap B$, $A\cup B$ et $A\times B$.

Allez à : Correction exercice 1 :

Exercice 2 :

Soient $A=[1,3]$ et $B=[2,4]$. Déterminer $A\cap B$ et $A\cup B$.

Allez à : Correction exercice 2 :

Exercice 3 :

1. Déterminer le complémentaire dans $\mathbb{R}$ des parties suivantes :
$$A_1=]-\infty,0];\ A_2=]-\infty,0[;\ A_3=]0,+\infty[;\ \ A_4=[0,+\infty[;A_5=]1,2[;A_6=[1,2[.$$
2. Soient $A=]-\infty,1[\cup]2,+\infty[$, $B=]-\infty,1[$ et $C=[2,+\infty[$. Comparer les ensembles suivants :
$$C_{\mathbb{R}}A \qquad et \qquad C_{\mathbb{R}}B\cap C_{\mathbb{R}}C$$

Allez à : Correction exercice 3 :

Exercice 4 :

Soient $A=]-\infty,3]$, $B=]-2,7]$ et $C=]-5,+\infty[$ trois parties de $\mathbb{R}$.

Déterminer $A\cap B$, $A\cup B$, $B\cap C$, $B\cup C$, $\mathbb{R}\setminus A$, $A\setminus B$, $(\mathbb{R}\setminus A)\cap(\mathbb{R}\setminus B)$, $(\mathbb{R}\setminus(A\cup B)$, $(A\cap B)\cup(A\cap C)$ et $A\cap(B\cup C)$.

Allez à : Correction exercice 4 :

Exercice 5 :

Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E. Montrer que :

1. $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
2. $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

Allez à : Correction exercice 5 :

Exercice 6 :

Soient E un ensemble et A et B deux parties de E. On suppose que :
$$A\cap B\neq\emptyset; A\cup B\neq E; A\not\subseteq B; B\not\subseteq A$$
On pose
$$A_1=A\cap B; A_2=A\cap C_E B; A_3=B\cap C_E A; A_4=C_E(A\cup B)$$

1. Montrer que A_1, A_2, A_3 et A_4 sont non vides.
2. Montrer que A_1, A_2, A_3 et A_4 sont deux à deux disjoints.
3. Montrer que $A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4=E$.

Allez à : Correction exercice 6 :

Exercice 7 :

1. Déterminer le complémentaire dans $\mathbb{R}$ des parties suivantes :
$$A_1=]-\infty,0];\ A_2=]-\infty,0[;\ A_3=]0,+\infty[;\ \ A_4=[0,+\infty[;A_5=]1,2[;A_6=[1,2[.$$
2. Soient $A=]-\infty,1[\cup]2,+\infty[$, $B=]-\infty,1[$ et $C=[2,+\infty[$. Comparer les ensembles suivants :
$$C_{\mathbb{R}}A \qquad \text{et} \qquad C_{\mathbb{R}}B\cap C_{\mathbb{R}}C$$

Allez à : Correction exercice 7 :

Exercice 8 :

Justifier les énoncés suivants.

a) Soient E un ensemble, A et B deux sous-ensembles de E. Si A est inclus dans B, alors le complémentaire de B dans E est inclus dans le complémentaire de A dans E.

b) Soient E un ensemble, A et B deux sous-ensembles de E. Si A et B sont disjoints, alors tout élément de E est soit dans C_E^A soit dans C_E^B.

c) Soient E un ensemble, A un sous-ensemble de E. Déterminer les ensembles suivants : $C_E(C_E A)$; $A \cap C_E A$; $A \cup C_E A$; $C_E \emptyset$; $C_E E$

Allez à : Correction exercice 8 :

Exercice 9 :

1. Montrer que $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$
2. Montrer que $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$

Allez à : Correction exercice 9 :

Exercice 10 :

On rappelle que l'on note

$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

1. Montrer que

$$(A \cap B) \cap \left(\overline{A \cap C}\right) = A \cap B \cap \overline{C}$$
$$(A \cap C) \cap \left(\overline{A \cap B}\right) = A \cap C \cap \overline{B}$$

2. En déduire que

$$(A \cap B)\Delta(A \cap C) = A \cap (B\Delta C)$$

Allez à : Correction exercice 10 :

Exercice 11 :

On rappelle que pour toutes parties U et V d'un ensemble E, on note

$$U\Delta V = (U \setminus V) \cup (V \setminus U)$$

1. Montrer que pour toutes parties A, B et C d'un ensemble E.

$$(A \cup B) \cap \left(\overline{A \cup C}\right) = \overline{A} \cap B \cap \overline{C}$$
$$(A \cup C) \cap \left(\overline{A \cup B}\right) = \overline{A} \cap C \cap \overline{B}$$

2. En déduire que

$$(A \cup B)\Delta(A \cup C) = \overline{A} \cap (B\Delta C)$$

Allez à : Correction exercice 11 :

Exercice 12 :

Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E.

1. Que pensez-vous de l'implication

$$A \cup B \not\subseteq C \Rightarrow (A \not\subseteq C \text{ ou } B \not\subseteq C) \ ?$$

Justifiez (on pourra utiliser la contraposée).

2. On suppose que l'on a les inclusions suivantes : $A \cup B \subset A \cup C$ et $A \cap B \subset A \cap C$. Montrer que $B \subset C$.
3.

Allez à : Correction exercice 12 :

Exercice 13 :

Soient A et B deux parties d'un ensemble E . Démontrer les égalités suivantes :

1. $C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B$

2. $C_E(A\cup B)=C_EA\cap C_EB$
   Si $A\subset B$, montrer $C_EB\subset C_EA$

Allez à : Correction exercice 13 :

Exercice 14 :

Soit E un ensemble et F et G deux parties de E. Démontrer que :

1. $F\subset G\Leftrightarrow F\cup G=G$
2. $F\subset G\Leftrightarrow F\cap C_EG=\emptyset$

Allez à : Correction exercice 14 :

Exercice 15 :

Soit E un ensemble et soit $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Pour A et B dans $\mathcal{P}(E)$, on appelle différence symétrique de A par B l'ensemble, noté $A\Delta B$ défini par :

$$A\Delta B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$$

1. Montrer que $A\Delta B=\left(A\cap\overline{B}\right)\cup\left(B\cap\overline{A}\right)=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$.
2. Calculer $A\Delta A$, $A\Delta\emptyset$ et $A\Delta E$.
3. Montrer que pour tous A, B et C dans $\mathcal{P}(E)$, on a :
   a) Montrer que : $\overline{\left(A\cap\overline{B}\right)\cup\left(B\cap\overline{A}\right)}=\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)\cup(B\cap A)$
   b) Montrer que : $(A\Delta B)\Delta C=\left(A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\right)\cup\left(B\cap\overline{A}\cap\overline{C}\right)\cup\left(C\cap\overline{A}\cap\overline{B}\right)\cup(C\cap B\cap A)$
   c) Montrer que $A\Delta(B\Delta C)=(C\Delta B)\Delta A$
   d) A l'aide du b), montrer que $(A\Delta B)\Delta C=(C\Delta B)\Delta A$,
   e) En déduire que : $(A\Delta B)\Delta C=A\Delta(B\Delta C)$

Allez à : Correction exercice 15 :

Exercice 16 :

Soit $f:I\to J$ définie par $f(x)=x^2$

1. Donner des ensembles I et J tels que f soit injective mais pas surjective.
2. Donner des ensembles I et J tels que f soit surjective mais pas injective.
3. Donner des ensembles I et J tels que f soit ni injective ni surjective.
4. Donner des ensembles I et J tels que f soit injective et surjective.

Allez à : Correction exercice 16 :

Exercice 17 :

Dire (en justifiant) pour chacune des applications suivantes si elles sont injectives, surjectives, bijectives :

$$\begin{array}{ccc}
f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} & f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+ & f:[0,1]\to[0,2]\\
x\mapsto x^2 & x\mapsto x^2 & x\mapsto x^2\\
g:\mathbb{R}\to\mathbb{R} & h:\mathbb{R}\to\mathbb{R} & k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\
x\mapsto x+x^3 & x\mapsto x^2+x^3 & x\mapsto x+x^4
\end{array}$$

Allez à : Correction exercice 17 :

Exercice 18 :

Soit $I\subset\mathbb{R}$ et $J\subset\mathbb{R}$, deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $f:I\to J$ une fonction strictement croissante.

1. Montrer que f est injective.

On pourra montrer la contraposée (et on rappelle que $x_1\neq x_2$ équivaut à $x_1<x_2$ ou $x_2<x_1$)

2. Déterminer l'ensemble K tel que $f:I\to K$ soit bijective.

Allez à : Correction exercice 18 :

Exercice 19 :

Soit $f:\mathbb{N}^2\to\mathbb{N}$ définie pour tout $(n,m)\in\mathbb{N}^2$ par $f(n,m)=mn$

Soit $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $g(n) = (n, (n+1)^2)$

1. f est-elle injective ?
2. f est-elle surjective ?
3. g est-elle injective ?
4. g est-elle surjective ?

Allez à : Correction exercice 19 :

Exercice 20 :

Soient

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad n \mapsto 2n \qquad g: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad n \mapsto E\left(\frac{n}{2}\right)$$

Où $E(x)$ désigne la partie entière de x

Les fonctions sont-elles injectives, surjective ? Comparer $f \circ g$ et $g \circ f$.

Allez à : Correction exercice 20 :

Exercice 21 :

Soit f une application de E vers E telle que :

$$f(f(E)) = E$$

Montrer que f est surjective.

Allez à : Correction exercice 21 :

Exercice 22 :

On considère l'application $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $f(n) = n^2$

1. Existe-t-il $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que :$f \circ g = Id_{\mathbb{N}}$?
2. Existe-t-il $h: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que :$h \circ f = Id_{\mathbb{N}}$?

Allez à : Correction exercice 22 :

Exercice 23 :

Soit $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ définie par $f(n) = 2n$

1. Existe-t-il une fonction $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telle que $f \circ g = Id_{\mathbb{Z}}$?
2. Existe-t-il une fonction $h: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telle que $h \circ f = Id_{\mathbb{Z}}$?

Allez à : Correction exercice 23 :

Exercice 24 :

Soit $f: E \to F$ une application, où $Card(E) = Card(F)$

Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes

(i) f est injective

(ii) f est surjective

(iii) f est bijective

Allez à : Correction exercice 24 :

Exercice 25 :

Répondre aux questions qui suivent, en justifiant, le cas échéant, votre réponse par un bref argument, un calcul ou un contre-exemple.

1. Si les applications $u: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ et $v: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ sont bijectives, alors l'application $u \circ v \circ u: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ est aussi bijective. Vrai ou Faux, justifier.
2. L'application $f: \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}: (a, b, c) \mapsto 2^a 3^b 5^c$ est une application

(i) bijective (ii) injective et pas surjective (iii) surjective et pas injective (iv) ni surjective ni injective

Justifier.

3. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. L'application $\varphi: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ qui à l'entier $l \in \mathbb{Z}$ associe le reste de la division euclidienne de l par n est une application.
4. bijective (ii) injective et pas surjective (iii) surjective et pas injective (iv) ni surjective ni injective

Justifier.

5. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ tels que $ad - bc = 1$. Déterminer l'application réciproque de la bijection
$$f: \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$$
$$(u, v) \mapsto (au + bv + 1, cu + dv - 1)$$

Allez à : Correction exercice 25 :

Exercice 26 :

1. Soient $q_1 \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et $q_2 \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$

Montrer que :
$$-\frac{1}{2} < \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} < \frac{1}{2}$$

2. Soit $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \setminus \{0,1\} \to \mathbb{Q}$ l'application définie par :
$$f(p, q) = p + \frac{1}{q}$$
   a. Montrer que f est injective ?
   b. f est-elle surjective ?

Allez à : Correction exercice 26 :

Exercice 27 :

Soit $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Montrer qu'il n'existe pas d'application surjective $f: E \to \mathcal{P}(E)$.

Considérer la partie $A = \{x \in E, x \notin f(x)\}$.

Allez à : Correction exercice 27 :

Exercice 28 :

Pour un entier $n \in \mathbb{N}$ on désigne par I_n l'ensemble $\{1,2, \dots, n\}$.

1. On suppose $n \geq 2$. Combien y-a-t-il d'application injectives $f: I_2 \to I_n$?
2. A quelle condition portant sur les entiers m et n peut-on définir une application $f: I_m \to I_n$ qui soit injective, surjective, bijective ?

Allez à : Correction exercice 28 :

Exercice 29 :

Soient E, F et G trois ensemble et soient $f: E \to F$ et $g: F \to G$ deux applications.

1. Montrer que si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective.
2. Montrer que si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.
3. Que peut-on conclure sur $g \circ f$ si f et g sont bijectives ?
4. Montrer que si $g \circ f$ est injective alors f est injective.
5. Montrer que si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.
6. Si à présent $f: E \to F$ et $g: F \to E$, déduire de ce qui précède ce que l'on peut dire dans les cas suivants :
   a. $g \circ f = Id_E$
   b. $f \circ g = Id_F$

c. $f \circ f = Id_E$

Allez à : Correction exercice 29 :

Exercice 30 :

Soient X et Y deux ensembles non vides et f une application de X dans Y. Une application s, de Y dans X, telle que $f \circ s = Id_Y$ s'appelle une section de f.

1. Montrer que si f admet au moins une section alors f est surjective.
2. Montrer que toute section de f est injective.

Une application r, de Y dans X, telle que $r \circ f = Id_X$ s'appelle une rétraction de f.

3. Montrer que si f possède une rétraction alors f est injective.
4. Montrer que si f est injective alors f possède une rétraction.
5. Montrer que toute rétraction de f est surjective.
6. En déduire que si f possède à la fois une section s et une rétraction r, alors f est bijective et l'on a : $r = s(= f^{-1}$ par conséquent).

Allez à : Correction exercice 30 :

Exercice 31 :

Soient E et F deux ensembles et soit f une application de E dans F. Soient A et B deux parties de E, montrer que :

1. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
2. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

   Donner un exemple où cette dernière inclusion est stricte. Montrer alors que f est injective si et seulement si pour toute partie A de E et pour toute partie B de E, on a $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Allez à : Correction exercice 31 :

Exercice 32 :

1. Soit f l'application de l'ensemble $\{1,2,3,4\}$ dans lui-même définie par :
   $$f(1) = 4, \quad f(2) = 1 \quad , f(3) = 2, \quad f(4) = 2.$$
   Déterminer $f^{-1}(A)$ lorsque $A = \{2\}$, $A = \{1,2\}$, $A = \{3\}$.
2. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Déterminer $f^{-1}(A)$ lorsque $A = \{1\}$, $A = [1,2]$.

Allez à : Correction exercice 32 :

Exercice 33 :

1. Soit $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x$. Déterminer $f([0,1] \times [0,1])$, $f^{-1}([-1,1])$.
2. Soit $f: \mathbb{R} \to [-1,1]$ définie par $f(x) = \cos(\pi x)$, déterminer $f(\mathbb{N})$, $f(2\mathbb{N})$, $f^{-1}(\{\pm 1\})$.

Allez à : Correction exercice 33 :

Exercice 34 :

Soient E et F deux ensembles et soit f une application de E dans F. Soient A' et B' deux parties quelconques de F, non vides. Montrer que :

1. $f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$
2. $f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$

Allez à : Correction exercice 34 :

Exercice 35 :

Soient E et F deux ensembles et soit f une application de E dans F .

1. Montrer que pour toute partie A de E, on a $A \subset f^{-1}\big(f(A)\big)$.

2. Montrer que pour toute partie B de F, on a $f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$.
3. Montrer que f est injective si et seulement si pour toute partie A de E on a $A = f^{-1}\left(f(A)\right)$.
4. Montrer que f est surjective si et seulement si pour toute partie B de F on a $f\left(f^{-1}(B)\right) = B$.

Allez à : Correction exercice 35 :

Exercice 36 :

Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, -y \leq x \leq y\}$

Soit $f: D \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = (x^2 + y^2, 2xy)$

1. Représenter D dans le plan.
2. a. Montrer que si deux couples de réels (x_1, y_1) et (x_2, y_2) vérifient

$$\begin{cases} x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \\ x_1 - y_1 = x_2 - y_2 \end{cases}$$

Alors $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ (autrement dit $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$).

b. Montrer que f est injective, on pourra se ramener au système du 2.a..

3. Est-ce que f est surjective ?

Allez à : Correction exercice 36 :

CORRECTIONS

Correction exercice 1 :

$$A \cap B = \{1,2,3\}\,; \qquad A \cup B = \{0,1,2,3\}$$

Remarque :

Comme $A \subset B$ on a $A \cap B = A$ et $A \cup B = B$

$$A \times B = \{(1,0), (1,1), (1,2), (1,3), (2,0), (2,1), (2,2), (2,3), (3,0), (3,1), (3,2), (3,3)\}$$

Remarque :

$$\mathrm{Card}(A \times B) = \mathrm{Card}(A) \times \mathrm{Card}(B) = 3 \times 4 = 12$$

Allez à : Exercice 1 :

Correction exercice 2 :

$$A \cap B = [2,3]\,; \quad A \cup B = [1,4]$$

Allez à : Exercice 2 :

Correction exercice 3 :

1.

$$C_{\mathbb{R}}A_1 =]0, +\infty[\,; \ C_{\mathbb{R}}A_2 = [0, +\infty[\,; \ C_{\mathbb{R}}A_3 =]-\infty, 0]\,; \ C_{\mathbb{R}}A_4 =]-\infty, 0[;$$
$$C_{\mathbb{R}}A_5 =]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[; \ C_{\mathbb{R}}A_6 =]-\infty, 1[\cup [2, +\infty[$$

2.

$$C_{\mathbb{R}}A = [1,2]; \quad C_{\mathbb{R}}B \cap C_{\mathbb{R}}C = [1, +\infty[\cap]2, +\infty[= [1,2]$$

Remarque :

$$C_{\mathbb{R}}B \cap C_{\mathbb{R}}C = C_{\mathbb{R}}(B \cup C) = C_{\mathbb{R}}A$$

Allez à : Exercice 3 :

Correction exercice 4 :

$$A \cap B =]-2,3]$$
$$A \cup B =]-\infty, 7]$$
$$B \cap C =]-2,7]$$

$$B \cup C =]-5,+\infty[$$
$$\mathbb{R} \setminus A =]3,+\infty[$$
$$A \setminus B =]-\infty,-2]$$
$$(\mathbb{R} \setminus A) \cap (\mathbb{R} \setminus B) =]3,+\infty[\cap (]-\infty,-2] \cup]7,+\infty[) = (]3,+\infty[\cap]-\infty,-2]) \cup (]3,+\infty[\cap]7,+\infty[)$$
$$= \emptyset \cup]7,+\infty[=]7,+\infty[$$

Ou mieux

$$(\mathbb{R} \setminus A) \cap (\mathbb{R} \setminus B) = \mathbb{R} \setminus (A \cup B) =]7,+\infty[$$
$$(\mathbb{R} \setminus (A \cup B) =]7,+\infty[$$
$$(A \cap B) \cup (A \cap C) =]-2,3] \cup]-5,3] =]-5,3]$$

Ou

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cap (B \cup C) =]-\infty,3] \cap]-5,+\infty[=]-5,3]$$
$$A \cap (B \cup C) =]-\infty,3] \cap]-5,+\infty[=]-5,3]$$

Allez à : Exercice 4 :

Correction exercice 5 :

Il s'agit de résultats du cours que l'on peut utiliser sans démonstration mais cet exercice demande de les redémontrer.

1. Si $x \in A \cup (B \cap C)$
   Alors $\big(x \in A \text{ ou } x \in (B \cap C)\big)$
   Alors $\big(x \in A \text{ ou } (x \in B \text{ et } x \in C)\big)$
   Si $x \in A$ alors $x \in A \cup B$ et $x \in A \cup C$, par conséquent $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
   Si $(x \in B \text{ et } x \in C)$ alors $(x \in A \cup B \text{ et } x \in A \cup C)$
   Donc si $\big(x \in A \text{ ou } (x \in B \text{ et } x \in C)\big)$ alors $(x \in A \cup B \text{ et } x \in A \cup C)$
   On a montré que $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$
   Si $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ alors $(x \in A \cup B \text{ et } x \in A \cup C)$.
   $$(x \in A \cup B \text{ et } x \in A \cup C) \Leftrightarrow \big((x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ et } (x \in A \text{ ou } x \in C)\big)$$
   Si $\big(x \in A \text{ et } (x \in A \text{ ou } x \in C)\big)$ alors $x \in A \cap A$ ou $x \in A \cap C$
   Si $\big(x \in B \text{ et } (x \in A \text{ ou } x \in C)\big)$ alors $x \in B \cap A$ ou $x \in B \cap C$
   Alors $x \in A$ ou $x \in A \cap C$ ou $x \in B \cap A$ ou $x \in B \cap C$
   Alors $x \in A$ ou $x \in A \cap C \subset A$ ou $x \in B \cap A \subset A$ ou $x \in B \cap C$
   Alors $x \in A$ ou $x \in B \cap C$
   Alors $x \in A \cup (B \cap C)$
   On a montré que $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$
   Finalement $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
2. Si $x \in A \cap (B \cup C)$
   Alors $(x \in A \text{ et } x \in B \cup C)$
   Alors $\big(x \in A \text{ et } (x \in B \text{ ou } x \in C)\big)$
   Alors $(x \in A \text{ et } x \in B)$ ou $(x \in A \text{ et } x \in C)$
   Alors $x \in A \cap B$ ou $x \in A \cap C$
   Alors $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   On a montré que $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   Si $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   Alors $x \in A \cap B$ ou $x \in A \cap C$
   Alors $(x \in A \text{ et } x \in B)$ ou $(x \in A \text{ et } x \in C)$
   Alors $(x \in A \text{ ou } x \in A)$ et $(x \in A \text{ ou } x \in C)$ et $(x \in B \text{ ou } x \in A)$ et $(x \in B \text{ ou } x \in C)$
   Alors $x \in A$ et $x \in A \cup C$ et $x \in B \cup A$ et $x \in B \cup C$
   Comme $x \in A$ et $x \in A \cup C$ et $x \in B \cup A$ entraine que $x \in A$

$$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \Rightarrow x \in A \quad \text{et} \quad x \in B \cup C \Rightarrow x \in A \cap (B \cup C)$$

On a montré que $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$

Et finalement $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Allez à : Exercice 5 :

Correction exercice 6 :

1.

$$A_1 = A \cap B \neq \emptyset$$

D'après l'énoncé

$$A_2 = A \cap C_E B = A \setminus B \neq \emptyset$$

Car $A \not\subseteq B$.

$$A_3 = B \cap C_E A = B \setminus A \neq \emptyset$$

Car $B \not\subseteq A$

$$A_4 = C_E(A \cup B) = E \setminus (A \cup B) \neq \emptyset$$

Car $A \cup B \neq E$, en fait $A \cup B \not\subseteq E$ car $A \subset E$ et $B \subset E$.

2.

$$A_1 \cap A_2 = (A \cap B) \cap (A \cap C_E B) = A \cap B \cap A \cap C_E B = (A \cap A) \cap (B \cap C_E B) = A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A_1 \cap A_3 = (A \cap B) \cap (B \cap C_E A) = A \cap B \cap B \cap C_E A = (B \cap B) \cap (A \cap C_E A) = B \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A_1 \cap A_4 = (A \cap B) \cap \big(C_E(A \cup B)\big) = (A \cap B) \cap (C_E A \cap C_E B) = A \cap B \cap C_E A \cap C_E B$$
$$= (A \cap C_E A) \cap (B \cap C_E B) = \emptyset \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A_2 \cap A_3 = (A \cap C_E B) \cap (B \cap C_E A) = A \cap C_E B \cap B \cap C_E A = (A \cap C_E A) \cap (B \cap C_E B) = \emptyset \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A_2 \cap A_4 = (A \cap C_E B) \cap C_E(A \cup B) = (A \cap C_E B) \cap (C_E A \cap C_E B) = A \cap C_E B \cap C_E A \cap C_E B$$
$$= (A \cap C_E A) \cap (C_E B \cap C_E B) = \emptyset \cap C_E B = \emptyset$$

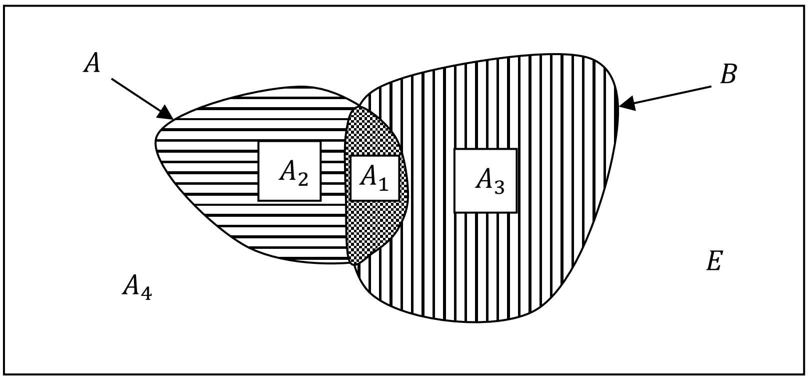
$$A_3 \cap A_4 = (B \cap C_E A) \cap C_E(A \cup B) = (B \cap C_E A) \cap (C_E A \cap C_E B) = B \cap C_E A \cap C_E A \cap C_E B$$
$$= (B \cap C_E B) \cap (C_E A \cap C_E A) = \emptyset \cap C_E A = \emptyset$$

3. A_1, A_2, A_3 et A_4 sont deux à deux disjoints.

$$\begin{aligned}
A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cap A_4 &= (A \cap B) \cup (A \cap C_E B) \cup (B \cap C_E A) \cup C_E(A \cup B) \\
&= (A \cap B) \cup (A \cap C_E B) \cup (B \cap C_E A) \cup (C_E A \cap C_E B) \\
&= [(A \cap B) \cup (A \cap C_E B)] \cup [(B \cap C_E A) \cup (C_E A \cap C_E B)] \\
&= [(A \cup A) \cap (A \cup C_E B) \cap (B \cup A) \cap (B \cup C_E B)] \\
&\cup [(B \cup C_E A) \cap (B \cup C_E B) \cap (C_E A \cup C_E A) \cap (C_E A \cup C_E B)] \\
&= [A \cap (A \cup C_E B) \cap (A \cup B) \cap E] \cup [(B \cup C_E A) \cap E \cap C_E A \cap (C_E A \cup C_E B)] \\
&= [A \cap \{(A \cup C_E B) \cap (A \cup B)\}] \cup [C_E A \cap \{(B \cup C_E A) \cap (C_E A \cup C_E B)\}] \\
&= [A \cap \{A \cup (C_E B \cap B)\}] \cup [C_E A \cap \{C_E A \cup (B \cap C_E B\}] \\
&= [A \cap \{A \cup \emptyset\}] \cup [C_E A \cap \{C_E A \cup \emptyset\}] = [A \cap A] \cup [C_E A \cap C_E A] = A \cup C_E A = E
\end{aligned}$$

Remarque :

(A_1, A_2, A_3, A_4) est une partition de E.



Sur un schéma c'est une évidence (E est le carré sur le schéma).

Allez à : Exercice 6 :

Correction exercice 7 :

1.

$$C_{\mathbb{R}}A_1 =]0,+\infty[\ ;\ \ C_{\mathbb{R}}A_2 = [0,+\infty[\ ;\ \ C_{\mathbb{R}}A_3 =]-\infty,0]\ ;\ \ C_{\mathbb{R}}A_4 =]-\infty,0[;$$
$$C_{\mathbb{R}}A_5 =]-\infty,1] \cup [2,+\infty[;\ C_{\mathbb{R}}A_6 =]-\infty,1[\cup [2,+\infty[$$

2.

$$C_{\mathbb{R}}A = [1,2];\quad C_{\mathbb{R}}B \cap C_{\mathbb{R}}C = [1,+\infty[\cap]2,+\infty[= [1,2]$$

Remarque :

$$C_{\mathbb{R}}B \cap C_{\mathbb{R}}C = C_{\mathbb{R}}(B \cup C) = C_{\mathbb{R}}A$$

Allez à : Exercice 7 :

Correction exercice 8 :

a) Soit $x \in \overline{B} = \complement_E^B$, $x \notin B$, comme $A \subset B$, $x \notin A$, autrement dit $x \in \overline{A} = \complement_E^A$ ce qui montre que si $x \in \overline{B}$ alors $x \in \overline{A}$.

b) Si $x \in A$ alors $x \notin B$ (car $A \cap B = \emptyset$) donc $x \in \overline{B} = \complement_E^B$.
Si $x \notin A$ alors $x \in \overline{A} = \complement_E^A$

c) $C_E(C_E A) = A$, $A \cap C_E A = \emptyset$, $A \cup C_E A = E$, $C_E\emptyset = E$ et $C_E E = \emptyset$

Allez à : Exercice 8 :

Correction exercice 9 :

1. $(A \setminus B) \setminus C = (A \cap \overline{B}) \setminus C = (A \cap \overline{B}) \cap \overline{C} = A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) = A \cap (\overline{B \cup C}) = A \setminus (B \cup C)$
2. $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap \overline{B}) \cap (C \cap \overline{D}) = (A \cap C) \cap (\overline{B} \cap \overline{D}) = (A \cap C) \cap (\overline{B \cup D}) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$

Allez à : Exercice 9 :

Correction exercice 10 :

1.

$$(A \cap B) \cap (\overline{A \cap C}) = (A \cap B) \cap (\overline{A} \cup \overline{C}) = (A \cap B \cap \overline{A}) \cup (A \cap B \cap \overline{C}) = \emptyset \cup (A \cap B \cap \overline{C})$$
$$= A \cap B \cap \overline{C}$$

Pour la seconde il suffit d'intervertir B et C.

2.

$$(A \cap B)\Delta(A \cap C) = ((A \cap B) \setminus (A \cap C)) \cup ((A \cap C) \setminus (A \cap B))$$
$$= \left((A \cap B) \cap (\overline{A \cap C})\right) \cup \left((A \cap C) \cap (\overline{A \cap B})\right) = (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap C \cap \overline{B})$$
$$= A \cap \left((B \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{B})\right) = A \cap ((B \setminus C) \cup (C \setminus B)) = A \cap (B\Delta C)$$

Allez à : Exercice 10 :

Correction exercice 11 :

1.

$$(A \cup B) \cap (\overline{A \cup C}) = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cap \overline{C}) = \left(A \cap (\overline{A} \cap \overline{C})\right) \cup \left(B \cap (\overline{A} \cap \overline{C})\right)$$
$$= (A \cap \overline{A} \cap \overline{C}) \cup (B \cap \overline{A} \cap \overline{C}) = \emptyset \cup (B \cap \overline{A} \cap \overline{C}) = B \cap \overline{A} \cap \overline{C} = \overline{A} \cap B \cap \overline{C}$$

Pour la seconde égalité il suffit d'intervertir les rôles de B et C.

2.

$$(A \cup B)\Delta(A \cup C) = (A \cup B) \setminus (A \cup C) \cup (A \cup C) \setminus (A \cup B) = (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap C \cap \overline{B})$$
$$= \overline{A} \cap \left((B \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{B})\right) = \overline{A} \cap (B \setminus C \cup C \setminus B) = \overline{A} \cap (B\Delta C)$$

Allez à : Exercice 11 :

Correction exercice 12 :

1. La contraposée de cette implication est :
$$(A \subset C \quad \text{et} \quad B \subset C) \Rightarrow A \cup B \subset C$$
Cette implication est vraie.
2. Prenons $x \in B$.
Alors $x \in A \cup B$, alors $x \in A \cup C$ d'après l'hypothèse.
Si $x \in C$ c'est fini. Si $x \in A \setminus C$ alors $x \in A \cap B$ (puisque l'on a pris $x \in B$), d'après l'hypothèse $x \in A \cap C$ ce qui entraine que $x \in C$.
On a bien montré que $B \subset C$.

Allez à : Exercice 12 :

Correction exercice 13 :

Il s'agit de résultats du cours, on peut les utiliser sans démonstration mais c'est l'objet de cet exercice.

1. Soit $x \in C_E(A \cap B)$, $x \notin A \cap B$ et donc $x \notin A$ ou $x \notin B$, ce qui signifie que $x \in C_E A \cup C_E B$
Cela montre que $C_E(A \cap B) \subset C_E A \cup C_E B$.
Soit $x \in C_E A \cup C_E B$, $x \notin A$ ou $x \notin B$ donc $x \notin A \cap B$ ce qui entraine que $x \in C_E(A \cap B)$.
Cela montre que $C_E A \cup C_E B \subset C_E(A \cap B)$.
Et finalement
$$C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B$$

Remarque :
On aurait raisonner par équivalence.

2. Soit $x \in C_E(A \cup B)$, $x \notin A \cup B$ et donc $x \notin A$ et $x \notin B$, ce qui signifie que $x \in C_E A \cap C_E B$
Cela montre que $C_E(A \cup B) \subset C_E A \cap C_E B$.
Soit $x \in C_E A \cap C_E B$, $x \notin A$ et $x \notin B$ donc $x \notin A \cup B$ ce qui entraine que $x \in C_E(A \cup B)$.
Cela montre que $C_E A \cap C_E B \subset C_E(A \cup B)$.
Et finalement
$$C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B$$

Remarque :
On aurait pu raisonner par équivalence.

Allez à : Exercice 13 :

Correction exercice 14 :

Il s'agit de résultats du cours, on peut les utiliser sans démonstration mais c'est l'objet de cet exercice.

1. Supposons que $F \subset G$.
Si $x \in F \cup G$ alors $x \in F \subset G$ ou $x \in G$ alors $x \in G$. Donc $F \cup G \subset G$.
Si $x \in G$ alors $x \in F \cup G$, par conséquent $F \cup G = G$.
On a montré que $F \subset G \Rightarrow F \cup G = G$
Supposons que $F \cup G = G$.
Soit $x \in F$, $x \in F \cup G = G$ donc $x \in G$.
On a montré que $F \cup G = G \Rightarrow F \subset G$.
Finalement $F \subset G \Leftrightarrow F \cup G = G$.
2. Supposons que $F \subset G$.
Si $x \in F \cap C_E G$, $x \in F$ et $x \notin G \supset F$ donc $x \in F$ et $x \notin F$ ce qui est impossible par conséquent $F \cap C_E G = \emptyset$.
On a montré que $F \subset G \Rightarrow F \cap C_E G = \emptyset$
Supposons que $F \cap C_E G = \emptyset$.

Soit $x \in F$, supposons que $x \notin G \Leftrightarrow x \in C_E G$ ce qui signifie que $x \in F \cap C_E G = \emptyset$, c'est impossible donc l'hypothèse $x \notin G$ est fausse, par conséquent $x \in G$ et $F \subset G$.
On a montré que $F \cap C_E G = \emptyset \Rightarrow F \subset G$.
Finalement $F \subset G \Leftrightarrow F \cap C_E G = \emptyset$.

Allez à : Exercice 14 :

Correction exercice 15 :

1.

$$\begin{aligned}(A\cup B)\setminus(A\cap B) &= (A\cup B)\cap\overline{(A\cap B)} = (A\cup B)\cap\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)\\ &= \left(A\cap\overline{A}\right)\cup\left(A\cap\overline{B}\right)\cup\left(B\cap\overline{A}\right)\cup\left(B\cap\overline{B}\right) = \emptyset\cup\left(A\cap\overline{B}\right)\cup\left(B\cap\overline{A}\right)\cup\emptyset\\ &= \left(A\cap\overline{B}\right)\cup\left(B\cap\overline{A}\right) = (A\setminus B)\cup(B\setminus A)\end{aligned}$$

2.

$$A\Delta A = (A\cup A)\setminus(A\cap A) = A\setminus A = \emptyset$$
$$A\Delta\emptyset = (A\cup\emptyset)\setminus(A\cap\emptyset) = A\setminus\emptyset = A$$
$$A\Delta E = (A\cup E)\setminus(A\cap E) = E\setminus A = \overline{A}$$

3.

a)

$$\begin{aligned}\overline{\left(A\cap\overline{B}\right)\cup\left(B\cap\overline{A}\right)} &= \overline{A\cap\overline{B}}\cap\overline{\left(B\cap\overline{A}\right)} = \left(\overline{A}\cup B\right)\cap\left(\overline{B}\cup A\right)\\ &= \left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)\cup\left(\overline{A}\cap A\right)\cup\left(B\cap\overline{B}\right)\cup(B\cap A) = \left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)\cup\emptyset\cup\emptyset\cup(B\cap A)\\ &= \left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)\cup(B\cap A)\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}(A\Delta B)\Delta C &= \left(\left(A\cap\overline{B}\right)\cup\left(B\cap\overline{A}\right)\right)\Delta C = \left(\left(\left(A\cap\overline{B}\right)\cup\left(B\cap\overline{A}\right)\right)\cap\overline{C}\right)\cup\left(C\cap\overline{\left(A\cap\overline{B}\right)\cup\left(B\cap\overline{A}\right)}\right)\\ &= \left(A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\right)\cup\left(B\cap\overline{A}\cap\overline{C}\right)\cup\left(C\cap\left(\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)\cup(B\cap A)\right)\right)\\ &= \left(A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\right)\cup\left(B\cap\overline{A}\cap\overline{C}\right)\cup\left(C\cap\overline{A}\cap\overline{B}\right)\cup(C\cap B\cap A)\end{aligned}$$

c)

$$(A\Delta B)\Delta C = \left(C\cap\overline{A\Delta B}\right)\cup\left((A\Delta B)\cap\overline{C}\right) = \left((A\Delta B)\cap\overline{C}\right)\cup\left(C\cap\overline{A\Delta B}\right) = C\Delta(A\Delta B)$$

or $A\Delta B = \left(A\cap\overline{B}\right)\cup\left(B\cap\overline{A}\right) = \left(B\cap\overline{A}\right)\cup\left(A\cap\overline{B}\right) = B\Delta A$ donc $(A\Delta B)\Delta C = C\Delta(A\Delta B) = C\Delta(B\Delta A)$

d)

$(C\Delta B)\Delta A = \left(C\cap\overline{B}\cap\overline{A}\right)\cup\left(B\cap\overline{C}\cap\overline{A}\right)\cup\left(A\cap\overline{C}\cap\overline{B}\right)\cup(A\cap B\cap C) = A\Delta(B\Delta C)$, en changeant A et C.

e)

$(A\Delta B)\Delta C = C\Delta(B\Delta A)$ d'après d) or $C\Delta(B\Delta A) = A\Delta(B\Delta C)$ d'après c).
Donc $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$.

Allez à : Exercice 15 :

Correction exercice 16 :

1. $I = [0,1]$ et $J = [-1,1]$.
2. $I = [-1,1]$ et $J = [0,1]$.
3. $I = [-1,1]$ et $J = [-1,1]$.
4. $I = [0,1]$ et $J = [0,1]$.

Allez à : Exercice 16 :

Correction exercice 17 :

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto x^2$$

$f(-1) = f(1)$ donc f n'est pas injective.
-4 n'a pas d'antécédent, car $f(x) = -4 \Leftrightarrow x^2 = -4$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$. f n'est pas surjective.
Une fonction est bijective si et seulement si elle est injective et surjective donc cette fonction n'est pas bijective.

$$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$$
$$x \mapsto x^2$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow \sqrt{x_1^2} = \sqrt{x_2^2} \Rightarrow |x_1| = |x_2| \Rightarrow x_1 = x_2$$

Car $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$. f est injective.
Pour tout $y \in \mathbb{R}^*$, (celui de l'ensemble d'arrivée), il existe $x = \sqrt{y} \in \mathbb{R}^*$, (celui de l'ensemble de départ) tel que : $y = f(x)$, en effet $f(x) = \left(\sqrt{y}\right)^2 = y$ donc f est surjective.
f est bijective.

$$f: [0,1] \to [0,2]$$
$$x \mapsto x^2$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow \sqrt{x_1^2} = \sqrt{x_2^2} \Rightarrow |x_1| = |x_2| \Rightarrow x_1 = x_2$$

Car $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$. f est injective.
2 n'a pas d'antécédent, car $f(x) = 2 \Leftrightarrow x^2 = 2$ n'a pas de solution dans $[0,1]$. f n'est pas surjective.

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x + x^3$$

g est une fonction dérivable, $g'(x) = 1 + 3x^2 > 0$ donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
La contraposée de $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ est $x_1 \neq x_2 \Rightarrow g(x_1) \neq g(x_2)$
Supposons que $x_1 \neq x_2$, alors $x_1 < x_2$ (ou $x_2 < x_1$, ce que revient au même), on en déduit que $g(x_1) < g(x_2)$ car g est strictement croissante, par conséquent $g(x_1) \neq g(x_2)$, g est injective.

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$$

g est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, par conséquent pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = g(x)$, g est surjective. Mais l'unicité du « x » fait que g est bijective donc il était inutile de montrer l'injectivité de g.

$$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^2 + x^3$$

On va étudier (sommairement) cette fonction et dresser son tableau de variation.
h est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. $h'(x) = 2x + 3x^2 = x(2 + 3x)$

$$\lim_{x \to -\infty} h(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$$

Le « x^3 » l'emporte sur le « x^2 ».

$$h(0) = 0 \quad \text{et} \quad h\left(-\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{4}{9} - \frac{8}{27} = \frac{4}{27}$$

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{4}{27}$	↘	0	↗	$+\infty$

Les seules bijections de $E \subset \mathbb{R}$ sur $F \subset \mathbb{R}$ sont les fonctions strictement monotones dont l'image de E est F.
h n'est pas une bijection.
Comme $h(-1) = 0 = h(0)$, h n'est pas injective.
Pour tout $y \in \mathbb{R}$ il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = h(x)$, et bien il n'y a pas unicité sinon h serait bijective.
Pour tout $y \in [0, \frac{4}{27}[$ il existe trois valeurs x tel que $y = h(x)$, pour $y = \frac{4}{27}$, il y en a deux pour les autres y n'a qu'un antécédent.

$$\begin{aligned} k: \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x + x^4 \end{aligned}$$

On va étudier cette fonction, k est dérivable et $k'(x) = 1 + 4x^3$

$$k'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + 4x^3 = 0 \Leftrightarrow x^3 = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \left(-\frac{1}{2^2}\right)^{\frac{1}{3}} = -\frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}$$

$$k\left(-\frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}\right) = \left(-\frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}\right)\left(1 + \left(-\frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}\right)^3\right) = \left(-\frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \left(-\frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}\right) \times \frac{3}{4} = -\frac{3}{2^{\frac{8}{3}}}$$

$$\lim_{x \to -\infty} h(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$$

Le « x^4 » l'emporte sur le « x ».

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2^{\frac{8}{3}}}$		$+\infty$
$k'(x)$		$-$	0	$+$	
$k(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{3}{2^{\frac{8}{3}}}$	$\nearrow$	$+\infty$

Pour tout $y > -\frac{3}{2^{\frac{8}{3}}}$, y admet deux antécédents, k est ni surjective ni injective.

Allez à : Exercice 17 :

Correction exercice 18 :

1.
Si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) < f(x_2)$ donc $f(x_1) \neq f(x_2)$
Si $x_1 > x_2$ alors $f(x_1) > f(x_2)$ donc $f(x_1) \neq f(x_2)$
Donc f est injective.
2. $K = f(I)$

Allez à : Exercice 18 :

Correction exercice 19 :

1.
$$f(1,2) = 1 \times 2 = 2 \times 1 = f(2,1)$$
Donc f n'est pas injective.
2. $f(1,p) = 1 \times p = p$
Donc pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $(n,m) = (1,p)$ tel que $p = f(n,m)$
f est surjective.
3.
$$g(n_1) = g(n_2) \Rightarrow (n_1, (n_1+1)^2) = (n_2, (n_2+1)^2) \Rightarrow \begin{cases} n_1 = n_2 \\ (n_1+1)^2 = (n_2+1)^2 \end{cases} \Rightarrow n_1 = n_2$$
Donc g est injective.
4. On va montrer que $(1,1)$ n'admet pas d'antécédent. Supposons que
$$(1,1) = (n, (n+1)^2)$$
Alors
$$\begin{cases} 1 = n \\ 1 = (n+1)^2 \end{cases}$$
Ce qui équivaut à
$$\begin{cases} 1 = n \\ 1 = 2^2 \end{cases}$$
Ce qui est impossible donc $(1,1)$ n'admet pas d'antécédent, g n'est pas surjective.

Allez à : Exercice 19 :

Correction exercice 20 :

$$f(n_1)=f(n_2)\Rightarrow 2n_1=2n_2\Rightarrow n_1=n_2$$

f est injective.

1 n'a pas d'antécédent car il n'existe pas d'entier naturel n tel que $1=2n$, f n'est pas surjective.

$g(0)=E\left(\frac{0}{2}\right)=E(0)=0$ et $g(1)=E\left(\frac{1}{2}\right)=0$, donc $g(0)=g(1)$ ce qui entraine que g n'est pas injective.

Pour tout $y=n\in\mathbb{N}$ (dans l'ensemble d'arrivé) il existe $x=2n\in\mathbb{N}$ (dans l'ensemble de départ) tel que :

$$g(x)=E\left(\frac{x}{2}\right)=E\left(\frac{2n}{2}\right)=E(n)=n=y$$

g est surjective.

Si n est pair, il existe $p\in\mathbb{N}$ tel que $n=2p$

$$f\circ g(n)=f\big(g(n)\big)=f\big(g(2p)\big)=f\left(E\left(\frac{2p}{2}\right)\right)=f\big(E(p)\big)=f(p)=2p=n$$

Si n est impaire, il existe $p\in\mathbb{N}$ tel que $n=2p+1$

$$f\circ g(n)=f\big(g(n)\big)=f\big(g(2p+1)\big)=f\left(E\left(\frac{2p+1}{2}\right)\right)=f\left(E\left(p+\frac{1}{2}\right)\right)=f(p)=2p=n-1$$

$$f\circ g(n)=\begin{cases} n & \text{si } n \text{ est pair}\\ n-1 & \text{si } n \text{ est impair}\end{cases}$$

Que n soit paire ou impaire

$$g\circ f(n)=g\big(f(n)\big)=g(2n)=E\left(\frac{2n}{2}\right)=E(n)=n$$

$$g\circ f=id$$

Remarque :

Comme on le voit sur cet exemple, il ne suffit pas que $g\circ f=id$ pour que g soit la bijection réciproque de f. La définition de la bijection réciproque d'une fonction $f_1:E\to E$ est :

« S'il existe une fonction $f_2:E\to E$ telle que $f_1\circ f_2=f_2\circ f_1=id_E$ alors $f_2=f_1^{-1}$ » on a alors : f_1 et f_2 sont deux fonctions bijectives.

Allez à : Exercice 20 :

Correction exercice 21 :

$f(E)\subset E$ donc $f\big(f(E)\big)\subset f(E)\subset E$, or $f\big(f(E)\big)=E$ donc $E\subset f(E)\subset E$, par conséquent $E=f(E)$ ce qui signifie que f est surjective.

Allez à : Exercice 21 :

Correction exercice 22 :

1. Supposons que g existe, $f\circ g=Id_{\mathbb{N}}\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N}, f\big(g(n)\big)=n\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N},\big(g(n)\big)^2=n$

   Si n n'est pas un carré cela ne marche pas, par exemple si $n=2$, $\big(g(2)\big)^2=2$ donc $g(2)=\pm\sqrt{2}\notin\mathbb{N}$

   Il n'existe pas de fonction $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ telle que :$f\circ g=Id_{\mathbb{N}}$.
2. Supposons que h existe, $h\circ f=Id_{\mathbb{N}}\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N}, h\big(f(n)\big)=n\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N}, h(n^2)=n$

   Les valeurs $h(p)$ prennent les valeurs qu'elles veulent sauf lorsque p est un carré auquel cas $h(p)=\sqrt{p}$, donnons une fonction h qui répond à la question :

   Si $p\neq n^2$ alors $h(p)=0$ et si $p=n^2$ alors $h(p)=\sqrt{p}=n$.

Allez à : Exercice 22 :

Correction exercice 23 :

1. Si g existe alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(g(n)) = n \Leftrightarrow 2g(n) = n$, si n est impair $g(n) \notin \mathbb{Z}$ donc il n'existe pas de fonction $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telle que $f \circ g = Id_{\mathbb{Z}}$.

2. Si h existe alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $h(f(n)) = n \Leftrightarrow h(2n) = n$

Soit h la fonction définie, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, par $h(2p) = p$ et $h(2p+1) = 0$ convient.

Allez à : Exercice 23 :

Correction exercice 24 :

On pose $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ et $F = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$, et bien sur tous les e_j sont distincts ainsi que tous les f_i.

On rappelle que le fait que f soit une application entraine que $\{f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)\} \subset \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$

On suppose que f est injective, on va montrer que f est surjective.

On va montrer la contraposée, c'est-à-dire que l'on va montrer que si f n'est pas surjective alors f n'est pas injective.

Soit $f_i \in F$ et on suppose qu'il n'existe pas de $e_j \in E$ tel que $f_i = f(e_j)$ (f n'est pas surjective)

Donc $\{f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)\} \subset \{f_1, \dots, f_{i-1}, f_{i+1}, \dots, f_n\}$, il y a n éléments dans le premier ensemble et $n-1$ dans le second, donc il existe j_1 et j_2, avec $j_1 \neq j_2$ dans $\{1,2, \dots, n\}$ tels que $f(e_{j_1}) = f(e_{j_2})$, or $e_{j_1} \neq e_{j_2}$ donc f n'est pas injective.

On suppose que f est surjective et on va montrer que f est injective.

On va montrer la contraposée, c'est-à-dire que l'on va montrer que si f n'est pas injective alors f n'est pas surjective.

Si $f(e_i) = f(e_j) = u$ avec $e_i \neq e_j$ alors

$\{f(e_1), \dots, f(e_{i-1}), u, f(e_{i+1}), \dots, f(e_{j-1}), u, f(e_{j+1}) \dots, f(e_n)\} \subset \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$, le premier ensemble a $n-1$ éléments et le second n donc il existe un f_j qui n'a pas d'antécédent, cela montre que f n'est pas surjective.

On a montré que $(i) \Leftrightarrow (ii)$, par définition $(iii) \Rightarrow (i)$ et $(iii) \Rightarrow (ii)$. Si on a (i) alors on a (ii) et (i) *et* (ii) entraine (iii) de même si on a (ii) alors on a (i) et (i) *et* (ii) entraine (iii). Ce qui achève de montrer les trois équivalences.

Allez à : Exercice 24 :

Correction exercice 25 :

1. u et v sont surjectives donc $u(\mathbb{N}) = \mathbb{Z}$ et $v(\mathbb{Z}) = \mathbb{N}$ par conséquent

$$u \circ v \circ u(\mathbb{N}) = u\Big(v\big(u(\mathbb{N})\big)\Big) = u\big(v(\mathbb{Z})\big) = u(\mathbb{N}) = \mathbb{Z}$$

Cela montre que $u \circ v \circ u$ est surjective.

$$u \circ v \circ u(x_1) = u \circ v \circ u(x_2) \Leftrightarrow u\Big(v\big(u(x_1)\big)\Big) = u\Big(v\big(u(x_2)\big)\Big) \Leftrightarrow v\big(u(x_1)\big) = v\big(u(x_2)\big)$$

Car u est injective

$$u \circ v \circ u(x_1) = u \circ v \circ u(x_2) \Leftrightarrow v\big(u(x_1)\big) = v\big(u(x_2)\big) \Leftrightarrow u(x_1) = u(x_2)$$

Car v est injective

$$u \circ v \circ u(x_1) = u \circ v \circ u(x_2) \Leftrightarrow u(x_1) = u(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Car u est injective

Finalement $u \circ v \circ u$ est injective et donc bijective (puisqu'elle est surjective).

2. 7 n'admet pas d'antécédent donc f n'est pas surjective.

$$f(a,b,c) = f(a',b',c') \Leftrightarrow 2^a 3^b 5^c = 2^{a'} 3^{b'} 5^{c'}$$

L'unicité de la décomposition des entiers en produit de facteur premier entraine que $a = a'$, $b = b'$ et $c = c'$, autrement dit f est injective.

Donc f est injective et pas surjective.

3. $\varphi(n) = 0 \quad et\ \varphi(2n) = 0$

Donc φ n'est pas injective.

$$\varphi(\mathbb{Z}) = \{0,1, \dots, n-1\} \subsetneq \mathbb{N}$$

Donc φ n'est pas surjective.

4. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z}$ on cherche s'il existe un unique couple $(u, v) \in \mathbb{Z}$ tel que

Premier cas $a \neq 0$

$$(x,y) = f(a,b) \Leftrightarrow (x,y) = (au + bv + 1, cu + dv - 1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = au + bv + 1 \\ y = cu + dv - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} x - 1 = au + bv \\ y + 1 = cu + dv \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ cL_1 - aL_2 \end{matrix} \begin{cases} x - 1 = au + bv \\ c(x-1) - a(y+1) = cbv - adv \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = au + bv \\ c(x-1) - a(y+1) = (cb - ad)v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = au + bv \\ c(x-1) - a(y+1) = -v \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = au + b\big(-c(x-1) + a(y+1)\big) \\ v = -c(x-1) + a(y+1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} au = -b\big(-c(x-1) + a(y+1)\big) + (x-1) \\ v = -c(x-1) + a(y+1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} au = bc(x-1) - ab(y+1) + (x-1) \\ v = -c(x-1) + a(y+1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} au = (bc+1)(x-1) - ab(y+1) \\ v = -c(x-1) + a(y+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} au = ad(x-1) - ab(y+1) \\ v = -c(x-1) + a(y+1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = d(x-1) - b(y+1) \\ v = -c(x-1) + a(y+1) \end{cases}$$

Si $a = 0$, alors $bc = -1$, en particulier $b \neq 0$ et $\frac{1}{b} = -c$

$$(x,y) = f(0,b) \Leftrightarrow (x,y) = (bv + 1, cu + dv - 1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = bv + 1 \\ y = cu + dv - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v = \dfrac{x-1}{b} \\ y = cu + dv - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = -c(x-1) \\ y = cu - dc(x-1) - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = -c(x-1) \\ y = cu - dc(x-1) - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v = -c(x-1) \\ cu = dc(x-1) + 1 + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = -c(x-1) \\ u = d(x-1) + \dfrac{1+y}{c} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v = -c(x-1) \\ u = d(x-1) - b(1+y) \end{cases}$$

Ce sont les mêmes formules que dans le cas où $a \neq 0$

Donc pour tout $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ il existe un unique couple

$$(u,v) = \big(d(x-1) - b(y+1), -c(x-1) + a(y+1)\big) \in \mathbb{Z}^2$$

tel que $(x,y) = f(u,v)$, f est bijective et

$$f^{-1}(x,y) = \big(d(x-1) - b(y+1), -c(x-1) + a(y+1)\big)$$

Allez à : Exercice 25 :

Correction exercice 26 :

1.

$$q_1 \geq 2 \Rightarrow 0 < \frac{1}{q_1} \leq \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$q_2 \geq 2 \Rightarrow 0 < \frac{1}{q_2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{q_2} < 0 \quad (2)$$

En additionnant (1) et (2)

$$-\frac{1}{2} < \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} < \frac{1}{2}$$

2.

a. Pour tout $(p_1,q_1)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ et $(p_2,q_2)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$

$$f(p_1,q_1)=f(p_2,q_2)\Rightarrow p_1+\frac{1}{q_1}=p_2+\frac{1}{q_2}\Rightarrow\frac{1}{q_1}-\frac{1}{q_2}=p_2-p_1$$

D'après la première question cela montre que $p_2-p_1\in\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$ or $p_2-p_1\in\mathbb{Z}$ donc $p_2-p_1=0$, autrement dit $p_1=p_2$, puis en reportant dans

$$p_1+\frac{1}{q_1}=p_2+\frac{1}{q_2}$$

Cela montre que $\frac{1}{q_1}=\frac{1}{q_2}$ et que $q_1=q_2$

Finalement

$$(p_1,q_1)=(p_2,q_2)$$

Ce qui montre que f est injective.

b. Regardons si $1\in\mathbb{Q}$ admet un antécédent, on suppose qu'il existe, on l'appelle (p,q)

$$p+\frac{1}{q}=1$$

Ce qui équivaut à

$$\frac{1}{q}=1-p$$

Mais $\frac{1}{q}\notin\mathbb{Z}$ et $1-p\in\mathbb{Z}$, ce qui est impossible. Par conséquent f n'est pas surjective.

Allez à : Exercice 26 :

Correction exercice 27 :

Supposons qu'il existe $f:E\to\mathcal{P}(E)$ surjective et on cherche s'il existe un antécédent à A. On appelle $x_0\in E$, un antécédent de A, donc par définition $f(x_0)=A$,

si $x_0\in f(x_0)$ alors $x_0\in A$ et donc $x_0\notin f(x_0)$ ce qui est contradictoire

Si $x_0\notin f(x_0)$ alors par définition de A, $x_0\in A=f(x_0)$ ce qui est aussi contradictoire.

L'hypothèse est donc fausse, il n'y a pas d'application surjective de E dans $\mathcal{P}(E)$.

Allez à : Exercice 27 :

Correction exercice 28 :

1. Première méthode : raisonnons par récurrence

On pose (H_n) il y a $n(n-1)$ applications injectives de I_2 dans I_n.

Regardons si (H_2) est vraie.

Il y a 4 applications de I_2 dans I_n.

$$f_1(1)=1\ \text{ et } f_1(2)=1$$
$$f_2(1)=1\ \text{ et } f_2(2)=2$$
$$f_3(1)=2\ \text{ et } f_3(2)=1$$
$$f_4(1)=2\ \text{ et } f_4(2)=2$$

Seules f_2 et f_3 sont injectives. Il y a $2=2(2-1)$ applications injectives de I_2 dans I_2.

Montrons que $(H_n)\Rightarrow(H_{n+1})$

Il y a $n(n-1)$ applications injectives de $\{0,1\}$ dans $\{0,1,\dots,n\}$.

Supposons que $f(1)=n+1$ alors $f(2)\in\{1,\dots,n\}$ (pour que $f(1)\neq f(2)$), cela fait n applications injectives de plus.

Supposons que $f(2)=n+1$ alors $f(1)\in\{1,\dots,n\}$ (pour que $f(1)\neq f(2)$), cela fait n applications injectives de plus.

Au total, il y a $n(n-1)+n+n=n^2-n+n+n=n^2+n=n(n+1)$

L'hypothèse est vérifiée.

Conclusion pour tout $n \geq 2$, il y a $n(n-1)$ applications injectives de I_2 dans I_n.
Deuxième méthode :
Si $f(1) = k \in \{0,1, \dots, n\}$ alors $f(2) \in \{1, \dots, k-1, k+1, \dots, n\}$.
Cela fait n choix possibles pour $f(1)$ et $n-1$ pour $f(2)$, soit $n(n-1)$ choix possibles pour $\big(f(1), f(2)\big)$ de façon à ce que $f(1) \neq f(2)$ (autrement dit pour que f soit injective).

2. $f: I_m \to I_n$
   f injective équivaut à $f(1) = k_1; f(2) = k_2; \dots; f(m) = k_m$, avec $k_1, k_2, \dots, k_m \in \{1,2, \dots, n\}$ tous distincts par conséquent $m \leq n$.
   Remarque :
   Cela ne veut pas dire que toutes les applications de $\{1,2, \dots, m\}$ dans $\{1,2, \dots, n\}$ sont injectives !
   Supposons que f est surjective.
   Pour tout $k_1, k_2, \dots, k_n \in \{1,2, \dots, n\}$ (les k_i tous distincts) il existe $l_1, l_2, \dots, l_n \in \{1,2, \dots, m\}$ tels que $k_i = f(l_i)$ par définition d'une application tous les l_i sont distincts (sinon un élément aurait plusieurs images), par conséquent $n \leq m$.
   Pour que f soit bijective il faut (et il suffit) que f soit injective et sujective, par conséquent il faut que $m \leq n$ et que $n \leq m$, autrement dit il faut que $m = n$.
   Remarque :
   Cela ne veut pas dire que toutes les applications de $\{1,2, \dots, n\}$ dans $\{1,2, \dots, n\}$ sont bijectives.

Allez à : Exercice 28 :

Correction exercice 29 :

1. $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) \Rightarrow g\big(f(x_1)\big) = g\big(f(x_2)\big) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$
   Car g est injective
   $$g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$
   Car f est injective.
   Donc $g \circ f$ est injective.
2. Première méthode :
   Pour tout $z \in G$ il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$ car g est surjective.
   Comme pour tout $y \in F$ il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ car f est surjective. On en déduit que pour tout $z \in G$ il existe $x \in E$ tel que $z = g\big(f(x)\big) = g \circ f(x)$ autrement dit $g \circ f$ est surjective.

Remarque :
(a) D'habitude on appelle y un élément de l'image G mais ici ce pose un petit problème de notation parce que l'on va appeler x l'élément de F et on ne saura pas trop comment appeler l'élément de E, c'est pour cela qu'il est plus malin de l'appeler z.
(b) Si on commence par écrire « pour tout $y \in F$ il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ car f est surjective » puis « pour tout $z \in G$ il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$ car g est surjective » donc « pour tout $z \in G$ il existe $x \in E$ tel que $z = g\big(f(x)\big) = g \circ f(x)$ » cela ne va pas, je vous laisse réfléchir pourquoi.

   Deuxième méthode :
   On rappelle que $\varphi: U \to V$ est surjective si et seulement si $\varphi(U) = V$
   Donc $f(E) = F$ et $g(F) = G$, par conséquent $g \circ f(E) = g\big(f(E)\big) = g(F) = G$ et on en déduit que $g \circ f$ est surjective.
3. Si g et f sont bijectives alors elles sont injectives et $g \circ f$ est injective et si g et f sont bijectives alors elles sont surjectives et $g \circ f$ est surjective, on en déduit que $g \circ f$ est bijective.
4. $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g\big(f(x_1)\big) = g\big(f(x_2)\big) \Rightarrow g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
   Car $g \circ f$ est injective, par conséquent f est injective.
5. Première méthode :

Pour tout $z \in G$, il existe $x \in E$ tel que $z = g \circ f(x) = g(f(x))$, donc il existe $y = f(x)$ tel que $z = g(y)$ ce qui signifie que g est surjective.
Deuxième méthode :
Comme $g \circ f$ est surjective, $g \circ f(E) = G \Leftrightarrow g(f(E)) = G$ or $f(E) \subset F$ donc

$$g(f(E)) \subset g(F)$$

Comme $g(F) \subset G$, cela donne

$$G = g(f(E)) \subset g(F) \subset G$$

D'où

$$g(f(E)) = g(F) = G \Rightarrow g(F) = G$$

Ce qui montre que g est surjective.

6.
a. $g \circ f = Id_E$ est bijective (l'identité est bijective)
$g \circ f$ est injective, d'après 4°), f est injective.
$g \circ f$ est surjective, d'après 5°), g est surjective.

Remarque :
$g \circ f = Id_E$ n'entraine pas que $g = f^{-1}$ et que donc f et g sont bijectives.

b. $f \circ g = Id_F$ est bijective (l'identité est bijective)
$f \circ g$ est injective, d'après 4°), g est injective.
$f \circ g$ est surjective, d'après 5°), f est surjective.

c. $f \circ f = Id_E$ est bijective
$f \circ f$ est injective, d'après 4°), f est injective.
$f \circ f$ est surjective, d'après 5°), f est surjective.
Par conséquent f est bijective et $f^{-1} = f$.

Allez à : Exercice 29 :

Correction exercice 30 :

1. Pour tout $y \in Y$ il existe $x = s(y) \in X$ tel que $y = Id_Y(y) = f(s(y)) = f(x)$, f est surjective.
2. $s(y_1) = s(y_2) \Rightarrow f(s(y_1)) = f(s(y_2)) \Rightarrow y_1 = y_2$
s est injective.
3. $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow r(f(x_1)) = r(f(x_2)) \Rightarrow Id_X(x_1) = Id_X(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
f est injective.
4. Pour tout $x \in X$, pose $y = f(x)$.
Comme $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$ à chaque $y \in Y$ telle que $y = f(x)$ on associe bien une unique valeur x, on définit alors $r: f(X) \to X$ par $r(y) = x$. Pour les $y \in Y$ qui ne sont pas dans l'image de X par f, autrement dit qui ne sont pas de la forme $y = f(x)$, on leur attribue n'importe quelle valeur dans X, mettons x_0 pour fixé les idées (d'ailleurs, on n'est pas obligé de leur attribuer à tous la même valeur).
Pour tout $x \in X$.

$$x = r(y) = r(f(x)) \Leftrightarrow Id_X = r \circ f$$

r est bien une rétraction de f.

Remarque :
Si $y \notin f(X)$, $r(y) = x_0$ ne sert à rien pour montrer que r est une rétraction.

5. Pour tout $x \in X$, il existe $y = f(x)$ tel que :

$$x = Id_X(x) = r(f(x)) = r(y)$$

Cela montre que r est surjective.

Remarque :
Les rôles habituels de x et y ont été inversés pour respecter les notations de l'énoncé.

6.

Si f admet une section alors f est surjective d'après 1°).
Si f admet une rétraction alors f est injective d'après 3°).
Par conséquent f est bijective, on note $f^{-1}: Y \to X$ sa bijection réciproque.
Comme $Id_X = r \circ f$, en composant par f^{-1} à droite :

$$Id_X \circ f^{-1} = (r \circ f) \circ f^{-1} \Leftrightarrow f^{-1} = r \circ (f \circ f^{-1}) = r$$

Comme $Id_Y = f \circ s$, en composant par f^{-1} à gauche :

$$f^{-1} \circ Id_Y = f^{-1} \circ (f \circ s) \Leftrightarrow f^{-1} = (f^{-1} \circ f) \circ s = s$$

D'où $r = s = f^{-1}$.

Allez à : Exercice 30 :

Correction exercice 31 :

1. Pour tout $y \in f(A \cup B)$, il existe $x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$.
Comme $x \in A$, $y = f(x) \in f(A)$, comme $x \in B$, $y = f(x) \in f(B)$ par conséquent
$$y = f(x) \in f(A) \cup f(B)$$
Cela montre que $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$
Pour tout $y \in f(A) \cup f(B)$, $y \in f(A)$ ou $y \in f(B)$
Si $y \in f(A)$ alors il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$, mais $x \in A \subset A \cup B$ donc $y = f(x) \in f(A \cup B)$
Si $y \in f(B)$ alors il existe $x \in B$ tel que $y = f(x)$, mais $x \in B \subset A \cup B$ donc $y = f(x) \in f(A \cup B)$
Cela montre que s tous les cas $y \in f(A \cup B)$ et que donc
$$f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$$
Finalement $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
2. Pour tout $y \in f(A \cap B)$, il existe $x \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$.
Comme $x \in A \cap B \subset A$, $y = f(x) \in f(A)$, comme $x \in A \cap B \subset B$, $y = f(x) \in f(B)$ par conséquent
$$y = f(x) \in f(A) \cap f(B)$$
Cela montre que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
Pour trouver un exemple où l'inclusion est stricte, d'après la suite, il ne faut pas prendre une fonction injective, par exemple prenons $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$, ensuite il faut prendre A et B où f n'est pas injective, par exemple :
$$A = [-4,2] \quad \text{et } B = [-2,3]$$
$$f(A) = f([-4,2]) = [0,16]\,; \quad f(B) = f([-2,3]) = [0,9] \Rightarrow f(A) \cap f(B) = [0,9]$$
$$A \cap B = [-2,2] \Rightarrow f(A \cap B) = [0,4]$$
On a bien $f(A \cap B) \subsetneq f(A) \cap f(B)$

Allez à : Exercice 31 :

Correction exercice 32 :

1. $f^{-1}(\{2\}) = \{3,4\}; f^{-1}(\{1,2\}) = \{2,3,4\}\,; f^{-1}(\{3\}) = \emptyset$
2.
$$f^{-1}(\{1\}) = \{-1,1\}$$
$$f^{-1}([1,2]) = \left[-\sqrt{2}, -1\right] \cup \left[1, \sqrt{2}\right]$$

Allez à : Exercice 32 :

Correction exercice 33 :

1. $[0,1] \times [0,1] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq 1\}$
Donc

$$f([0,1]\times[0,1])=\{x\in\mathbb{R},0\le x\le 1\}=[0,1]$$
$$f^{-1}([-1,1])=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,f(x,y)\in[-1,1]\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,x\in[-1,1]\}=[-1,1]\times\mathbb{R}$$

2.

$$f(\mathbb{N})=\{y\in[-1,1],y=\cos(\pi n),n\in\mathbb{N}\}=\{y\in[-1,1],y=(-1)^{\mathrm{n}},n\in\mathbb{N}\}=\{-1,1\}$$
$$f(2\mathbb{N})=\{y\in[-1,1],y=\cos(2\pi n),n\in\mathbb{N}\}=\{y\in[-1,1],y=1,n\in\mathbb{N}\}=\{1\}$$
$$f^{-1}(\{\pm1\})=\{x\in\mathbb{R},\cos(\pi x)=\pm1\}$$

Or $\cos(x)=1\Leftrightarrow x=2k\pi$ et $\cos(x)=-1\Leftrightarrow x=(2k+1)\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

$$f^{-1}(\{\pm1\})=\{x\in\mathbb{R},x=2k\pi\ ,x=(2k+1)\pi\ ,\mathrm{k}\in\mathbb{Z}\}=\{n\pi,n\in\mathbb{Z}\}$$

Allez à : Exercice 33 :

Correction exercice 34 :

1. Pour tout $x\in f^{-1}(A'\cup B')$, $f(x)\in A'\cup B'$ donc $f(x)\in A'$ ou $f(x)\in B'$, par conséquent $x\in f^{-1}(A')$ ou $x\in f^{-1}(B')$, autrement dit $x\in f^{-1}(A')\cup f^{-1}(B')$
   On a montré que $f^{-1}(A'\cup B')\subset f^{-1}(A')\cup f^{-1}(B')$
   Pour tout $x\in f^{-1}(A')\cup f^{-1}(B')$, $x\in f^{-1}(A')$ ou $x\in f^{-1}(B')$, par conséquent $f(x)\in A'$ ou $f(x)\in B'$, autrement dit $f(x)\in A'\cup B'$, donc $x\in f^{-1}(A'\cup B')$.
   On a montré que $f^{-1}(A')\cup f^{-1}(B')\subset f^{-1}(A'\cup B')$
   Finalement $f^{-1}(A'\cup B')=f^{-1}(A')\cup f^{-1}(B')$
2. Pour tout $x\in f^{-1}(A'\cap B')$, $f(x)\in A'\cap B'$ donc $f(x)\in A'$ et $f(x)\in B'$, par conséquent $x\in f^{-1}(A')$ et $x\in f^{-1}(B')$, autrement dit $x\in f^{-1}(A')\cap f^{-1}(B')$
   On a montré que $f^{-1}(A'\cap B')\subset f^{-1}(A')\cap f^{-1}(B')$
   Pour tout $x\in f^{-1}(A')\cap f^{-1}(B')$, $x\in f^{-1}(A')$ et $x\in f^{-1}(B')$, par conséquent $f(x)\in A'$ et $f(x)\in B'$, autrement dit $f(x)\in A'\cap B'$, donc $x\in f^{-1}(A'\cap B')$.
   On a montré que $f^{-1}(A')\cap f^{-1}(B')\subset f^{-1}(A'\cap B')$
   Finalement $f^{-1}(A'\cap B')=f^{-1}(A')\cap f^{-1}(B')$

Allez à : Exercice 34 :

Correction exercice 35 :

1. Pour tout $x\in A$, $f(x)\in f(A)$ et donc $x\in f^{-1}\big(f(A)\big)$, ce qui montre que $A\subset f^{-1}\big(f(A)\big)$
2. Pour tout $y\in f\big(f^{-1}(B)\big)$, il existe $x\in f^{-1}(B)$ tel que $y=f(x)$, comme $x\in f^{-1}(B)$ $f(x)\in B$ ce qui entraine que $y\in B$, ce qui montre que $f\big(f^{-1}(B)\big)\subset B$.
3. Comme « pour toute partie A de E, on a $A\subset f^{-1}\big(f(A)\big)$ » la question revient à montrer que : « f est injective si et seulement si pour toute partie A de E on a $A\supset f^{-1}\big(f(A)\big)$ »
   Si f est injective.
   Pour tout $x\in f^{-1}\big(f(A)\big)$, $f(x)\in f(A)$ ce qui signifie qu'il existe $x'\in A$ (attention, à priori ce n'est pas le même x que celui du début de la phrase) tel que $f(x)=f(x')$ comme f est injective $x=x'$, par conséquent $x\in A$.
   On a montré que $f^{-1}\big(f(A)\big)\subset A$.
   Si pour toute partie $A\subset E$, $f^{-1}\big(f(A)\big)\subset A$
   $$f(x_1)=f(x_2)=y$$
   On prend $A=\{x_1\}$
   $$f(A)=f(\{x_1\})=\{f(x_1)\}=\{y\}\Rightarrow f^{-1}\big(f(A)\big)=f^{-1}(\{y\})=f^{-1}(y)$$
   D'après l'hypothèse $f^{-1}\big(f(A)\big)\subset A$ donc $\{f^{-1}(y)\}\subset\{x_1\}$
   Or $x_2\in f^{-1}(y)$ car $f(x_2)=y$ donc $x_2\in\{x_1\}$ par conséquent $x_1=x_2$ ce qui signifie que f est injective.

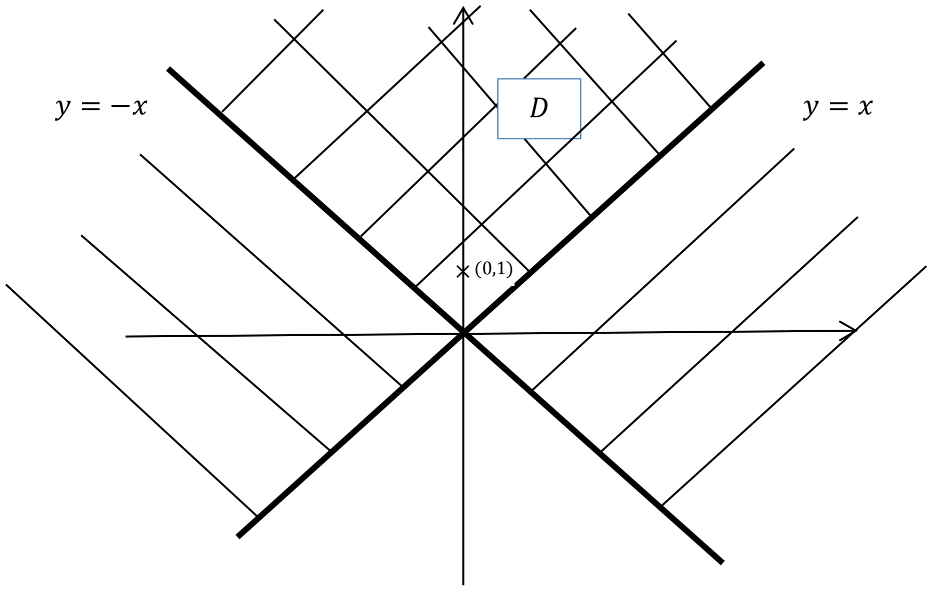
Finalement on a montré l'équivalence demandée.

4. Comme « pour toute partie B de F, on a $f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$ » la question revient à montrer que : « f est surjective si et seulement si pour toute partie B de F on a $f\left(f^{-1}(B)\right) \supset B$ »
   Si f est surjective.
   Pour tout $y \in B$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ car f est surjective.
   $x \in f^{-1}(B)$ entraine que $y = f(x) \in f\left(f^{-1}(B)\right)$, cela montre que $B \subset f\left(f^{-1}(B)\right)$.
   Si pour tout $B \subset f\left(f^{-1}(B)\right)$
   On pose $B = \{y\}$, alors $\{y\} \subset f\left(f^{-1}(\{y\})\right)$ ce qui s'écrit aussi $y \in f\left(f^{-1}(\{y\})\right)$, il existe donc $x \in f^{-1}(\{y\})$ tel que $y = f(x)$, cela montre bien que f est surjective.
   Finalement on a montré l'équivalence demandée.

Allez à : Exercice 35 :

Correction exercice 36 :

1. Le point $(0,1)$ vérifie $x \leq y$ donc $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y\}$ est le demi-plan supérieur droit. De même $(0,1)$ vérifie $-y \leq x$ donc $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, -y \leq x\}$ est le demi-plan supérieur droit, D est l'intersection de ces deux demi-plan, D est le quart de plan supérieur du schéma ci-dessous.



2. a.
$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \\ x_1 - y_1 = x_2 - y_2 \end{cases}$$
   En additionnant L_1 et L_2 on trouve que $2x_1 = 2x_2$, donc $x_1 = x_2$, puis en remplaçant dans L_1, on trouve que $y_1 = y_2$.
   b.
$$f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) \Rightarrow (x_1^2 + y_1^2, 2x_1y_1) = (x_2^2 + y_2^2, 2x_2y_2) \Rightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 \\ 2x_1y_1 = 2x_2y_2 \end{cases}$$
   $L_1 - L_2$ donne $x_1^2 + y_1^2 - 2x_1y_1 = x_2^2 + y_2^2 - 2x_2y_2$, ce qui entraine que $(x_1 - y_1)^2 = (x_2 - y_2)^2$, comme $x - y \leq 0$ sur D, cela donne $-(x_1 - y_1) = -(x_2 - y_2)$ ou encore $x_1 - y_1 = x_2 - y_2$.
   $L_1 + L_2$ donne $x_1^2 + y_1^2 + 2x_1y_1 = x_2^2 + y_2^2 + 2x_2y_2$, ce qui entraine que $(x_1 + y_1)^2 = (x_2 + y_2)^2$, comme $x + y \geq 0$ sur D, cela donne $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$.
   D'après 2.a. cela donne que $x_1 = x_2$ et que $y_1 = y_2$, ce qui montre que f est injective.
3. $(-1, 1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ n'a pas d'antécédent dans D car $x^2 + y^2 > 0$.

Allez à : Exercice 36 :

Ensembles-Applications

Exercice 1 :

Soit $f: I \to J$ définie par $f(x) = x^2$

1. Donner des ensembles I et J tels que f soit injective mais pas surjective.
2. Donner des ensembles I et J tels que f soit surjective mais pas injective.
3. Donner des ensembles I et J tels que f soit ni injective ni surjective.
4. Donner des ensembles I et J tels que f soit injective et surjective.

Allez à : Correction exercice 1 :

Exercice 2 :

Dire (en justifiant) pour chacune des applications suivantes si elles sont injectives, surjectives, bijectives :

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto x^2 \qquad f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \quad x \mapsto x^2 \qquad f: [0,1] \to [0,2] \quad x \mapsto x^2$$

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto x + x^3 \qquad h: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto x^2 + x^3 \qquad k: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto x + x^4$$

Allez à : Correction exercice 2 :

Exercice 3 :

Soit $I \subset \mathbb{R}$ et $J \subset \mathbb{R}$, deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $f: I \to J$ une fonction strictement croissante.

1. Montrer que f est injective.

On pourra montrer la contraposée (et on rappelle que $x_1 \neq x_2$ équivaut à $x_1 < x_2$ ou $x_2 < x_1$)

2. Déterminer l'ensemble K tel que $f: I \to K$ soit bijective.

Allez à : Correction exercice 3 :

Exercice 4 :

Soit $f: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ définie pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ par $f(n, m) = mn$

Soit $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $g(n) = (n, (n+1)^2)$

1. f est-elle injective ?
2. f est-elle surjective ?
3. g est-elle injective ?
4. g est-elle surjective ?

Allez à : Correction exercice 4 :

Exercice 5 :

Soient

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad n \mapsto 2n \qquad g: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad n \mapsto E\left(\frac{n}{2}\right)$$

Où $E(x)$ désigne la partie entière de x

Les fonctions sont-elles injectives, surjective ? Comparer $f \circ g$ et $g \circ f$.

Allez à : Correction exercice 5 :

Exercice 6 :

Soit f une application de E vers E telle que :

$$f\big(f(E)\big) = E$$

Montrer que f est surjective.

Allez à : Correction exercice 6 :

Exercice 7 :

On considère l'application $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $f(n) = n^2$

1. Existe-t-il $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que :$f \circ g = Id_{\mathbb{N}}$?
2. Existe-t-il $h: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que :$h \circ f = Id_{\mathbb{N}}$?

Allez à : Correction exercice 7 :

Exercice 8 :

Soit $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ définie par $f(n) = 2n$

1. Existe-t-il une fonction $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telle que $f \circ g = Id_{\mathbb{Z}}$?
2. Existe-t-il une fonction $h: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telle que $h \circ f = Id_{\mathbb{Z}}$?

Allez à : Correction exercice 8 :

Exercice 9 :

Soit $f: E \to F$ une application, où $Card(E) = Card(F)$

Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes

(i) f est injective

(ii) f est surjective

(iii) f est bijective

Allez à : Correction exercice 9 :

Exercice 10 :

Répondre aux questions qui suivent, en justifiant, le cas échéant, votre réponse par un bref argument, un calcul ou un contre-exemple.

1. Si les applications $u: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ et $v: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ sont bijectives, alors l'application $u \circ v \circ u: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ est aussi bijective. Vrai ou Faux, justifier.
2. L'application $f: \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}: (a, b, c) \mapsto 2^a 3^b 5^c$ est une application
   (i) bijective (ii) injective et pas surjective (iii) surjective et pas injective (iv) ni surjective ni injective

Justifier.

3. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. L'application $\varphi: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ qui à l'entier $l \in \mathbb{Z}$ associe le reste de la division euclidienne de l par n est une application.
   (i) bijective (ii) injective et pas surjective (iii) surjective et pas injective (iv) ni surjective ni injective

Justifier.

4. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ tels que $ad - bc = 1$. Déterminer l'application réciproque de la bijection

$$f: \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$$
$$(u, v) \mapsto (au + bv + 1, cu + dv - 1)$$

Allez à : Correction exercice 10 :

Exercice 11 :

1. Soient $q_1 \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et $q_2 \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$

Montrer que :

$$-\frac{1}{2} < \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} < \frac{1}{2}$$

2. Soit $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \setminus \{0,1\} \to \mathbb{Q}$ l'application définie par :

$$f(p, q) = p + \frac{1}{q}$$

a. Montrer que f est injective ?
b. f est-elle surjective ?

Allez à : Correction exercice 11 :

Exercice 12 :

Pour un entier $n \in \mathbb{N}$ on désigne par I_n l'ensemble $\{1,2,\dots,n\}$.

1. On suppose $n \geq 2$. Combien y-a-t-il d'application injectives $f: I_2 \to I_n$?
2. A quelle condition portant sur les entiers m et n peut-on définir une application $f: I_m \to I_n$ qui soit injective, surjective, bijective ?

Allez à : Correction exercice 12 :

Exercice 13 :

Soient E, F et G trois ensemble et soient $f: E \to F$ et $g: F \to G$ deux applications.

1. Montrer que si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective.
2. Montrer que si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.
3. Que peut-on conclure sur $g \circ f$ si f et g sont bijectives ?
4. Montrer que si $g \circ f$ est injective alors f est injective.
5. Montrer que si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.
6. Si à présent $f: E \to F$ et $g: F \to E$, déduire de ce qui précède ce que l'on peut dire dans les cas suivants :
   a. $g \circ f = Id_E$
   b. $f \circ g = Id_F$
   c. $f \circ f = Id_E$

Allez à : Correction exercice 13 :

Exercice 14 :

Soient X et Y deux ensembles non vides et f une application de X dans Y. Une application s, de Y dans X, telle que $f \circ s = Id_Y$ s'appelle une section de f.

1. Montrer que si f admet au moins une section alors f est surjective.
2. Montrer que toute section de f est injective.

Une application r, de Y dans X, telle que $r \circ f = Id_X$ s'appelle une rétraction de f.

3. Montrer que si f possède une rétraction alors f est injective.
4. Montrer que si f est injective alors f possède une rétraction.
5. Montrer que toute rétraction de f est surjective.
6. En déduire que si f possède à la fois une section s et une rétraction r, alors f est bijective et l'on a : $r = s (= f^{-1}$ par conséquent).

Allez à : Correction exercice 14 :

Exercice 15 :

1. Soit f l'application de l'ensemble $\{1,2,3,4\}$ dans lui-même définie par :
$$f(1) = 4,\ \ f(2) = 1\ \ , f(3) = 2,\ \ f(4) = 2.$$
Déterminer $f^{-1}(A)$ lorsque $A = \{2\}$, $A = \{1,2\}$, $A = \{3\}$.
2. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Déterminer $f^{-1}(A)$ lorsque $A = \{1\}$, $A = [1,2]$.

Allez à : Correction exercice 15 :

Exercice 16 :

1. Soit $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x$. Déterminer $f([0,1] \times [0,1])$, $f^{-1}([-1,1])$.

2. Soit $f:\mathbb{R}\to[-1,1]$ définie par $f(x)=\cos(\pi x)$, déterminer $f(\mathbb{N})$, $f(2\mathbb{N})$, $f^{-1}(\{\pm 1\})$.

Allez à : Correction exercice 16 :

Exercice 17 :

Soit $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,-y\leq x\leq y\}$

Soit $f:D\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=(x^2+y^2,2xy)$

1. Représenter D dans le plan.
2. a. Montrer que si deux couples de réels (x_1,y_1) et (x_2,y_2) vérifient

$$\begin{cases} x_1+y_1=x_2+y_2 \\ x_1-y_1=x_2-y_2 \end{cases}$$

Alors $(x_1,y_1)=(x_2,y_2)$ (autrement dit $x_1=x_2$ et $y_1=y_2$).

b. Montrer que f est injective, on pourra se ramener au système du 2.a..

3. Est-ce que f est surjective ?

Allez à : Correction exercice 17 :

CORRECTIONS

Correction exercice 1 :

1. $I=[0,1]$ et $J=[-1,1]$.
2. $I=[-1,1]$ et $J=[0,1]$.
3. $I=[-1,1]$ et $J=[-1,1]$.
4. $I=[0,1]$ et $J=[0,1]$.

Allez à : Exercice 1 :

Correction exercice 2 :

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R}&\to\mathbb{R} \\ x&\mapsto x^2 \end{aligned}$$

$f(-1)=f(1)$ donc f n'est pas injective.

-4 n'a pas d'antécédent, car $f(x)=-4\Leftrightarrow x^2=-4$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$. f n'est pas surjective.

Une fonction est bijective si et seulement si elle est injective et surjective donc cette fonction n'est pas bijective.

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R}^+&\to\mathbb{R}^+ \\ x&\mapsto x^2 \end{aligned}$$

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1^2=x_2^2\Rightarrow\sqrt{x_1^2}=\sqrt{x_2^2}\Rightarrow|x_1|=|x_2|\Rightarrow x_1=x_2$$

Car $x_1\geq 0$ et $x_2\geq 0$. f est injective.

Pour tout $y\in\mathbb{R}^*$, (celui de l'ensemble d'arrivée), il existe $x=\sqrt{y}\in\mathbb{R}^*$, (celui de l'ensemble de départ) tel que : $y=f(x)$, en effet $f(x)=\left(\sqrt{y}\right)^2=y$ donc f est surjective.

f est bijective.

$$\begin{aligned} f:[0,1]&\to[0,2] \\ x&\mapsto x^2 \end{aligned}$$

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1^2=x_2^2\Rightarrow\sqrt{x_1^2}=\sqrt{x_2^2}\Rightarrow|x_1|=|x_2|\Rightarrow x_1=x_2$$

Car $x_1\geq 0$ et $x_2\geq 0$. f est injective.

2 n'a pas d'antécédent, car $f(x) = 2 \Leftrightarrow x^2 = 2$ n'a pas de solution dans $[0,1]$. f n'est pas surjective.

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x + x^3$$

g est une fonction dérivable, $g'(x) = 1 + 3x^2 > 0$ donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
La contraposée de $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ est $x_1 \neq x_2 \Rightarrow g(x_1) \neq g(x_2)$
Supposons que $x_1 \neq x_2$, alors $x_1 < x_2$ (ou $x_2 < x_1$, ce que revient au même), on en déduit que $g(x_1) < g(x_2)$ car g est strictement croissante, par conséquent $g(x_1) \neq g(x_2)$, g est injective.

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

g est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, par conséquent pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = g(x)$, g est surjective. Mais l'unicité du « x » fait que g est bijective donc il était inutile de montrer l'injectivité de g.

$$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^2 + x^3$$

On va étudier (sommairement) cette fonction et dresser son tableau de variation.
h est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. $h'(x) = 2x + 3x^2 = x(2 + 3x)$

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$$

Le « x^3 » l'emporte sur le « x^2 ».

$$h(0) = 0 \ \text{ et } \ h\left(-\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{4}{9} - \frac{8}{27} = \frac{4}{27}$$

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{4}{27}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Les seules bijections de $E \subset \mathbb{R}$ sur $F \subset \mathbb{R}$ sont les fonctions strictement monotones dont l'image de E est F.
h n'est pas une bijection.
Comme $h(-1) = 0 = h(0)$, h n'est pas injective.
Pour tout $y \in \mathbb{R}$ il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = h(x)$, et bien il n'y a pas unicité sinon h serait bijective.
Pour tout $y \in \left[0, \frac{4}{27}\right[$ il existe trois valeurs x tel que $y = h(x)$, pour $y = \frac{4}{27}$, il y en a deux pour les autres y n'a qu'un antécédent.

$$k: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x + x^4$$

On va étudier cette fonction, k est dérivable et $k'(x) = 1 + 4x^3$

$$k'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + 4x^3 = 0 \Leftrightarrow x^3 = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \left(-\frac{1}{2^2}\right)^{\frac{1}{3}} = -\frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}$$

$$k\left(-\frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}\right) = \left(-\frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}\right)\left(1 + \left(-\frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}\right)^3\right) = \left(-\frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \left(-\frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}\right) \times \frac{3}{4} = -\frac{3}{2^{\frac{8}{3}}}$$

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$$

Le « x^4 » l'emporte sur le « x ».

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2^{\frac{8}{3}}}$		$+\infty$
$k'(x)$		$-$	0	$+$	
$k(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{3}{2^{\frac{8}{3}}}$	$\nearrow$	$+\infty$

Pour tout $y > -\frac{3}{2^{\frac{8}{3}}}$, y admet deux antécédents, k est ni surjective ni injective.

Allez à : Exercice 2 :

Correction exercice 3 :

1.
Si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) < f(x_2)$ donc $f(x_1) \neq f(x_2)$
Si $x_1 > x_2$ alors $f(x_1) > f(x_2)$ donc $f(x_1) \neq f(x_2)$
Donc f est injective.
2. $K = f(I)$

Allez à : Exercice 3 :

Correction exercice 4 :

1.
$$f(1,2) = 1 \times 2 = 2 \times 1 = f(2,1)$$
Donc f n'est pas injective.
2. $f(1,p) = 1 \times p = p$
Donc pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $(n,m) = (1,p)$ tel que $p = f(n,m)$
f est surjective.
3.
$$g(n_1) = g(n_2) \Rightarrow (n_1, (n_1+1)^2) = (n_2, (n_2+1)^2) \Rightarrow \begin{cases} n_1 = n_2 \\ (n_1+1)^2 = (n_2+1)^2 \end{cases} \Rightarrow n_1 = n_2$$
Donc g est injective.
4. On va montrer que $(1,1)$ n'admet pas d'antécédent. Supposons que
$$(1,1) = (n, (n+1)^2)$$
Alors
$$\begin{cases} 1 = n \\ 1 = (n+1)^2 \end{cases}$$
Ce qui équivaut à
$$\begin{cases} 1 = n \\ 1 = 2^2 \end{cases}$$
Ce qui est impossible donc $(1,1)$ n'admet pas d'antécédent, g n'est pas surjective.

Allez à : Exercice 4 :

Correction exercice 5 :

$$f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow 2n_1 = 2n_2 \Rightarrow n_1 = n_2$$
f est injective.
1 n'a pas d'antécédent car il n'existe pas d'entier naturel n tel que $1 = 2n$, f n'est pas surjective.
$g(0) = E\left(\frac{0}{2}\right) = E(0) = 0$ et $g(1) = E\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, donc $g(0) = g(1)$ ce qui entraine que g n'est pas injective.
Pour tout $y = n \in \mathbb{N}$ (dans l'ensemble d'arrivé) il existe $x = 2n \in \mathbb{N}$ (dans l'ensemble de départ) tel que :
$$g(x) = E\left(\frac{x}{2}\right) = E\left(\frac{2n}{2}\right) = E(n) = n = y$$
g est surjective.
Si n est pair, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p$
$$f \circ g(n) = f\big(g(n)\big) = f\big(g(2p)\big) = f\left(E\left(\frac{2p}{2}\right)\right) = f\big(E(p)\big) = f(p) = 2p = n$$
Si n est impaire, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p+1$
$$f \circ g(n) = f\big(g(n)\big) = f\big(g(2p+1)\big) = f\left(E\left(\frac{2p+1}{2}\right)\right) = f\left(E\left(p + \frac{1}{2}\right)\right) = f(p) = 2p = n-1$$

$$f \circ g(n) = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est pair} \\ n-1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Que n soit paire ou impaire

$$g \circ f(n) = g\big(f(n)\big) = g(2n) = E\left(\frac{2n}{2}\right) = E(n) = n$$

$$g \circ f = id$$

Remarque :

Comme on le voit sur cet exemple, il ne suffit pas que $g \circ f = id$ pour que g soit la bijection réciproque de f. La définition de la bijection réciproque d'une fonction $f_1: E \to E$ est :

« S'il existe une fonction $f_2: E \to E$ telle que $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1 = id_E$ alors $f_2 = f_1^{-1}$ » on a alors : f_1 et f_2 sont deux fonctions bijectives.

Allez à : Exercice 5 :

Correction exercice 6 :

$f(E) \subset E$ donc $f\big(f(E)\big) \subset f(E) \subset E$, or $f\big(f(E)\big) = E$ donc $E \subset f(E) \subset E$, par conséquent $E = f(E)$ ce qui signifie que f est surjective.

Allez à : Exercice 6 :

Correction exercice 7 :

1. Supposons que g existe, $f \circ g = Id_{\mathbb{N}} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, f\big(g(n)\big) = n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \big(g(n)\big)^2 = n$

   Si n n'est pas un carré cela ne marche pas, par exemple si $n = 2$, $\big(g(2)\big)^2 = 2$ donc $g(2) = \pm\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$

   Il n'existe pas de fonction $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que :$f \circ g = Id_{\mathbb{N}}$.
2. Supposons que h existe, $h \circ f = Id_{\mathbb{N}} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, h\big(f(n)\big) = n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, h(n^2) = n$

   Les valeurs $h(p)$ prennent les valeurs qu'elles veulent sauf lorsque p est un carré auquel cas $h(p) = \sqrt{p}$, donnons une fonction h qui répond à la question :

   Si $p \neq n^2$ alors $h(p) = 0$ et si $p = n^2$ alors $h(p) = \sqrt{p} = n$.

Allez à : Exercice 7 :

Correction exercice 8 :

1. Si g existe alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f\big(g(n)\big) = n \Leftrightarrow 2g(n) = n$, si n est impair $g(n) \notin \mathbb{Z}$ donc il n'existe pas de fonction $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telle que $f \circ g = Id_{\mathbb{Z}}$.

2. Si h existe alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $h\big(f(n)\big) = n \Leftrightarrow h(2n) = n$

   Soit h la fonction définie, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, par $h(2p) = p$ et $h(2p+1) = 0$ convient.

Allez à : Exercice 8 :

Correction exercice 9 :

On pose $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ et $F = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$, et bien sur tous les e_j sont distincts ainsi que tous les f_i.

On rappelle que le fait que f soit une application entraine que $\{f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)\} \subset \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$

On suppose que f est injective, on va montrer que f est surjective.

On va montrer la contraposée, c'est-à-dire que l'on va montrer que si f n'est pas surjective alors f n'est pas injective.

Soit $f_i \in F$ et on suppose qu'il n'existe pas de $e_j \in E$ tel que $f_i = f(e_j)$ (f n'est pas surjective)

Donc $\{f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)\} \subset \{f_1, \dots, f_{i-1}, f_{i+1}, \dots, f_n\}$, il y a n éléments dans le premier ensemble et $n-1$ dans le second, donc il existe j_1 et j_2, avec $j_1 \neq j_2$ dans $\{1,2, \dots, n\}$ tels que $f\big(e_{j_1}\big) = f\big(e_{j_2}\big)$, or $e_{j_1} \neq e_{j_2}$ donc f n'est pas injective.

On suppose que f est surjective et on va montrer que f est injective.
On va montrer la contraposée, c'est-à-dire que l'on va montrer que si f n'est pas injective alors f n'est pas surjective.
Si $f(e_i) = f(e_j) = u$ avec $e_i \neq e_j$ alors
$\{f(e_1), \dots, f(e_{i-1}), u, f(e_{i+1}), \dots, f(e_{j-1}), u, f(e_{j+1}) \dots, f(e_n)\} \subset \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$, le premier ensemble a $n-1$ éléments et le second n donc il existe un f_j qui n'a pas d'antécédent, cela montre que f n'est pas surjective.
On a montré que $(i) \Leftrightarrow (ii)$, par définition $(iii) \Rightarrow (i)$ et $(iii) \Rightarrow (ii)$. Si on a (i) alors on a (ii) et $(i)\ et\ (ii)$ entraine (iii) de même si on a (ii) alors on a (i) et $(i)\ et\ (ii)$ entraine (iii). Ce qui achève de montrer les trois équivalences.

Allez à : Exercice 9 :

Correction exercice 10 :

1. u et v sont surjectives donc $u(\mathbb{N}) = \mathbb{Z}$ et $v(\mathbb{Z}) = \mathbb{N}$ par conséquent
$$u \circ v \circ u(\mathbb{N}) = u\Big(v\big(u(\mathbb{N})\big)\Big) = u\big(v(\mathbb{Z})\big) = u(\mathbb{N}) = \mathbb{Z}$$
Cela montre que $u \circ v \circ u$ est surjective.
$$u \circ v \circ u(x_1) = u \circ v \circ u(x_2) \Leftrightarrow u\Big(v\big(u(x_1)\big)\Big) = u\Big(v\big(u(x_2)\big)\Big) \Leftrightarrow v\big(u(x_1)\big) = v\big(u(x_2)\big)$$
Car u est injective
$$u \circ v \circ u(x_1) = u \circ v \circ u(x_2) \Leftrightarrow v\big(u(x_1)\big) = v\big(u(x_2)\big) \Leftrightarrow u(x_1) = u(x_2)$$
Car v est injective
$$u \circ v \circ u(x_1) = u \circ v \circ u(x_2) \Leftrightarrow u(x_1) = u(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$$
Car u est injective
Finalement $u \circ v \circ u$ est injective et donc bijective (puisqu'elle est surjective).
2. 7 n'admet pas d'antécédent donc f n'est pas surjective.
$$f(a,b,c) = f(a',b',c') \Leftrightarrow 2^a 3^b 5^c = 2^{a'} 3^{b'} 5^{c'}$$
L'unicité de la décomposition des entiers en produit de facteur premier entraine que $a = a'$, $b = b'$ et $c = c'$, autrement dit f est injective.
Donc f est injective et pas surjective.
3. $\varphi(n) = 0 \quad et\ \varphi(2n) = 0$
Donc φ n'est pas injective.
$$\varphi(\mathbb{Z}) = \{0,1, \dots, n-1\} \subsetneq \mathbb{N}$$
Donc φ n'est pas surjective.
4. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{Z}$ on cherche s'il existe un unique couple $(u,v) \in \mathbb{Z}$ tel que

Premier cas $a \neq 0$

$$(x,y)=f(a,b)\Leftrightarrow(x,y)=(au+bv+1,cu+dv-1)\Leftrightarrow\begin{cases}x=au+bv+1\\y=cu+dv-1\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2\end{matrix}\begin{cases}x-1=au+bv\\y+1=cu+dv\end{cases}\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\cL_1-aL_2\end{matrix}\begin{cases}x-1=au+bv\\c(x-1)-a(y+1)=cbv-adv\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=au+bv\\c(x-1)-a(y+1)=(cb-ad)v\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=au+bv\\c(x-1)-a(y+1)=-v\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=au+b\big(-c(x-1)+a(y+1)\big)\\v=-c(x-1)+a(y+1)\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}au=-b\big(-c(x-1)+a(y+1)\big)+(x-1)\\v=-c(x-1)+a(y+1)\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}au=bc(x-1)-ab(y+1)+(x-1)\\v=-c(x-1)+a(y+1)\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}au=(bc+1)(x-1)-ab(y+1)\\v=-c(x-1)+a(y+1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}au=ad(x-1)-ab(y+1)\\v=-c(x-1)+a(y+1)\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}u=d(x-1)-b(y+1)\\v=-c(x-1)+a(y+1)\end{cases}$$

Si $a=0$, alors $bc=-1$, en particulier $b\neq 0$ et $\frac{1}{b}=-c$

$$(x,y)=f(0,b)\Leftrightarrow(x,y)=(bv+1,cu+dv-1)\Leftrightarrow\begin{cases}x=bv+1\\y=cu+dv-1\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}v=\dfrac{x-1}{b}\\y=cu+dv-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}v=-c(x-1)\\y=cu-dc(x-1)-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}v=-c(x-1)\\y=cu-dc(x-1)-1\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}v=-c(x-1)\\cu=dc(x-1)+1+y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}v=-c(x-1)\\u=d(x-1)+\dfrac{1+y}{c}\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}v=-c(x-1)\\u=d(x-1)-b(1+y)\end{cases}$$

Ce sont les mêmes formules que dans le cas où $a\neq 0$

Donc pour tout $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$ il existe un unique couple

$$(u,v)=\big(d(x-1)-b(y+1),-c(x-1)+a(y+1)\big)\in\mathbb{Z}^2$$

tel que $(x,y)=f(u,v)$, f est bijective et

$$f^{-1}(x,y)=\big(d(x-1)-b(y+1),-c(x-1)+a(y+1)\big)$$

Allez à : Exercice 10 :

Correction exercice 11 :

1.

$$q_1\geq 2\Rightarrow 0<\frac{1}{q_1}\leq\frac{1}{2}\quad(1)$$
$$q_2\geq 2\Rightarrow 0<\frac{1}{q_2}\leq\frac{1}{2}\Rightarrow-\frac{1}{2}\leq-\frac{1}{q_2}<0\quad(2)$$

En additionnant (1) et (2)

$$-\frac{1}{2}<\frac{1}{q_1}-\frac{1}{q_2}<\frac{1}{2}$$

2.

a. Pour tout $(p_1,q_1)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ et $(p_2,q_2)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$

$$f(p_1,q_1)=f(p_2,q_2)\Rightarrow p_1+\frac{1}{q_1}=p_2+\frac{1}{q_2}\Rightarrow\frac{1}{q_1}-\frac{1}{q_2}=p_2-p_1$$

D'après la première question cela montre que $p_2-p_1\in\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$ or $p_2-p_1\in\mathbb{Z}$ donc $p_2-p_1=0$, autrement dit $p_1=p_2$, puis en reportant dans

$$p_1 + \frac{1}{q_1} = p_2 + \frac{1}{q_2}$$

Cela montre que $\frac{1}{q_1} = \frac{1}{q_2}$ et que $q_1 = q_2$

Finalement

$$(p_1, q_1) = (p_2, q_2)$$

Ce qui montre que f est injective.

b. Regardons si $1 \in \mathbb{Q}$ admet un antécédent, on suppose qu'il existe, on l'appelle (p, q)

$$p + \frac{1}{q} = 1$$

Ce qui équivaut à

$$\frac{1}{q} = 1 - p$$

Mais $\frac{1}{q} \notin \mathbb{Z}$ et $1 - p \in \mathbb{Z}$, ce qui est impossible. Par conséquent f n'est pas surjective.

Allez à : Exercice 11 :

Correction exercice 12 :

1. Première méthode : raisonnons par récurrence
   On pose (H_n) il y a $n(n-1)$ applications injectives de I_2 dans I_n.
   Regardons si (H_2) est vraie.
   Il y a 4 applications de I_2 dans I_n.
   $$f_1(1) = 1 \text{ et } f_1(2) = 1$$
   $$f_2(1) = 1 \text{ et } f_2(2) = 2$$
   $$f_3(1) = 2 \text{ et } f_3(2) = 1$$
   $$f_4(1) = 2 \text{ et } f_4(2) = 2$$
   Seules f_2 et f_3 sont injectives. Il y a $2 = 2(2-1)$ applications injectives de I_2 dans I_2.
   Montrons que $(H_n) \Rightarrow (H_{n+1})$
   Il y a $n(n-1)$ applications injectives de $\{0,1\}$ dans $\{0,1, \dots, n\}$.
   Supposons que $f(1) = n + 1$ alors $f(2) \in \{1, \dots, n\}$ (pour que $f(1) \neq f(2)$), cela fait n applications injectives de plus.
   Supposons que $f(2) = n + 1$ alors $f(1) \in \{1, \dots, n\}$ (pour que $f(1) \neq f(2)$), cela fait n applications injectives de plus.
   Au total, il y a $n(n-1) + n + n = n^2 - n + n + n = n^2 + n = n(n+1)$
   L'hypothèse est vérifiée.
   Conclusion pour tout $n \geq 2$, il y a $n(n-1)$ applications injectives de I_2 dans I_n.
   Deuxième méthode :
   Si $f(1) = k \in \{0,1, \dots, n\}$ alors $f(2) \in \{1, \dots, k-1, k+1, \dots, n\}$.
   Cela fait n choix possibles pour $f(1)$ et $n-1$ pour $f(2)$, soit $n(n-1)$ choix possibles pour $\big(f(1), f(2)\big)$ de façon à ce que $f(1) \neq f(2)$ (autrement dit pour que f soit injective).
2. $f: I_m \to I_n$
   f injective équivaut à $f(1) = k_1; f(2) = k_2; \dots ; f(m) = k_m$, avec $k_1, k_2, \dots, k_m \in \{1,2, \dots, n\}$ tous distincts par conséquent $m \leq n$.
   Remarque :
   Cela ne veut pas dire que toutes les applications de $\{1,2, \dots, m\}$ dans $\{1,2, \dots, n\}$ sont injectives !
   Supposons que f est surjective.
   Pour tout $k_1, k_2, \dots, k_n \in \{1,2, \dots, n\}$ (les k_i tous distincts) il existe $l_1, l_2, \dots, l_n \in \{1,2, \dots, m\}$ tels que $k_i = f(l_i)$ par définition d'une application tous les l_i sont distincts (sinon un élément aurait plusieurs images), par conséquent $n \leq m$.

Pour que f soit bijective il faut (et il suffit) que f soit injective et sujective, par conséquent il faut que $m \leq n$ et que $n \leq m$, autrement dit il faut que $m = n$.

Remarque :

Cela ne veut pas dire que toutes les applications de $\{1,2, \dots, n\}$ dans $\{1,2, \dots, n\}$ sont bijectives.

Allez à : Exercice 12 :

Correction exercice 13 :

1. $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) \Rightarrow g\big(f(x_1)\big) = g\big(f(x_2)\big) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

   Car g est injective

   $$g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

   Car f est injective.

   Donc $g \circ f$ est injective.

2. Première méthode :

   Pour tout $z \in G$ il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$ car g est surjective.

   Comme pour tout $y \in F$ il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ car f est surjective. On en déduit que pour tout $z \in G$ il existe $x \in E$ tel que $z = g\big(f(x)\big) = g \circ f(x)$ autrement dit $g \circ f$ est surjective.

Remarque :

(a) D'habitude on appelle y un élément de l'image G mais ici ce pose un petit problème de notation parce que l'on va appeler x l'élément de F et on ne saura pas trop comment appeler l'élément de E, c'est pour cela qu'il est plus malin de l'appeler z.

(b) Si on commence par écrire « pour tout $y \in F$ il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ car f est surjective » puis « pour tout $z \in G$ il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$ car g est surjective » donc « pour tout $z \in G$ il existe $x \in E$ tel que $z = g\big(f(x)\big) = g \circ f(x)$ » cela ne va pas, je vous laisse réfléchir pourquoi.

   Deuxième méthode :

   On rappelle que $\varphi: U \to V$ est surjective si et seulement si $\varphi(U) = V$

   Donc $f(E) = F$ et $g(F) = G$, par conséquent $g \circ f(E) = g\big(f(E)\big) = g(F) = G$ et on en déduit que $g \circ f$ est surjective.

3. Si g et f sont bijectives alors elles sont injectives et $g \circ f$ est injective et si g et f sont bijectives alors elles sont surjectives et $g \circ f$ est surjective, on en déduit que $g \circ f$ est bijective.

4. $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g\big(f(x_1)\big) = g\big(f(x_2)\big) \Rightarrow g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

   Car $g \circ f$ est injective, par conséquent f est injective.

5. Première méthode :

   Pour tout $z \in G$, il existe $x \in E$ tel que $z = g \circ f(x) = g\big(f(x)\big)$, donc il existe $y = f(x)$ tel que $z = g(y)$ ce qui signifie que g est surjective.

   Deuxième méthode :

   Comme $g \circ f$ est surjective, $g \circ f(E) = G \Leftrightarrow g\big(f(E)\big) = G$ or $f(E) \subset F$ donc

   $$g\big(f(E)\big) \subset g(F)$$

   Comme $g(F) \subset G$, cela donne

   $$G = g\big(f(E)\big) \subset g(F) \subset G$$

   D'où

   $$g\big(f(E)\big) = g(F) = G \Rightarrow g(F) = G$$

   Ce qui montre que g est surjective.

6.

   a. $g \circ f = Id_E$ est bijective (l'identité est bijective)

   $g \circ f$ est injective, d'après 4°), f est injective.

   $g \circ f$ est surjective, d'après 5°), g est surjective.

Remarque :
$g \circ f = Id_E$ n'entraine pas que $g = f^{-1}$ et que donc f et g sont bijectives.

b. $f \circ g = Id_F$ est bijective (l'identité est bijective)
$f \circ g$ est injective, d'après 4°), g est injective.
$f \circ g$ est surjective, d'après 5°), f est surjective.

c. $f \circ f = Id_E$ est bijective
$f \circ f$ est injective, d'après 4°), f est injective.
$f \circ f$ est surjective, d'après 5°), f est surjective.
Par conséquent f est bijective et $f^{-1} = f$.

Allez à : Exercice 13 :

Correction exercice 14 :

1. Pour tout $y \in Y$ il existe $x = s(y) \in X$ tel que $y = Id_Y(y) = f\big(s(y)\big) = f(x)$, f est surjective.
2. $s(y_1) = s(y_2) \Rightarrow f\big(s(y_1)\big) = f\big(s(y_2)\big) \Rightarrow y_1 = y_2$
   s est injective.
3. $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow r\big(f(x_1)\big) = r\big(f(x_2)\big) \Rightarrow Id_X(x_1) = Id_X(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
   f est injective.
4. Pour tout $x \in X$, pose $y = f(x)$.
   Comme $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$ à chaque $y \in Y$ telle que $y = f(x)$ on associe bien une unique valeur x, on définit alors $r: f(X) \to X$ par $r(y) = x$. Pour les $y \in Y$ qui ne sont pas dans l'image de X par f, autrement dit qui ne sont pas de la forme $y = f(x)$, on leur attribue n'importe quelle valeur dans X, mettons x_0 pour fixé les idées (d'ailleurs, on n'est pas obligé de leur attribuer à tous la même valeur).
   Pour tout $x \in X$.
   $$x = r(y) = r\big(f(x)\big) \Leftrightarrow Id_X = r \circ f$$
   r est bien une rétraction de f.

Remarque :
Si $y \notin f(X)$, $r(y) = x_0$ ne sert à rien pour montrer que r est une rétraction.

5. Pour tout $x \in X$, il existe $y = f(x)$ tel que :
   $$x = Id_X(x) = r\big(f(x)\big) = r(y)$$
   Cela montre que r est surjective.

Remarque :
Les rôles habituels de x et y ont été inversés pour respecter les notations de l'énoncé.

6.
   Si f admet une section alors f est surjective d'après 1°).
   Si f admet une rétraction alors f est injective d'après 3°).
   Par conséquent f est bijective, on note $f^{-1}: Y \to X$ sa bijection réciproque.
   Comme $Id_X = r \circ f$, en composant par f^{-1} à droite :
   $$Id_X \circ f^{-1} = (r \circ f) \circ f^{-1} \Leftrightarrow f^{-1} = r \circ (f \circ f^{-1}) = r$$
   Comme $Id_Y = f \circ s$, en composant par f^{-1} à gauche :
   $$f^{-1} \circ Id_Y = f^{-1} \circ (f \circ s) \Leftrightarrow f^{-1} = (f^{-1} \circ f) \circ s = s$$
   D'où $r = s = f^{-1}$.

Allez à : Exercice 14 :

Correction exercice 15 :

1. $f^{-1}(\{2\}) = \{3,4\}; f^{-1}(\{1,2\}) = \{2,3,4\}\,; f^{-1}(\{3\}) = \emptyset$
2.

$$f^{-1}(\{1\}) = \{-1,1\}$$
$$f^{-1}([1,2]) = [-\sqrt{2},-1] \cup [1,\sqrt{2}]$$

Allez à : Exercice 15 :

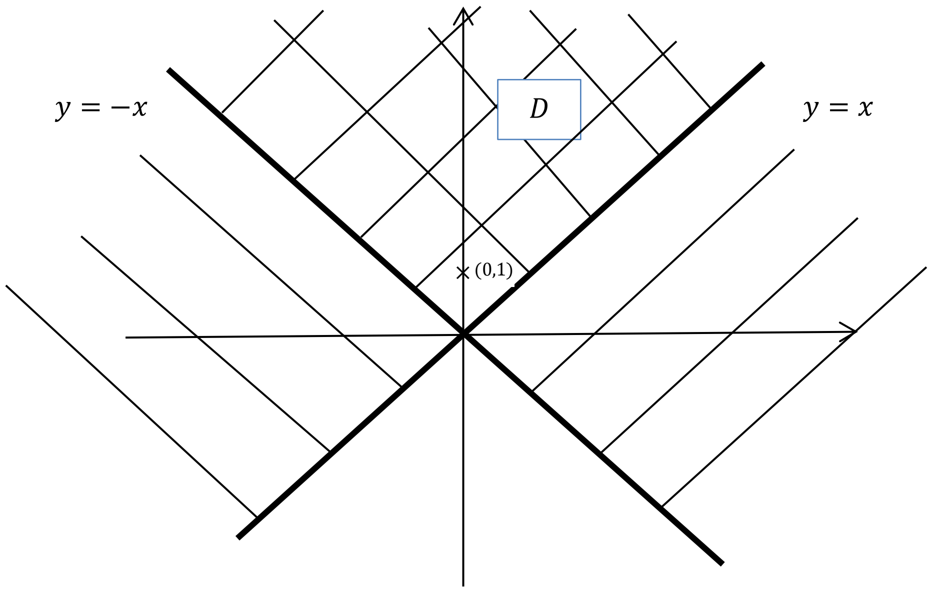
Correction exercice 16 :

1. $[0,1] \times [0,1] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \le x \le 1 \text{ et } 0 \le y \le 1\}$
   Donc
$$f([0,1] \times [0,1]) = \{x \in \mathbb{R}, 0 \le x \le 1\} = [0,1]$$
$$f^{-1}([-1,1]) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) \in [-1,1]\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \in [-1,1]\} = [-1,1] \times \mathbb{R}$$
2.
$$f(\mathbb{N}) = \{y \in [-1,1], y = \cos(\pi n), n \in \mathbb{N}\} = \{y \in [-1,1], y = (-1)^{\mathrm{n}}, n \in \mathbb{N}\} = \{-1,1\}$$
$$f(2\mathbb{N}) = \{y \in [-1,1], y = \cos(2\pi n), n \in \mathbb{N}\} = \{y \in [-1,1], y = 1, n \in \mathbb{N}\} = \{1\}$$
$$f^{-1}(\{\pm 1\}) = \{x \in \mathbb{R}, \cos(\pi x) = \pm 1\}$$
   Or $\cos(x) = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi$ et $\cos(x) = -1 \Leftrightarrow x = (2k+1)\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$
$$f^{-1}(\{\pm 1\}) = \{x \in \mathbb{R}, x = 2k\pi, x = (2k+1)\pi, \mathrm{k} \in \mathbb{Z}\} = \{n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$$

Allez à : Exercice 16 :

Correction exercice 17 :

1. Le point $(0,1)$ vérifie $x \le y$ donc $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \le y\}$ est le demi-plan supérieur droit. De même $(0,1)$ vérifie $-y \le x$ donc $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, -y \le x\}$ est le demi-plan supérieur droit, D est l'intersection de ces deux demi-plan, D est le quart de plan supérieur du schéma ci-dessous.



2. a.
$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array}\begin{cases} x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \\ x_1 - y_1 = x_2 - y_2 \end{cases}$$
   En additionnant L_1 et L_2 on trouve que $2x_1 = 2x_2$, donc $x_1 = x_2$, puis en remplaçant dans L_1, on trouve que $y_1 = y_2$.
   b.
$$f(x_1,y_1) = f(x_2,y_2) \Rightarrow (x_1^2 + y_1^2, 2x_1y_1) = (x_2^2 + y_2^2, 2x_2y_2) \Rightarrow \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array}\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 \\ 2x_1y_1 = 2x_2y_2 \end{cases}$$
   $L_1 - L_2$ donne $x_1^2 + y_1^2 - 2x_1y_1 = x_2^2 + y_2^2 - 2x_2y_2$, ce qui entraine que $(x_1 - y_1)^2 = (x_2 - y_2)^2$, comme $x - y \le 0$ sur D, cela donne $-(x_1 - y_1) = -(x_2 - y_2)$ ou encore $x_1 - y_1 = x_2 - y_2$.

$L_1 + L_2$ donne $x_1^2 + y_1^2 + 2x_1y_1 = x_2^2 + y_2^2 + 2x_2y_2$, ce qui entraine que $(x_1 + y_1)^2 = (x_2 + y_2)^2$, comme $x + y \geq 0$ sur D, cela donne $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$.

D'après 2.a. cela donne que $x_1 = x_2$ et que $y_1 = y_2$, ce qui montre que f est injective.

3. $(-1, 1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ n'a pas d'antécédent dans D car $x^2 + y^2 > 0$.

Allez à : Exercice 17 :

RELATION BINAIRE

Exercice 1 :

Soit $E=\{1,2,3,4\}$ et $\mathcal{R}$ la relation binaire sur E dont le graphe est

$$\Gamma=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(3,4),(4,3),(4,4)\}$$

1. Vérifier que la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Faire la liste des classes d'équivalences distinctes et donner l'ensemble quotient $R/\mathcal{R}$.

Allez à : Correction exercice 1 :

Exercice 2 :

1. Montrer que la relation de congruence modulo n
$$a\equiv b\quad [n]\Leftrightarrow n \text{ divise } b-a$$
Est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.
2. En vous servant de la division euclidienne, montrer qu'il y a exactement n classes d'équivalentes distinctes.

Allez à : Correction exercice 2 :

Exercice 3 :

Sur $\mathbb{R}^2$, on considère la relation $\mathcal{R}$ définie par

$$(a,b)\mathcal{R}(c,d)\Leftrightarrow a^2+b^2=c^2+d^2$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Décrire la classe d'équivalence $\dot{(a,b)}$ du couple (a,b).
3. On désigne par $\mathbb{R}^2/\mathcal{R}$ l'ensemble quotient pour cette relation. Montrer que l'application
$$\mathbb{R}^2/\mathcal{R}\to[0,+\infty[$$
$$\dot{(a,b)}\longmapsto a^2+b^2$$
Est bien définie et que c'est une bijection.

Allez à : Correction exercice 3 :

Exercice 4 :

Soient E et F deux ensembles et $f:E\to F$ une application. On définit une relation $\mathcal{R}$ sur E en posant, pour tout $(x,x')\in E\times E$,

$$x\mathcal{R}x'\Leftrightarrow f(x)=f(x')$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Décrire la classe $\dot{x}$ de l'élément $x\in E$.
3. Pourquoi l'application
$$E/\mathcal{R}\to F$$
$$\dot{x}\mapsto f(x)$$

Est-elle bien définie ? Montrer qu'elle est injective. Que peut-on conclure sur l'ensemble quotient $E/\mathcal{R}$?

Allez à : Correction exercice 4 :

Exercice 5 :

Soit E un ensemble et soit A une partie de E. On définit dans $\mathcal{P}(E)$ la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ en posant, pour tout couple (X,Y) de parties de E :

$$X\mathcal{R}Y\Leftrightarrow A\cap X=A\cap Y$$

1. Expliciter les classes $\dot{\emptyset}$, $\dot{E}$, $\dot{A}$ et $\dot{C_E A}$.
2. Montrer que si $B=A\cap X$, alors B est l'unique représentant de $\dot{X}$ contenu dans A.
3. Expliciter une bijection entre $\mathcal{P}(E)/\mathcal{R}$ et $\mathcal{P}(A)$.

Remarque : ne pas hésiter, si nécessaire, à expliciter les classes pour un cas particulier, par exemple $E = \{1,2,3,4\}$ et $A = \{1,2\}$.

Allez à : Correction exercice 5 :

Exercice 6 :

Soit $\mathbb{P}^*$ l'ensemble des nombres premiers strictement supérieurs à 2. On considère la relation $\mathcal{R}$ entre deux éléments de $\mathbb{P}^*$ définie par :

$$p\mathcal{R}q \Leftrightarrow \frac{p+q}{2} \in \mathbb{P}^*$$

La relation est-elle réflexive, symétrique et transitive ?

Allez à : Correction exercice 6 :

Exercice 7 :

Soient E un ensemble fini non vide et x un élément fixé de E. Les relations $\sim$ définies ci-dessous sont-elles des relations d'équivalences sur $\mathcal{P}(E)$?

1. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), A \sim B \Leftrightarrow A = B$
2. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), A \sim B \Leftrightarrow A \subset B$
3. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), A \sim B \Leftrightarrow A \cap B \neq \emptyset$
4. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), A \sim B \Leftrightarrow (A \cap B = \emptyset \text{ } ou \text{ } A \cup B \neq \emptyset)$
5. Soit $x \in E, \forall A, B \in \mathcal{P}(E), A \sim B \Leftrightarrow x \in A \cup B$
6. Soit $x \in E, \forall A, B \in \mathcal{P}(E), A \sim B \Leftrightarrow \left(x \in A \cap B \text{ } ou \text{ } x \in \overline{A} \cap \overline{B}\right)$

Allez à : Correction exercice 7 :

Exercice 8 :

Dans $\mathbb{N}^*$, on définit une relation $\ll$ en posant

$$m \ll n \text{ s'il existe } k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } n = km$$

1. Montrer que $\ll$ est une relation d'ordre partiel sur $\mathbb{N}^*$.

   On considère dans la suite de l'exercice que l'ensemble $\mathbb{N}^*$ est ordonné par la relation $\ll$.
2. L'ensemble $\mathbb{N}^*$ possède-t-il un plus grand élément ? un plus petit élément ?
3. Soit $A = \{4,5,6,7,8,9,10\}$. L'ensemble A possède-t-il un plus grand élément ? Un plus petit élément ?

Allez à : Correction exercice 8 :

Exercice 9 :

Dans $\mathbb{N}^*$, on définit une relation $\ll$ en posant pour tout $(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$:

$$x \ll y \text{ s'il existe } n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } y = x^n$$

1. Montrer que $\ll$ est une relation d'ordre partiel sur $\mathbb{N}^*$.

On considère dans la suite de l'exercice que l'ensemble $\mathbb{N}^*$ est ordonné par la relation $\ll$.

2. Soit $A = \{2,4,16\}$. Déterminer le plus grand élément et le plus petit élément de A.

Allez à : Correction exercice 9 :

Exercice 10 :

Dans $\mathbb{R}^2$, on définit la relation $\ll$ en posant $(x, y) \ll (x', y') \Leftrightarrow x < x'$ ou $(x = x'$ et $y \leq y')$

1. Montrer que $\ll$ est une relation d'ordre. Est-ce une relation d'ordre total ?
2. Déterminer l'ensemble des majorants et des minorants du singleton $\{(a, b)\}$ et représenter les dans $\mathbb{R}^2$.
3. Soit $X = \{(a, b), (c, d)\}$. Déterminer Sup X et Inf X.

Allez à : Correction exercice 10 :

Exercice 11 :

Soient E un ensemble fini non vide et x un élément fixé de E. Les relations $\mathcal{R}$ définies ci-dessous sont-elles des relations d'ordre sur $\mathcal{P}(E)$?

1. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), A\mathcal{R}B \Leftrightarrow A = B$
2. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), A\mathcal{R}B \Leftrightarrow A \subset B$
3. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), A\mathcal{R}B \Leftrightarrow x \in A \cap \overline{B}$
4. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), A\mathcal{R}B \Leftrightarrow x \in A \cup \overline{B}$
5. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), A\mathcal{R}B \Leftrightarrow \left(x \in A = B \text{ } ou \text{ } x \in A \cap \overline{B}\right)$

Allez à : Correction exercice 11 :

Exercice 12 :

Les relations $\mathcal{R}$ définies ci-dessous sont-elles des relations d'ordre sur $\mathbb{R}$.

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x < y$
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \leq y$
3. $\forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow e^x \leq e^y$
4. $\forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow |x| \leq |y|$
5. $\forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{N}$
6. $\forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$

Allez à : Correction exercice 12 :

Exercice 13 :

Montrer que la relation binaire définie par :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x) \leq f(x)$$

Est une relation d'ordre.

Allez à : Correction exercice 13 :

Exercice 14 :

Les relations $\mathcal{R}$ défines ci-dessous sont-elles des relations d'équivalence sur $\mathbb{C}$?

1. $z\mathcal{R}z' \Leftrightarrow |z| = |z'|$
2. $z\mathcal{R}z' \Leftrightarrow \left|\frac{z}{z'}\right| = 1$
3. $z\mathcal{R}z' \Leftrightarrow e^z = e^{z'}$
4. $z\mathcal{R}z' \Leftrightarrow |z - z'| = 1$
5. $z\mathcal{R}z' \Leftrightarrow e^{|z-z'|} = 1$

Allez à : Correction exercice 14 :

Exercice 15 :

Soit $\mathcal{R}$, la relation définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de x pour tout réel x.
3. Déterminer l'ensemble quotient.

Allez à : Correction exercice 15 :

Exercice 16 :

Soit $\mathcal{E}$ la relation définie sur $]1,+\infty[$ par :

$$x\mathcal{E}y \Leftrightarrow \frac{x}{1+x^2} \geq \frac{y}{1+y^2}$$

Montrer que $\mathcal{E}$ est une relation d'ordre total.

Allez à : Correction exercice 16 :

Exercice 17 :

1. Soit $a \in \mathbb{C}^*$, déterminer en fonction de a l'ensemble des complexes tels que $z^4 = a^4$.

Soit $\mathcal{U}_n = \{z \in \mathbb{C}, z^n = 1\}$

On définit sur $\mathcal{U}_{12}$ la relation $z \sim z' \Leftrightarrow z^4 = z'^4$

2. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{U}_{12}$.
3. Décrire l'ensemble des classes d'équivalence.

Allez à : Correction exercice 17 :

Exercice 18 :

On définit sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la relation

$$(a,b) \preccurlyeq (c,d) \Leftrightarrow \begin{cases} a+b<c+d \\ \text{ou} \\ a+b=c+d \quad \text{et} \quad b \leq d \end{cases}$$

1. Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre.
2. On admettra qu'il s'agit d'une relation d'ordre totale. Classer par ordre croissant les dix premiers couples de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ muni de la relation d'ordre $\preccurlyeq$.

Allez à : Correction exercice 18 :

Exercice 19 :

Soient $\mathcal{R}$ une relation définie sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ par :

$$(a,b)\mathcal{R}(a',b') \Leftrightarrow ab' = a'b$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. soit $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, avec $p \wedge q = 1$, décrire la classe d'équivalence de (p,q).

Allez à : Correction exercice 19 :

Exercice 20 :

Soit $\ll$ la relation définie sur $\mathbb{N}^2$ par :

$$(a,b) \ll (a',b') \Leftrightarrow \begin{cases} a<a' \\ ou \\ a=a' \; et \; b \leq b' \end{cases}$$

Montrer que $\ll$ est une relation d'ordre total.

Allez à : Correction exercice 20 :

Exercice 21 :

Soit E un ensemble.

On pose $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

On définit dans l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E , la relation $\mathcal{R}$, en posant, pour tout couple (A,B) de parties de E :

$A\mathcal{R}B \Leftrightarrow A\Delta B$ est un ensemble fini ayant un nombre fini pair d'élément.

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans $\mathcal{P}(E)$.

Allez à : Correction exercice 21 :

CORRECTIONS

Correction exercice 1 :

1. D'après le graphe, on a :

$$1\mathcal{R}1;\ 1\mathcal{R}2;\ 2\mathcal{R}1;\ 2\mathcal{R}2;\ 3\mathcal{R}3;\ 3\mathcal{R}4;\ 4\mathcal{R}3 \text{ et } 4\mathcal{R}4$$

Pour tout $n \in \{1,2,3,4\}$ on a $n\mathcal{R}n$ donc la relation est réflexive. On a $1\mathcal{R}2$ et $2\mathcal{R}1$ d'une part et $3\mathcal{R}4$ et $4\mathcal{R}3$ ce qui montre que la relation est symétrique et évidemment elle est transitive, donc il s'agit d'une relation d'équivalence.

2. Il y a deux classes d'équivalence $E_1 = \{1,2\}$ et $E_2 = \{3,4\}$ par conséquent

$$R/\mathcal{R} = \{E_1, E_2\}$$

Allez à : Exercice 1 :

Correction exercice 2 :

1. n divise $a - a = 0$ car existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $0 = kn$, il suffit de prendre $k = 0$, par conséquent

$$a \equiv a\ \ [n]$$

$\equiv$ est réflexive.

Si $a \equiv b\ \ [n]$ alors n divise $b - a$, c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b - a = kn$, ce qui entraine que $a - b = (-k)n$, $-k \in \mathbb{Z}$ donc $a - b$ divise n, autrement dit $b \equiv a\ \ [n]$.

$\equiv$ est symétrique.

Si $\begin{cases} a \equiv b & [n] \\ b \equiv c & [n] \end{cases}$ alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ et $l \in \mathbb{Z}$ tel que $\begin{cases} b - a = kn \\ c - b = ln \end{cases}$, en faisant la somme de ces deux égalités $b - a + c - b = kn + ln \Leftrightarrow c - a = (k + l)n$, comme $k + l \in \mathbb{Z}$, n divise $c - a$, autrement dit $c \equiv a\ \ [n]$.

$\equiv$ est transitive.

Finalement $\equiv$ est une relation d'équivalence.

2. Soit $m \in \mathbb{Z}$, effectuons la division euclidienne de m par n. Il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \{0,1, \dots, n - 1\}$ tel que $m = qn + r$, donc $m - r = qn$ autrement dit $m \equiv r\ \ [n]$. Il y a exactement n classes d'équivalence $\{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{n - 1}\}$.

Allez à : Exercice 2 :

Correction exercice 3 :

1.

$$a^2 + b^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow (a, b)\mathcal{R}(a, b)$$

$\mathcal{R}$ est réflexive.

$$(a, b)\mathcal{R}(c, d) \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2 \Rightarrow c^2 + d^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow (c, d)\mathcal{R}(a, b)$$

$\mathcal{R}$ est symétrique.

$$\begin{cases} (a, b)\mathcal{R}(c, d) \\ (c, d)\mathcal{R}(e, f) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 + d^2 \\ c^2 + d^2 = e^2 + f^2 \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 = e^2 + f^2 \Rightarrow (a, b)\mathcal{R}(e, f)$$

$\mathcal{R}$ est transitive.

Finalement $\mathcal{R}$est une relation d'équivalence.

2.

$$(x, y) \in (\dot{a, b}) \Leftrightarrow (x, y)\mathcal{R}(a, b) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = a^2 + b^2$$

Si on pose $R^2 = a^2 + b^2$ alors $x^2 + y^2 = R^2$, donc la classe de (a, b) est le cercle de centre $(0,0)$ de rayon R. Si $(a, b) = (0,0)$ la classe de (a, b) est réduite à $(0,0)$ (c'est un cercle un peu spécial).

3. On appelle φ cette « application », en fait cela sera une application lorsque l'on aura montré que lorsque que l'on change de représentant la valeur de φ ne change pas, c'est ce que l'énoncé veut dire en demandant de montrer que φ est bien définie.

Précisons un peu : si on a $(\dot{a',b'}) = (\dot{a,b})$ ce qui équivaut à $(a',b')\mathcal{R}(a,b)$ (si ce n'est pas évident pour vous, réfléchissez un peu et vous verrez c'est évident) et si $\left((\dot{a',b'})\right) \neq \varphi((\dot{a,b})\ )$ on voit bien que cela pose un problème dans la définition de φ.

Si $(\dot{a',b'}) = (\dot{a,b})$ alors $a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2$ donc $\varphi\left((\dot{a',b'})\right) = a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2 = \varphi\left((\dot{a,b})\ \right)$, tout va bien φ est bien définie.

Remarque :

Si $\varphi\left((\dot{a,b})\right) = ab$ alors φ n'est pas une application.

Montrons que φ est une bijection.

Pout tout $y \in [0,+\infty[$ il faut montrer qu'il existe une unique classe $(\dot{a,b})$ tel que $y = \varphi\left((\dot{a,b})\ \right)$

$$y = \varphi\left((\dot{a,b})\ \right) \Leftrightarrow y = a^2 + b^2$$

Soit il est évident que tous les couples (a,b) qui vérifie $y = a^2 + b^2$ sont dans la même classe, soit on fait l'effort de le montrer, ce que nous allons faire.

Un couple solution est $(\sqrt{y},0)$ car $\left(\sqrt{y}\right)^2 + 0^2 = y$. Soit (a,b) un autre couple solution on a alors $y = a^2 + b^2$

Mais comme $\left(\sqrt{y}\right)^2 + 0^2 = a^2 + b^2$ on en déduit que $(\dot{\sqrt{y},0}) = (\dot{a,b})$, cela montre qu'il n'y a qu'une classe $(\dot{a,b})$ telle que $y = \varphi\left((\dot{a,b})\ \right)$, φ est bijective.

Allez à : Exercice 7 :

Correction exercice 4 :

1.

$$f(x) = f(x) \Rightarrow x\mathcal{R}x$$

$\mathcal{R}$ est réflexive.

$$x\mathcal{R}x' \Rightarrow f(x) = f(x') \Rightarrow f(x') = f(x) \Rightarrow x'\mathcal{R}x$$

$\mathcal{R}$ est symétrique.

$$\begin{cases} x\mathcal{R}x' \\ x'\mathcal{R}x'' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = f(x') \\ f(x') = f(x'') \end{cases} \Rightarrow f(x) = f(x'') \Rightarrow x\mathcal{R}x''$$

$\mathcal{R}$ est transitive.

Finalement $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2. Pour tout $y \in \dot{x}$, $y\mathcal{R}x$ et donc $f(y) = f(x)$ donc

$$\dot{x} = \{y \in E, f(y) = f(x)\}$$

3. Notons φ cette « application », c'est le même problème que dans l'exercice précédent, pour une classe on doit le même résultat quel que soit le représentant de la classe, si on a $\dot{x} = \dot{x'}$ a-t-on forcément $\varphi(\dot{x}) = \varphi(\dot{x'})$?

$\dot{x} = \dot{x'} \Leftrightarrow f(x') = f(x)$ donc $\varphi(\dot{x}) = f(x) = f(x') = \varphi(\dot{x'})$, tout va bien, φest bien définie, autrement dit φ est une application.

Montrons que φ est injective.

$$\varphi(\dot{x}) = \varphi\left(\dot{x'}\right) \Leftrightarrow f(x) = f(x') \Leftrightarrow \dot{x} = \dot{x'}$$

Donc φ est injective.

Allez à : Exercice 4 :

Correction exercice 5 :

Ici on ne demande pas de montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

1.

$$X \in \dot{\emptyset} \Leftrightarrow A \cap \emptyset = A \cap X \Leftrightarrow A \cap X = \emptyset \Leftrightarrow X \subset C_E A$$

$$\dot{\emptyset} = \{X \in \mathcal{P}(E), X \subset C_E A\}$$

$$X \in \dot{E} \Leftrightarrow A \cap E = A \cap X \Leftrightarrow A \cap X = A \Leftrightarrow A \subset X$$
$$\dot{E} = \{X \in \mathcal{P}(E), X \subset C_E A\}$$
$$X \in \dot{A} \Leftrightarrow A \cap A = A \cap X \Leftrightarrow A \cap X = A \Leftrightarrow X \subset A$$
$$\dot{A} = \{X \in \mathcal{P}(E), X \subset A\}$$
$$X \in \dot{C_E A} \Leftrightarrow A \cap C_E A = A \cap X \Leftrightarrow A \cap X = \emptyset \Leftrightarrow X \subset C_E A$$
$$\dot{C_E A} = \{X \in \mathcal{P}(E), X \subset C_E A\}$$

Remarque : $\dot{\emptyset} = \dot{C_E A}$

2. Montrons que $B = A \cap X \in \dot{X}$:
$$A \cap B = A \cap (A \cap X) = (A \cap A) \cap X = A \cap X$$
Donc $B \in \dot{X}$, il est clair que $B \subset A$, mais est-ce le seul ?
Soit $B' \in \dot{X}$ et $B' \subset A$, $A \cap X = A \cap B' = B'$ car $B' \subset A$ ce qui entraine que $B' = A \cap X$.
$B = A \cap X$ est le seul élément de la classe de X qui soit inclus dans A.
3. On rappelle que $\mathcal{P}(E)/\mathcal{R}$ est l'ensemble des classes pour la relation d'équivalence $\mathcal{R}$.
On pose $\varphi: \mathcal{P}(E)/\mathcal{R} \to \mathcal{P}(A)$ définie par $\varphi(\dot{X}) = A \cap X$.
Est-ce que φ est bien définie ? Si on prends $\dot{X}' = \dot{X}$ a-t-on $\varphi(\dot{X}) = \varphi(\dot{X}')$?
$$\dot{X}' = \dot{X} \Leftrightarrow A \cup X = A \cap X'$$
Donc
$$\varphi(\dot{X}') = A \cap X' = A \cup X = \varphi(\dot{X})$$
Tout va bien.
Pour tout $B \subset A$ on cherche s'il existe un unique $\dot{X} \in \mathcal{P}(E)/\mathcal{R}$ tel que $B = \varphi(\dot{X})$?
D'après la question 2. $B = A \cap X$ est le seul élément de la classe de X qui soit inclus dans A, c'est parfait c'est exactement ce que l'on voulait. φ est bijective.

Allez à : Exercice 5 :

Correction exercice 6 :

Pour tout $p \in \mathbb{P}^*$
$$\frac{p+p}{2} = p \in \mathbb{P}^* \Leftrightarrow p\mathcal{R}q$$
$\mathcal{R}$ est réflexive.
$$p\mathcal{R}q \Rightarrow \frac{p+q}{2} \in \mathbb{P}^* \Rightarrow \frac{q+p}{2} \in \mathbb{P}^* \Rightarrow q\mathcal{R}p$$
$\mathcal{R}$ est symétrique.
Cherchons un peu
$$\begin{cases} p\mathcal{R}q \\ q\mathcal{R}r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{p+q}{2} \in \mathbb{P}^* \\ \dfrac{q+r}{2} \in \mathbb{P}^* \end{cases}$$
Il faudrait pouvoir en déduire que $\frac{p+r}{2} \in \mathbb{P}^*$ et à ce moment là on doit se dire que cela n'a pas l'air évident et que donc, puisque l'énoncé demande « la relation est-elle transitive ? » et non pas « montrer que la relation est transitive » il se peut que la réponse soit « non », on va donc chercher un contre-exemple, pour cela on va faire un tableau.

$\frac{p+q}{2}$	3	5	7	11	13	17
3	3	4	5	7	8	10
5	4	5	6	8	9	11
7	5	6	7	9	10	12
11	7	8	9	11	12	14
13	8	9	10	12	13	15
17	10	11	12	14	15	17

On a coché en jaune les cases des couples (p,q) en relation.

On a $11\mathcal{R}7$ et $7\mathcal{R}5$ et pourtant 11 n'est pas en relation avec 5.

Remarque :

Pour trouver un contre-exemple il faut qu'il y ait au moins deux cases cochées en jaune autre que celle de la case $p\mathcal{R}p$, donc sur ce tableau l'exemple cité est le seul contre-exemple, pour en trouver d'autre il faudrait faire un tableau plus grand.

Allez à : Exercice 6 :

Correction exercice 7 :

1. $A=A \Leftrightarrow A\sim A$ donc $\sim$ est réflexive
   $A\sim B \Rightarrow A=B \Rightarrow B=A \Rightarrow B\sim A$ donc $\sim$ est symétrique.
   $\begin{cases} A\sim B \\ B\sim C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=B \\ B=C \end{cases} \Rightarrow A=C \Rightarrow A\sim C$ donc $\sim$ est transitive.
   Cette relation est une relation d'équivalence.

Allez à : Exercice 7 :

2. $A\subset A \Leftrightarrow A\sim A$ donc $\sim$ est réflexive.
   $\begin{cases} A\sim B \\ B\sim C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A\subset B \\ B\subset C \end{cases} \Rightarrow A\subset C \Rightarrow A\sim C$ donc $\sim$ est transitive.
   Mais si $A\subsetneq B$ alors $A\sim B$ mais $B\not\subset A$ donc on n'a pas $B\sim A$ donc la relation n'est pas symétrique.
   Cette relation n'est pas une relation d'équivalence.

Remarque : il était inutile de montrer que cette relation était réflexive et transitive.

Allez à : Exercice 7 :

3. Si $A\neq\emptyset$ alors $A\cap A\neq\emptyset$ donc cette relation n'est pas réflexive.
   Donc ce n'est pas une relation d'équivalence, on va tout de même regarder les deux autres propriétés.
   $A\sim B \Rightarrow A\cap B=\emptyset \Rightarrow B\cap A=\emptyset \Rightarrow B\sim A$ donc cette relation est symétrique.
   $$\begin{cases} A\sim B \\ B\sim C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A\cap B=\emptyset \\ B\cap C=\emptyset \end{cases}$$
   Cela n'entraine pas que $A\cap C=\emptyset$, prenons un exemple $A=\{1,2\}$, $B=\{3,4\}$ et $C=\{1,5\}$.
   Cette relation n'est pas transitive.

Allez à : Exercice 7 :

4. Il vaut mieux réfléchir un peu avant de se lancer, comment peuvent être deux ensembles A et B qui ne vérifient pas $A\cup B\neq\emptyset$? C'est clair il faut que ces deux ensembles soient tous les deux égal à l'ensemble vide, mais alors $A\cap B=\emptyset$. Il semble bien que pour tout ensemble A et B on ait $A\sim B$, démontrons cela.
   Soient A et B deux ensembles :
   Si $A=\emptyset$ alors $A\cap B=\emptyset$ et donc $A\sim B$.
   Si $A\neq\emptyset$ alors $A\cup B\neq\emptyset$ et donc $A\sim B$.
   La relation binaire $\sim$ est une relation d'équivalence, si vous n'êtes pas convaincu :
   $A\sim A$ donc $\sim$ est réflexive.
   Si $A\sim B$ alors $B\sim A$ ($B\sim A$ étant vraie pour tout B et pour tout A). Donc $\sim$ est symétrique.
   Si $A\sim B$ et si $B\sim C$ alors $A\sim C$ ($A\sim C$ étant vraie pour tout A et pour tout C). Donc $\sim$ est transitive.

Remarque :

Il n'y a qu'une seule classe d'équivalence.

Allez à : Exercice 7 :

5. Si $x \notin A$ alors $x \notin A \cup A$ et donc on n'a pas $A \sim A$, $\sim$ n'est pas réflexive.

   Par conséquent $\sim$ n'est pas une relation d'équivalence.

Allez à : Exercice 7 :

6. Soit $x \in E, \forall A, B \in \mathcal{P}(E), A \sim B \Leftrightarrow \left(x \in A \cap B \text{ } ou \text{ } x \in \overline{A} \cap \overline{B}\right)$

   $x \in A = A \cup A$ ou $x \in \overline{A} = \overline{A} \cap \overline{A}$ donc $A \sim A$, ce qui signifie que $\sim$ est réflexive.

   $A \sim B \Rightarrow \left(x \in A \cap B \text{ } ou \text{ } x \in \overline{A} \cap \overline{B}\right) \Rightarrow \left(x \in B \cap A \text{ } ou \text{ } x \in \overline{B} \cap \overline{A}\right) \Rightarrow B \sim A$, la relation $\sim$ est donc symétrique.

   $$\begin{cases} A \sim B \\ B \sim C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A \cap B \text{ } ou \text{ } x \in \overline{A} \cap \overline{B} \\ x \in B \cap C \text{ } ou \text{ } x \in \overline{B} \cap \overline{C} \end{cases} \Rightarrow x \in \left((A \cap B) \cup \left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)\right) \cap \left((B \cap C) \cup \left(\overline{B} \cap \overline{C}\right)\right)$$

   Or

   $$\begin{aligned} (A \cap B) \cup \left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) &= \left(A \cup \overline{A}\right) \cap \left(A \cup \overline{B}\right) \cap \left(B \cup \overline{A}\right) \cap \left(B \cup \overline{B}\right) = E \cap \left(A \cup \overline{B}\right) \cap \left(B \cup \overline{A}\right) \cap E \\ &= \left(A \cup \overline{B}\right) \cap \left(B \cup \overline{A}\right) \end{aligned}$$

   De même

   $$(B \cap C) \cup \left(\overline{B} \cap \overline{C}\right) = \left(B \cup \overline{C}\right) \cap \left(\overline{B} \cup C\right)$$

   Donc

   $$\begin{aligned} \left((A \cap B) \cup \left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)\right) \cap \left((B \cap C) \cup \left(\overline{B} \cap \overline{C}\right)\right) &= \left(\left(A \cup \overline{B}\right) \cap \left(B \cup \overline{A}\right)\right) \cap \left(\left(B \cup \overline{C}\right) \cap \left(\overline{B} \cup C\right)\right) \\ &= \left(A \cup \overline{B}\right) \cap \left(B \cup \overline{A}\right) \cap \left(B \cup \overline{C}\right) \cap \left(\overline{B} \cup C\right) \\ &= \left(\left(B \cup \overline{A}\right) \cap \left(B \cup \overline{C}\right)\right) \cap \left(\left(A \cup \overline{B}\right) \cap \left(\overline{B} \cup C\right)\right) = \left(B \cup \left(\overline{A} \cap \overline{C}\right)\right) \cap \left(\overline{B} \cup (A \cap C)\right) \\ &= \left(B \cap \overline{B}\right) \cup \left(B \cap (A \cap C)\right) \cup \left(\left(\overline{A} \cap \overline{C}\right) \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap \overline{C} \cap A \cap C\right) \\ &= \emptyset \cup \left(B \cap (A \cap C)\right) \cup \left(\left(\overline{A} \cap \overline{C}\right) \cap \overline{B}\right) \cup \left(\left(\overline{A} \cap A\right) \cap \left(\overline{C} \cap C\right)\right) \\ &= \left(B \cap (A \cap C)\right) \cup \left(\left(\overline{A} \cap \overline{C}\right) \cap \overline{B}\right) \cup (\emptyset \cap \emptyset) = (A \cap B \cap C) \cup \left(\left(\overline{A \cup C}\right) \cap \overline{B}\right) \cup \emptyset \\ &= (A \cap B \cap C) \cup \left(\overline{A \cup C \cup B}\right) \end{aligned}$$

   Or $A \cap B \cap C \subset A \cap C$ et $A \cup C \cup B \supset A \cup C \Rightarrow \overline{A \cup B \cup C} \subset \overline{A \cup C}$ donc

   $$(A \cap B \cap C) \cup \left(\overline{A \cup C \cup B}\right) \subset (A \cap C) \cup \left(\overline{A \cup C}\right) = (A \cap C) \cup \left(\overline{A} \cap \overline{C}\right)$$

   Par conséquence :

   $$x \in (A \cap C) \cup \left(\overline{A} \cap \overline{C}\right)$$

   Et alors

   $$A \sim C$$

   Ce qui montre que $\sim$ est transitive et finalement $\sim$ est une relation d'équivalence.

Allez à : Exercice 7 :

Correction exercice 8 :

1.

   Il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = kn$, il suffit de prendre $k = 1$, donc $n \ll n$.

   $\ll$ est réflexive.

   Si $\begin{cases} m \ll n \\ n \ll m \end{cases}$ alors il existe $k, l \in \mathbb{N}^*$ tels que $\begin{cases} n = km \\ m = k'n \end{cases}$, d'où $n = kk'n$, en simplifiant par $n \neq 0$, $1 = kk'$.

   k et k' sont deux entiers positifs, la seul solution est $k = k' = 1$, on en déduit que $m = n$.

   $\ll$ est antisymétrique.

Si $\begin{cases} l \ll m \\ m \ll n \end{cases}$ alors il existe $k, k' \in \mathbb{N}^*$ tels que $\begin{cases} m = kl \\ n = k'm \end{cases}$, d'où $n = k'kl$, comme $k'k \in \mathbb{N}^*$ on a $l \ll n$.
$\ll$ est transitive.
Finalement $\ll$ est une relation d'ordre partiel.
Remarque :
$\ll$ n'est pas une relation d'ordre totale car il y a des couples de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ qui ne sont pas en relation, par exemple on a ni $2 \ll 3$ ni $3 \ll 2$.

2. Supposons que $\mathbb{N}^*$ admette un plus grand élément noté N alors $2N = kN$ avec $k = 2 \in \mathbb{N}^*$ donc $N \ll 2N$ ce qui signifie que $2N$ est plus grand (au sens de $\ll$) que N ce qui est contradictoire puisque N est le plus grand, donc il n'y a pas de plus grand élément.

Remarque préliminaire : si $m \ll n$ alors $m \leq n$ puisque $n = km$ avec $k \geq 1$ donc $n \geq m$.
S'il y a un plus petit élément cela ne peut être que le plus petit élément de $\mathbb{N}^*$ au sens de $\leq$, c'est-à-dire 1. Est-ce que 1 est le plus petit élément au sens de $\ll$?
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $k = n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = k \times 1$ donc $1 \ll n$, c'est bon 1 est le plus petit élément de $\mathbb{N}^*$.
Remarque :
$\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, c'est-à-dire l'ensemble des entiers supérieur ou égal à 2 n'a pas de plus petit élément puisque 2 ne vérifie pas $2 \ll n \Leftrightarrow n = k \times 2$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Avec la remarque préliminaire du 2. le seul plus petit élément de A possible est 4 mais il n'existe pas de $k \in \mathbb{N}^*$ tel que : $5 = k \times 4$. Il n'y a pas de plus petit élément (On a pris 5 mais on aurait pu prendre 5,6,7,9 ou 10.
De même le seul plus grand élément possible serait 10 mais il n'existe pas de $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $10 = k \times 7$ (on a pris 7 mais on aurait pu prendre 4,6,7,8 ou 9.

Allez à : Exercice 8 :

Correction exercice 9 :

1. Pour tout $x \in \mathbb{N}^*$
Il existe $n = 1 \in \mathbb{N}^*$ tel que $x = x^1$ donc $x \ll x$.
$\ll$ est réflexive.
S'il existe $n, n' \in \mathbb{N}^*$ tels que $\begin{cases} y = x^n \\ x = y^{n'} \end{cases}$ alors $y = \left(y^{n'}\right)^n = y^{nn'}$ donc $nn' = 1$, comme n et n' sont des entiers positifs, la seule solution est $n = n' = 1$, par conséquent $y = x$.
$\ll$ est antisymétrique.
Si $\begin{cases} x \ll y \\ y \ll z \end{cases}$ il existe $n, n' \in \mathbb{N}^*$ tels que $\begin{cases} y = x^n \\ z = y^{n'} \end{cases}$ alors $z = (x^n)^{n'} = x^{nn'}$ comme $nn' \in \mathbb{N}^*$ on a $x \ll z$.
$\ll$ est une relation d'ordre partiel.

Remarque :
Ce n'est pas une relation d'ordre totale car il y a des couples (x, y) qui ne sont pas en relation, par exemple on a ni $2 \ll 3$ ni $3 \ll 2$.

2. Remarque : si $x \ll y$ alors $x \leq y$ car il existe $n \in \mathbb{N}^*$ $(n \geq 1)$ tel que $y = x^n = x \times \ldots \times x \geq x$ car $x \geq 1$.
Le seul plus petit élément possible est 2.
$$4 = 2^2 \Rightarrow 2 \ll 4$$
$$16 = 2^4 \Rightarrow 2 \ll 16$$
Donc 2 est le plus petit élément de $\{2,4,16\}$
Le seul plus grand élément est 16.
$$16 = 2^4 \Rightarrow 2 \ll 16$$
$$16 = 4^2 \Rightarrow 4 \ll 16$$

Donc 16 est le plus grand élément de $\{2,4,16\}$

Remarque :

$\{2,4,16\}$ est un ensemble totalement ordonné pour la relation d'ordre $\ll$, autrement dit $\ll$ est une relation d'ordre totale (sur cet ensemble).

Allez à : Exercice 9 :

Correction exercice 10 :

1. $(x = x \text{ et } y \leq y)$ donc $(x,y) \ll (x,y)$.

$\ll$ est réflexive.

$$\begin{cases}(x,y) \ll (x',y')\\(x',y') \ll (x,y)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x < x' \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leq y')\\x' < x \text{ ou } (x' = x \text{ et } y' \leq y)\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x < x'\\x' < x\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}x < x'\\x' = x \text{ et } y' \leq y\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}x = x' \text{ et } y \leq y'\\x' < x\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}x = x' \text{ et } y \leq y'\\x' = x \text{ et } y' \leq y\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x = x' \text{ et } y \leq y'\\x' = x \text{ et } y' \leq y\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x = x'\\y = y'\end{cases} \Rightarrow (x,y) = (x',y')$$

$\ll$ est antisymétrique.

$$\begin{cases}(x,y) \ll (x',y')\\(x',y') \ll (x'',y'')\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x < x' \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leq y')\\x' < x'' \text{ ou } (x' = x'' \text{ et } y' \leq y'')\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x < x'\\x' < x''\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}x < x'\\x' = x'' \text{ et } y' \leq y''\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}x = x' \text{ et } y \leq y'\\x' < x''\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}x = x' \text{ et } y \leq y'\\x' = x'' \text{ et } y' \leq y''\end{cases}$$

$$\Rightarrow (x < x'') \text{ ou } (x < x'' \; et \; y' < y'') \text{ ou } (x < x'' \; et \; y' < y'') \text{ ou } (x = x'' \; et \; y \leq y'')$$

$$\Rightarrow (x < x'') \text{ ou } (x = x'' \; et \; y \leq y'') \Rightarrow (x,y) \ll (x'',y'')$$

$\ll$ est transitive.

Finalement $\ll$ est une relation d'ordre (partiel).

Est-ce que cette relation est une relation d'ordre total ?

Considérons deux couples (x,y) et (x',y').

Il y a plusieurs cas :

Si $x < x'$ alors $(x,y) \ll (x',y')$

Si $x > x'$ alors $(x',y') \ll (x,y)$

Si $x = x'$ et $y < y'$ alors $(x,y) \ll (x',y')$

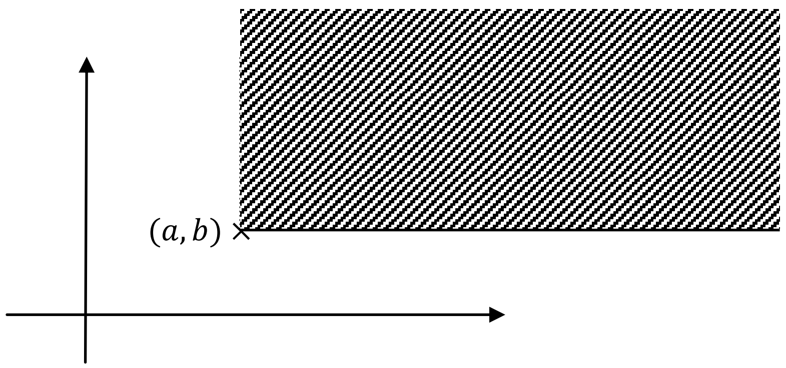
Si $x = x'$ et $y > y'$ alors $(x',y') \ll (x,y)$

Si $x = x'$ et $y = y'$ alors $(x,y) = (x',y')$ (on a $(x,y) \ll (x',y')$ et $(x',y') \ll (x,y)$)

Tous les couples sont comparables, $\ll$ est une relation d'ordre total.

2. On cherche tous les couples (x,y) tels que $(a,b) \ll (x,y)$, ce sont les couples qui vérifient :

$$\begin{cases}a < x\\a = x \text{ et } b \leq y\end{cases}$$



Il s'agit d'un quart de plan limité en bas par la demi-droite $x \geq a$ et $y = b$ (demi-droite comprise) et à gauche par la demi-droite $x = a$ et $y \geq b$ (demi-droite non comprise).

L'ensemble des couples (x,y) tel que $(x,y) \ll (a,b)$ est le complémentaire de ce quart de plan.

3. $X = \{(a,b),(c,d)\}$
   Si $a < c$ alors $\inf(X) = (a,b)$ et $\sup(X) = (c,d)$.
   Si $a > c$ alors $\inf(X) = (c,d)$ et $\sup(X) = (a,b)$.
   Si $a = c$ et $b < d$ alors $\inf(X) = (a,b)$ et $\sup(X) = (c,d)$.
   Si $a = c$ et $b > d$ alors $\inf(X) = (c,d)$ et $\sup(X) = (a,b)$.
   Si $a = c$ et $b = d$ alors $\inf(X) = \sup(X) = (a,b) = (c,d)$.

Allez à : Exercice 10 :

Correction exercice 11 :

1. $A = A \Rightarrow A\mathcal{R}A$ la relation est réflexive.
   $\begin{cases} A\mathcal{R}B \\ B\mathcal{R}A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = B \\ B = A \end{cases} \Rightarrow A = B$ la relation est antisymétrique.
   $\begin{cases} A\mathcal{R}B \\ B\mathcal{R}C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = B \\ B = C \end{cases} \Rightarrow A = C \Rightarrow A\mathcal{R}C$ la relation est transitive.
   Il s'agit bien d'une relation d'ordre.

Allez à : Exercice 11 :

2. $A \subset A \Rightarrow A\mathcal{R}A$ la relation est réflexive.
   $\begin{cases} A\mathcal{R}B \\ B\mathcal{R}A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A \subset B \\ B \subset A \end{cases} \Rightarrow A = B$, la relation est antisymétrique.
   $\begin{cases} A\mathcal{R}B \\ B\mathcal{R}C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A \subset B \\ B \subset C \end{cases} \Rightarrow A \subset C \Rightarrow A\mathcal{R}C$ la relation est transitive.
   Il s'agit bien d'une relation d'ordre.

Allez à : Exercice 11 :

3. $A \cap \overline{A} = \emptyset$ donc on n'a pas $x \in A \cap \overline{A}$, la relation n'est pas réflexive, et ce n'est pas une relation d'équivalence.
   Regardons tout de même les deux autres propriétés.
   $$\begin{cases} A\mathcal{R}B \\ B\mathcal{R}A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \cap \overline{B} \\ x \in B \cap \overline{A} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(A \cap \overline{B}\right) \cap \left(B \cap \overline{A}\right) = A \cap \overline{B} \cap B \cap \overline{A} = \left(A \cap \overline{A}\right) \cap \left(B \cap \overline{B}\right) = \emptyset \cap \emptyset = \emptyset$$
   On ne peut avoir $A\mathcal{R}B$ et $B\mathcal{R}A$ donc la relation n'est pas antisymétrique.
   $\begin{cases} A\mathcal{R}B \\ B\mathcal{R}C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A \cap \overline{B} \\ x \in B \cap \overline{C} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in \overline{C} \end{cases} \Rightarrow x \in A \cap \overline{C} \Rightarrow A\mathcal{R}C$, la relation est transitive.

Allez à : Exercice 11 :

4. $x \in E = A \cup \overline{A}$ donc $A\mathcal{R}A$, la relation est réflexive.
   $$\begin{cases} A\mathcal{R}B \\ B\mathcal{R}A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \cup \overline{B} \\ x \in B \cup \overline{A} \end{cases}$$
   On est mal parti pour en déduire que $A = B$, il faut trouver un contre exemple.
   Soient A contenant x et B contenant x, et tel que A ne soit pas inclus dans B et que B ne soit pas inclus dans A.
   $x \in A \subset A \cup \overline{B}$ donc $A\mathcal{R}B$, $x \in B \subset B \cup \overline{A}$ donc $B\mathcal{R}A$ et pourtant $A \neq B$. La relation n'est pas antisymétrique.
   Donc la relation n'est pas une relation d'ordre, regardons tout de même la transitivité.
   $$\begin{cases} A\mathcal{R}B \\ B\mathcal{R}C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A \cup \overline{B} \\ x \in B \cup \overline{C} \end{cases} \Rightarrow x \in \left(A \cup \overline{B}\right) \cap \left(B \cup \overline{C}\right) = (A \cap B) \cup \left(A \cap \overline{C}\right) \cup \left(\overline{B} \cap B\right) \cup \left(\overline{B} \cap \overline{C}\right)$$
   $$= (A \cap B) \cup \left(A \cap \overline{C}\right) \cup \emptyset \cup \left(\overline{B} \cap \overline{C}\right) = (A \cap B) \cup \left(A \cap \overline{C}\right) \cup \left(\overline{B} \cap \overline{C}\right)$$
   $$A \cap B \subset A$$
   $$A \cap \overline{C} \subset A$$
   $$\overline{B} \cap \overline{C} \subset \overline{C}$$
   Donc

$$(A \cap B) \cup (A \cap \overline{C}) \cup (\overline{B} \cap \overline{C}) \subset A \cup A \cup \overline{C} = A \cup \overline{C}$$

On en déduit que $x \in A \cup \overline{C}$, on a alors $A\mathcal{R}C$. La relation est transitive.

Allez à : Exercice 11 :

Correction exercice 12 :

1. $x < x$ est faux donc la relation n'est pas réflexive, ce n'est pas une relation d'équivalence.

Allez à : Exercice 12 :

2. $x \le x \Leftrightarrow x\mathcal{R}x$, la relation est réflexive.

$\begin{cases} x\mathcal{R}y \\ y\mathcal{R}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \le y \\ y \le x \end{cases} \Rightarrow x = y$, la relation est antisymétrique.

$\begin{cases} x\mathcal{R}y \\ y\mathcal{R}z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \le y \\ y \le z \end{cases} \Rightarrow x \le z \Rightarrow x\mathcal{R}z$, la relation est transitive.

$\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.

Remarque : cette relation est une relation d'ordre totale puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$, soit $x \le y$, soit $y \le x$.

Allez à : Exercice 12 :

3. $e^x \le e^x \Leftrightarrow x\mathcal{R}x$, la relation est réflexive.

$\begin{cases} x\mathcal{R}y \\ y\mathcal{R}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^x \le e^y \\ e^y \le e^x \end{cases} \Rightarrow e^x = e^y \Rightarrow x = y$, la relation est antisymétrique.

$\begin{cases} x\mathcal{R}y \\ y\mathcal{R}z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^x \le e^y \\ e^y \le e^z \end{cases} \Rightarrow e^x \le e^z \Rightarrow x\mathcal{R}z$, la relation est transitive.

$\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.

Remarque : cette relation est une relation d'ordre totale puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$, soit $e^x \le e^y$, soit $e^y \le e^y$.

Allez à : Exercice 12 :

4. $|x| \le |x| \Leftrightarrow x\mathcal{R}x$, la relation est réflexive.

$$\begin{cases} x\mathcal{R}y \\ y\mathcal{R}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x| \le |y| \\ |y| \le |x| \end{cases} \Leftrightarrow |x| = |y|$$

C'est mal parti pour affirmer que $x = y$, il faut trouver un contre exemple.

$$\begin{cases} (1)\mathcal{R}(-1) \\ (-1)\mathcal{R}(1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |1| \le |-1| \\ |-1| \le |1| \end{cases}$$

Et évidemment $-1 \ne 1$, la relation n'est pas antisymétrique.

Allez à : Exercice 12 :

5. $x - x = 0 \in \mathbb{N}$ donc $x\mathcal{R}x$, la relation est réflexive.

$$\begin{cases} x\mathcal{R}y \\ y\mathcal{R}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y \in \mathbb{N} \\ y - x \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{N}, \ \ x - y = k \\ \exists k' \in \mathbb{N}, \ \ y - x = k' \end{cases} \Rightarrow 0 = (x - y) + (y - x) = k + k'$$

Si la somme de deux entiers positifs est nul, c'est que ces deux entiers sont nuls, par conséquent $k = k' = 0$.

Donc $x - y = 0 \Rightarrow x = y$. La relation est antisymétrique.

$$\begin{cases} x\mathcal{R}y \\ y\mathcal{R}z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y \in \mathbb{N} \\ z - y \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$x - z = (x - y) + (y - z) \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x\mathcal{R}z$, la relation est transitive.

Finalement est une relation d'ordre.

Remarque : Cette relation n'est pas une relation d'ordre totale car $\frac{3}{2}$ et 1 (par exemple) ne sont pas en relation, c'est une relation d'ordre partielle.

Allez à : Exercice 12 :

6. $x - x = 0 \in \mathbb{Z}$ donc $x\mathcal{R}x$, la relation est réflexive.

$$\begin{cases} x\mathcal{R}y \\ y\mathcal{R}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y \in \mathbb{Z} \\ y - x \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z}, \ \ x - y = k \\ \exists k' \in \mathbb{Z}, \ \ y - x = k' \end{cases}$$

C'est mal parti, rien n'indique que $x = y$, prenons un contre-exemple.

$$\begin{cases} x = \dfrac{7}{2} \\ y = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 4 \in \mathbb{Z} \\ y - x = -4 \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\mathcal{R}y \\ y\mathcal{R}x \end{cases}$$

Et pourtant $x \neq y$. La relation n'est pas antisymétrique.

Ce n'est pas une relation d'ordre. Regardons si elle est transitive (par curiosité).

$$\begin{cases} x\mathcal{R}y \\ y\mathcal{R}z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y \in \mathbb{N} \\ z - y \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$x - z = (x - y) + (y - z) \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x\mathcal{R}z$, la relation est transitive.

Allez à : Exercice 12 :

Correction exercice 13 :

$f(x) \leq f(x)$ entraine que $x\mathcal{R}x$, la relation est réflexive.

Si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$ alors $f(x) \leq f(y)$ et $f(y) \leq f(x)$ alors $f(x) = f(y)$, f est strictement monotone donc f est injective, par conséquent $x = y$, ce qui signifie que $\mathcal{R}$ est antisymétrique.

Si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$ alors $f(x) \leq f(y)$ et $f(y) \leq f(z)$ donc $f(x) \leq f(z)$ ce qui signifie que $x\mathcal{R}z$, $\mathcal{R}$ est transitive. On pourrait montrer que c'est une relation d'ordre totale.

Allez à : Exercice 13 :

Correction exercice 14 :

1. $x^2 - x^2 = x - x$ donc $\mathcal{R}$ est réflexive.

Si $x\mathcal{R}y$ alors $x^2 - y^2 = x - y$ alors $y^2 - x^2 = y - x$ alors $y\mathcal{R}x$ donc $\mathcal{R}$ est symétrique.

Si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$ alors $x^2 - y^2 = x - y$ et $y^2 - z^2 = y - z$, en additionnant ces deux égalités on trouve $x^2 - z^2 = x - z$. $\mathcal{R}$ est transitive.

Finalement $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2. Soit $x \in \dot{a}$ si $x\mathcal{R}a$ c'est-à-dire si $x^2 - a^2 = x - a \Leftrightarrow x^2 - x + a - a^2 = 0$ autrement dit si x est solution de l'équation du second degré $X^2 - X + a - a^2 = 0$, évidemment a est solution, le produit des solutions est $a - a^2 = a(1 - a)$ donc l'autre solution est $1 - a$. Donc $\dot{a} = \{a, 1 - a\}$ sauf si $a = \frac{1}{2}$ alors $\dot{\frac{1}{2}} = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.
3. L'ensemble quotient est l'ensemble des classes d'équivalence :

$$\mathbb{R}/\mathcal{R} = \left\{\{a, 1 - a\}, a \geq \frac{1}{2}\right\}$$

On est obligé de considérer $a \geq \frac{1}{2}$ (ou $a \leq \frac{1}{2}$) car pour $a \geq \frac{1}{2}$, $1 - a \leq \frac{1}{2}$ donc si on considère $a \in \mathbb{R}$, on écrirait deux fois chaque classe.

Allez à : Exercice 14 :

Correction exercice 15 :

1. $|z| = |z| \Leftrightarrow z\mathcal{R}z$, la relation est réflexive.

$z\mathcal{R}z' \Rightarrow |z| = |z'| \Rightarrow |z'| = |z| \Rightarrow z'\mathcal{R}z$, la relation est symétrique.

$\begin{cases} z\mathcal{R}z' \\ z'\mathcal{R}z'' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |z| = |z'| \\ |z'| = |z''| \end{cases} \Rightarrow |z| = |z''| \Rightarrow z\mathcal{R}z''$, la relation est transitive, il s'agit donc d'une relation d'équivalence.

Allez à : Exercice 15 :

2. Il y a un piège parce que sur $\mathbb{C}^*$, $\left|\frac{z}{z'}\right| = 1 \Leftrightarrow |z| = |z'|$ et on vient de voir au 1°) qu'il s'agit une relation d'équivalence, le problème est en $z = 0$. La réflexivité dit que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $z\mathcal{R}z$, ce qui est faux pour $z = 0$ car $\left|\frac{0}{0}\right|$ n'a pas de sens.

Ce n'est pas une relation d'équivalence.

Allez à : Exercice 15 :

3. $e^z = e^z \Leftrightarrow z\mathcal{R}z$, la relation est réflexive.

   $z\mathcal{R}z' \Rightarrow e^z = e^{z'} \Rightarrow e^{z'} = e^z \Rightarrow z'\mathcal{R}z$, la relation est symétrique.

   $\begin{cases} z\mathcal{R}z' \\ z'\mathcal{R}z'' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^z = e^{z'} \\ e^{z'} = e^{z''} \end{cases} \Rightarrow e^z = e^{z''} \Rightarrow z\mathcal{R}z''$, la relation est transitive. Il s'agit d'une relation d'équivalence.

Allez à : Exercice 15 :

4. $|z - z| = 0 \neq 1$ donc on n'a pas $z\mathcal{R}z$, la relation n'est pas réflexive et ce n'est donc pas une relation d'équivalence.

   Regardons tout de même les autres propriétés.

   $z\mathcal{R}z' \Rightarrow |z - z'| = 1 \Rightarrow |z' - z| = 1 \Rightarrow z'\mathcal{R}z$, la relation est symétrique.

$$\begin{cases} z\mathcal{R}z' \\ z'\mathcal{R}z'' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z - z'| = 1 \\ |z' - z''| = 1 \end{cases}$$

   On ne voit pas bien pourquoi on aurait $|z - z''| = 1$.

   On prend $z = 1$, $z' = 0$ et $z'' = i$

   $\begin{cases} |z - z'| = |1 - 0| = 1 \\ |z' - z''| = |0 - i| = 1 \end{cases}$ et $|z - z''| = |1 - i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, la relation n'est pas transitive.

Allez à : Exercice 15 :

5. $|e^{z-z}| = |e^0| = 1 \Leftrightarrow z\mathcal{R}z$, la relation est réflexive.

$$z\mathcal{R}z' \Rightarrow \left|e^{z-z'}\right| = 1 \Rightarrow \left|e^{-(z'-z)}\right| = 1 \Rightarrow \left|\frac{1}{e^{z'-z}}\right| = 1 \Rightarrow \left|e^{z'-z}\right| = 1 \Rightarrow z'\mathcal{R}z$$

   la relation est symétrique.

$$\begin{cases} z\mathcal{R}z' \\ z'\mathcal{R}z'' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left|e^{z-z'}\right| = 1 \\ \left|e^{z'-z''}\right| = 1 \end{cases} \Rightarrow \left|e^{z-z'}\right| \times \left|e^{z'-z''}\right| = 1 \times 1 \Rightarrow \left|e^{z-z'} \times e^{z'-z''}\right| = 1 \Rightarrow \left|e^{z-z'+z'-z''}\right| = 1$$

$$\Rightarrow \left|e^{z-z''}\right| = 1 \Rightarrow z\mathcal{R}z''$$

   la relation est transitive, il s'agit donc d'une relation d'équivalence.

Allez à : Exercice 15 :

Correction exercice 16 :

Première méthode

$\frac{x}{1+x^2} \geq \frac{x}{1+x^2}$ donc $x\mathcal{E}x$, $\mathcal{E}$ est réflexive.

Si $x\mathcal{E}y$ et $y\mathcal{E}x$ alors $\frac{x}{1+x^2} \geq \frac{y}{1+y^2}$ et $\frac{y}{1+y^2} \geq \frac{x}{1+x^2}$ donc $\frac{x}{1+x^2} = \frac{y}{1+y^2} \Leftrightarrow x(1 + y^2) = y(1 + x^2) \Leftrightarrow x - y + xy^2 - yx^2 = 0 \Leftrightarrow x - y + xy(y - x) = 0 \Leftrightarrow x - y - xy(x - y) = 0 \Leftrightarrow (x - y)(1 - xy) = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$ car $x > 1$ et $y > 1$ entraine $1 - xy < 0$ en particulier $1 - xy \neq 0$. Donc $\mathcal{E}$ est antisymétrique.

Si $x\mathcal{E}y$ et $x\mathcal{E}z$ alors $\frac{x}{1+x^2} \geq \frac{y}{1+y^2}$ et $\frac{y}{1+y^2} \geq \frac{z}{1+z^2}$ donc $\frac{x}{1+x^2} \geq \frac{z}{1+z^2}$, d'où $x\mathcal{E}z$. $\mathcal{E}$ est transitive.

Finalement $\mathcal{E}$ est une relation d'ordre.

Soit $\frac{x}{1+x^2} \geq \frac{y}{1+y^2}$ et alors $x\mathcal{R}y$, soit $\frac{y}{1+y^2} \geq \frac{x}{1+x^2}$ et alors $y\mathcal{R}x$, il s'agit d'une relation d'ordre total.

Deuxième méthode

Soit $f:]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \frac{t}{1+t^2}$, $f'(t) = \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} < 0$ donc f est décroissante sur $]1, +\infty[$

Donc $x\mathcal{E}y \Leftrightarrow f(x) \geq f(y) \Leftrightarrow x \leq y$, $\leq$ est une relation d'ordre total donc $\mathcal{E}$ est une relation d'ordre total

Allez à : Exercice 16 :

Correction exercice 17 :

1.

$$z^4 = a^4 \Leftrightarrow \left(\frac{z}{a}\right)^4 = 1 \Leftrightarrow \frac{z}{a} \in \{1, -1, i, -i\}$$

Donc

$$z = a; z = -a; z = ia; z = -ia$$

Ou

$$z \in \left\{a, ae^{\frac{i\pi}{2}}, ae^{i\pi}, ae^{\frac{3i\pi}{2}}\right\}$$

2. $z^4 = z^4 \Rightarrow z \sim z$ cette relation est réflexive.
$z \sim z' \Rightarrow z^4 = z'^4 \Rightarrow z'^4 = z^4 \Rightarrow z' \sim z$ cette relation est réflexive.
$\begin{cases} z \sim z' \\ z' \sim z'' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z^4 = z'^4 \\ z'^4 = z''^4 \end{cases} \Rightarrow z^4 = z''^4 \Rightarrow z \sim z''$ cette relation est transitive.
Donc $\sim$ est une relation d'équivalence.
3. Remarque : $\sim$ est aussi une relation d'équivalence sur $\mathbb{C}$, pas seulement sur $\mathcal{U}_{12}$.On rappelle que les éléments de $\mathcal{U}_{12}$ sont les complexes $z_k = e^{\frac{ik\pi}{6}}$, $k \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$
Regardons la classe de 1

$$\dot{1} = \{z \in \mathcal{U}_{12}, z^4 = 1\} = \{1, i, -1, -i\} = \left\{e^{\frac{ik\pi}{6}}, k \in \{0,3,6,9\}\right\}$$

Regardons la classe de $e^{\frac{i\pi}{6}}$

$$\dot{\overline{e^{\frac{i\pi}{6}}}} = \left\{z \in \mathcal{U}_{12}, z^4 = e^{\frac{i\pi}{6}}\right\} = \left\{e^{\frac{i\pi}{6}}, e^{\frac{i\pi}{2}}e^{\frac{i\pi}{6}}, e^{i\pi}e^{\frac{i\pi}{6}}, e^{\frac{3i\pi}{2}}e^{\frac{i\pi}{6}}\right\} = \left\{e^{\frac{i\pi}{6}}, e^{\frac{4i\pi}{6}}, e^{\frac{7i\pi}{6}}, e^{\frac{10i\pi}{6}}\right\}$$
$$= \left\{e^{\frac{ik\pi}{6}}, k \in \{1,4,7,10\}\right\}$$

Regardons la classe de $e^{\frac{2i\pi}{6}} = e^{\frac{i\pi}{3}}$

$$\dot{\overline{e^{\frac{i\pi}{3}}}} = \left\{z \in \mathcal{U}_{12}, z^4 = e^{\frac{i\pi}{3}}\right\} = \left\{e^{\frac{i\pi}{3}}, e^{\frac{i\pi}{2}}e^{\frac{i\pi}{3}}, e^{i\pi}e^{\frac{i\pi}{3}}, e^{\frac{3i\pi}{2}}e^{\frac{i\pi}{3}}\right\} = \left\{e^{\frac{2i\pi}{6}}, e^{\frac{5i\pi}{6}}, e^{\frac{8i\pi}{6}}, e^{\frac{11i\pi}{6}}\right\}$$
$$= \left\{e^{\frac{ik\pi}{6}}, k \in \{2,5,8,11\}\right\}$$

Et c'est fini. Il y a trois classes de 4 éléments (cela fait bien 12 éléments).

Allez à : Exercice 17 :

Correction exercice 18 :

1.

$$a + b = a + b \Rightarrow \begin{cases} a + b < a + b \\ \text{ou} \\ a + b = a + b \quad \text{et} \quad b \leq b \end{cases} \Rightarrow (a, b) \preccurlyeq (a, b)$$

Cette relation est réflexive.

$$\begin{cases} (a, b) \preccurlyeq (c, d) \\ (c, d) \preccurlyeq (a, b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b < c + d \quad \text{ou} \quad (a + b = c + d \quad \text{et} \quad b \leq d) \\ \text{et} \\ c + d < a + b \quad \text{ou} \quad (c + d = a + b \quad \text{et} \quad d \leq b) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b < c + d \\ \text{et} \\ c + d < a + b \end{cases} \text{ou} \begin{cases} a + b < c + d \\ \text{et} \\ c + d = a + b \quad \text{et} \quad d \leq b \end{cases} \text{ou} \begin{cases} a + b = c + d \quad \text{et} \quad b \leq d \\ \text{et} \\ c + d < a + b \end{cases} \text{ou} \begin{cases} a + b = c + d \quad \text{et} \quad b \\ \text{et} \\ c + d = a + b \quad \text{et} \quad d \end{cases}$$

Les trois premiers systèmes n'ont pas de solutions donc

$$\begin{cases} (a, b) \preccurlyeq (c, d) \\ (c, d) \preccurlyeq (a, b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = c + d \quad \text{et} \quad b \leq d \\ \text{et} \\ c + d = a + b \quad \text{et} \quad d \leq b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = c + d \\ \text{et} \\ d = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ \text{et} \\ d = b \end{cases} \Leftrightarrow (a, b) = (c, d)$$

Cette relation est antisymétrique.

$$\begin{cases}(a,b) \preccurlyeq (c,d)\\(c,d) \preccurlyeq (e,f)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a+b<c+d \text{ ou } (a+b=c+d \text{ et } b\le d)\\ \text{et}\\ c+d<e+f \text{ ou } (c+d=e+f \text{ et } d\le f)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a+b<c+d\\ \text{et}\\ c+d<e+f\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}a+b<c+d\\ \text{et}\\ c+d=e+f \text{ et } d\le f\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}a+b=c+d \text{ et } b\le d\\ \text{et}\\ c+d<e+f\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}a+b=c+d \text{ et } b\\ \text{et}\\ c+d=e+f \text{ et } d\end{cases}$$

$$\Rightarrow (a+b<e+f) \text{ ou } (a+b<e+f) \text{ ou } (a+b<e+f) \text{ ou } (a+b=e+f \quad et \quad b\le d)$$

$$\Rightarrow \begin{cases}a+b<e+f\\ \text{ou}\\ a+b=e+f \text{ et } b\le f\end{cases} \Rightarrow (a,b) \preccurlyeq (e,f)$$

Cette relation est transitive.

Il s'agit bien d'une relation d'ordre.

2.

$$(0,0) \preccurlyeq (1,0) \preccurlyeq (0,1) \preccurlyeq (2,0) \preccurlyeq (1,1) \preccurlyeq (0,2) \preccurlyeq (3,0) \preccurlyeq (2,1) \preccurlyeq (1,2) \preccurlyeq (0,3)$$

Allez à : Exercice 18 :

Correction exercice 19 :

1. $ab=ab$ donc $(a,b)\mathcal{R}(a,b)$, $\mathcal{R}$ est réflexive.
   $(a,b)\mathcal{R}(a',b') \Rightarrow ab'=a'b \Rightarrow a'b=ab' \Rightarrow (a',b')\mathcal{R}(a,b)$ donc $\mathcal{R}$ est symétrique.
   Si $(a,b)\mathcal{R}(a',b')$ et $(a',b')\mathcal{R}(a'',b'')$ alors $\begin{cases}ab'=a'b\\a'b''=a''b'\end{cases}$ alors $\begin{cases}a'=\frac{ab'}{b}\\a'b''=a''b'\end{cases}$ car $b\neq 0$
   Donc $\frac{ab'}{b}b''=a''b'$, on multiplie par b et on simplifie par $b'\neq 0$, on a alors $ab''=a''b$, c'est-à-dire $(a,b)\mathcal{R}(a'',b'')$, donc $\mathcal{R}$ est transitive.
   $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Si $(a,b)\in\overline{(p,q)}^{\,\cdot} \Leftrightarrow aq=pb$, donc q divise bq et $q\wedge p=1$ d'après le théorème de Gauss q divise b, il existe $d\in\mathbb{Z}$ tel que $b=dq$, cela que l'on remplace dans $aq=pb$, ce qui donne $aq=pdq$, $q\neq 0$ donc $a=dp$, l'ensemble des couples de $\overline{(p,q)}^{\,\cdot}$ sont les couples de la forme (dp,dq).

Allez à : Exercice 19 :

Correction exercice 20 :

$\begin{cases}a=a\\b=b\end{cases} \Rightarrow \{a=a \text{ et } b\le b$ donc $\begin{cases}a<a\\ ou\\ a=a \text{ et } b\le b\end{cases}$ d'où $(a,b)\ll(a,b)$, $\ll$ est réflexive.

$$\begin{cases}(a,b)\ll(a',b')\\(a',b')\ll(a,b)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a<a' \text{ ou } (a=a' \text{ et } b\le b')\\a'<a \text{ ou } (a'=a \text{ et } b'\le b)\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}a<a'\\a'<a\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}a<a'\\a'=a \text{ et } b'\le b\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}a=a' \text{ et } b\le b'\\b'<b\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}a=a' \text{ et } b\le b'\\a'=a \text{ et } b'\le b\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}a=a' \text{ et } b\le b'\\a'=a \text{ et } b'\le b\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=a'\\b=b'\end{cases} \Rightarrow (a,b)=(a',b')$$

$\ll$ est antisymétrique.

Si $(a,b)\ll(a',b')$ et $(a',b')\ll(a'',b'')$ alors

$$\begin{cases}a<a'\\ ou\\ a=a' \text{ et } b\le b'\end{cases} \text{ et } \begin{cases}a'<a''\\ ou\\ a'=a'' \text{ et } b'\le b''\end{cases}$$

Si $a<a'$ et $a'<a''$ alors $a<a''$ donc $(a,b)\ll(a'',b'')$

Si $a<a'$ et $a'=a''\, et\, b'\le b'$ alors $a<a''$ donc $(a,b)\ll(a'',b'')$.

Si $a=a'\, et\, b\le b'$ et $a'<a''$ alors $a<a''$ donc $(a,b)\ll(a'',b'')$.

Si $a=a'\, et\, b\le b'$ et $a'=a''\, et\, b'\le b''$ alors $a=a''$ et $b\le b''$ donc $(a,b)\ll(a'',b'')$.

Soit (a_1,b_1) et (a_2,b_2) deux couples de $\mathbb{R}^2$.

Si $a_1 < a_2$ ou si $a_2 < a_1$ alors $(a_1, b_1) \ll (a_2, b_2)$ ou $(a_2, b_2) \ll (a_1, b_1)$.
Si $a_1 = a_2$ alors soit $b_1 \leq b_2$ soit $b_2 \leq b_1$ donc $(a_1, b_1) \ll (a_2, b_2)$ ou $(a_2, b_2) \ll (a_1, b_1)$.
La relation $\ll$ est donc une relation d'ordre totale.

Allez à : Exercice 20 :

Correction exercice 21 :

$A\Delta A = (A \cup A) \setminus (A \cap A) = A \setminus A = \emptyset$ a zéro élément. Donc on a $A\mathcal{R}$A. $\mathcal{R}$ est réflexive.
Si $A\mathcal{R}B$, $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ est un ensemble fini qui a un nombre pair d'éléments.
Alors $B\Delta A = (B \cup A) \setminus (B \cap A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = A\Delta B$ est un ensemble fini qui a un nombre pair
d'éléments. Donc $\mathcal{R}$ est réflexive.
Si $A\mathcal{R}B$ et $B\mathcal{R}C$ alors $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ est un ensemble fini qui a un nombre pair d'éléments et $B\Delta C = (B \cup C) \setminus (B \cap C)$ est un ensemble fini qui a un nombre pair d'éléments.
Comme $A \cap B \subset A \cup B$, $Card\big((A \cup B) \setminus (A \cap B)\big) = Card(A \cup B) - Card(A \cap B)$

$$Card(A\Delta B) = Card(A \cup B) - Card(A \cap B) = Card(A) + Card(B) - 2Card(A \cap B) = 2n$$
$$Card(B\Delta C) = Card(B \cup C) - Card(B \cap C) = Card(B) + Card(C) - 2Card(B \cap C) = 2m$$

Donc $Card(A) = -Card(B) + 2Card(A \cap B) + 2n$ et $Card(C) = -Card(B) + 2Card(B \cap C) + 2m$
Donc

$$\begin{aligned} Card(A\Delta C) = Card(A \cup C) - Card(A \cap C) &= Card(A) + Card(C) - 2Card(A \cap C) \\ &= -Card(B) + 2Card(A \cap B) + 2n - Card(B) + 2Card(B \cap C) + 2m \\ &= 2Card(A \cap B) + 2n - 2Card(B) + 2Card(B \cap C) + 2m \end{aligned}$$

C'est un nombre fini et pair donc $A\mathcal{R}C$, $\mathcal{R}$ est transitive.
Finalement $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Allez à : Exercice 21 :

ARITHMETIQUE

Exercice 1 :

Étant donnés cinq nombres entiers consécutifs, on trouve toujours parmi eux (vrai ou faux et pourquoi) :

1. au moins deux multiples de 2.
2. au plus trois nombres pairs.
3. au moins deux multiples de 3.
4. exactement un multiple de 5.
5. au moins un multiple de 6.
6. au moins un nombre premier.

Allez à : Correction exercice 1 :

Exercice 2 :

Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. 60 a plus de diviseurs (positifs) que 100.
2. 60 a moins de diviseurs (positifs) que 90.
3. 60 a moins de diviseurs (positifs) que 120.
4. si un entier divise 60, alors il divise 120.
5. si un entier strictement inférieur à 60 divise 60, alors il divise 90.
6. si un nombre premier divise 120, alors il divise 60.

Allez à : Correction exercice 2 :

Exercice 3 :

On veut constituer la somme exacte de 59 euros seulement à l'aide de pièces
de 2 euros et de billets de 5 euros. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies,
lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. Il y a au plus 22 pièces de 2 euros.
2. Il peut y avoir exactement 10 pièces de 2 euros.
3. Il peut y avoir exactement 12 pièces de 2 euros.
4. Il peut y avoir un nombre pair de billets de 5 euros.
5. Il y a au moins un billet de 5 euros.

Allez à : Correction exercice 3 :

Exercice 4 :

Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. Si un nombre est divisible par 9, alors il est divisible par 6.
2. Si un nombre est divisible par 100, alors il est divisible par 25.
3. Si un nombre est divisible par 2 et par 3, alors il est divisible par 12.
4. Si un nombre est divisible par 10 et par 12, alors il est divisible par 15.
5. Si un nombre est divisible par 6 et par 8, alors il est divisible par 48.
6. Le produit des entiers de 3 à 10 est divisible par 1000.
7. Le produit des entiers de 3 à 10 est divisible par 1600.
8. Si la somme des chiffres d'un entier en écriture décimale vaut 39, alors il est divisible par 3 mais pas par 9.
9. Si la somme des chiffres d'un entier en écriture décimale vaut 18, alors il est divisible par 6 et par 9.

Allez à : Correction exercice 4 :

Exercice 5 :

Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. Si un entier est divisible par deux entiers, alors il est divisible par leur produit.
2. Si un entier est divisible par deux entiers premiers entre eux, alors il est divisible par leur produit.
3. Si un entier est divisible par deux entiers, alors il est divisible par leur PPCM.
4. Si un nombre divise le produit de deux entiers, alors il divise au moins un de ces deux entiers.
5. Si un nombre premier divise le produit de deux entiers, alors il divise au moins un de ces deux entiers.
6. Si un entier est divisible par deux entiers, alors il est divisible par leur somme.

7. Si un entier divise deux entiers, alors il divise leur somme.
8. Si deux entiers sont premiers entre eux, alors chacun d'eux est premier avec leur somme.
9. Si deux entiers sont premiers entre eux, alors chacun d'eux est premier avec leur produit.
10. Si deux entiers sont premiers entre eux, alors leur somme et leur produit sont premiers entre eux.

Allez à : Correction exercice 5 :

Exercice 6 :

Soient a, b et d trois entiers. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. Si d divise a et b, alors d divise leur $PGCD$.
2. S'il existe deux entiers u et v tels que $au + bv = d$, alors $d = PGCD(a, b)$.
3. S'il existe deux entiers u et v tels que $au + bv = d$, alors d divise $PGCD(a, b)$.
4. S'il existe deux entiers u et v tels que $au + bv = d$, alors $PGCD(a, b)$ divise d.
5. Si $PGCD(a, b)$ divise d, alors il existe un couple d'entiers (u, v) unique, tel que $au + bv = d$.
6. L'entier d est un multiple de $PGCD(a, b)$ si et seulement si il existe un couple d'entiers (u, v), tel que $au + bv = d$.

Allez à : Correction exercice 6 :

Exercice 7 :

Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. Si un entier est congru à 0 modulo 6, alors il est divisible par 6.
2. Si le produit de deux entiers est congru à 0 modulo 6 alors l'un des deux est multiple de 6.
3. Si un entier est congru à 5 modulo 6 alors toutes ses puissances paires sont congrues à 1 modulo 6.
4. Si deux entiers sont congrus à 4 modulo 6, alors leur somme est congrue à 2 modulo 6.
5. Si deux entiers sont congrus à 4 modulo 6, alors leur produit est congru à 2 modulo 6.
6. Si un entier est congru à 4 modulo 6 alors toutes ses puissances sont aussi congrues à 4 modulo 6.

Allez à : Correction exercice 7 :

Exercice 8 :

Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. Si le produit de deux entiers est congru à 0 modulo 5 alors l'un des deux est multiple de 5.
2. Si un entier est congru à 2 modulo 5 alors sa puissance quatrième est congrue à 1 modulo 5.
3. Si deux entiers sont congrus à 2 modulo 5, alors leur somme est congrue à 1 modulo 5.
4. Pour tout entier, non multiple de 5, il existe un entier tel que le produit des deux soit congru à 1 modulo 5.
5. Aucun entier n'est tel que son carré soit congru à -1 modulo 5.
6. Aucun entier n'est tel que son carré soit congru à 2 modulo 5.
7. La puissance quatrième d'un entier quelconque est toujours congrue à 1 modulo 5.
8. La puissance quatrième d'un entier non multiple de 5 est toujours congrue à 1 modulo 5.

Allez à : Correction exercice 8 :

Exercice 9 :

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier.

1. Démontrer que si n n'est divisible par aucun entier inférieur ou égal à $\sqrt{n}$, alors n est premier.
2. Démontrer que les nombres $n! + 2, n! + 3, \ldots, n! + n$ ne sont pas premiers.
3. En déduire que pour tout n, il existe n entiers consécutifs non premiers.

Allez à : Correction exercice 9 :

Exercice 10 :

Le premier janvier 2007 était un lundi. Calculer quel jour de la semaine sera le

1. 2 juillet 2007
2. 15 janvier 2008
3. 19 mars 2008 (attention, 2008 est une année bissextile)
4. 14 juillet 2010
5. 26 août 2011

Allez à : Correction exercice 10 :

Exercice 11 :
On choisit un nombre entier, on le divise par 7 et on trouve un reste égal à 5. On divise à nouveau le quotient obtenu par 7, on trouve un reste égal à 3 et un quotient égal à 12. Quel était le nombre de départ ?
Allez à : Correction exercice 11 :

Exercice 12 :
On donne l'égalité suivante.
$$96842 = 256 \times 375 + 842$$
Déterminer, sans effectuer la division, le quotient et le reste de la division euclidienne de 96842 par 256 et par 375.
Allez à : Correction exercice 12 :

Exercice 13 :
On donne les deux égalités suivantes.
$$3379026 = 198765 \times 17 + 21, \qquad 609806770 = 35870986 \times 17 + 8$$
On s'intéresse au nombre entier $N = 3379026 \times 609806770$. Quel est le reste de la division euclidienne de N par 17 ?
Allez à : Correction exercice 13 :

Exercice 14 :
Donner la décomposition en facteurs premiers des entiers suivants.
60 ; 360 ; 2400 ; 4675 ; 9828 ; 15200 ; 45864 ; 792792.
Allez à : Correction exercice 14 :

Exercice 15 :
Déterminer le $PGCD(2244,1089)$ et déterminer l'identité de Bézout correspondante.
Allez à : Correction exercice 15 :

Exercice 16 :
On considère les couples d'entiers (a, b) suivants.

a) $a = 60$, $b = 84$ Allez à correction a)
b) $a = 360$, $b = 240$ Allez à la correction b)
c) $a = 160$, $b = 171$ Allez à la correction 0
d) $a = 360$, $b = 345$ Allez à la correction d)
e) $a = 325$, $b = 520$ Allez à la correction e)
f) $a = 720$, $b = 252$ Allez à la correction f)
g) $a = 955$, $b = 183$ Allez à la correction 0
h) $a = 1665$, $b = 1035$ Allez à la correction h)
i) $a = 18480$, $b = 9828$ Allez à la correction i)

Pour chacun de ces couples :

1. Calculer $PGCD(a, b)$ par l'algorithme d'Euclide.
2. En déduire une identité de Bézout.
3. Calculer $PPCM(a, b)$.
4. Déterminer l'ensemble des couples (u, v) d'entiers relatifs tels que : $au + bv = PGCD(a, b)$
5. Donner la décomposition en facteurs premiers de a et b.
6. En déduire la décomposition en facteurs premiers de $PGCD(a, b)$ et $PPCM(a, b)$, et retrouver les résultats des questions 1 et 3.

Allez à : Correction exercice 16 :

Exercice 17 :

1. Calculer le PGCD de 8303 et 2717 et donner l'identité de Bézout correspondante.

2. En déduire le PPCM de 8303 et 2717.
3. Calculer le PGCD de 1001 et 315 et donner l'identité de Bézout correspondante.
4. Déterminer le $PGCD(2244,1089)$ et déterminer l'identité de Bézout correspondante.

Allez à : Correction exercice 17 :

Exercice 18 :

Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ les équations suivantes :

1. $3x - 5y = 13$
2. $212x + 45y = 3$
3. $42x + 45y = 4$
4. $7x + 5y = 3$

Allez à : Correction exercice 18 :

Exercice 19 :

1. Donner, en le justifiant, le nombre de diviseurs positifs de 100^{100}.
2. Déterminer le reste de la division de 101^{101} par 3, et par 5, en déduire le reste de la division euclidienne de 101^{101} par 15.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel et p un nombre premier supérieur ou égal à 3. En utilisant un résultat du cours, montrer que si $0 < n < p$ alors p divise l'un des entiers $n^{\frac{p-1}{2}} - 1$ et $n^{\frac{p-1}{2}} + 1$

Allez à : Correction exercice 19 :

Exercice 20 :

Déterminer le nombre de diviseurs positifs de

$$N = 72^{10} \times 162^{50}$$

On pourra présenter le résultat sous forme d'un produit de nombre entier.

Allez à : Correction exercice 20 :

Exercice 21 :

Quel est le plus petit entier naturel, qui divisé par 8, 15, 18 et 24 donne pour restes respectifs 7, 14, 17 et 23 ?

Allez à : Correction exercice 21 :

Exercice 22 :

Dans une UE de maths à l'université Claude Bernard, il y a entre 500 et 1000 inscrits. L'administration de l'université a remarqué qu'en les répartissant en groupes de 18, ou bien en groupes de 20, ou bien aussi en groupes de 24, il restait toujours 9 étudiants. Quel est le nombre d'inscrits ?

Allez à : Correction exercice 22 :

Exercice 23 :

Soient a et b deux entiers tels que $1 \leq a < b$.

1. Soient q_1 et r_1 (respectivement : q_2 et r_2) le quotient et le reste de la division euclidienne de a (respectivement : b) par $b - a$. Démontrer que $r_1 = r_2$ et $q_2 = q_1 + 1$.
2. On note q le quotient de la division euclidienne de $b - 1$ par a. Soit $n > 0$ un entier. Exprimer en fonction de q, r et n le quotient et le reste de la division euclidienne de $ba^n - 1$ par a^{n+1}.
3. Soit d le $PGCD$ de a et b. Déterminer le $PGCD$ de $A = 15a + 4b$ et $B = 11a + 3b$
4. Soit d le $PGCD$ de a et b. Montrer que $d = PGCD\big(a + b, PPCM(a, b)\big)$.
5. Démontrer que si $d = 1$ (a et b sont premiers entre eux), alors pour tous $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$, a^m et b^n sont premiers entre eux.
6. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le $PGCD$ de a^n et b^n est d^n.

Allez à : Correction exercice 23 :

Exercice 24 :

Soient a, b et c trois entiers relatifs non nuls.

1. Montrer que $PGCD(ca, cb) = |c| \times PGCD(a, b)$.
2. Montrer que si $PGCD(a, b) = 1$ et si c divise a, alors $PGCD(c, b) = 1$.
3. Montrer que $PGCD(a, bc) = 1$ si et seulement si $PGCD(a, b) = PGCD(a, c) = 1$.
4. Montrer que si $PGCD(b, c) = 1$ alors $PGCD(a, bc) = PGCD(a, b) \times PGCD(a, c)$.

Allez à : Correction exercice 24 :

Exercice 25 :

Soient $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$ deux entiers tels que $0 < a < b$.

1. Démontrer que si a divise b, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^a - 1$ divise $n^b - 1$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, démontrer que le reste de la division euclidienne de $n^b - 1$ par $n^a - 1$ est $n^r - 1$, où r est le reste de la division euclidienne de b par a.
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, démontrer que le $PGCD$ de $n^b - 1$ et $n^a - 1$ est $n^d - 1$, où d est le $PGCD$ de a et b.

Allez à : Correction exercice 25 :

Exercice 26 :

Soit n un entier relatif. On pose $a = 2n + 3$ et $b = 5n - 2$.

1. Calculer $5a - 2b$. En déduire le $PGCD$ de a et b en fonction de n.
2. Procéder de même pour exprimer en fonction de n le $PGCD$ de $2n - 1$ et $9n + 4$.

Allez à : Correction exercice 26 :

Exercice 27 :

Soient $a = 2n + 1$ et $b = 5n + 1$ deux entiers.

1. Déterminer deux entiers u et v tels que $au + bv = 3$
2. En déduire les valeurs possibles de $d = PGCD(a, b)$?
3. Montrer que si $n \equiv 1 \quad [3]$ alors $d = 3$, que vaut d sinon ?

Allez à : Correction exercice 27 :

Exercice 28 :

Soit $\in \mathbb{N}^*$, pour quelles valeurs les nombres $2n$ et $3n + 1$ sont premiers entre eux ?

Allez à : Correction exercice 28 :

Exercice 29 :

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, les entiers $14n + 3$ et $5n + 1$ sont premiers entre eux
2. On considère l'équation (E) : $87x + 31y = 2$ où x et y sont des entiers relatifs
   2.1. Montrer que 87 et 31 sont premiers entre eux.
   2.2. En déduire un couple $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $87u + 31v = 1$, puis une solution (x_0, y_0) de (E)
   2.3. Déterminer l'ensemble des solutions de (E).

Allez à : Correction exercice 29 :

Exercice 30 :

1. Déterminer les restes possibles de la division euclidienne du carré d'un nombre impair par 8.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier pair. En déduire que l'équation

$$x^n + y^n = z^n$$

N'a pas de solution pour x, y et z impairs.

Allez à : Correction exercice 30 :

Exercice 31 :

Déterminer le reste de la division euclidienne de 5^{1000} par 7.

Allez à : Correction exercice 31 :

Exercice 32 :

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'entier $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est un multiple de 11.

Allez à : Correction exercice 32 :

Exercice 33 :

Montrer que : 4^n est congru à $1 + 3n$ modulo 9. En déduire que $2^{2n} + 15n - 1$ est toujours divisible par 9.

Allez à : Correction exercice 33 :

Exercice 34 :

1. Montrer par récurrence que pour $n \geq 0$, $a_n = 4^{2n+2} - 1$ est un multiple de 15.
2. Soit $n \geq 0$, $b_n = 4^{2n+2} - 15n - 16$, calculer $b_{n+1} - b_n$ et montrer que $b_{n+1} - b_n$ est un multiple de $225 = 15 \times 15$.
3. Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, b_n est un multiple de 225.

Allez à : Correction exercice 34 :

Exercice 35 :

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $5^{n+2} + 3^{n+1}5^{2n}$ est divisible par 7.

Allez à : Correction exercice 35 :

Exercice 36 :

On se propose de déterminer tous les couples $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ solutions de l'équation : $2^m - 3^n = 1$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
   a) Quel est le reste de la division euclidienne de 9^k par 8 ?
   b) Déterminer les restes de la division euclidienne de $3^{2k} + 1$ par 8, puis de $3^{2k+1} + 1$ par 8
2. Soit $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ un couple de solution, montrer à l'aide de 1°) que $m \leq 2$.
3. En déduire tous les couples $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ d'entier naturels solutions de l'équation.

Allez à : Correction exercice 36 :

Exercice 37 :

Montrer que 3 divise $a^3 - b^3$ si et seulement si 3 divise $a - b$.

Allez à : Correction exercice 37 :

Exercice 38 :

Montrer que 7 divise $a^2 + b^2$ si et seulement si 7 divise a et b.

Allez à : Correction exercice 38 :

Exercice 39 :

Déterminer toutes les solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de l'équation :

$$7x + 5y = 3$$

Allez à : Correction exercice 39 :

Exercice 40 :

Résoudre dans $\mathbb{Z}$, $12x \equiv 5\ \ [35]$

Allez à : Correction exercice 40 :

Exercice 41 :

1. Trouver une solution particulière de $13u + 5v = 3$
2. Déterminer tous les couples d'entiers $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $13u + 5v = 3$.
3. Déterminer les restes de la division euclidienne de 2^{2013} par 5 et par 13.
4. Déduire des deux questions qui précèdent le reste de la division euclidienne de 2^{2013} par 65.

Allez à : Correction exercice 41 :

Exercice 42 :

(1) a. Déterminer le reste de la division de $N = 222^{333}$ par 7 et par 11.

b. Déterminer deux entiers u et v tels que $7u + 11v = 1$.

c. En déduire le reste de la division de N par 77.

(2) Toto veut faire don des livres de sa bibliothèque. Il en a plus de 10. S'il les répartit dans les cartons contenant 20 livres ou des cartons qui en contiennent 25, il lui reste toujours 7 livres. Quel est le nombre minimal de livres dans la bibliothèque de Toto ?

Allez à : Correction exercice 42 :

Exercice 43 :

1. Ecrire une identité de Bézout entre 99 et 56.
2. Résoudre le système

$$\begin{cases} x \equiv 2 \quad [56] \\ x \equiv 3 \quad [99] \end{cases}$$

Allez à : Correction exercice 43 :

Exercice 44 :

Déterminer la plus petite solution positive du système :

$$\begin{cases} x \equiv 6 \quad [11] \\ x \equiv 3 \quad [13] \end{cases}$$

Allez à : Correction exercice 44 :

Exercice 45 :

1. Déterminer toutes les solutions de $2u + 5v = 59$
2. Donner tous les couples (u, v) tels que la somme de u pièces de 2 euros et de v billets de 5 euros égale à 59 euros.

Allez à : Correction exercice 45 :

Exercice 46 :

1. Résoudre : $\begin{cases} 7x + 5y \equiv 2 \quad [8] \\ 5x + 4y \equiv 16 \quad [8] \end{cases}$
2. Résoudre : $\begin{cases} 7x + 5y \equiv 2 \quad [9] \\ 5x + 4y \equiv 16 \quad [9] \end{cases}$

Allez à : Correction exercice 46 :

Exercice 47 :

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les systèmes suivants :

1.

$$\begin{cases} n \equiv 1 \quad [6] \\ n \equiv 5 \quad [9] \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} n \equiv 3 \quad [6] \\ n \equiv 6 \quad [9] \end{cases}$$

Allez à : Correction exercice 47 :

Exercice 48 :

Soit $p \geq 3$ un nombre premier

1. Quels sont les éléments $x \in \mathbb{Z}$ tels que : $x^2 \equiv 1 \quad [p]$?

2. En déduire le théorème de Wilson : si p est premier alors $(p-1)!+1$ est divisible par p.

Allez à : Correction exercice 48 :

Exercice 49 :

On considère un entier $n \geq 3$.

1. Montrer que, quel que soit l'entier x, les carrés des nombres x et $n-x$ sont congrus modulos n.
2. On note $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ l'ensemble $\{0,1,\dots,n-1\}$ des restes modulo n, et c l'application de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ qui a un reste associe son carré modulo n. Cette application est-elle injective ? surjective ?
3. Dresser la table des carrés modulo 7.
4. Montrer que l'équation $x^2-6xy+2y^2=7003$ n'a pas de solutions (x,y) entière. (Exprimer le premier membre comme un carré modulo 7).

Allez à : Correction exercice 49 :

CORRECTIONS

Correction exercice 1 :

1. Si n est pair, $n+2$ et $n+4$ sont pairs alors que $n+1$ et $n+3$ sont impairs.
   Si n est impair, $n+2$ et $n+4$ sont impairs alors que $n+1$ et $n+3$ sont pairs.
   Il y a deux ou trois nombres pairs parmi ces cinq entiers, donc au moins deux nombres pairs.
2. D'après 1°) il y a deux ou trois nombres impairs donc au plus trois.
3. D'après 1°) et 2°) il y a au moins deux multiples de trois.
4. Parmi cinq nombres consécutifs il y a au moins un multiple de cinq, notons le $n+k, k \in \{0,1,2,3,4\}$, le multiple de cinq suivant est $n+k+5$ qui n'appartient pas à $\{n,n+1,n+2,n+3,n+4\}$, donc il y a exactement un multiple de cinq.
5. C'est faux, par exemple dans $\{1,2,3,4,5\}$ il ni a pas de multiple de six.
6. C'est faux, par exemple dans $\{24,25,26,27,28\}$ il n'y a pas de nombre premier.

Allez à : Exercice 1 :

Correction exercice 2 :

1. $60 = 2^2 \times 3^1 \times 5^1$ donc les diviseurs positifs de 60 sont de la forme $2^i \times 3^j \times 5^k$ avec
   $$(i,j,k) \in \{0,1,2\} \times \{0,1\} \times \{0,1\}$$
   60 a donc $3 \times 2 \times 2 = 12$ diviseurs
   $100 = 2^2 \times 5^2$ donc les diviseurs positifs de 100 sont de la forme $2^i \times 5^j$ avec
   $$(i,j) \in \{0,1,2\} \times \{0,1,2\}$$
   100 a donc $3 \times 3 = 9$ diviseurs.
   60 a plus de diviseurs positifs que 100.
2. $90 = 2^1 \times 3^2 \times 5^1$ donc les diviseurs positifs de 90 sont de la forme $2^i \times 3^j \times 5^k$ avec
   $$(i,j,k) \in \{0,1\} \times \{0,1,2\} \times \{0,1\}$$
   90 a donc $2 \times 3 \times 2 = 12$ diviseurs
   60 a le même nombre de diviseurs positifs que 90, la réponse est donc vraie.
3. $120 = 2^3 \times 3^1 \times 5^1$ donc les diviseurs positifs de 120 sont de la forme $2^i \times 3^j \times 5^k$ avec
   $$(i,j,k) \in \{0,1,2,3\} \times \{0,1\} \times \{0,1\}$$
   120 a donc $4 \times 2 \times 2 = 16$ diviseurs
   Donc 60 a moins de diviseurs positifs que 120.
   Deuxième méthode : $120 = 2 \times 60$ donc les diviseurs de 60 sont aussi des diviseurs de 120, comme 120 est un diviseur de 120 mais pas de 60, 120 a plus de diviseurs que 60.
4. Soit n un diviseur de 60, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $60 = k \times n$ donc $120 = 2k \times n$ par conséquent n est un diviseur de 120.
5. C'est faux, 20 divise 60 et 20 ne divise pas 90.
6. Les diviseurs premiers de 120 sont 2, 3 et 5, ils divisent tous les trois 60.

Autre méthode :

$120 = 2 \times 60$. 2 divise 60, et soit $p > 2$ un diviseur premier de 120, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $120 = p \times k$, alors $p \times k = 2 \times 60$, d'après le théorème de Gauss, $p|2 \times 60$ et p est premier avec 2 donc p divise 60.

Remarque : cette deuxième méthode est plus longue que la première mais dans d'autres circonstances cela peut s'avérer utile.

Allez à : Exercice 2 :

Correction exercice 3 :

Première méthode théorique (indispensable à connaitre)

On cherche les solutions de $2u + 5v = 59 \quad (1)$ avec $u \in \mathbb{N}$ (c'est le nombre de pièces de 2 euros) et $v \in \mathbb{N}$ (c'est le nombre de billets de 5 euros), comme 2 et 5 sont premier entre eux, il existe u_0 et v_0 tels que $2u_0 + 5v_0 = 1$, il existe une solution évidente $2 \times (-2) + 5 \times 1 = 1$, si ce n'est pas le cas on utilise l'algorithme d'Euclide. En multiplie par 59 : $2 \times (-118) + 5 \times 59 = 59 \quad (2)$,

En soustrayant (1) et (2) on trouve :

$$2(u + 118) + 5(v - 59) = 0 \Leftrightarrow 2(u + 2) = -5(v - 1)$$

2 est premier avec 5 et 2 divise $-5(v - 59)$, d'après le théorème de Gauss 2 divise $-(v - 59)$, donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $-(v - 59) = 2k \Leftrightarrow v = -2k + 59$, on remplace $-(v - 59) = 2k$ dans $2(u + 118) = -5(v - 59)$, on trouve $2(u + 118) = 5 \times 2k \Leftrightarrow u + 118 = 5k \Leftrightarrow u = 5k - 118$, la réciproque est évidente.

Les solutions de (1) sont $\begin{cases} u = 5k - 118 \\ v = -2k + 59 \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Or $u \geq 0$ et $v \geq 0$,

$$\begin{cases} 5k - 118 \geq 0 \\ -2k + 59 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \geq \dfrac{118}{5} = 23 + \dfrac{3}{5} \\ k \leq \dfrac{59}{2} = 29 + \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \geq 24 \\ k \leq 29 \end{cases}$$

Chaque valeur de $k \in \{24,25,26,27,28,29\}$ donne une solution de l'équation (1) avec $u \geq 0$ et $v \geq 0$.

1. D'après les considérations ci-dessus
   Prenons $k = 29$, $u = 5 \times 29 - 118 = 145 - 118 = 27$ et $v = -2 \times 29 + 59 = 1$
   (Pour se rassurer $27 \times 2 + 5 = 59$) donc $(27,1)$ est une solution avec 27 pièces de 2 euros.
   C'est faux.
2. Est-il possible que $u = 10$? Or $u = 5k - 118$, cela entrainerait que $5k - 118 = 10 \Leftrightarrow 5k = 128$, ce qui n'est pas possible.
3. Est-il possible que $u = 12$? Or $u = 5k - 118$, cela qui est équivalent à $5k - 118 = 12 \Leftrightarrow 5k = 130 \Leftrightarrow k = 26 \in \{24,25,26,27,28,29\}$, la réponse est oui.
4. Est-il possible que $v = 2 \times l$, $l \in \mathbb{N}$? Or $v = -2k + 59$, cela entrainerait que $-2k + 59 = 2l \Leftrightarrow 59 = 2(l + k)$, ce qui est impossible. La réponse est non.
5. Est-il possible que $v = 0$? Or $v = -2k + 59$, cela entrainerait que $2k = 59$, ce qui est impossible, donc il y a au moins un billet de 5 euros.

Deuxième solution sans théorie

1. On cherche les solutions de $2u + 5v = 59$, avec $u \in \mathbb{N}$ (c'est le nombre de pièces de 2 euros) et $v \in \mathbb{N}$ (c'est le nombre de billets de 5 euros).
   $5 + 2 \times 27 = 59$, donc un billet de 5 euros et 27 pièces de deux euros convient, « il y a au plus 22 pièces de deux euros » est faux.
2. $2 \times 10 + 5v = 59 \Leftrightarrow 5v = 39$, c'est impossible, il ne peut pas y avoir exactement 10 pièces de 2 euros.
3. $2 \times 12 + 5v = 59 \Leftrightarrow 5v = 35 \Leftrightarrow v = 7$, la réponse est oui.
4. $v = 2l$, $2u + 5v = 59 \Leftrightarrow 2u + 10l = 59$, ce qui est impossible car 59 est impair.
5. $v = 0 \Leftrightarrow 2u = 59$, c'est impossible.

Remarque : c'est plus simple ainsi, mais ne négligez pas la première méthode.

Allez à : Exercice 3 :

Correction exercice 4 :

1. 9 est divisible par 9 mais pas par 6.
2. Soit n un nombre divisible par 100, donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $n = 100k = 25 \times 4k$ donc n est divisible par 25.
3. 6 est divisible par 2 et 3 mais pas par 12.
4. Soit n un nombre divisible par 10 et par 12, ilexiste $k \in \mathbb{Z}$ et $k' \in \mathbb{Z}$ tels que :
$$\begin{cases} n = 10k \\ n = 12k' \end{cases} \Rightarrow 10k = 12k' \Rightarrow 5k = 6k'$$
5 divise $6k'$ et 5 est premier avec 6, d'après le théorème de Gauss, 5 divise k', il existe $l \in \mathbb{Z}$ tel que $k' = 5l$, ce que l'on remplace dans $n = 12k'$, $n = 12k' = 12 \times 5l = 4 \times 3 \times 5l = 15 \times 4l$, donc n est divisible par 15.

Autre méthode :
n est divisible par $PPCM(10,12) = 60$, par conséquent il existe $l' \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 60l' = 15 \times 4l'$, donc n est divisible par 15.

5. 24 est divisible par 6 et 8 mais 24 n'est pas divisible par 48.
6. On pose $n = 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10$.
$$1000 = 10^3 = (2 \times 5)^3 = 2^3 \times 5^3$$
$$n = 3 \times 2^2 \times 5 \times (2 \times 3) \times 7 \times 2^3 \times 3^2 \times (2 \times 5) = 2^6 \times 3^4 \times 5^2 \times 7 = 2^3 \times 5^2 \times 3^4 \times 7$$
$3^4 \times 7$ n'est pas divisible par 5 donc n n'est pas divisible par 1000.
7. $1600 = 16 \times 100 = 2^4 \times 4 \times 25 = 2^6 \times 5^2$
Donc $n = 1600 \times 3^4 \times 7$, n est un multiplie de 1600.
8. Soit N un entier dont l'écriture décimale est $a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0$ alors
$$N = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i 10^i$$

Exemple :
Si $N = 2534$ alors $N = 2000 + 500 + 30 + 4 = 2 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 3 \times 10 + 4$
L'énoncé ce traduit par :
$$a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1 + a_0 = 39$$
On rappelle qu'un nombre est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3, et qu'un nombre est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 9.
39 est divisible par 3 et pas par 9, d'où le résultat.

9. 18 est divisible par 6 et par 9 d'où le résultat.

Allez à : Exercice 4 :

Correction exercice 5 :

1. Faux, 12 est divisible par 4 et par 6 mais 12 n'est pas divisible par $4 \times 6 = 24$.
2. Soit n un entier divisible par p et q, (avec p et q premier entre eux) alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ et $l \in \mathbb{Z}$ tels que :
$$\begin{cases} n = kp \\ n = lq \end{cases} \Rightarrow kp = lq$$
p divise lq et p est premier avec q, d'après le théorème de Gauss, p divise l, il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $l = k'p$, ce que l'on remplace dans $n = lq$, $n = k'qp$ donc pq divise n.
3. Soit n divisible par a et par b, il existe $k \in \mathbb{Z}$ et $l \in \mathbb{Z}$ tels que $n = ka$ et $n = lb$, soit $d = PGCD(a, b)$, il existe $k' \in \mathbb{Z}$ et $l' \in \mathbb{Z}$ tels que $a = k'd$ et $b = l'd$ avec k' et l' premier entre eux.
$$\begin{cases} n = ka \\ n = lb \end{cases} \Rightarrow ka = lb \Rightarrow kk'd = ll'd \Rightarrow kk' = ll'$$
k' divise ll' et k' est premier avec l', d'après le théorème de Gauss k' divise l, il existe $k'' \in \mathbb{Z}$ tel que $l = k'k''$, ce que l'on remplace dans $n = lb$, alors $n = k'k''b$
Comme $ab = dm$ où $m = PPCM(a, b)$, $m = \frac{ab}{d} = \frac{(k'd)b}{d} = k'b$, donc
$$n = k''(k'b) = k''m$$
Ce qui montre bien que n est divisible par $PPCM(a, b)$.
4. $12 = 2 \times 6$, 4 divise 12 mais 4 ne divise pas 2 et ne divise pas 6. C'est faux
5. Soit p un nombre premier qui divise $n = ab$, en décomposant a et b en produit de facteurs premiers on sent bien que la réponse est vraie, on va faire un peu mieux.

Supposons que p ne divise pas b, donc p et b sont premiers entre eux, or p divise ab, d'après le théorème de Gauss p divise a. Cela suffit pour prouver que p divise a ou que p divise b.

6. 12 est divisible par 2 et par 6 mais 12 n'est pas divise par $2+6=8$.
7. Soient a, b et n trois entiers tels que n divise a et n divise b, il existe $k\in\mathbb{Z}$ et $l\in\mathbb{Z}$ tels que $a=kn$ et $b=ln$, alors $a+b=(k+l)n$ donc n divise $a+b$. La réponse est vraie.
8. Soient a et b deux entiers premiers entre eux, d'après l'identité de Bézout ils existent $u\in\mathbb{Z}$ et $v\in\mathbb{Z}$ tels que : $au+bv=1$, alors $au+bu-bu+bv=1\Leftrightarrow (a+b)u+(-u+v)b=1$ ce qui montre que $a+b$ et b sont premiers entre eux, en inversant les rôle de a et b on montre de même que $a+b$ et a sont premier entre eux.
9. C'est faux, 2 et 3 sont premiers entre eux mais aucun des deux n'est premier avec $2\times 3=6$.
10. Soient a et b deux entiers premiers entre eux, d'après 8. a est premier avec $a+b$ et b est premier avec $a+b$, autrement dit les diviseurs premiers de a ne sont pas des diviseurs premiers de $a+b$, de même les diviseurs premiers de b ne sont pas des diviseurs premiers de $a+b$, donc les diviseurs premiers de ab (ce sont ceux de a et ceux de b) ne sont pas des diviseurs premiers de $a+b$, ce qui montre que ab et $a+b$ sont premiers entre eux.

Autre méthode : On reprend 8°) et on pose $c=a+b$, il existe des entiers u, u', v et v' tels que :

$$\begin{cases} au+cv=1 \\ bu'+cv'=1 \end{cases} \Rightarrow (au+cv)(bu'+cv')=1\times 1=1 \Rightarrow abuu'+acuv'+bcvu'+c^2vv'=1$$

$$\Rightarrow ab(uu')+c(auv'+bvu'+cvv')=1$$

$uu'\in\mathbb{Z}, auv'+bvu'+cvv'\in\mathbb{Z}$ d'après Bézout ab et $c=a+b$ sont premiers entre eux.

Allez à : Exercice 5 :

Correction exercice 6 :

1. Soit $D=PGCD(a,b)$, d'après l'identité de Bézout il existe $u\in\mathbb{Z}$ et $v\in\mathbb{Z}$ tel que :
$$au+bv=D$$
Si d divise a et b alors il existe $k\in\mathbb{Z}$ et $l\in\mathbb{Z}$ tels que $a=kd$ et $b=ld$, ce que l'on remplace dans l'identité ci-dessus
$$kdu+ldv=D\Leftrightarrow d(ku+lv)=D$$
Donc d divise D.
2. $8\times 3+(-4)\times 5=4$, mais 4 n'est pas le $PGCD(3,5)=1$, c'est faux.
3. En reprenant l'exemple ci-dessus 4 ne divise pas $1=PGCD(3,5)$, c'est faux.
4. On pose $D=PGCD(a,b)$ il existe $a'\in\mathbb{Z}$ et $b'\in\mathbb{Z}$ tels que $a=a'D$ et $b=b'D$ avec a'et b' premier entre eux. Ce que l'on remplace dans $au+bv=d$
$$a'Du+b'Dv=d\Leftrightarrow D(a'u+b'v)=d$$
Donc D divise d. C'est vrai.
5. On pose $D=PGCD(a,b)$ il existe $a'\in\mathbb{Z}$ et $b'\in\mathbb{Z}$ tels que $a=a'D$ et $b=b'D$ avec a'et b' premier entre eux. Si D divise d il existe $k_d\in\mathbb{Z}$ tel que $d=k_dD$
$$au+bv=d\Leftrightarrow a'Du+b'Dv=k_dD\Leftrightarrow a'u+b'v=k_d \qquad (1)$$
Comme a' et b' sont premiers entre eux, il existe $u_0\in\mathbb{Z}$ et $v_0\in\mathbb{Z}$ tel que ;
$$a'u_0+b'v_0=1$$
En multipliant par k_d
$$a'k_du_0+b'k_dv_0=k_d \qquad (2)$$
En soustrayant (1) et (2) :
$$a'(u-k_du_0)+b'(v-k_dv_0)=0\Leftrightarrow a'(u-k_du_0)=-b'(v-k_dv_0)$$
a' divise $-b'(v-k_dv_0)$ et a' et b' sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss, a' divise $v-k_dv_0$ donc il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $v-k_dv_0=ka'\Leftrightarrow v=k_dv_0+ka'$, ce que l'on remplace dans $a'(u-k_du_0)=-b'(v-k_dv_0)\Leftrightarrow a'(u-k_du_0)=-b'ka'\Leftrightarrow u-k_du_0=-b'k\Leftrightarrow u=k_du_0-b'k$

La réciproque est évidente.

Tous les couples $(u,v)=(k_du_0-b'k,k_dv_0+ka')\quad k\in\mathbb{Z}$ sont solutions de
$$au+bv=d$$
Il y a une infinité de solutions.

Prenons un exemple pour « visualiser » les choses.
$$10\times 30+14\times(-21)=6$$
$$10\times 9+14\times(-6)=6$$

C'est-à-dire $a = 10$, $b = 14$, $d = 6$, on a deux couples (u, v) ($(30, -21)$ et $(9, -6)$) tels que :

$$10u + 14v = 6$$

6. On pose $D = PGCD(a, b)$.
   Si d est un multiple de $PGCD(a, b)$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $d = kD$, or d'après l'identité de Bézout il existe $u' \in \mathbb{Z}$ et $v' \in \mathbb{Z}$ tels que $au' + bv' = D$, en multipliant cette égalité par k on trouve $a(ku') + b(kv') = kD$, on pose alors $u = ku'$ et $v = kv'$ ce qui donne $au + bv = d$, on a montré l'une des deux implications

Réciproque : s'il existe un couple d'entiers (u, v), tel que $au + bv = d$.

On utilise 4°) et alors D divise d, autrement dit d est un multiple de $D = PGCD(a, b)$.

Allez à : Exercice 6 :

Correction exercice 7 :

1. Soit n un entier congru à 0 modulo 6, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 0 + 6k = 6k$, ce qui montre que 6 divise n (c'était vraiment évident).
2. $2 \times 3 = 6 \equiv 0 \ \ [6]$ et pourtant ni 2, ni 3 ne sont congrus à 0 modulo 6.
3. Soit n un entier congru à 5 modulo 6, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 5 + 6k$, alors
   $$n = -1 + 6 + 6k = -1 + 6(k + 1)$$
   Ce qui montre que n est congru à -1 modulo 6. (On peut affirmer ceci sans faire la démonstration ci-dessus).
   Maintenant on va utiliser les propriétés des congruences
   $$n \equiv -1 \ \ [6] \Rightarrow n^{2p} \equiv (-1)^{2p} \ \ [6] \equiv 1 \ \ [6]$$
   C'est bien cela, les puissances paires de n sont congrus à -1 modulo 6.
4. Si $a \equiv 4 \ \ [6]$ et $b \equiv 4 \ \ [6]$ alors $a + b \equiv 4 + 4 \ \ [6] \equiv 8 \ \ [6] \equiv 2 \ \ [6]$
5. Si $a \equiv 4 \ \ [6]$ et $b \equiv 4 \ \ [6]$ alors $ab \equiv 4 \times 4 \ \ [6] \equiv 16 \ \ [6] \equiv 4 \ \ [6]$
   L'affirmation est fausse.
6. D'après le 5. $a^2 \equiv 4 \ \ [6]$, puis par une récurrence très simple, $a^n \equiv 4 \ \ [6]$.
   L'affirmation est vraie.

Allez à : Exercice 7 :

Correction exercice 8 :

1. Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$ tels que $ab \equiv 0 \ \ [5]$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $ab = 5k$
   Supposons que a ne soit pas un multiple de 5, 5 étant premier, a et 5 sont premiers entre eux, de plus 5 divise $5a$, d'après le théorème de Gauss 5 divise b, autrement dit b est un multiple de 5. Cela suffit à montrer que a ou b est un multiple de 5.
2. Soit $a \in \mathbb{Z}$ tels que $a \equiv 2 \ \ [5]$, $a^2 \equiv 2^2 \ \ [5] \equiv 4 \ \ [5] \equiv -1 \ \ [5]$, $a^4 \equiv (-1)^2 \ \ [5] \equiv 1 \ \ [5]$.
3. Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$ tels que $a \equiv 2 \ \ [5]$ et $b \equiv 2 \ \ [5]$ alors $a + b \equiv 2 + 2 \ \ [5] \equiv 4 \ \ [5]$, l'affirmation est fausse.
4. Soit $a \in \mathbb{Z}$ non multiple de 5, a et 5 sont premier entre eux, d'après l'identité de Bézout, il existe $u \in \mathbb{Z}$ et $v \in \mathbb{Z}$ tels que $au + 5v = 1$, on en déduit que $au = 1 + 5(-v)$, autrement dit $au \equiv 1 \ \ [5]$.
   L'affirmation est vraie, pour tout $a \in \mathbb{Z}$ il existe $u \in \mathbb{Z}$ tel que : $au \equiv 1 \ \ [5]$
5. $3 \times 3 = 9 \equiv -1 \ \ [5]$, l'affirmation est fausse.
6. $0^2 = 0 \equiv 0 \ \ [5]$, $1^2 = 1 \equiv 1 \ \ [5]$, $2^2 = 4 \equiv -1 \ \ [5]$, $3^3 = 9 \equiv -1 \ \ [5]$, $4^2 = 16 \equiv 1 \ \ [5]$.
   Pour les autres entiers, ils sont congrus soit à $0 \ \ [5]$, soit à $1 \ \ [5]$, soit à $2 \ \ [5]$, soit à $3 \ \ [5]$, soit à $4 \ \ [5]$, donc leur carré est congru à $0^2 \ \ [5]$, soit à $1^2 \ \ [5]$, soit $2^2 \ \ [5]$, soit à $3^2 \ \ [5]$, soit à $4^2 \ \ [5]$, par conséquent il n'y a pas d'entier dont le carré soit congru à 2 modulo 5.
7. C'est faux $0^4 = 0 \ \ [5]$.
8. Au 6. on a vu que tous les entiers non multiples de 5 avait un carré congru à -1 ou 1. Dont le carré du carré (la puissance 4ième) est congru à 1 modulo 5.

Allez à : Exercice 8 :

Correction exercice 9 :

1. La contraposée de cette proposition est :
   Si n n'est pas premier alors n est divisible par au moins un nombre inférieur ou égal à $\sqrt{n}$.

Démontrons cela.

n n'est pas premier, il existe $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$ tels que $n = ab$ et $a \geq b$ (Si cela ne vous plait pas, on peut prendre $a \leq b$), donc $n \geq b^2$, par conséquent $\sqrt{n} \geq b$.

2. $n! + 2$ est divisible par 2, $n! + 3$ est divisible par 3,…, $n! + n$ est divisible par n, ces nombres ne sont pas premiers.
3. $n! + 2$, $n! + 3$,…,$n! + n$ sont $n - 1$ entiers consécutifs non premiers, ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe n entiers consécutifs non premiers. $((n+1)! + 2, (n+1)! + 3, \ldots, (n+1)! + (n+1))$.

Allez à : Exercice 9 :

Correction exercice 10 :

Réfléchissons un peu avant de nous lancer dans les calculs. Il y a 7 jours par semaines, la congruence modulo 7 va nous rendre service.

Ensuite on va compter le nombre de jours entre le premier Janvier 2007 (ce jour là compris) et un jour quelconque.

Il y a $n_1 = 31$ jours en Janvier, $n_2 = 28$ (ou $n_2' = 29$ en Février 2008), $n_3 = 31$ jours en Mars,…

$$a = n_1 = n_3 = n_5 = n_7 = n_8 = n_{10} = n_{12} = 31 \equiv 3 \ [7]$$
$$n_2 = 28 \equiv 0 \ [7] \ ou \ n_2' = 29 \equiv 1 \quad [7]$$
$$b = n_4 = n_6 = n_9 = n_{11} = 30 \equiv 2 \quad [7]$$

Si on s'y prend de cette façon (ce n'est pas la seule façon de faire), si on tombe sur un nombre congru à 1 c'est un Lundi, si le nombre est congru à 2 c'est un Mardi, si le nombre est congru à 3 c'est un Mercredi, si le nombre est congru à 4 c'est un Jeudi, si le nombre est congru à 5 c'est un Vendredi, si le nombre est congru à 6 c'est un Samedi et enfin si le nombre est congru à 6 c'est un Dimanche.

1. Le nombre de jour entre le premier Janvier 2007 (ce jour là compris) et le 2 Juillet 2007 est :
$$N = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 + 2 = 3a + n_2 + 2b + 2 \equiv 9 + 0 + 4 + 2 \quad [7] \equiv 13 \ [7] \equiv 1 \quad [7]$$
Le 2 Juillet 2007 était un Lundi.
2. Le nombre de jour entre le premier Janvier 2007 (ce jour là compris) et le 15 Janvier 2008 est :
$$\begin{aligned} N &= n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 + n_7 + n_8 + n_9 + n_{10} + n_{11} + n_{12} + 15 = 7a + n_2 + 4b + 15 \\ &\equiv 0 \times 3 + 0 + 4 \times 2 + 1 \quad [7] \equiv 2 \ [7] \end{aligned}$$
Le 15 Janvier 2008 était un Mardi.
3. Le nombre de jour entre le premier Janvier 2007 (ce jour là compris) et le 19 Mars 2008 est :
$$\begin{aligned} N &= n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 + n_7 + n_8 + n_9 + n_{10} + n_{11} + n_{12} + n_1 + n_2' + 19 \\ &= 8a + n_2 + n_2' + 4b + 19 \equiv 1 \times 3 + +0 + 1 + 4 \times 2 + 5 \quad [7] \equiv 3 \ [7] \end{aligned}$$
Le 19 Mars 2008 était un Mercredi.
4. Le nombre de jour entre le premier Janvier 2007 (ce jour là compris) et le 14 Juillet 2010 est :
On va un peu raccourcir, du 1 Janvier 2007 au 31 Décembre 2009, cela fait 3 ans, dont une année bissextile.
$$\begin{aligned} N &= 3(n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 + n_7 + n_8 + n_9 + n_{10} + n_{11} + n_{12}) + 1 + n_1 + n_2 + n_3 + n_4 \\ &+ n_5 + n_6 + 14 = 3(7a + n_2 + 4b) + 1 + 3a + n_2 + 2b + 14 \\ &= 24a + 4n_2 + 14b + 15 \equiv 3 \times 3 + 4 \times 0 + 0 \times 2 + 1 \quad [7] \equiv 3 \quad [7] \end{aligned}$$
Le 14 Juillet 2010 était un Mercredi.
5. Le nombre de jour entre le premier Janvier 2007 (ce jour là compris) et le 26 Août 2011 est :
On va un peu raccourcir, du 1 Janvier 2007 au 31 Décembre 2010, cela fait 4 ans, dont une année bissextile.
$$\begin{aligned} N &= 4(n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 + n_7 + n_8 + n_9 + n_{10} + n_{11} + n_{12}) + 1 + n_1 + n_2 + n_3 + n_4 \\ &+ n_5 + n_6 + n_7 + 26 = 4(7a + n_2 + 4b) + 1 + 4a + n_2 + 2b + 26 \\ &= 32a + 5n_2 + 18b + 27 \equiv 4 \times 3 + 5 \times 0 + 4 \times 2 + 6 \quad [7] \equiv 5 \ [7] \end{aligned}$$
Le 26 Août 2011 sera un Vendredi.

Allez à : Exercice 10 :

Correction exercice 11 :

Soit n ce nombre, il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $n = 7q + 5$ et $q = 7 \times 12 + 3 = 87$ donc
$$n = 7 \times 87 + 5 = 611$$

Allez à : Exercice 11 :

Correction exercice 12 :

$$842 = 256 \times 3 + 74$$

Donc

$$96842 = 256 \times 375 + 3 \times 256 + 74 = 256 \times 378 + 74$$

Le reste de la division euclidienne de 96842 par 256 est 74.

$$842 = 375 \times 2 + 92$$

Donc

$$96842 = 256 \times 375 + 375 \times 2 + 92 = 375 \times 258 + 92$$

Le reste de la division euclidienne de 96842 par 375 est 92.

Allez à : Exercice 12 :

Correction exercice 13 :

$$\begin{aligned} N = 3379026 \times 609806770 &= (198765 \times 17 + 21) \times (35870986 \times 17 + 8) \\ &= 198765 \times 17 \times 35870986 \times 17 + 198765 \times 17 \times 8 + 21 \times 35870986 \times 17 + 21 \\ &\times 8 = 17 \times (198765 \times 17 \times 35870986 + 198765 \times 8 + 21 \times 35870986) + 21 \times 8 \\ &= 17 \times (198765 \times 17 \times 35870986 + 198765 \times 8 + 21 \times 35870986) + (17 + 4) \\ &\times 8 \\ &= 17 \times (198765 \times 17 \times 35870986 + 198765 \times 8 + 21 \times 35870986 + 8) + 4 \times 8 \\ &= 17 \times (198765 \times 17 \times 35870986 + 198765 \times 8 + 21 \times 35870986 + 8) + 32 \\ &= 17 \times (198765 \times 17 \times 35870986 + 198765 \times 8 + 21 \times 35870986 + 8) + 17 + 15 \\ &= 17 \times (198765 \times 17 \times 35870986 + 198765 \times 8 + 21 \times 35870986 + 8 + 1) + 15 \end{aligned}$$

Comme $0 \leq 15 < 17$.

Le reste de la division euclidienne de N par 17 est 15.

Autre méthode

En utilisant les congruences modulo 17.

$$3379026 = 198765 \times 17 + 21 \equiv 21 \quad [17] \equiv 4 \quad [17]$$

$$609806770 = 35870986 \times 17 + 8 \equiv 8 \quad [17]$$

Donc $N \equiv 4 \times 8 \quad [17] \equiv 32 \quad [17] \equiv 15 \quad [17]$

Comme $0 \leq 15 < 17$.

Le reste de la division euclidienne de N par 17 est 15.

Allez à : Exercice 13 :

Correction exercice 14 :

La méthode classique veut que l'on regarde si 2 divise ce nombre, si la réponse est oui, on divise par 2 sinon on regarde si 3 divise ce nombre, si la réponse est oui on divise par 3, sinon on regarde si 5 divise ce nombre, etc…pour tous les nombres premiers jusqu'à la partie entière de la racine carrée de ce nombre.

$$60 = 2 \times 30 = 2^2 \times 15 = 2^2 \times 3 \times 5$$

$$360 = 2 \times 180 = 2^2 \times 90 = 2^3 \times 45 = 2^3 \times 3 \times 15 = 2^3 \times 3^2 \times 5$$

$$2400 = 2 \times 1200 = 2^2 \times 600 = 2^3 \times 300 = 2^4 \times 150 = 2^5 \times 75 = 2^5 \times 3 \times 25 = 2^5 \times 3 \times 5^2$$

$$4675 = 5 \times 935 = 5^2 \times 187 = 5^2 \times 11 \times 17$$

$$\begin{aligned} 9828 &= 2 \times 4914 = 2^2 \times 2457 = 2^2 \times 3 \times 819 = 2^2 \times 3^2 \times 273 = 2^2 \times 3^3 \times 91 \\ &= 2^2 \times 3^3 \times 7 \times 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 15200 &= 2 \times 7600 = 2^2 \times 3800 = 2^3 \times 1900 = 2^4 \times 950 = 2^5 \times 475 = 2^5 \times 5 \times 95 \\ &= 2^5 \times 5^2 \times 19 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 45864 &= 2 \times 22932 = 2^2 \times 11466 = 2^3 \times 5733 = 2^3 \times 3 \times 1911 = 2^3 \times 3^2 \times 637 \\ &= 2^3 \times 3^2 \times 7 \times 91 = 2^3 \times 3^2 \times 7^2 \times 13 \end{aligned}$$

$$792792$$

Cela risque d'être pénible si on utilise la méthode classique, on remarque que :

$$792792 = 792 \times 1001$$

$$1001 = 7 \times 143 = 7 \times 11 \times 13$$

$$792 = 2 \times 396 = 2^2 \times 198 = 2^3 \times 99 = 2^3 \times 3 \times 33 = 2^3 \times 3^2 \times 11$$

Donc

$$792792 = 7 \times 11 \times 13 \times 2^3 \times 3^2 \times 11 = 2^3 \times 3^2 \times 7 \times 11^2 \times 13$$

Allez à : Exercice 14 :

Correction exercice 15 :

$2244 = 2 \times 1089 + 66$, $1089 = 16 \times 66 + 33$ et $66 = 2 \times 33 + 0$

Donc $PGCD(2244,1089) = 33$ et

$$33 = 1089 - 16 \times 66 = 1089 - 16 \times (2244 - 2 \times 1089) = -16 \times 2244 + 33 \times 1089$$

Allez à : Exercice 15 :

Correction exercice 16 :

a)

$$84 = 1 \times 60 + 24$$
$$60 = 2 \times 24 + 12$$
$$24 = 2 \times 12$$
$$PGCD(84,60) = 12$$

C'est le dernier reste non nul.

$$PPCM(84,60) = \frac{84 \times 60}{PGCD(84,60)} = \frac{84 \times 60}{12} = 420$$

$$12 = 60 - 2 \times 24 = 60 - 2 \times (84 - 1 \times 60) = -2 \times 84 + 3 \times 60$$

Une solution particulière de $60u + 84v = 12$ est :

$$3 \times 60 + (-2) \times 84 = 12$$

On fait la soustraction de $60u + 84v = 12$ avec $3 \times 60 + (-2) \times 84 = 12$

$$60(u-3) + 84(v+2) = 0 \Leftrightarrow 60(u-3) = -84(v+2) \Leftrightarrow 5(u-3) = -7(v+2)$$

5 divise $-7(v+2)$ et 5 est premier avec 7, d'après le théorème de Gauss 5 divise $-(v+2)$, par conséquent il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $-(v+2) = 5k \Leftrightarrow v = -2 - 5k$, ce que l'on remplace dans $5(u-3) = -7(v+2)$, ce qui donne $5(u-3) = 7 \times 5k \Leftrightarrow u - 3 = 7k \Leftrightarrow u = 3 + 7k$.

Réciproque

$$60(u-3) + 84(v+2) = 60(3 + 7k - 3) + 84(-2 - 5k + 2) = 60 \times 7k - 84 \times 5k = 0$$

L'ensemble des couples (u, v) recherchés sont :

$$(3 + 7k, -2 - 5k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$60 = 2^2 \times 3 \times 5 \quad et \quad 84 = 2^2 \times 3 \times 7$$
$$PGCD(60,84) = 2^2 \times 3 = 12$$
$$PPCM(60,84) = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7 = 420$$

Allez à : Exercice 16 :

b)

$$360 = 1 \times 240 + 120$$
$$240 = 2 \times 120$$
$$PGCD(360,240) = 120$$

C'est le dernier reste non nul

$$PPCM(360,240) = \frac{360 \times 240}{120} = 720$$

$$120 = 1 \times 360 - 1 \times 240$$

Une solution particulière de $360u + 240v = 120$ est $120 = 1 \times 360 - 1 \times 240$

On fait la soustraction $360u + 240v = 120$ avec $1 \times 360 - 1 \times 240 = 120$

$$360(u-1) + 240(v+1) = 0 \Leftrightarrow 360(u-1) = -240(v+1) \Leftrightarrow 3(u-1) = -2(v+1)$$

3 divise $-2(v+1)$ et 3 est premier avec 2, d'après le théorème de Gauss 3 divise $-(v+1)$, par conséquent il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $-(v+1) = 3k \Leftrightarrow v = -1 - 3k$, ce que l'on remplace dans $3(u-1) = -2(v+1)$, ce qui donne $3(u-1) = 2 \times 3k \Leftrightarrow u - 1 = 2k \Leftrightarrow u = 1 + 2k$.

La réciproque est évidente (voir a)), l'ensemble des couples (u, v) recherchés sont :

$$(1+2k,-1-3k),\quad k\in\mathbb{Z}$$

$$360=2^3\times 3^2\times 5$$

$$240=2^4\times 3\times 5$$

$$PGCD(360,240)=2^3\times 3\times 5=120$$

$$PPCM(360,240)=2^4\times 3^2\times 5=720$$

Allez à : Exercice 16 :

c)

$$171=1\times 160+11$$

$$160=14\times 11+6$$

$$11=1\times 6+5$$

$$6=1\times 5+1$$

$$5=5\times 1$$

$$PGCD(171,160)=1$$

C'est le dernier reste non nul.

$$PPCM(171,160)=171\times 160=27360$$

$$1=6-1\times 5=6-1\times(11-1\times 6)=-1\times 11+2\times 6=-1\times 11+2\times(160-14\times 11)$$
$$=2\times 160-29\times 11=2\times 160-29\times(171-1\times 160)=-29\times 171+31\times 160$$

$$-29\times 171+31\times 160=1$$

Une solution particulière de $160u+171v=1$ est $31\times 160-29\times 171=1$.

On fait la soustraction de $160u+171v=1$ par $31\times 160-29\times 171=1$

$$160(u-31)+171(v+29)+0\Leftrightarrow 160(u-31)=-171(v+29)$$

160 divise $-171(v+29)$ et 160 est premier avec 171, d'après le théorème de Gauss 160 divise $-(v+29)$, il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $-(v+29)=160k\Leftrightarrow v=-29-160k$, ce que l'on remplace dans

$$160(u-31)=-171(v+29)\Leftrightarrow 160(u-31)=171\times 160k\Leftrightarrow u-31=171k\Leftrightarrow u=31+171k$$

La réciproque étant toujours aussi évidente, les couples (u, v) recherchés sont :

$$(31+171k,-29-160k),\quad k\in\mathbb{Z}$$

$$171=3^2\times 19$$

$$160=2^5\times 5$$

$$PGCD(171,160)=1$$

$$PPCM(171,160)=2^5\times 3^2\times 5\times 19=27360$$

Allez à : Exercice 16 :

d)

$$360=1\times 345+15$$

$$345=23\times 15$$

$$PGCD(360,345)=15$$

$$PPCM(360,345)=\frac{360\times 345}{15}=8280$$

$$15=1\times 360-1\times 345$$

Une solution particulière de $360u+345v=15$ est $1\times 360-1\times 345=15$

On fait la soustraction de $360u+345v=15$ par $1\times 360-1\times 345=15$

$$360(u-1)+345(v+1)=0\Leftrightarrow 360(u-1)=-345(v+1)\Leftrightarrow 24(u-1)=-23(v+1)$$

24 divise $-23(v+1)$ et 24 est premier avec 23, d'après le théorème de Gauss 24 divise $-(v+1)$, il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $-(v+1)=24k\Leftrightarrow v=-1-24k$, ce que l'on remplace dans

$$24(u-1)=-23(v+1)\Leftrightarrow 24(u-1)=23\times 24k\Leftrightarrow u-1=23k\Leftrightarrow u=1+23k$$

Comme d'habitude la réciproque est évidente, les couples (u, v) recherchés sont

$$(1+23k,-1-24k),\quad k\in\mathbb{Z}$$
$$360=2^3\times 3^2\times 5$$
$$345=3\times 5\times 23$$
$$PGCD(360{,}345)=3\times 5=15$$
$$PPCM(360{,}345)=2^3\times 3^2\times 5\times 23=8280$$

Allez à : Exercice 16 :

e)

$$520=1\times 325+195$$
$$325=1\times 195+130$$
$$195=1\times 130+65$$
$$130=2\times 65$$
$$PGCD(520{,}325)=65$$
$$PPCM(520{,}325)=\frac{520\times 325}{65}=2600$$
$$65=195-1\times 130=195-1\times(325-1\times 195)=-1\times 325+2\times 195$$
$$=-1\times 325+2\times(520-1\times 325)=2\times 520-3\times 325$$

Une solution particulière de $325u+520v=65$ est $-3\times 325+2\times 520=65$

On fait la soustraction de $325u+520v=65$ par $-3\times 325+2\times 520=65$

$$325(u+3)+520(v-2)=0\Leftrightarrow 325(u+3)=-520(v-2)\Leftrightarrow 5(u+3)=-8(v-2)$$

5 divise $-8(v-2)$ et 5 est premier avec 8, d'après le théorème de Gauss 5 divise $-(v-2)$, il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $-(v-2)=5k\Leftrightarrow v=2-5k$, ce que l'on remplace dans

$$5(u+3)=-8(v-2)\Leftrightarrow 5(u+3)=8\times 5k\Leftrightarrow u+3=8k\Leftrightarrow u=-3+8k$$

Les couples recherchés sont

$$(-3+8k,2-5k),\quad k\in\mathbb{Z}$$
$$520=2^3\times 5\times 13$$
$$325=5^2\times 13$$
$$PGCD(325{,}520)=5\times 13=65$$
$$PPCM(325{,}520)=2^3\times 5^2\times 13=2600$$

Remarque : pour faire ce genre de calculs la calculatrice est totalement inutile, il suffit de bien s'y prendre et le calcul est on ne peut plus simple :

$$2^3\times 5^2\times 13=(2\times 5)\times(2\times 5)\times 2\times 13=10\times 10\times 26=2600$$

Cela se fait de tête !

Allez à : Exercice 16 :

f)

$$720=2\times 252+216$$
$$252=1\times 216+36$$
$$216=6\times 36$$
$$PGCD(720{,}252)=36$$
$$PPCM(720{,}252)=\frac{720\times 252}{36}=5040$$
$$36=252-1\times 216=252-1\times(720-2\times 252)=-1\times 720+3\times 252$$

Une solution particulière de $720u+252v=36$ est $-1\times 720+3\times 252=36$

On fait la soustraction de $720u+252v=36$ par $-1\times 720+3\times 252=36$

$$720(u+1)+252(v-3)=0\Leftrightarrow 720(u+1)=-252(v-3)\Leftrightarrow 20(u+1)=-7(v-3)$$

20 divise $-7(v-3)$ et 20 est premier avec $-7(v-3)$, d'après le théorème de Gauss 20 divise $-(v-3)$, il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $-(v-3)=20k\Leftrightarrow v=3-20k$, ce que l'on remplace dans

$$20(u+1)=-7(v-3)\Leftrightarrow 20(u+1)=7\times 20k\Leftrightarrow u+1=7k\Leftrightarrow u=-1+7k$$

Les couples (u,v) recherchés sont

$$(-1+7k,3-20k),\quad k\in\mathbb{Z}$$
$$720=2^4\times 3^2\times 5$$
$$252=2^2\times 3^2\times 7$$
$$PGCD(720,252)=2^2\times 3^2=36$$
$$PPCM(720,252)=2^4\times 3^2\times 5\times 7=5040$$

Allez à : Exercice 16 :

g)

$$955=5\times 183+40$$
$$183=4\times 40+23$$
$$40=1\times 23+17$$
$$23=1\times 17+6$$
$$17=2\times 6+5$$
$$6=1\times 5+1$$
$$5=5\times 1$$
$$PGCD(955,183)=1$$
$$PPCM(955,183)=955\times 183=174765$$
$$\begin{aligned}1&=6-1\times 5=6-1\times(17-2\times 6)=-1\times 17+3\times 6=-1\times 17+3\times(23-1\times 17)\\&=3\times 23-4\times 17=3\times 23-4\times(40-1\times 23)=-4\times 40+7\times 23\\&=-4\times 40+7\times(183-4\times 40)=7\times 183-32\times 40\\&=7\times 183-32\times(955-5\times 183)=-32\times 955+167\times 183\end{aligned}$$

Une solution particulière de $955u+183v=1$ est $-32\times 955+167\times 183=1$

On fait la soustraction de $955u+183v=1$ par $-32\times 955+167\times 183=1$

$$955(u+32)+183(v-167)=0\Leftrightarrow 955(u+32)=-183(v-167)$$

955 divise $-183(v-167)$ et 955 est premier avec 183, d'après le théorème de Gauss 955 divise $-(v-167)$, il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $-(v-167)=955k\Leftrightarrow v=167-955k$, ce que l'on remplace dans

$$955(u+32)=-183(v-167)\Leftrightarrow 955(u+32)=183\times 955k\Leftrightarrow u+32=183k\Leftrightarrow u=-32+183k$$

Les couples (u,v) recherchés sont

$$(-32+183k,167-955k),\quad k\in\mathbb{Z}$$
$$955=5\times 191$$

191 est premier mais ce n'est pas si évident, ce nombre n'est pas divise par 2, ni par 3, ni par 5, $\frac{191}{7}=27,28\ldots$ donc ni par 7, $\frac{191}{11}=17,36\ldots$ donc ni par 11, $\frac{191}{13}=14,69\ldots$ donc ni par 13, $\frac{191}{17}=11,23\ldots$ donc ni par 17 et là on s'arrête parce que $11,23\ldots<17$ on a vu ce résultat, mais c'est assez intuitif, en effet si ce nombre était divisible par un nombre premier supérieur ou égal à 17 le résultat serait inférieur à $11,23\ldots$ et du coup on s'en serait déjà rendu compte.

$$183=3\times 61$$

61 est premier, c'est l'occasion de rappeler que tous les nombres inférieurs à 100 qui « ont l'air premier » (c'est-à-dire qui ne sont divisibles ni par 2, ni par 3, ni par 5, ni par 7 en étant inférieur à 77) sont premiers sauf 91 car $91=7\times 13$.

$$PGCD(955,183)=1$$
$$PGCD(955,183)=3\times 5\times 61\times 191=174765$$

Là, il faut une machine.

Allez à : Exercice 16 :

h)

$$1665=1\times 1035+630$$
$$1035=1\times 630+405$$
$$630=1\times 405+225$$

$$405 = 1 \times 225 + 180$$
$$225 = 1 \times 180 + 45$$
$$180 = 4 \times 45$$
$$PGCD(1665{,}1065) = 45$$
$$PPCM(1665{,}1035) = \frac{1665 \times 1035}{45} = 38295$$
$$\begin{aligned}45 = 225 - 1 \times 180 = 225 - 1 \times (405 - 1 \times 225) &= -1 \times 405 + 2 \times 225\\ &= -1 \times 405 + 2 \times (630 - 1 \times 405) = 2 \times 630 - 3 \times 405\\ &= 2 \times 630 - 3 \times (1035 - 1 \times 630) = -3 \times 1035 + 5 \times 630\\ &= -3 \times 1035 + 5 \times (1665 - 1 \times 1035) = 5 \times 1665 - 8 \times 1035\end{aligned}$$

Une solution particulière de $1665u + 1035v = 45$ est $5 \times 1665 - 8 \times 1035 = 45$

On fait la soustraction de $1665u + 1035v = 45$ par $5 \times 1665 - 8 \times 1035 = 45$

$$1665(u-5) + 1035(v+8) = 0 \Leftrightarrow 1665(u-5) = -1035(v+8) \Leftrightarrow 37(u-5) = -23(v+8)$$

37 divise $-23(v+8)$ et 37 est premier avec 23, d'après le théorème de Gauss 37 divise $-(v+8)$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $-(v+8) = 37k \Leftrightarrow v = -8 - 37k$, ce que l'on remplace dans

$$37(u-5) = -23(v+8) \Leftrightarrow 37(u-5) = 23 \times 37k \Leftrightarrow u - 5 = 23k \Leftrightarrow u = 5 + 23k$$

Les couples (u, v) recherchés sont

$$(5 + 23k, -8 - 37k), \quad k \in \mathbb{Z}$$
$$1665 = 3^2 \times 5 \times 37$$
$$1035 = 3^2 \times 5 \times 23$$
$$PGCD(1665{,}1035) = 3^2 \times 5 = 45$$
$$PPCM(1665{,}1035) = 3^2 \times 5 \times 23 \times 37 = 38295$$

Allez à : Exercice 16 :

i)

$a = 18480$, $b = 9828$

$$18480 = 1 \times 9828 + 8652$$
$$9828 = 1 \times 8652 + 1176$$
$$8652 = 7 \times 1176 + 420$$
$$1176 = 2 \times 420 + 336$$
$$420 = 1 \times 336 + 84$$
$$336 = 4 \times 84$$
$$PGCD(18480{,}9828) = 84$$
$$PPCM(18480{,}9828) = \frac{18480 \times 9828}{84} = 2162160$$
$$\begin{aligned}84 = 420 - 1 \times 336 = 420 - 1 \times (1176 - 2 \times 420) &= -1 \times 1176 + 3 \times 420\\ &= -1 \times 1176 + 3 \times (8652 - 7 \times 1176) = 3 \times 8652 - 22 \times 1176\\ &= 3 \times 8652 - 22 \times (9828 - 1 \times 8652) = -22 \times 9828 + 25 \times 8652\\ &= -22 \times 9828 + 25 \times (18480 - 1 \times 9828) = 25 \times 18480 - 47 \times 9828\end{aligned}$$

Une solution particulière de $18480u + 9828v = 84$ est $25 \times 18480 - 47 \times 9828 = 84$

On fait la division de $18480u + 9828v = 84$ par $25 \times 18480 - 47 \times 9828 = 84$

$$18480(u-25) + 9828(v+47) = 0 \Leftrightarrow 18480(u-25) = -9828(v+47)$$
$$\Leftrightarrow 220(u-25) = -117(v+47)$$

220 divise $-117(v+47)$ et 220 est premier avec 117, d'après le théorème de Gauss 220 divise $-(v+47)$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $-(v+47) = 220k \Leftrightarrow v = -47 - 220k$, ce que l'on remplace dans

$$220(u-25) = -117(v+47) \Leftrightarrow 220(u-25) = 117 \times 220k \Leftrightarrow u - 25 = 117k \Leftrightarrow u = 25 + 117k$$

Les couples (u, v) recherchés sont

$$(25 + 117k, -47 - 220k), \quad k \in \mathbb{Z}$$
$$18480 = 2^4 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$$
$$9828 = 2^2 \times 3^3 \times 7 \times 13$$
$$PGCD(18480{,}9828) = 2^2 \times 3 \times 7 = 84$$
$$PPCM(18480{,}9828) = 2^4 \times 3^3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 = 2162160$$

Allez à : Exercice 16 :

Correction exercice 17 :

1. $8303 = 3 \times 2717 + 152$; $2717 = 17 \times 152 + 133$; $152 = 1 \times 133 + 19$; $133 = 7 \times 19 + 0$.
$$19 = 152 - 1 \times 133 = 152 - 1 \times (2717 - 17 \times 152) = -1 \times 2717 + 18 \times 152$$
$$= -1 \times 2717 + 18 \times (8303 - 3 \times 2717) = 18 \times 8303 - 55 \times 2717$$
Et $D = PGCD(8303,2717) = 19$
2. $M = \frac{8303 \times 2717}{19} = 1187329$
3. $1001 = 3 \times 315 + 56$; $315 = 5 \times 56 + 35$; $56 = 1 \times 35 + 21$; $35 = 1 \times 21 + 14$; $21 = 1 \times 14 + 7$; $14 = 2 \times 7 + 0$.
$$7 = 21 - 1 \times 14 = 21 - 1 \times (35 - 1 \times 21) = -1 \times 35 + 2 \times 21 = -1 \times 35 + 2 \times (56 - 1 \times 35)$$
$$= 2 \times 56 - 3 \times 35 = 2 \times 56 - 3 \times (315 - 5 \times 56) = -3 \times 315 + 17 \times 56$$
$$= -3 \times 315 + 17 \times (1001 - 3 \times 315) = 17 \times 1001 - 54 \times 315$$
4. $2244 = 2 \times 1089 + 66$, $1089 = 16 \times 66 + 33$ et $66 = 2 \times 33 + 0$
Donc $PGCD(2244,1089) = 33$ et
$$33 = 1089 - 16 \times 66 = 1089 - 16 \times (2244 - 2 \times 1089) = -16 \times 2244 + 33 \times 1089$$

Allez à : Exercice 17 :

Correction exercice 18 :

1. Une identité de Bézout entre 3 et 5 est $2 \times 3 - 5 = 1$, on multiplie cette égalité par 13 :
$$26 \times 3 - 13 \times 5 = 13$$
On soustrait $3x - 5y = 13$ et $26 \times 3 - 13 \times 5 = 13$:
$$3(x - 26) - 5(y - 13) = 0 \Leftrightarrow 3(x - 26) = 5(y - 13)$$
D'après le théorème de Gauss, comme 3 divise $5(y - 13)$ et que 3 et 5 sont premiers entre eux, 3 divise $y - 13$, il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $y - 13 = 3k$, d'où $y = 13 + 3k$, on remplace cela dans $3(x - 26) = 5(y - 13)$, cela donne $3(x - 26) = 5 \times 3k \Leftrightarrow x - 26 = 5k \Leftrightarrow x = 26 + 5k$. Les solutions sont :
$$S = \{(26 + 5k, 13 + 3k), k \in \mathbb{Z}\}$$
2. Il faut d'abord trouver une solution particulière de $212x + 45y = 3$, pour cela on va écrire une équation de Bézout entre 212 et 45, ici c'est moins évident que dans le 1.
$212 = 4 \times 45 + 32$; $45 = 1 \times 32 + 13$; $32 = 2 \times 13 + 6$; $13 = 2 \times 6 + 1$; $6 = 6 \times 1 + 0$
$$1 = 13 - 2 \times 6 = 13 - 2 \times (32 - 2 \times 13) = -2 \times 32 + 5 \times 13 = -2 \times 32 + 5 \times (45 - 1 \times 32)$$
$$= 5 \times 45 - 7 \times 32 = 5 \times 45 - 7 \times (212 - 4 \times 45) = -7 \times 212 + 33 \times 45$$
On a $1 = -7 \times 212 + 33 \times 45$, on multiplie cette égalité par 3 : $3 = -21 \times 212 + 99 \times 45$
On soustrait cette égalité à $212x + 45y = 3$, on trouve
$$(-21 - x) \times 212 + (99 - y) \times 45 = 0 \Leftrightarrow 45(99 - y) = 212(21 + x)$$
D'après le théorème de Gauss, comme 45 et 212 sont premiers entre eux et que 45 divise $212(21 + x)$, 45 divise $21 + x$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $21 + x = 45k \Leftrightarrow x = -21 + 45k$, on remplace cette égalité dans $45(99 - y) = 212(21 + x)$, on trouve alors que :
$$45(99 - y) = 212 \times 45k \Leftrightarrow 99 - y = 212k \Leftrightarrow y = -212k + 99$$
L'ensemble des solutions est $S = \{(-21 + 45k, 99 - 212k)\}$
3. $42 = 3 \times 14$ et $45 = 3 \times 15$ donc le $(42,45) = 3$ or 4 n'est pas un multiple de 3, donc il n'y a pas de solution.
4.
$$7 = 1 \times 5 + 2$$
$$5 = 2 \times 2 + 1$$
$$2 = 2 \times 1 + 0$$

Donc $1 = 5 - 2 \times 2 = 5 - 2 \times (7 - 1 \times 5) = -2 \times 7 + 3 \times 5$

On multiplie cette égalité par 3 : $-6 \times 7 + 9 \times 5 = 3$. On soustrayant $7x + 5y = 3$ et $-6 \times 7 + 9 \times 5 = 3$ on trouve que : $7(x+6) + 5(y-9) = 0$, ce qui équivaut à $7(x+6) = -5(y-9)$, d'après le théorème de Gauss, 7 divise $5(y-9)$ et $7 \wedge 5 = 1$ donc 7 divise $y - 9$, il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $y - 9 = 7k$, ce que je remplace dans $7(x+6) = -5(y-9)$ ce qui donne $7(x+6) = -5 \times 7k$, puis en simplifiant par 7 : $x + 6 = -5k$.

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{(-6-5k, 9+7k), k \in \mathbb{Z}\}$

Allez à : Exercice 18 :

Correction exercice 19 :

1.

$$100^{100} = (2^2 \times 5^2)^{100} = 2^{200} \times 5^{200}$$

Les diviseurs positifs de 1000000 sont de la forme $2^k 5^l$ avec $k \in \{0,1,\dots,200\}$ et $l \in \{0,1,\dots,200\}$, il y a donc $201 \times 201 = (200+1)^2 = 4000 + 400 + 1 = 40401$ diviseurs positifs.

2. $101 = 3 \times 33 + 2$ donc $101 \equiv 2\ \ [3]$

$$101^{101} \equiv 2^{101}\ \ [3] \equiv (-1)^{101}\ [3] \equiv -1\ \ [3] \equiv 2\ \ [3]$$

$0 \leq 2 < 3$, donc le reste de la division euclidienne de 101^{101} par 3 est 2.

$101 = 4 \times 25 + 1$ donc $101 \equiv 1\ \ [5]$

$$101^{101} \equiv 1^{101}\ [5] \equiv 1\ [5]$$

$0 \leq 1 < 5$, donc le reste de la division euclidienne de 101^{101} par 5 est 1.

Première méthode

On pose $N = 101^{101}$, $N \equiv 2\ \ [3]$ et $N \equiv 1\ \ [5]$ donc il existe $k, l \in \mathbb{Z}$ tels que $N = 2 + 3k$ et $N = 1 + 5l$

On trouve alors que

$$2 + 3k = 1 + 5l \Leftrightarrow 1 = 5l - 3k$$

Dont une solution particulière est $1 = 5(-1) - 3(-2)$

En faisant la différence on trouve que

$$0 = 5(l+1) - 3(k+2) \Leftrightarrow 5(l+1) = 3(k+2)$$

Comme 5 divise $3(k+2)$ et que 5 est premier avec 3, le théorème de Gauss permet d'affirmer que 5 divise $k + 2$, il existe donc $u \in \mathbb{Z}$ tels que $k + 2 = 5u \Leftrightarrow k = -2 + 5u$ (on peut chercher les valeurs que prends l mais cela ne sert à rien ici), ce que l'on remplace dans $N = 2 + 3k = 2 + 3(-2 + 5u) = -4 + 15u$

Attention -4 n'est pas le reste recherché, comme $N \equiv -4\ \ [15] \equiv 11\ [15]$ le reste de la division de N par 15 est 11 car $0 \leq 11 < 15$.

Deuxième méthode en utilisant le théorème des restes chinois

$$\begin{cases} N = 101^{101} \equiv 2\ \ [3] \\ N = 101^{101} \equiv 1\ \ [5] \end{cases}$$

$$M = 3 \times 5 = 15$$

$a_1 = 2, m_1 = 3\ M_1 = \frac{15}{3} = 5$, $5y_1 \equiv 1\ \ [3]$ admet une solution évidente $y_1 = 2$

$a_2 = 1, m_1 = 5\ M_2 = \frac{15}{5} = 3$, $3y_2 \equiv 1\ \ [5]$ admet une solution évidente $y_2 = 2$

D'après le théorème il existe une unique solution

$$N \equiv a_1 M_1 y_1 + a_2 M_2 y_2\ \ [M] \equiv 2 \times 5 \times 2 + 1 \times 3 \times 2\ \ [15] \equiv 26\ \ [15] \equiv 11\ \ [15]$$

$0 \leq 11 < 15$ donc 11 est le reste de la division de 101^{101} par 15.

3. $\left(n^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)\left(n^{\frac{p-1}{2}} + 1\right) = \left(n^{\frac{p-1}{2}}\right)^2 - 1 = n^{p-1} - 1 \equiv 0\ \ [p]$

D'après le petit théorème de Fermat car p est premier et que n n'est pas un multiple de p. Donc p divise $\left(n^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)\left(n^{\frac{p-1}{2}} + 1\right)$.

Si $n^{\frac{p-1}{2}} - 1$ est un multiple de p c'est fini, p divise $n^{\frac{p-1}{2}} - 1$.

Sinon $n^{\frac{p-1}{2}}-1$ et p sont premiers entre eux et comme p divise $\left(n^{\frac{p-1}{2}}-1\right)\left(n^{\frac{p-1}{2}}+1\right)$, le théorème de Gauss permet d'affirmer que p divise $n^{\frac{p-1}{2}}+1$.

Cela montre que p divise l'un des entiers $n^{\frac{p-1}{2}}-1$ et $n^{\frac{p-1}{2}}+1$

Allez à : Exercice 19 :

Correction exercice 20 :

$$N=(2^3\times 3^2)^{10}\times(2\times 3^4)^{50}=2^{3\times 10+50}\times 3^{2\times 10+4\times 50}=2^{80}\times 3^{220}$$

Les diviseurs de N sont de la forme

$$2^k\times 3^l$$

Avec $k\in\{0,1,\dots,80\}$ et $l\in\{0,1,\dots,220\}$

Il y a donc $81\times 211=17901$ diviseurs

Allez à : Exercice 20 :

Correction exercice 21 :

Soit n un entier qui vérifie ces conditions :

$$n\equiv 7\quad[8]\equiv -1\quad[8]$$
$$n\equiv 14\quad[15]\equiv -1\quad[15]$$
$$n\equiv 17\quad[18]\equiv -1\quad[18]$$
$$n\equiv 23\quad[24]\equiv -1\quad[24]$$

Il existe $k_1\in\mathbb{N}$, $k_2\in\mathbb{N}$, $k_3\in\mathbb{N}$ et $k_4\in\mathbb{N}$ tels que :

$$n=-1+8k_1$$
$$n=-1+15k_2$$
$$n=-1+18k_3$$
$$n=-1+24k_4$$

On en déduit que : $8k_1=15k_2=18k_3=24k_4\quad(1)$

$$8k_1=15k_2$$

8 est premier avec 15 et 8 divise $15k_2$, d'après le théorème de Gauss, 8 divise k_2, il existe $u\in\mathbb{N}$ tel que $k_2=8u$, ce que l'on remplace dans $8k_1=15k_2$ et obtient que $k_1=15u$, la réciproque étant trivial.

On remplace dans (1) : $15\times 8u=18k_3=24k_4\quad(1')$

Ce que l'on divise par 6 : $20u=3k_3=4k_4\quad(2)$

$$20u=3k_3$$

J'abrège un peu, 3 et 20 sont premiers entre eux et d'après le théorème de Gauss il existe $v\in\mathbb{N}$ tel que : $u=3v$ et $k_3=20v$, cela entraine en particulier que $k_1=15\times 3v=45v$ et $k_2=8\times 3v=24v$.

On remplace dans (2) : $20\times 3v=4k_4\quad(2')$

Ce que l'on divise par 4 : $15v=k_4$

On remplace k_1, k_2, k_3 et k_4 dans les expressions de n :

$$n=-1+8k_1=-1+8\times 45v=-1+360v$$
$$n=-1+15k_2=-1+15\times 24v=-1+360v$$
$$n=-1+18k_3=-1+18\times 20v=-1+360v$$
$$n=-1+24k_4=-1+24\times 15v=-1+360v$$

Le plus petit entier naturel qui vérifie les conditions ci-dessus est 359.

Allez à : Exercice 21 :

Correction exercice 22 :

Soit n le nombre d'étudiants recherché.

Il existe $k_1\in\mathbb{N}$, $k_2\in\mathbb{N}$ et $k_3\in\mathbb{N}$ tels que :

$$n=9+18k_1$$
$$n=9+20k_2$$
$$n=9+24k_3$$

On en déduit que :

$$18k_1=20k_2=24k_3$$

Ce que l'on divise par 2 :

$$9k_1 = 10k_2 = 12k_3 \quad (1)$$

$9k_1 = 10k_2$, comme 9 et 10 sont premiers entre eux et que 9 divise $10k_2$, le théorème de Gauss permet d'affirmer que 9 divise k_2, il existe donc $u \in \mathbb{N}$ tel que $k_2 = 9u$, ce que l'on remplace dans $9k_1 = 10k_2$ pour trouver $k_1 = 10u$, la réciproque étant évidente.

On remplace dans (1) : $90u = 12k_3$, ce que l'on divise par 6 : $15u = 2k_3$. 15 est premier avec 2 et 15 divise $2k_3$, le théorème de Gauss permet d'affirmer que 15 divise k_3, il existe $v \in \mathbb{N}$ tel que $k_3 = 15v$, ce que l'on remplace dans $90u = 12k_3$, d'où l'on déduit que $90u = 12 \times 15v$ entraine que $u = 2v$, la réciproque est toujours aussi évidente. Puis on remplace $u = 2v$ dans $k_1 = 10u = 20v$, $k_2 = 9u = 18v$, on remple k_1, k_2 et k_3 dans

$$n = 9 + 18k_1$$
$$n = 9 + 20k_2$$
$$n = 9 + 24k_3$$

Et on trouve à chaque fois $n = 9 + 360v$, la réciproque est évidente, il reste à trouver v tel que

$$500 < 9 + 360v < 1000$$

Ce qui équivaut à :

$$491 < 360v < 991$$

Il est à peu près clair que $v = 2$ (on rappelle que v est un entier)

Le nombre d'étudiants inscrits est $n = 9 + 2 \times 360 = 729$.

Dans cet exercice on ne s'intéresse pas au nombre d'étudiants présents sous peine de faire fonctionner son système lacrymal.

Allez à : Exercice 22 :

Correction exercice 23 :

1. D'après l'énoncé

$$a = (b-a)q_1 + r_1, \quad 0 \le r_1 < b-a$$
$$b = (b-a)q_2 + r_2 \qquad 0 \le r_2 < b-a \Rightarrow -(b-a) < -r_2 \le 0$$

En faisant la différence entre ces deux équations :

$$b - a = \big((b-a)q_2 + r_2\big) - \big((b-a)q_1 + r_1\big) = (b-a)(q_2 - q_1) + r_2 - r_1$$
$$\Leftrightarrow (b-a)\big(1 - (q_2 - q_1)\big) = r_2 - r_1$$

Donc $b-a$ divise $r_2 - r_1$, comme : $-(b-a) < r_2 - r_1 < b-a$ en additionnant les inégalités

$$0 \le r_1 < b-a \quad \text{et} \quad -(b-a) < -r_2 \le 0$$

Le seul multiple de $b-a$ strictement compris entre $-(b-a)$ et $b-a$ est 0, par conséquent $r_2 - r_1 = 0$, ce que l'on remplace dans

$$(b-a)\big(1 - (q_2 - q_1)\big) = r_2 - r_1$$

Pour en déduire que $1 - (q_2 - q_1) = 0$, finalement

$$r_1 = r_2 \quad et \quad q_2 = q_1 + 1$$

2. On pose

$$ba^n - 1 = q_n a^{n+1} + r_n \quad avec \quad 0 \le r_n < a^{n+1}$$

D'après l'énoncé $b - 1 = qa + r \;\; avec \;\; 0 \le r < a$ donc pour $n = 0$, $q_0 = q$ et $r_0 = r$

Pour $n = 1$:

$$ba - 1 = q_1 a^2 + r_1$$

On va chercher q_1 et r_1.

$$b - 1 = qa + r \Leftrightarrow b = qa + r + 1$$
$$ba - 1 = (qa + r + 1)a - 1 = qa^2 + (r+1)a - 1 = qa^2 + ra + a - 1$$
$$r < a \Leftrightarrow r \le a - 1 \Leftrightarrow ra + a - 1 \le (a-1)a + a - 1 = a^2 - 1 \Rightarrow ra + a - 1 < a^2$$

Et $ra + a - 1 \ge a - 1 \ge 0$, cela montre que $r_1 = ra + a - 1$ est le reste de la division euclidienne de $ba - 1$ par a^2 car $0 \le ra + a - 1 < a^2$, en même temps on a montré que $q_1 = q$.

Pour un n quelconque :

En fait ce que l'on a fait ci-dessus ne va servir à rien, c'était juste pour voir ce qu'il se passait.

$$ba^n - 1 = (qa + r + 1)a^n - 1 = qa^{n+1} + (r+1)a^n - 1 = qa^{n+1} + ra^n + a^n - 1$$
$$r < a \Leftrightarrow r \le a - 1 \Leftrightarrow ra^n + a^n - 1 \le (a-1)a^n + a^n - 1 = a^{n+1} - 1 \Rightarrow ra^n + a^n - 1 < a^{n+1}$$

Et

$$ra^n + a^n - 1 \geq a^n - 1 \geq 0$$

Donc $r_n = ra^n + a^n - 1$ est le bon reste, et $q_n = q$.

3. d divise a et b donc d divise $A = 15a + 4b$, de même d divise $B = 11a + 3b$, par conséquent d divise $PGCD(A, B)$.

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix}\begin{cases} A = 15a + 4b \\ B = 11a + 3b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ 3L_1 - 4L_2 \end{matrix}\begin{cases} A = 15a + 4b \\ 3A - 4B = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 15(3A - 4B) + 4b \\ a = 3A - 4B \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -44A + 60B = 4b \\ a = 3A - 4B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -11A + 15B \\ a = 3A - 4B \end{cases}$$

$D = PGCD(A, B)$ divise A et B donc D divise $a = 3A - 4B$ et $b = -11A + 15B$.

Ce qui implique $PGCD(A, B)$ divise d.

$PGCD(A, B)$ divise d et d divise $PGCD(A, B)$, puisque que ces entiers sont positifs, entraine que :

$$d = PGCD(A, B)$$

4. Soient $d = PGCD(a, b)$ et $D = PGCD\big(a + b, PPCM(a, b)\big)$.

d divise a et d divse b donc d divise $a + b$, $PPCM(a, b)$ est un multiple de a et de b donc d divise $PPCM(a, b)$, par conséquent d divise $PGCD\big(a + b, PPCM(a, b)\big)$.

d est le pgcd de a et b alors il existe a' et b' deux entiers premiers entre eux tels que $a = da'$ et $b = kb'$, d'autre part $PPCM(a, b) = \frac{ab}{d}$.

Rappel :

Soient a' et b' deux entiers premiers entre eux, la somme $a' + b'$ et le produit $a'b'$ sont premiers entre eux. Il existe $u \in \mathbb{Z}$ et $v \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$u(a' + b') + va'b' = 1$$

En multipliant cette égalité par d, on trouve que :

$$ud(a' + b') + vda'b' = d \Rightarrow u(da' + db') + v\frac{da'db'}{d} = d \Rightarrow u(a + b) + v\frac{ab}{d} = d$$
$$\Rightarrow u(a + b) + vPPCM(a, b) = d$$

Donc D divise d, or on a vu plus haut que d divise D, ces deux nombres étant positifs ils sont égaux.

5. D'après Bézout Il existe $u \in \mathbb{Z}$ et $v \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$ua + vb = 1$$

Ce que l'on élève au carré

$$u^2a^2 + 2uavb + v^2b^2 = 1 \Leftrightarrow a(ua + 2uvb) + v^2b^2 = 1$$

Cette dernière identité montre que a et b^2 sont premiers entre eux.

Supposons que a et b^m sont premiers entre eux. D'après Bézout Il existe $u' \in \mathbb{Z}$ et $v' \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$u'a + v'b^n = 1$$

Ce que l'on multiplie par $ua + vb = 1$

$$(ua + vb)(u'a + v'b^n) = 1 \times 1 \Leftrightarrow uu'a^2 + uav'b^n + vbu'a + vv'b^{n+1} = 1$$
$$\Leftrightarrow a(uu'a + uv'b^n + u'vb) + vv'b^{n+1} = 1$$

Ce qui montre que a et b^{n+1} sont premiers entre eux.

Il reste à dire que l'on a fait une démonstration par récurrence pour en déduire que :
$\forall n \in \mathbb{N}$, a et b^n sont premiers entre eux.

On réutilise la démonstration ci-dessus en changeant a en b^n, b en a et n en m pour en déduire que :
$\forall m \in \mathbb{N}$, b^m et a^n sont premiers entre eux.

6. Il existe $a' \in \mathbb{N}$ et $b' \in \mathbb{N}$ tels que $a = da'$ et $b = db'$ où a' et b' sont premiers entre eux.

Donc $a^n = d^n a'^n$ et $b^n = d^n b'^n$, comme a'^n et b'^n sont premiers entre eux d'après la question précédente, d^n est le $PGCD$ de a^n et b^n.

Allez à : Exercice 23 :

Correction exercice 24 :

1. On pose $d = PGCD(a, b)$. Il existe $a' \in \mathbb{Z}$ et $b' \in \mathbb{Z}$ tels que $a = da'$ et $b = db'$ où a' et b' sont premiers entre eux.

Si $c > 0$, $ac = (dc)a'$ et $bc = (dc)b'$, comme a' et b' sont premiers entre eux,

$$PGCD(ac, bc) = dc = |c|d$$

Si $c < 0$, $ac = \big(d(-c)\big)(-a')$ et $bc = \big(d(-c)\big)(-b')$, comme a' et b' sont premiers entre eux,

$$PGCD(ac, bc) = d(-c) = |c|d$$

Remarque : le $PGCD$ de deux entiers relatifs est un entier positif.

2. D'après Bézout Il existe $u \in \mathbb{Z}$ et $v \in \mathbb{Z}$ tel que :
$$ua + vb = 1$$
Comme c divise a, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $a = kc$, ce que l'on remplace dans l'égalité ci-dessus.
$$ukc + vb = 1$$
Cela montre que c et b sont premiers entre eux.
3. Si $PGCD(a, bc) = 1$ alors d'après Bézout il existe $u \in \mathbb{Z}$ et $v \in \mathbb{Z}$ tels que :
$$ua + vbc = 1$$
Donc
$$ua + (vb)c = 1$$
C'est une identité de Bézout.
Ce qui montre que a et c sont premier entre eux, autrement dit $PGCD(a, c) = 1$.
De même
$$ua + (vc)b = 1$$
Ce qui montre que a et b sont premier entre eux, autrement dit $PGCD(a, b) = 1$.
On a montré l'implication de gauche à droite.

Réciproquement
Si $PGCD(a, b) = PGCD(a, c) = 1$.
il existe $u \in \mathbb{Z}$, $v \in \mathbb{Z}$, $u' \in \mathbb{Z}$ et $v' \in \mathbb{Z}$ tels que :
$$ua + vb = 1 \quad et \quad u'a + v'c = 1$$
On multiplie ces deux égalités
$$(ua + vb)(u'a + v'c) = 1 \times 1 \Leftrightarrow uu'a^2 + uv'ac + vu'ba + vv'bc = 1$$
$$\Leftrightarrow a(uu'a + uv'c + vu'b) + (vv')bc = 1$$
C'est une identité de Bézout.
Ce qui montre que a et bc sont premiers entre eux, autrement dit $PGCD(a, bc) = 1$.

4. Montrer que si $PGCD(b, c) = 1$ alors $PGCD(a, bc) = PGCD(a, b) \times PGCD(a, c)$.
On pose $d = PGCD(a, bc)$, $d_1 = PGCD(a, b)$ et $d_2 = PGCD(a, c)$
Ecrivons les identités de Bézout suivantes :
Il existe des entiers u, v, u' et v' tels que :
$$ua + vb = d_1 \quad et \quad u'a + v'c = d_2$$
En faisant le produit de deux identités
$$(ua + vb)(u'a + v'c) = d_1 d_2 \Leftrightarrow uu'a^2 + uv'ac + vu'ba + vv'bc = d_1 d_2$$
$$\Leftrightarrow a(uu'a + uv'c + vu'b) + (vv')bc = d_1 d_2$$
C'est une identité de Bézout entre a et bc cela montre que d divise $d_1 d_2$.
Comme a et bc sont premiers entre eux il existe u et v deux entiers tels que :
$$ua + vbc = d$$
Donc
$$ua + (vb)c = d$$
C'est une identité de Bézout donc d_2 divise d.
De même d_1 divise d.
Attention on ne peut pas en déduire que $d_1 d_2$ divise d, et puis il y a une hypothèse que nous n'avons pas utilisé, c'est le fait que b et c sont premiers entre eux.
Evidemment d_1 divise b et d_2 divise c donc il existe k et k', des entiers, tels que :
$$b = kd_1 \quad et \quad c = k'd_2$$
Ecrivons une identité de Bézout entre b et c, il existe $u \in \mathbb{Z}$ et $v \in \mathbb{Z}$ tels que :
$$ub + vc = 1 \Rightarrow ukd_1 + vk'd_2 = 1 \Rightarrow (uk)d_1 + (vk')d_2 = 1$$
D'où l'on déduit que d_1 et d_2 sont premiers entre eux.
On a déjà montré le résultat suivant :
Si d_1 divise d et d_2 divise d avec d_1 et d_2 premiers entre eux alors $d_1 d_2$ divise d mais nous allons recommencer.
Il existe $\alpha \in \mathbb{Z}$ et $\beta \in \mathbb{Z}$ tels que $d = \alpha d_1 = \beta d_2$, comme d_1 et d_2 sont premier entre eux, le théorème de Gauss entraine que d_1 divise β, il existe donc $\gamma \in \mathbb{Z}$ tel que $\beta = \gamma d_1$, ce que l'on remplace dans $d = \beta d_2 = \gamma d_1 d_2$, ce qui montre bien que $d_1 d_2$ divise d.
d divise $d_1 d_2$ et $d_1 d_2$ divise d, ces deux nombres étant positifs, on en déduit que :
$$d = d_1 d_2 \Leftrightarrow PGCD(a, bc) = PGCD(a, b) \times PGCD(a, c)$$

Allez à : Exercice 24 :

Correction exercice 25 :

1. Nous allons utiliser les congruences modulo $n^a - 1$.
   Il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $b = ka$, alors
   $$n^b - 1 = n^{ka} - 1 = (n^a)^k - 1 \equiv 1^k - 1 \quad [n^a - 1] \equiv 0 \quad [n^a - 1]$$
   Ce qui montre que $n^b - 1$ est divise par $n^a - 1$.
   (En effet il existe $K \in \mathbb{Z}$ tel que $n^b - 1 = 0 + K(n^a - 1)$).
2. D'après la division euclidienne de b par a, il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{N} \times \{0,1,2, \dots, a-1\}$ tel que : $b = aq + r$.
   Comme ci-dessus nous allons utiliser les congruences modulo $n^a - 1$.
   $$n^b - 1 = n^{aq+r} - 1 = (n^a)^q n^r - 1 \equiv 1^q n^r - 1 \quad [n^a - 1] \equiv n^r - 1 \quad [n^a - 1]$$
   il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n^b - 1 = n^r - 1 + k(n^a - 1)$.

Attention :

On ne peut pas encore conclure que $n^r - 1$ est le « bon » reste, il faut vérifier que celui-ci est compris entre 0 et $(n^a - 1) - 1$.
$$n^r > 0 \Rightarrow n^r \geq 1 \Rightarrow n^r - 1 \geq 0$$
$$r < a \Rightarrow n^r < n^a \Rightarrow n^r - 1 < n^a - 1$$
C'est bon le reste de la division euclidienne de $n^b - 1$ par $n^a - 1$ est $n^r - 1$.

3. On va utiliser l'algorithme d'Euclide
   $$b = aq_1 + r_1 \quad 0 \leq r_1 < a$$
   $$a = r_1 q_2 + r_2 \quad 0 \leq r_2 < r_1$$
   $$r_1 = r_2 q_3 + r_3 \quad 0 \leq r_3 < r_2$$
   Jusqu'à
   $$r_{n-2} = r_{n-1} q_n + r_n \quad 0 \leq r_n < r_{n-1}$$
   $$r_{n-1} = r_n q_{n+1}$$
   On rappelle que le dernier reste non nul est $d = PGCD(b, a) = r_n$.
   D'après la question précédente il existe $Q_1, Q_2, \dots, Q_{n+1}$ tels que :
   $$n^b - 1 = (n^a - 1)Q_1 + n^{r_1} - 1 \quad 0 \leq n^{r_1} - 1 < n^a - 1$$
   $$n^a - 1 = (n^{r_1} - 1)Q_2 + n^{r_2} - 1 \quad 0 \leq n^{r_2} - 1 < n^{r_1} - 1$$
   $$n^{r_1} - 1 = (n^{r_2} - 1)Q_3 + n^{r_3} - 1 \quad 0 \leq n^{r_3} - 1 < n^{r_2} - 1$$
   Jusqu'à
   $$n^{r_{n-2}} - 1 = (n^{r_{n-1}} - 1)Q_n + n^{r_n} - 1 \quad 0 \leq n^{r_n} - 1 < n^{r_{n-1}} - 1$$
   $$n^{r_{n-1}} - 1 = (n^{r_{n-1}} - 1)Q_{n+1}$$
   On rappelle que le dernier reste non nul est $PGCD(n^b - 1, n^a - 1) = n^{r_n} - 1 = n^d - 1$.

Allez à : Exercice 25 :

Correction exercice 26 :

1.
   $$5a - 2b = 5(2n + 3) - 2(5n - 2) = 19$$
   Il s'agit d'une identité de Bézout, donc $PGCD(a, b)$ divise 19, 19 étant premier, $PGCD(a, b)$ vaut 1 ou 19 selon les valeurs de n. Il faut préciser ce premier résultat.
   Cherchons une condition nécessaire et suffisante pour que $PGCD(a, b) = 19$.
   Il existe alors $k \in \mathbb{Z}$ et $k' \in \mathbb{Z}$, k et k' premiers entre eux (cela ne servira à rien) tels que :
   $$2n + 3 = 19k \quad et \quad 5n - 2 = 19k'$$
   Ce qui entraine que
   $$(5n - 2) - 2(2n + 3) = 19k' - 2 \times 19k = 19(k' - 2k) \Leftrightarrow n - 8 = 19(k' - 2k)$$
   Cette combinaison linéaire est faite de façon à trouver n (plus une constante) dans l'expression de gauche.
   Il existe $k'' \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 8 + 19k'' \Leftrightarrow n \equiv 8 \quad [19]$

Réciproque :

si $n = 8 + 19k''$ alors
$$a = 2(8 + 19k'') + 3 = 19 + 2 \times 19k'' = 19(1 + 2k'')$$

$$b = 5(8 + 19k'') - 2 = 38 + 5 \times 19k'' = 19(2 + 5k'')$$

Comme

$$-2(2 + 5k'') + 5(1 + 2k'') = 1$$

C'est une identité de Bézout qui montre que $2 + 5k''$ et $1 + 2k''$ sont premiers entre eux et que donc

$$PGCD(a, b) = 19$$

Conclusion :

$$n \equiv 8 \quad [19] \Leftrightarrow PGCD(a, b) = 19$$

Sinon

$$PGCD(a, b) = 1$$

2. On pose $a = 2n - 1$ et $b = 9n + 4$.
Pour éliminer les « n », on calcule :

$$9a - 2b = 9(2n - 1) - 2(9n + 4) = -17$$

Il s'agit d'une identité de Bézout, donc $PGCD(a, b)$ divise 17, 17 étant premier, $PGCD(a, b)$ vaut 1 ou 17 selon les valeurs de n. Il faut préciser ce premier résultat.
Cherchons une condition nécessaire et suffisante pour que $PGCD(a, b) = 17$.
Il existe alors $k \in \mathbb{Z}$ et $k' \in \mathbb{Z}$, k et k' premiers entre eux (cela ne servira à rien) tels que :

$$2n - 1 = 17k \quad et \quad 9n + 4 = 17k'$$

Ce qui entraine que

$$-4(2n - 1) + (9n + 4) = 4 \times 17k + 17k' \Leftrightarrow n + 8 = 17(4k + k')$$

Cette combinaison linéaire est faite de façon à trouver n (plus une constante) dans l'expression de gauche.
Il existe $k'' \in \mathbb{Z}$ tel que : $n = -8 + 17k'' \Leftrightarrow n \equiv -8 \quad [17] \equiv 9 \ [17]$

Réciproque

Si $n = -8 + 17k''$ alors

$$a = 2(-8 + 17k'') - 1 = -17 + 2 \times 17k'' = 17(-1 + 2k'')$$
$$b = 9(-8 + 17k'') + 4 = -68 + 9 \times 17k'' = 17(-4 + 9k'')$$

Comme

$$-9(-1 + 2k'') + 2(-4 + 9k'') = 1$$

C'est une identité de Bézout qui montre que $-1 + 2k''$ et $-4 + 9k''$ sont premiers entre eux et que donc

$$PGCD(a, b) = 17$$

Conclusion

$$n \equiv -8 \ [17] \Leftrightarrow PGCD(a, b) = 17$$

Sinon

$$PGCD(a, b) = 1$$

Allez à : Exercice 26 :

Correction exercice 27 :

1. $5a - 2b = 5(2n + 1) - 2(5n + 1) = 3$
2. d divise 3, donc $d = 1$ ou $d = 3$.
3. Si $n \equiv 1 \quad [3]$, $a = 2n + 1 \equiv 3 \quad [3] \equiv 0 \ [3]$ donc 3 divise a et $b = 5n + 1 \equiv 6 \quad [3] \equiv 0 \ [3]$ donc 3 divise b. 3 est un diviseur commun à a et à b, donc $d \geq 3$, dans ce cas $d = 3$.
Si $n \equiv 0 \quad [3]$ alors $a = 2n + 1 \equiv 1 \quad [3] \not\equiv 0 \ [3]$ donc 3 ne divise pas a, 3 n'est pas un diviseur commun à a et à b, donc $d = 1$.
Si $n \equiv 2 \quad [3]$ alors $a = 2n + 1 \equiv 5 \quad [3] \equiv 2 \quad [3] \not\equiv 0 \ [3]$ donc 3 ne divise pas a, 3 n'est pas un diviseur commun à a et à b, donc $d = 1$.

Allez à : Exercice 27 :

Correction exercice 28 :

$$2 \times (3n + 1) - 3 \times 2n = 2$$

Le $PGCD(3n + 1, 2n)$ divise 2, donc il vaut 1 ou 2.

Regardons pour quelles valeurs de n ce $PGCD$ vaut 2. Dans ce cas il existe a et b des entiers premiers entre eux tels que $3n+1=2a$ et $2n=2b$, la deuxième conditions entraine que $n=b$, ce que l'on remplace dans $3n+1=2a \Leftrightarrow 2a-3b=1$, une solution particulière de cette équation est $a=-1$ et $b=-1$.

On a

$$\begin{cases} 2a-3b=1 \\ 2\times(-1)+3=1 \end{cases}$$

En soustrayant la seconde ligne à la première

$$2(a+1)-3(b+1)=0 \Leftrightarrow 2(a+1)=3(b+1) \quad (*)$$

2 est premier avec 3 et 2 divise $3(b+1)$, d'après le théorème de Gauss, 2 divise $b+1$, il existe donc $k\in\mathbb{Z}$ tel que $b+1=2k \Leftrightarrow b=-1+2k$, ce que l'on remplace dans $(*)$,

$$2(a+1)=3\times 2k \Leftrightarrow a=-1+3k$$

Puis on remplace l'une ou l'autre des valeurs de a ou de b dans $3n+1=2a$ ou dans $n=b$ pour trouver que

$$n=-1+2k$$

On peut toujours faire une réciproque

$$2\times(3n+1)-3\times 2n=2(3(-1+2k)+1)-6(-1+2k)=2(-3+6k+1)+6-12k=2$$

Cela marche

Conclusion si $n=-1+2k$ (autrement dit si n est impair) $PGCD(3n+1,2n)=2$

Sinon $PGCD(3n+1,2n)=1$

Allez à : Exercice 28 :

Correction exercice 29 :

1.

$$5(14n+3)-14(5n+1)=1$$

Est une identité de Bézout, 1 divise le PGCD de $14n+3$ et de $5n+1$ donc leur PGCD vaut 1, ils sont premiers entre eux.

2.

2.1. $87=14\times 6+3$ et $31=5\times 6+1$ d'après la première question, ils sont premiers entre eux.

2.2. D'après la première question

$$5(14\times 6+3)-14(5\times 6+1)=1 \Leftrightarrow 5\times 87+(-14)\times 31=1 \quad (1)$$

Donc $(u,v)=(5,-14)$ convient.

Il suffit de multiplier (1) par 2.

$$10\times 87+(-28)\times 31=2$$

2.3.

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix}\begin{cases} 87x+31y=2 \\ 10\times 87+(-28)\times 31=2 \end{cases}$$

$$L_1-L_2:\ 87(x-10)+31(y+28)=0$$

$$87(x-10)=31(-y-28) \quad (2)$$

87 et 31 sont premier entre eux et 87 divise $31(-y-28)$ donc 87 divise $-y-28$, il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que :

$$-y-28=87k \quad (3) \Leftrightarrow y=-87k-28$$

On remplace (3) dans (2)

$$87(x-10)=31\times 87k \Leftrightarrow x-10=31k \Leftrightarrow x=10+31k$$

La réciproque est évidente et l'ensemble des solutions est :

$$\{(10+31k,-28-87k),k\in\mathbb{Z}\}$$

Allez à : Exercice 29 :

Correction exercice 30 :

1.

$$1^2 = 1 \equiv 1 \ [8]$$
$$3^2 = 9 \equiv 1 \ [8]$$
$$5^2 = 25 \equiv 1 \ [8]$$
$$7^2 = 49 \equiv 1 \ [8]$$

$0 \leq 1 < 8$ donc le reste de la division euclidienne du carré d'un nombre impair par 8 est 1.

2. $n = 2m, m \in \mathbb{N}^*$

$$x^n + y^n = (x^2)^m + (y^2)^m \equiv 1^m + 1^m \ [8] \equiv 2\ [8]$$
$$z^n = (z^2)^m \equiv 1^m \ [8] \equiv 1 \ [8]$$

Donc l'équation n'a pas de solution.

Allez à : Exercice 30 :

Correction exercice 31 :

D'après le petit théorème de Fermat $5^6 \equiv 1 \ \ [7]$ car 7 est premier et 5 est premier avec 7.

$$1000 = 166 \times 6 + 4$$

Donc

$$5^{1000} = 5^{6\times 166+4} = (5^6)^{166} \times 5^4 \equiv 1^{166} \times 5^4 \ \ [7] \equiv 5^2 \times 5^2 \ \ [7] \equiv 25 \times 25 \ \ [7] \equiv 4 \times 4 \ \ [7]$$
$$\equiv 16 \ [7] \equiv 2 \ [7]$$

Comme $0 \leq 2 < 7$, 2 est le reste de la division euclidienne de 5^{1000} par 7.

Allez à : Exercice 31 :

Correction exercice 32 :

$$3^{n+3} - 4^{4n+2} = 3^3 \times 3^n - 4^2 \times (4^4)^n = 27 \times 3^n - 16 \times (16 \times 16)^n \equiv 5 \times 3^n - 5 \times (5 \times 5)^n \ \ [11]$$
$$\equiv 5 \times 3^n - 5 \times 25^n \ \ [11] \equiv 5 \times 3^n - 5 \times 3^n \ \ [11] \equiv 0 \ [11]$$

Donc $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est un multiple de 11.

Allez à : Exercice 32 :

Correction exercice 33 :

$$4^n = (3+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 3^k = C_n^0 + 3C_n^1 + 3^2 C_n^2 + \cdots + 3^n C_n^n = 1 + 3n + 3^2(C_n^2 + \cdots + 3^{n-2} C_n^n)$$
$$= 1 + 3n + 9k$$

Donc 4^n est congru à $1 + 3n$ modulo 9.

$$2^{2n} + 15n - 1 = (2^2)^n + 15n - 1 = 4^n + 15n - 1 \equiv 1 + 3n + 15n - 1 \ \ [9] \equiv 18n \ [9] \equiv 0 \ [0]$$

Donc $2^{2n} + 15n - 1$ est divisible par 9.

Allez à : Exercice 33 :

Correction exercice 34 :

1. $a_0 = 4^2 - 1 = 16 - 1 = 15$ est un multiple de 15.

On appelle $(H_n) : n \geq 0, a_n = 4^{2n+2} - 1$ est un multiple de 15.

$a_0 = 4^2 - 1 = 16 - 1 = 15$ est un multiple de 15. Donc (H_0) est vraie.

Si a_n est un multiple de 15, il existe $k_n \in \mathbb{N}$ tel que : $a_n = 4^{2n+2} - 1 = 15k_n$ alors

$$a_{n+1} = 4^{2(n+1)+2} - 1 = 4^{2n+2} \times 4^2 - 1 = 16 \times 4^{2n+2} - 1 = 16(15k_n + 1) - 1 = 16 \times 15k_n + 15$$
$$= 15(16k_n + 1)$$

Donc a_{n+1} est un multiple de 15.

Donc (H_n) entraine (H_{n+1}).

Pour tout $n \geq 0$, $a_n = 4^{2n+2} - 1$ est un multiple de 15.

2.
$$b_{n+1}-b_n=4^{2(n+1)+2}-15(n+1)-16-[4^{2n+2}-15n-16]$$
$$=4^{2n+4}-15n-15-4^{2n+2}+15n+16=4^{2n+2}(4^2-1)-15=15\times 4^{2n+2}-15$$
$$=15(4^{2n+2}-1)$$

Or il existe k_n tel que $a_n=4^{2n+2}-1=15k_n$ donc $b_{n+1}-b_n=15\times 15k_n=225k_n$

On en déduit que $b_{n+1}-b_n$ est un multiple de 225.

3. On pose (H_n) pour tout $n\geq 0$, b_n est un multiple de 225

$b_0=4^{2\times 0+2}-15\times 0-16=4^2-16=0$ est un multiple de 225, en effet $0=0\times 225$, (H_0) est vraie.

S'il existe $k'_n\in\mathbb{N}$ tel que $b_n=225k'_n$ alors $b_{n+1}-225k'_n=225k_n$ donc $b_{n+1}=225(k_n+k'_n)$, ce qui signifie que b_{n+1} est un multiple de 225.

Donc (H_n) entraine (H_{n+1})

Pour tout $n\geq 0$, $b_n=4^{2n+2}-15n-16$ est un multiple de 225.

Allez à : Exercice 34 :

Correction exercice 35 :

$$5^{n+2}+3^{n+1}5^{2n}=5^2\times 5^n+3\times 3^n\times (5^2)^n=25\times 5^n+3\times 3^n\times 25^n\quad [7]$$
$$\equiv 4\times 5^n+3\times 3^n\times 4^n\quad [7]\equiv 4\times 5^n+3\times 12^n\quad [7]\equiv 4\times 5^n+3\times 5^n\quad [7]$$
$$\equiv 7\times 5^n\quad [7]\equiv 0\quad [7]$$

Donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $5^{n+2}+3^{n+1}5^{2n}$ est divisible par 7.

Allez à : Exercice 35 :

Correction exercice 36 :

1.

a) $9^k\equiv 1^k\quad [8]\equiv 1\quad [8]$, comme $0\leq 1<8$, le reste de la division euclidienne de 9^k par 8 est 1.

b) $3^{2k}+1\equiv 9^k+1\quad [8]\equiv 2\quad [8]$, de même le reste de la division euclidienne de $3^{2k}+1$ par 8 est 2.

$3^{2k+1}+1=3\times 9^k+1\equiv 3\times 1+1\quad [8]\equiv 4\quad [8]$, le reste est alors 4.

2. Si $n=2k$

$$2^m-3^n=1\Rightarrow 2^m-3^{2k}\equiv 1\quad [8]\Rightarrow 2^m-(3^2)^k\equiv 1\quad [8]\Rightarrow 2^m-(9)^k\equiv 1\quad [8]\Rightarrow 2^m-(1)^k\equiv 1\quad [8]$$
$$\Rightarrow 2^m\equiv 2\quad [8]\Rightarrow 2^m=2+8l$$

avec $l\in\mathbb{N}$ donc $2^{m-1}=1+4l$ or si $m\geq 2$, 2^{m-1} est paire et $1+4l$ est impaire, on en déduit que si $n=2k$ alors $m<2$,

Si $n=2k+1$

$$2^m-3^n=1\Rightarrow 2^m-3^{2k+1}\equiv 1\quad [8]\Rightarrow 2^m-3\times (3^2)^k\equiv 1\quad [8]\Rightarrow 2^m-3\times (9)^k\equiv 1\quad [8]$$
$$\Rightarrow 2^m-3\times (1)^k\equiv 1\quad [8]\Rightarrow 2^m\equiv 4\quad [8]\Rightarrow 2^m=4+8l\Rightarrow 2^{m-2}=1+2l$$

avec $l\in\mathbb{N}$ donc $2^{m-2}=1+2l$ or si $m\geq 3$, 2^{m-2} est paire et $1+2l$ est impaire, on en déduit que si $n=2k+1$ alors $m<3$.

Que n soit pair ou impair $m\leq 2$

3. Il n'y a que trois cas possibles $m=0$, $m=1$ et $m=2$.

Si $m=0$ alors $2^m-3^n=1\Leftrightarrow 1-3^n=1\Leftrightarrow 3^n=0$ ce qui est impossible.

Si $m=1$ alors $2^m-3^n=1\Leftrightarrow 2-3^n=1\Leftrightarrow 3^n=1\Leftrightarrow n=0$

Si $m=2$ alors $2^m-3^n=1\Leftrightarrow 4-3^n=1\Leftrightarrow 3^n=3\Leftrightarrow n=1$

L'ensemble des solutions est :

$$S=\{(1,0),(2,1)\}$$

Allez à : Exercice 36 :

Correction exercice 37 :

Comme 3 est premier, $a^3 \equiv a \quad [3]$ et $b^3 \equiv b \quad [3]$,

$$a^3 - b^3 \equiv 0 \quad [3] \Leftrightarrow a - b \equiv 0 \quad [3]$$

Allez à : Exercice 37 :

Correction exercice 38 :

7 divise $a^2 + b^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \equiv 0 \quad [7]$

n	0	1	2	3	4	5	6
n^2	0	1	4	2	2	4	1

La seule solution pour que la somme de deux des nombres (au carré) de la seconde ligne soit congru à 0 modulo 7 est que ces nombres (au carré) soit congru à 0 modulo 7, donc que ces nombres soit congrus à 0 modulo 7.

On a montré que si 7 divise $a^2 + b^2$ alors 7 divise a et b.

Réciproquement si 7 divise a et b alors 7 divise a^2 et b^2 donc $a^2 + b^2$.

Autre solution

Avec le petit théorème de Fermat, comme 7 est premier, pour $a \not\equiv 0 \quad [7]$, $a^6 \equiv 1 \quad [7]$ et pour $b \not\equiv 0 \quad [7]$, $b^6 \equiv 1 \quad [7]$.

Si $a \not\equiv 0 \quad [7]$ et $b \not\equiv 0 \quad [7]$,

$$(a^2 + b^2)^3 = a^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + b^6 \equiv 1 + 3a^2b^2(a^2 + b^2) + 1 \ [7] \equiv 2 + 3a^2b^2(a^2 + b^2) \ [7]$$

Supposons que $a^2 + b^2 \equiv 0 \quad [7]$, l'égalité ci-dessus donne $0 \equiv 2 \quad [7]$, ce qui est faux donc

$$a^2 + b^2 \not\equiv 0 \quad [7]$$

La contraposée de Si $a \not\equiv 0 \quad [7]$ et $b \not\equiv 0 \quad [7]$ alors $a^2 + b^2 \not\equiv 0 \quad [7]$ est :

$a^2 + b^2 \equiv 0 \quad [7]$ entraine $a \equiv 0 \quad [7]$ et $b \equiv 0 \quad [7]$.

La réciproque est évidente.

Allez à : Exercice 38 :

Correction exercice 39 :

$$7 = 1 \times 5 + 2$$
$$5 = 2 \times 2 + 1$$
$$2 = 2 \times 1 + 0$$

Donc $1 = 5 - 2 \times 2 = 5 - 2 \times (7 - 1 \times 5) = -2 \times 7 + 3 \times 5$

On multiplie cette égalité par 3 : $-6 \times 7 + 9 \times 5 = 3$. On soustrayant $7x + 5y = 3$ et $-6 \times 7 + 9 \times 5 = 3$ on trouve que : $7(x + 6) + 5(y - 9) = 0$, ce qui équivaut à $7(x + 6) = -5(y - 9)$, d'après le théorème de Gauss, 7 divise $5(y - 9)$ et $7 \wedge 5 = 1$ donc 7 divise $y - 9$, il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $y - 9 = 7k$, ce que je remplace dans $7(x + 6) = -5(y - 9)$ ce qui donne $7(x + 6) = -5 \times 7k$, puis en simplifiant par 7 : $x + 6 = -5k$.

L'ensemble des solution est $\mathcal{S} = \{(-6 - 5k, 9 + 7k), k \in \mathbb{Z}\}$

Allez à : Exercice 39 :

Correction exercice 40 :

$$12x \equiv 5 \ [35] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, 12x = 5 + 35k \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, 12x - 35k = 5$$

$35 = 2 \times 12 + 11$, $12 = 1 \times 11 + 1$ et $11 = 1 \times 11 + 0$

Donc $1 = 12 - 1 \times 11 = 12 - 1 \times (35 - 2 \times 11) = -1 \times 35 + 3 \times 12$

Donc $3 \times 12 \equiv 1 \quad [35]$

$$12x \equiv 5 \ [35] \Rightarrow 3 \times 12x \equiv 3 \times 5 \ [35] \Rightarrow x \equiv 15 \ [35]$$

Réciproque $12 \times 15 = 180 = 5 \times 35 + 5 \equiv 5 \quad [35]$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{15 + 35k, k \in \mathbb{Z}\}$

Allez à : Exercice 40 :

Correction exercice 41 :

1. On voit que $13\times 2-5\times 5=1$, en multipliant par 3 on trouve que
$$13\times 6-5\times 15=3$$
donc $(6,-15)$ est une solution particulière.
2.
$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix}\begin{cases} 13u+5v=1 \\ 13\times 6-5\times 15=1 \end{cases}$$
L_1-L_2 donne $13(u-6)+5(v+15)=0$
Ce qui équivaut à
$$13(u-6)=-5(v+15)$$
13 divise $-5(v+15)$ et 13 est premier avec 5, d'après le théorème de Gauss, 13 divise $-(v+15)$, il existe donc $k\in\mathbb{Z}$ tel que
$$-(v+15)=13k\Leftrightarrow v=-15-13k$$
On remplace $-(v+15)=13k$ dans $13(u-6)=-5(v+15)$, on obtient
$$13(u-6)=5\times 13k\Leftrightarrow u=6+5k$$
La réciproque est évidente, donc l'ensemble des couples (u,v) vérifiant $13u+5v=3$ est
$$\{(6+5k,-15-13k),k\in\mathbb{Z}\}$$
3. Comme 5 premier, d'après le théorème de Fermat
$$2^4\equiv 1\ [5]$$
La division euclidienne de 2013 par 4 est $2013=4\times 503+1$, donc
$$2^{2013}=2^{4\times 503+1}=(2^4)^{503}\times 2\equiv 1^{503}\times 2\ [5]\equiv 2\ [5]$$
$0\le 2<5$ donc 2 est le reste de la division euclidienne de 2^{2013} par 5
Comme 13 premier, d'après le théorème de Fermat
$$2^{12}\equiv 1\ [13]$$
La division euclidienne de 2013 par 12 est $2013=12\times 167+9$, donc
$$2^{2013}=2^{12\times 167+9}=(2^{12})^{167}\times 2^9\equiv 1^{167}\times 2^9\ [13]\equiv 2^4\times 2^4\times 2\ [13]\equiv 16\times 16\times 2\ [13]$$
$$\equiv 3\times 3\times 2\ [13]\equiv 18\ [13]\equiv 5\ [13]$$
$0\le 5<13$ donc 5 est le reste de la division euclidienne de 2^{2013} par 13
4. D'après la question 3, il existe a et b des entiers tels que
$$2^{2013}=5a+2 \quad \text{et} \quad 2^{2013}=13b+5$$
En faisant la soustraction de la seconde égalité et de la première, on trouve que
$$0=13b-5a+3\Leftrightarrow -13b+5a=3$$
D'après la question 2 les solutions de $13u+5v=3$ sont
$$\{(6+5k,-15-13k),k\in\mathbb{Z}\}$$
On pose $a=v$ et $b=-u$ donc
$$a=-15-13k \quad \text{et} \quad b=-6-5k$$
Ce que l'on remplace dans
$$2^{2013}=5a+2 \quad \text{ou} \quad 2^{2013}=13b+5$$
$$2^{2013}=5(-15-13k)+2=-73-65k$$
On cherche le reste de la division de 2^{2013} par 65, donc ce reste r, vérifie $0\le r<65$, on doit prendre $k=-2$, donc
$$r=-73+2\times 65=57$$

Allez à : Exercice 41 :

Correction exercice 42 :

(1) a.
$222=2\times 3\times 37$ donc 7 et 222 sont premiers entre eux, 7 est premier, on peut appliquer le petit théorème de Fermat
$$222^6\equiv 1\ \ [7]$$
Puis on divise 333 par 6
$$333=6\times 55+3$$
Par conséquent
$$222^{333}=222^{6\times 55+3}=(222^6)^{55}\times 222^3\equiv 1^{55}\times 222^3\ [7]\equiv 222^3\ [7]$$

On divise 222 par 7

$$222 = 7 \times 31 + 5$$

$$222^{333} \equiv 222^3\ [7] \equiv (7 \times 31 + 5)^3\ \ [7] \equiv 5^3\ \ [7] \equiv 25 \times 5\ \ [7] \equiv 4 \times 5\ \ [7] \equiv 6\ \ [7]$$

Comme $0 \leq 6 < 7$, 6 est le reste de la division euclidienne de 222^{333} par 7.

$222 = 2 \times 3 \times 37$ donc 11 et 222 sont premiers entre eux, 11 est premier, on peut appliquer le petit théorème de Fermat

$$222^{10} \equiv 1\ \ [11]$$

Puis on divise 333 par 10

$$333 = 10 \times 33 + 3$$

Par conséquent

$$222^{333} = 222^{10\times 33+3} = (222^{10})^{33} \times 222^3 \equiv 1^{33} \times 222^3\ [7] \equiv 222^3\ [7]$$

On divise 222 par 11

$$222 = 11 \times 20 + 2$$

$$222^{333} \equiv 222^3\ [11] \equiv (11 \times 20 + 2)^3\ \ [11] \equiv 2^3\ \ [11] \equiv 8\ \ [11]$$

Comme $0 \leq 8 < 11$, 8 est le reste de la division euclidienne de 222^{333} par 11.

b. Il y a une solution évidente $7 \times (-3) + 11 \times 2 = 1$

c.

$$N \equiv 6\ \ [7]$$

$$N \equiv 8\ \ [11]$$

$$7 \times (-3) + 11 \times 2 = 1 \Rightarrow 11 \times 2 = 1 + 3 \times 7$$

D'après le théorème des restes chinois il existe un unique x modulo $77 = 7 \times 11$ tel que $N \equiv x\ \ [77]$

$$x = 8 - 2 \times 11 \times 2 = 8 - 2 \times (1 + 3 \times 7) = -36 \equiv 41\ [77]$$

Vérifie

$$x = 8 - 4 \times 11 \equiv 8\ \ [11] \quad \text{et} \quad x = 6 - 6 \times 7 \equiv 6\ \ [7]$$

41 est la solution car $0 \leq 41 < 77$.

Autre méthode

$$N = 6 + 7k \quad \text{et} \quad N = 8 + 11l$$

Donc

$$6 + 7k = 8 + 11l \Rightarrow 7k - 11l = 2$$

Or

$$7 \times (-3) + 11 \times 2 = 1 \Rightarrow 7 \times (-6) + 11 \times 4 = 2$$

En soustrayant ces deux égalités

$$7(k + 6) - 11(l + 4) = 0 \Rightarrow 7(k + 6) = 11(l + 4)$$

Comme 7 divise $11(l + 4)$ et que 7 et 11 sont premiers entre eux, le théorème de Gauss permet d'affirmer que 7 divise $l + 4$, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $l + 4 = 7n \Rightarrow l = -4 + 7l$, ce que l'on remplace dans $N = 8 + 11l = 8 + 11(-4 + 7l) = -36 + 77l = 41 + 77(l - 1)$

41 est la solution car $0 \leq 41 < 77$.

(2) On appelle N le nombre de livres de Toto, d'après l'énoncé

$$N \equiv 7\ \ [20] \quad \text{et} \quad N \equiv 7\ \ \ [25]$$

Il existe $k, l \in \mathbb{N}$ tels que $N = 7 + 20k$ et $N = 7 + 25l$ donc $20k = 25l$, on simplifie par 5, par conséquent $4k = 5l$, 4 et 5 sont premiers entre eux, 4 divise $5l$, d'après le théorème de Gauss, 4 divise l, il existe $u \in \mathbb{N}$ tel que $l = 4u$. On en déduit que $N = 7 + 25 \times 4u$, $u = 0$ n'est pas solution car $N < 10$, $u = 1$ est la solution $N = 7 + 100 = 107$

Allez à : Exercice 42 :

Correction exercice 43 :

1.

$$99 = 1 \times 56 + 43$$
$$56 = 1 \times 43 + 13$$
$$43 = 3 \times 13 + 4$$
$$13 = 3 \times 4 + 1$$
$$1 = 13 - 3 \times 4 = 13 - 3 \times (43 - 3 \times 13) = -3 \times 43 + 10 \times 13$$
$$= -3 \times 43 + 10 \times (56 - 1 \times 43) = 10 \times 56 - 13 \times 43$$
$$= 10 \times 56 - 13 \times (99 - 1 \times 56) = -13 \times 99 + 23 \times 56$$
$$1 = -13 \times 99 + 23 \times 56$$

2.

$$\begin{cases} x \equiv 2 \quad [56] \\ x \equiv 3 \quad [99] \end{cases} \Leftrightarrow \exists k, l \in \mathbb{Z}, \begin{cases} x = 2 + 56k \\ x = 3 + 99l \end{cases}$$

$$2 + 56k = 3 + 99l \Leftrightarrow -99l + 56k = 1 \quad L_1$$

Or

$$-13 \times 99 + 23 \times 56 = 1 \quad L_2$$

En faisant la soustraction entre L_1 et L_2

$$99(-l + 13) + 56(k - 23) = 0 \Leftrightarrow 56(k - l) = 99(l - 13)$$

56 et 99 sont premiers entre eux et 56 divise $99(l - 13)$, d'après le théorème de Gauss 56 divise $l - 13$, il existe donc $a \in \mathbb{Z}$ tel que $l - 13 = 56a \Leftrightarrow l = 13 + 56a$, ce que l'on remplace dans $x = 3 + 99l$

$$x = 3 + 99(13 + 56k) = 3 + 99 \times 13 + 99 \times 56k = 1290 + +5544k$$

Allez à : Exercice 43 :

Correction exercice 44 :

On cherche une solution particulière de $13a + 11b = 1$, ce qui est possible puisque $11 \wedge 13 = 1$

$13 = 1 \times 11 + 2$, $11 = 5 \times 2 + 1$ et $2 = 2 \times 1 + 0$

Donc $1 = 11 - 5 \times 2 = 11 - 5 \times (13 - 1 \times 11) = -5 \times 13 + 6 \times 11$

Comme 11 et 13 sont premiers entre eux, on peut appliquer le théorème des restes chinois.

On pose $M = 11 \times 13 = 143$, $M_1 = 13$, $M_2 = 11$, on cherche y_1 tel que

$$M_1 y_1 \equiv 1 \ [11] \Leftrightarrow 13y_1 \equiv 1 \ [11]$$

Et y_2 tel que $M_2 y_2 \equiv 1 \ [13] \Leftrightarrow 11y_2 \equiv 1 \ [13]$, soit, en regardant l'égalité

$1 = -5 \times 13 + 6 \times 11$, $y_1 = -5$ et $y_2 = 6$ conviennent. L'unique solution modulo 143 est :

$$x = 6 \times 13 \times (-5) + 3 \times 11 \times 6 \ \ [143] \equiv 6 \times (-65 + 33) \ [143] \equiv -6 \times 32 \ \ [143]$$
$$\equiv -192 \ \ [143]$$

Les solutions dans $\mathbb{Z}$ sont de la forme $x = -186 + 143k$, $k \in \mathbb{Z}$. La plus petite solution positive est :

$$x = -192 + 2 \times 143 = -192 + 286 = 94$$

Allez à : Exercice 44 :

Correction exercice 45 :

1. On cherche les solutions de $2u + 5v = 59 \quad (1)$ avec $u \in \mathbb{Z}$ et $v \in \mathbb{Z}$, comme 2 et 5 sont premier entre eux, il existe u_0 et v_0 tels que $2u_0 + 5v_0 = 1$, il existe une solution évidente $2 \times (-2) + 5 \times 1 = 1$, si ce n'est pas le cas on utilise l'algorithme d'Euclide. En multiplie par 59 : $2 \times (-118) + 5 \times 59 = 59 \quad (2)$,

En soustrayant (1) et (2) on trouve :

$$2(u+118)+5(v-59)=0\Leftrightarrow 2(u+2)=-5(v-1)$$

2 est premier avec 5 et 2 divise $-5(v-59)$, d'après le théorème de Gauss 2 divise $-(v-59)$, donc il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $-(v-59)=2k\Leftrightarrow v=-2k+59$, on remplace $-(v-59)=2k$ dans $2(u+118)=-5(v-59)$, on trouve $2(u+118)=5\times 2k\Leftrightarrow u+118=5k\Leftrightarrow u=5k-118$, la réciproque est évidente.

Les solutions de (1) sont $\begin{cases}u=5k-118\\ v=-2k+59\end{cases}$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

2. Or $u\geq 0$ et $v\geq 0$,

$$\begin{cases}5k-118\geq 0\\ -2k+59\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k\geq\dfrac{118}{5}=23+\dfrac{3}{5}\\ k\leq\dfrac{59}{2}=29+\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k\geq 24\\ k\leq 29\end{cases}$$

Chaque valeur de $k\in\{24,25,26,27,28,29\}$ donne une solution de l'équation (1) avec $u\geq 0$ et $v\geq 0$.
Soit

$$\{(2,11),(7,9),(12,7),(17,5),(22,3),(27,1)\}$$

Allez à : Exercice 45 :

Correction exercice 46 :

1.

$$\begin{cases}7x+5y\equiv 2\ \ [8]\\ 5x+4y\equiv 16\ \ [8]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-x+5y\equiv 2\ \ [8]\\ 5x+4y\equiv 0\ \ [8]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\equiv 5y-2\ \ [8]\\ 5x+4y\equiv 0\ \ [8]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\equiv 5y-2\ \ [8]\\ 5(5y-2)+4y\equiv 0\ \ [8]\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\equiv 5y-2\ \ [8]\\ 29y+4y\equiv 10\ \ [8]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\equiv 5y-2\ \ [8]\\ y\equiv 2\ \ [8]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\equiv 10-2\ \ [8]\\ y\equiv 2\ \ [8]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\equiv 0\ \ [8]\\ y\equiv 2\ \ [8]\end{cases}$$

$$S=\{(8k,2+8k'),k\in\mathbb{Z},k'\in\mathbb{Z}\}$$

2.

$$\begin{cases}7x+5y\equiv 2\ \ [9]\\ 5x+4y\equiv 16\ \ [9]\end{cases}\Leftrightarrow L_1+L_2\begin{cases}7x+5y\equiv 2\ \ [9]\\ 12x+9y\equiv 18\ \ [9]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7x+5y\equiv 2\ \ [9]\\ 3x\equiv 0\ \ [9]\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}2(7x+5y)\equiv 2\times 2\ \ [9]\\ 3x\equiv 0\ \ [9]\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}14x+10y\equiv 4\ \ [9]\\ 3x\equiv 0\ \ [9]\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5x+y\equiv 4\ \ [9]\\ 3x\equiv 0\ \ [9]\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-x+y\equiv 4\ \ [9]\\ 3x\equiv 0\ \ [9]\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}y\equiv 4+x\ \ [9]\\ 3x\equiv 0\ \ [9]\end{cases}$$

On ne peut pas en déduire que $x\equiv 0\ \ [9]$, par exemple si $x\equiv 3\ \ [9]$, on a $3x\equiv 0\ \ [9]$ sans que $x\equiv 0\ \ [9]$.

$3x\equiv 0\ \ [9]\Leftrightarrow$il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $3x=9k\Leftrightarrow x=3k\Leftrightarrow\begin{cases}x\equiv 0\ \ [9]\\ x\equiv 3\ \ [9]\\ x\equiv 6\ \ [9]\end{cases}$

Si $x\equiv 0\ \ [9]$ alors $y\equiv 4\ \ [9]$, si $x\equiv 3\ \ [9]$ alors $y\equiv 4+3\ \ [9]\equiv 7\ \ [9]$, si $x\equiv 6\ \ [9]$ alors $y\equiv 4+6\ \ [9]\equiv 10\ \ [9]\equiv 1\ \ [9]$.

Pour la réciproque, on remplace les trois couples de solutions modulo 9, $(0,4)$, $(3,7)$ et $(6,1)$ dans $\begin{cases}7x+5y\equiv 2\ \ [9]\\ 5x+4y\equiv 16\ \ [9]\end{cases}$ pour constater que cela marche.

Allez à : Exercice 46 :

Correction exercice 47 :

1.

$$\begin{cases}n\equiv 1\ \ [6]\\ n\equiv 5\ \ [9]\end{cases}\Leftrightarrow\exists(u,v)\in\mathbb{Z}^2,\begin{cases}n=1+6u\\ n=5+9v\end{cases}$$

Cela entraine que $1+6u=5+9v$, ce qui équivaut à $6u-9v=4$, comme le PGCD de 6 et 9 est 3 et que 3 ne divise pas 4, il n'y a pas de solution.

2.

$$\begin{cases} n \equiv 3 \ [6] \\ n \equiv 6 \ [9] \end{cases} \Leftrightarrow \exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2, \begin{cases} n = 3 + 6u \\ n = 6 + 9v \end{cases}$$

Cela entraine que $3 + 6u = 6 + 9v$, ce qui équivaut à $6u - 9v = 3$, soit encore $2u - 3v = 1$

Il existe une solution évidente, $u = -1$ et $v = -1$, autrement dit $2(-1) - 3(-1) = 1$

$$\begin{cases} 2u - 3v = 1 \\ 2(-1) - 3(-1) = 1 \end{cases}$$

On fait la soustraction de ces deux équations

$$2(u+1) - 3(v+1) = 0 \Leftrightarrow 2(u+1) = 3(v+1) \ \ (*)$$

2 divise $3(v+1)$ et 2 est premier avec 3 donc d'après le théorème de Gauss, 2 divise $v + 1$, par conséquent il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $v + 1 = 2k$ (ou $v = -1 + 2k$), ce que l'on remplace dans $(*)$, ce qui donne $2(u+1) = 3 \times 2k$, en simplifiant par 2, $u + 1 = 3k$ (ou $u = -1 + 3k$).

La réciproque étant évidente

$$n = 3 + 6u = 3 + 6(-1 + 3k) = -3 + 18k, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Si on avait prit $n = 6 + 9v$, on aurait trouvé le même ensemble de solution.

Allez à : Correction exercice 47 :

Correction exercice 48 :

1. $x^2 \equiv 1 \ \ [p] \Leftrightarrow x^2 - 1 \equiv 0 \ \ [p] \Leftrightarrow (x-1)(x+1) \equiv 0 \ \ [p] \Leftrightarrow$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que :
$$(x-1)(x+1) = kp$$
Si $x - 1$ n'est pas un multiple de p, $x - 1$ est premier avec p, d'après le théorème de Gauss p divise $(x-1)(x+1) = (x-1)\big(x-(p-1)\big)$ entraine que p divise $x + 1$ autrement dit $x \equiv -1 \ \ [p]$
Sinon $x - 1$ est un multiple de p, autrement dit $x \equiv 1 \ \ [p]$
L'ensemble des solutions est :
$S = \{1 + kp, -1 + kp\}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
2. Soit a tel que $2 \leq a \leq p - 2$, a est premier avec p donc il existe b et l tels que $ab + pl = 1$, d'après Bézout, donc $ab \equiv 1 \ [p]$, en rajoutant kp, $k \in \mathbb{Z}$, à b, on peut prendre $1 \leq b \leq p - 1$ (les valeurs 0 et p ne sont pas possible), b ne peut pas prendre les valeurs 1 et $p - 1 \equiv -1 \ \ [p]$ car alors $ab \not\equiv \pm 1 \ \ [p]$.
D'après la question 1°) $b \neq a$ car sinon $a = 1$ ou $a = p - 1 \equiv -1 \ \ [p]$.
$$(p-1)! = 2 \times 3 \times \ldots \times (p-2) \times (p-1)$$
Dans le produit $2 \times 3 \times \ldots \times (p-2)$, il y a $p - 3$ termes (nombre pair) constitué de $\frac{p-3}{2}$ couples du type ab tels que $ab \equiv 1 \ \ [p]$, donc $2 \times 3 \times \ldots \times (p-2) \equiv 1 \ \ [p]$, par conséquent
$$(p-1)! \equiv p - 1 \ \ [p] \equiv -1 \ \ \ [p]$$

Allez à : Exercice 48 :

Correction exercice 49 :

1. $(n-x)^2 = n^2 - 2nx + x^2 \equiv x^2 \ \ [n]$
2. Précisons un peu $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, si $m \in \mathbb{Z}$ d'après la division euclidienne, il existe un unique couple $(b,r) \in \mathbb{Z} \times \{0,1,\ldots,n-1\}$ tel que $m = bn + r$, r est un reste donc un élément de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
Soit $r \in \{0,1,\ldots,n-1\}$, $c(r)$ est le reste de la division de r^2 par n, donc $r^2 = bn + c(r)$ ce qui équivaut à $r^2 \equiv c(r) \ \ [n]$ et $c(r) \in \{0,1,\ldots,n-1\}$.
Comme $c(1) \equiv 1^2 \ \ [n] \equiv 1 \ \ [n]$, on a $c(n-1) \equiv (n-1)^2 \ \ [n] \equiv 1^2 \ \ [n] \equiv c(1) \ [n]$
Puisque $c(n-1) \in \{0,1,\ldots,n-1\}$ et $c(1) \in \{0,1,\ldots,n-1\}$ et que $c(n-1) \equiv c(1) \ [n]$, on a
$$c(1) = c(n-1)$$
Et pourtant $1 \neq n - 1$, sauf si $n = 2$, mais $n \geq 3$.
Donc c n'est pas injective.
On utilise l'exercice 1, c n'est pas surjective. Sinon on refait une démonstration semblable.
3.

n	0	1	2	3	4	5	6
n^2	0	1	4	$9 \equiv 2 \ \ [7]$	$16 \equiv 2 \ \ [7]$	$25 \equiv 4 \ \ [7]$	$36 \equiv 1 \ \ [7]$

4.
$$x^2 - 6xy + 2y^2 = (x - 3y)^2 - 9y^2 + 2y^2 = (x - 3y)^2 + 7y^2 \equiv (x - 3y)^2 \quad [7]$$
Et $7003 \equiv 3 \quad [7]$, d'après le 3°) il n'y a pas de carré qui soit congru à 3 modulo 7 donc il n'y a pas de solution.

Allez à : Exercice 49 :

NOMBRES COMPLEXES

Exercice 1 :

On donne θ_0 un réel tel que : $\cos(\theta_0)=\frac{2}{\sqrt{5}}$ et $\sin(\theta_0)=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Calculer le module et l'argument de chacun des nombres complexes suivants (en fonction de θ_0) :

$a=3i(2+i)(4+2i)(1+i)$ et $b=\frac{(4+2i)(-1+i)}{(2-i)3i}$

Allez à : Correction exercice 1 :

Exercice 2 :

Mettre sous la forme $a+ib, a,b\in\mathbb{R}$ (forme algébrique) les nombres complexes

$$z_1=\frac{3+6i}{3-4i};\quad z_2=\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2;\ z_3=\frac{2+5i}{1-i}+\frac{2-5i}{1+i}$$

$$z_4=\frac{5+2i}{1-2i};\qquad z_5=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3;\quad z_6=\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$$

$$z_7=-\frac{2}{1-i\sqrt{3}};\quad z_8=\frac{1}{(1+2i)(3-i)};\quad z_9=\frac{1+2i}{1-2i}$$

Allez à : Correction exercice 2 :

Exercice 3 :

Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants

$$z_1=2e^{\frac{2i\pi}{3}};z_2=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{8}};z_3=3e^{-\frac{7i\pi}{8}};z_4=\left(2e^{\frac{i\pi}{4}}\right)\left(e^{-\frac{3i\pi}{4}}\right);$$

$$z_5=\frac{2e^{\frac{i\pi}{4}}}{e^{-\frac{3i\pi}{4}}};z_6=\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(3e^{\frac{5i\pi}{6}}\right);z_7=\frac{2e^{\frac{i\pi}{3}}}{3e^{-\frac{5i\pi}{6}}}$$

z_8, le nombre de module 2 et d'argument $\frac{\pi}{3}$.

z_9 le nombre de module 3 et d'argument $-\frac{\pi}{8}$.

Allez à : Correction exercice 3 :

Exercice 4 :

1. Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants, ainsi que leur conjugués :

$$z_1=3+3i;\quad z_2=-1-i\sqrt{3};\quad z_3=-\frac{4}{3}i;\quad z_4=-2;\quad z_5=e^{i\theta}+e^{2i\theta},\qquad \theta\in]-\pi,\pi[$$

Pour z_5, factoriser par $e^{\frac{3i\theta}{2}}$

$$z_6=1+i;\quad z_7=1+i\sqrt{3};\quad z_8=\sqrt{3}+i;\quad z_9=\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i};\quad z_{10}=1+e^{i\theta},\qquad \theta\in]-\pi,\pi[$$

Pour z_{10}, factoriser par $e^{\frac{i\theta}{2}}$

2. Calculer le module et un argument des nombres complexes suivants, ainsi que de leur conjugués.

$$z_1=1+i(1+\sqrt{2});\quad z_2=\sqrt{10+2\sqrt{5}}+i(1-\sqrt{5});\quad z_3=\frac{\tan(\varphi)-i}{\tan(\varphi)+i};\quad z_4=\frac{1}{1+i\tan(\theta)}$$

Indication :

Ecrire z_1 sous la forme $\alpha\left(e^{i\theta}+e^{2i\theta}\right)$

Calculer z_2^5

3. Calculer

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2010}$$

Allez à : Correction exercice 4 :

Exercice 5 :

Effectuer les calculs suivants :

1. $(3+2i)(1-3i)$
2. Produit du nombre complexe de module 2 et d'argument $\frac{\pi}{3}$ par le nombre complexe de module 3 et d'argument $-\frac{5\pi}{6}$.
3. Quotient du nombre complexe de modulo 2 et d'argument $\frac{\pi}{3}$ par le nombre complexe de module 3 et d'argument $-\frac{5\pi}{6}$.

Allez à : Correction exercice 5 :

Exercice 6 :

Etablir les égalités suivantes :

1.
$$\left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)(1+i)=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{84}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{84}\right)\right)$$
2.
$$(1-i)\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)\left(\sqrt{3}-i\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{13\pi}{60}\right)-i\sin\left(\frac{13\pi}{60}\right)\right)$$
3.
$$\frac{\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)}{1+i}=\frac{\sqrt{3}-i}{2}$$

Allez à : Correction exercice 6 :

Exercice 7 :

Soit

$$u=1+i \quad \text{et} \quad v=-1+i\sqrt{3}$$

1. Déterminer les modules de u et v.
2. Déterminer un argument de u et un argument de v.
3. En déduire le module et un argument pour chacune des racines cubiques de u.
4. Déterminer le module et un argument de $\frac{u}{v}$.
5. En déduire les valeurs de

$$\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) \quad \text{et} \quad \sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$$

Allez à : Correction exercice 7 :

Exercice 8 :

Calculer le module et un argument de

$$u=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad v=1-i$$

En déduire le module et un argument de $\frac{u}{v}$.

Allez à : Correction exercice 8 :

Exercice 9 :

Effectuer les calculs suivants en utilisant la forme exponentielle.

$$z_1=\frac{1+i}{1-i};z_2=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3;z_3=\left(1+i\sqrt{3}\right)^4;z_4=\left(1+i\sqrt{3}\right)^5+\left(1-i\sqrt{3}\right)^5;$$

$$z_5=\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i};z_6=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2-2i}$$

Allez à : Correction exercice 9 :

Exercice 10 :

Calculer les racines carrées des nombres suivants.

$$z_1=-1;z_2=i;z_3=1+i;z_4=-1-i;z_5=1+i\sqrt{3};$$
$$z_6=3+4i;z_7=7+24i;z_8=3-4i;z_9=24-10i$$

Allez à : Correction exercice 10 :

Exercice 11 :

1. Calculer les racines carrées de $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$. En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.
2. Calculer les racines carrées de $\frac{\sqrt{3}+i}{2}$. En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Allez à : Correction exercice 11 :

Exercice 12 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2+z+1=0$.
2. $z^2-(5i+14)z+2(5i+12)=0$.
3. $z^2-\sqrt{3}z-i=0$.
4. $z^2-(1+2i)z+i-1=0$.
5. $z^2-(3+4i)z-1+5i=0$.
6. $4z^2-2z+1=0$.
7. $z^4+10z^2+169=0$.
8. $z^4+2z^2+4=0$.
9. $x^4-30x^2+289=0$.
10. $x^4+4x^3+6x^2+4x-15=0$.
11. $z^3+3z-2i=0$.
12. $z^2-(1+a)(1+i)z+(1+a^2)i=0$.
13. $iz^2+(1-5i)z+6i-2=0$.
14. $(1+i)z^2-(3+i)z-6+4i=0$.
15. $(1+2i)z^2-(9+3i)z-5i+10=0$.
16. $(1+3i)z^2-(6i+2)z+11i-23=0$.

Allez à : Correction exercice 12 :

Exercice 13 :

Résoudre l'équation :

$$Z^4+(3-6i)Z^2-8-6i=0$$

Allez à : Correction exercice 13 :

Exercice 14 :

$$(1-i)X^3-(5+i)X^2+(4+6i)X-4i=0$$

1. Montrer que cette équation admet une racine réelle.
2. Résoudre cette équation.

Allez à : Correction exercice 14 :

Exercice 15 :

1. Montrer que
$$X^3 + (1 - 2i)X^2 - 3(1 + i)X - 2 + 2i = 0 \quad (E)$$
Admet une ou plusieurs racines réelles.
2. Résoudre (E)

Allez à : Correction exercice 15 :

Exercice 16 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$z^6 - iz^3 - 1 - i = 0$$
Indication : Poser $Z = z^3$ et résoudre d'abord $Z^2 - iZ - 1 - i = 0$.

Allez à : Correction exercice 16 :

Exercice 17 :

Soit (E) l'équation
$$X^4 - 3X^3 + (2 - i)X^2 + 3X - 3 + i = 0$$

1. Montrer que (E) admet des racines réelles.
2. Résoudre (E).

Allez à : Correction exercice 17 :

Exercice 18 :

1. Résoudre $X^3 = -2 + 2i$
2. Résoudre $Z^3 = -8i$
3. Résoudre
$$\frac{1}{2}Z^6 + (1 + 3i)Z^3 + 8 + 8i = 0$$
On rappelle que $\sqrt{676} = 26$.

Allez à : Correction exercice 18 :

Exercice 19 :

Soit l'équation $z^3 - iz + 1 - i = 0 \qquad (E)$

1. Montrer que (E) admet une racine réelle.
2. Déterminer les solutions de (E).

Allez à : Correction exercice 19 :

Exercice 20 :

Soit (E) l'équation
$$X^4 - (3 + \sqrt{3})X^3 + (2 + 3\sqrt{3} - i)X^2 + (-2\sqrt{3} + 3i)X - 2i = 0$$

1. Montrer que (E) admet des racines réelles.
2. Résoudre (E).

Allez à : Correction exercice 20 :

Exercice 21 :

Soit $z = \sqrt{2 + \sqrt{3}} + i\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

1. Calculer z^2, puis déterminer le module et un argument de z^2, puis écrire z^2 sous forme trigonométrique.
2. En déduire le module et un argument de z.

3. En déduire $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Allez à : Correction exercice 21 :

Exercice 22 :

1. Donner les solutions de :
$$u^4 = -4$$
Sous forme algébrique et trigonométrique.
2. Donner les solutions de :
$$(z+1)^4 + 4(z-1)^4 = 0$$
Sous forme algébrique.

Allez à : Correction exercice 22 :

Exercice 23 :

1. Résoudre
$$X^3 = -2\sqrt{2}$$
On donnera les solutions sous forme algébrique.
2.
Trouver les solutions de
$$(z+i)^3 + 2\sqrt{2}(z-i)^3 = 0$$
On donnera les solutions (et sous forme algébrique en bonus).

Allez à : Correction exercice 23 :

Exercice 24 :

1. Donner les solutions complexes de $X^4 = 1$.
2. Résoudre $X^4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$
3. Résoudre $X^8 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)X^4 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

Allez à : Correction exercice 24 :

Exercice 25 :

Ecrire sous forme algébrique et trigonométrique le nombre complexe
$$\left(\frac{1+i-\sqrt{3}(1-i)}{1+i}\right)^2$$

Allez à : Correction exercice 25 :

Exercice 26 :

1. Déterminer le module et un argument de $\frac{1+i}{1-i}$, calculer $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2010}$
2. Déterminer le module et un argument de $1+i\sqrt{3}$, calculer $\left(1+i\sqrt{3}\right)^{2010}$
3. Calculer les puissances n-ième des nombres complexes.
$$z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i};\quad z_2 = 1+j;\quad z_3 = \frac{1+i\tan(\theta)}{1-i\tan(\theta)};\quad z_4 = 1+\cos(\phi)+i\sin(\phi)$$

Allez à : Correction exercice 26 :

Exercice 27 :

Comment choisir l'entier naturel n pour que $\left(\sqrt{3}+i\right)^n$ soit réel ? Imaginaire ?

Allez à : Correction exercice 27 :

Exercice 28 :

Soit z un nombre complexe de module ρ et d'argument θ, et soit $\overline{z}$ son conjugué. Calculer

$$(z+\overline{z})\left(z^2+\overline{z}^2\right)\dots\left(z^n+\overline{z}^n\right)$$

En fonction de ρ et θ. Et de $\cos(\theta)\cos(2\theta)\dots\cos(n\theta)$

Allez à : Correction exercice 28 :

Exercice 29 :

1. Pour quelles valeurs de $z \in \mathbb{C}$ a-t-on $|1+iz| = |1-iz|$
2. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \frac{1+ia}{1-ia}, \quad a \in \mathbb{R}$$

Montrer, sans les calculer, que les solutions sont réelles. Trouver alors les solutions.

3. Calculer les racines cubiques de $\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}$

Allez à : Correction exercice 29 :

Exercice 30 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1$$

Allez à : Correction exercice 30 :

Exercice 31 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^4 = \left(\frac{1-i}{1-i\sqrt{3}}\right)^4$$

Allez à : Correction exercice 31 :

Exercice 32 :

1. Déterminer les deux solutions complexes de $u^2 = -2+2i\sqrt{3}$.
2. Résoudre

$$\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 = -2+2i\sqrt{3}$$

On explicitera les solutions sous forme algébrique.

Allez à : Correction exercice 32 :

Exercice 33 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$

$$\left(\frac{z-1}{z-i}\right)^3 = -8$$

On donnera les solutions sous forme algébrique.

Allez à : Correction exercice 33 :

Exercice 34 :

On appelle $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $X^3 = 1$ (donner les solutions sous forme algébrique et trigonométrique)
2. Montrer que $\overline{j} = j^2$

3. Montrer que $j^{-1} = j^2$
4. Montrer que $1 + j + j^2 = 0$
5. Calculer $\frac{1}{1+j}$.
6. Calculer j^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Allez à : Correction exercice 34 :

Exercice 35 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^3 = \frac{1}{4}(-1 + i)$$

Et montrer qu'une seule de ces solutions a une puissance quatrième réelle.

Allez à : Correction exercice 35 :

Exercice 36 :

1. Donner les solutions complexes de $X^4 = 1$.
2. Résoudre $X^4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$
3. Résoudre $X^8 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)X^4 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

Allez à : Correction exercice 36 :

Exercice 37 :

Trouver les racines cubiques de $11 + 2i$.

Allez à : Correction exercice 37 :

Exercice 38 :

Calculer

$$\frac{\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}(1 + i)}{2}}$$

Algébriquement, puis trigonométriquement. En déduire $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

Allez à : Correction exercice 38 :

Exercice 39 :

Trouver les racines quatrième de 81 et de -81.

Allez à : Correction exercice 39 :

Exercice 40 :

Soit $n \geq 2$, un entier.

1.
   a. Déterminer les complexes qui vérifient $z^{2n} = 1$.
   b. Déterminer les complexes qui vérifient $z^n = -1$.
2. Calculer la somme des complexes qui vérifient $z^n = -1$.

Allez à : Correction exercice 40 :

Exercice 41 :

Soit z une racine n-ième de -1, donc $z^n = -1$. Avec $n > 2$ et $z \neq -1$

Calculer

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} z^{2k} = 1 + z^2 + z^4 + \cdots + z^{2(n-1)}$$

Allez à : Correction exercice 41 :

Exercice 42 :

1. Soient z_1, z_2, z_3 trois nombres complexes ayant le même cube.

Exprimer z_2 et z_3 en fonction de z_1.

2. Donner, sous forme polaire (forme trigonométrique) les solutions dans $\mathbb{C}$ de :

$$z^6 + (7 - i)z^3 - 8 - 8i = 0$$

Indication : poser $Z = z^3$ et calculer $(9 + i)^2$.

Allez à : Correction exercice 42 :

Exercice 43 :

Déterminer les racines quatrième de $-7 - 24i$.

Allez à : Correction exercice 43 :

Exercice 44 :

Résoudre les équations suivantes :

$$z^6 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}}; \quad z^4 = \frac{1 - i}{1 + i\sqrt{3}}; \quad z^6 + 27 = 0; \;\; 27(z - 1)^6 + (z + 1)^6 = 0$$

Allez à : Correction exercice 44 :

Exercice 45 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1. $z^5 = 1$
2. $z^5 = 1 - i$
3. $z^3 = 2 - 2i$
4. $z^5 = \overline{z}$

Allez à : Correction exercice 45 :

Exercice 46 :

1. Calculer les racines n-ième de $-i$ et de $1 + i$.
2. Résoudre $z^2 - z + 1 - i = 0$.
3. En déduire les racines de $z^{2n} - z^n + 1 - i = 0$.

Allez à : Correction exercice 46 :

Exercice 47 :

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout nombre $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$(z - 1)(1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}) = z^n - 1$$

Et en déduire que si $z \neq 1$, on a :

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \frac{z^n - 1}{z - 1}$$

2. Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $e^{ix} - 1 = 2ie^{\frac{ix}{2}} \sin\left(\frac{x}{2}\right)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}$ la somme :

$$Z_n = 1 + e^{ix} + e^{2ix} + \cdots + e^{(n-1)ix}$$

Et en déduire les valeurs de

$$X_n = 1 + \cos(x) + \cos(2x) + \cdots + \cos\big((n-1)x\big)$$
$$Y_n = \sin(x) + \sin(2x) + \cdots + \sin\big((n-1)x\big)$$

Allez à : Correction exercice 47 :

Exercice 48 :

Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ une racine cinquième de 1, donc $\alpha^5 = 1$.

1. Quelles sont les 4 complexes qui vérifient ces conditions ?
2. Montrer que $1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = 0$
3. Calculer $1 + 2\alpha + 3\alpha^2 + 4\alpha^3 + 5\alpha^4$
   Indication : On calculera de deux façon différente la dérivée de la fonction f définie par
   $$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$$
   On donnera le résultat sous forme algébrique.

Allez à : Correction exercice 48 :

Exercice 49 :

Soit ϵ une racine n-ième de l'unité, $\epsilon \neq 1$; calculer
$$S = 1 + 2\epsilon + 3\epsilon^2 + \cdots + n\epsilon^{n-1}$$

Allez à : Correction exercice 49 :

Exercice 50 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $(z+1)^n = (z-1)^n$.

Allez à : Correction exercice 50 :

Exercice 51 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^n = \bar{z}$ où $n \geq 1$.

Allez à : Correction exercice 51 :

Exercice 52 :

Soit $\beta \in \mathbb{C}$ tel que $\beta^7 = 1$ et $\beta \neq 1$. Montrer que
$$\frac{\beta}{1+\beta^2} + \frac{\beta^2}{1+\beta^4} + \frac{\beta^3}{1+\beta^6} = -2$$

Allez à : Correction exercice 52 :

Exercice 53 :

Linéariser :
$$A(x) = \cos^3(x)\,;\ B(x) = \sin^3(x)\,; C(x) = \cos^4(x)\,; D(x) = \sin^4(x)\,; E(x) = \cos^2(x)\sin^2(x)\,;$$
$$F(x) = \cos(x)\sin^3(x)\,; G(x) = \cos^3(x)\sin(x)\,; H(x) = \cos^3(x)\sin^2(x)\,;$$
$$I(x) = \cos^2(x)\sin^3(x)\,; J(x) = \cos(x)\sin^4(x)$$

Allez à : Correction exercice 53 :

Exercice 54 :

1. Déterminer l'ensemble des complexes z tels que $\frac{1-z}{1-iz}$ soit réel.
2. Déterminer l'ensemble des complexes z tels que $\frac{1-z}{1-iz}$ soit imaginaire pur.

Allez à : Correction exercice 54 :

Exercice 55 :

Soit $\rho \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, avec $\rho e^{i\theta} \neq 1$

Soit

$$z=\frac{1+\rho e^{i\theta}}{1-\rho e^{i\theta}}$$

Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de z.

Allez à : Correction exercice 55 :

Exercice 56 :

1. Montrer que $(1+i)^6=-8i$
2. En déduire une solution de l'équation $(E)\ z^2=-8i$.
3. Ecrire les deux solutions de (E) sous forme algébrique, et sous forme exponentielle.
4. Déduire de la première question une solution de l'équation $(E_0)\ z^3=-8i$.

Allez à : Correction exercice 56 :

Exercice 57 :

Soit $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ définie par $f(z)=z(1-z)$

1. Déterminer les points fixes de f c'est-à-dire résoudre $f(z)=z$.
2. Montrer que si $\left|z-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}$ alors $\left|f(z)-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}$

   Indication : $z(1-z)=\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-z\right)+\frac{1}{4}$

Allez à : Exercice 57 :

Exercice 58 :

Posons $E=\mathbb{C}\setminus\{-i\}$. Soit $f:E\to\mathbb{C}\setminus\{1\}$ l'application définie pour tout $z\in E$ par :

$$f(z)=\frac{z-i}{z+i}$$

1. Montrer que l'application est injective.
2. Montrer que pour tout $z\in E$ on a $f(z)\neq 1$.
3. Démontrer l'égalité

$$f(E)=\mathbb{C}\setminus\{1\}$$

   Que peut-on en déduire sur f.
4. Soit $z\in E$. Montrer que

$$1-|f(z)|^2=4\frac{\mathcal{Im}(z)}{|z+i|^2}$$

5. Notons $\mathcal{U}$ l'ensemble des complexes de module 1. Montrer que l'on a

$$f(\mathbb{R})=\mathcal{U}\setminus\{1\}$$

Allez à : Correction exercice 58 :

CORRECTIONS

Correction exercice 1 :

$$\begin{aligned}|a|&=|3i(2+i)(4+2i)(1+i)|=|3i|\times|2+i|\times|4+2i|\times|1+i|\\&=3\times\sqrt{2^2+1^2}\times 2\times|2+i|\times\sqrt{1^2+1^2}=6\left(\sqrt{2^2+1^2}\right)^2\times\sqrt{2}=6\times 5\sqrt{2}\\&=30\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\arg(a)=\arg\big(3i(2+i)(4+2i)(1+i)\big)=\arg(3i)+\arg(2+i)+\arg(4+2i)+\arg(1+i)+2k\pi$$
$$=\frac{\pi}{2}+\arg(2+i)+\arg\big(2(2+i)\big)+\frac{\pi}{4}+2k\pi$$
$$=\frac{3\pi}{4}+\arg(2+i)+arg2+\arg(2+i)+2k\pi=\frac{3\pi}{4}+2\arg(2+i)+2k\pi$$

Soit θ un argument de $2+i$, $\cos(\theta)=\frac{2}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$ et $\sin(\theta)=\frac{1}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$ donc $\cos(\theta)=\cos(\theta_0)$ et $\sin(\theta)=\sin(\theta_0)$, on en déduit que $\theta=\theta_0+2k\pi$

Par suite

$$\arg(a)=\frac{3\pi}{4}+2\theta_0+2k\pi$$

$$|b|=\left|\frac{(4+2i)(-1+i)}{(2-i)3i}\right|=\frac{|4+2i|\times|-1+i|}{|2-i|\times|3i|}=\frac{2\times|2+i|\times\sqrt{(-1)^2+1^2}}{\sqrt{2^2+(-1)^2}\times 3}=\frac{2\times\sqrt{5}\times\sqrt{2}}{\sqrt{5}\times 3}$$
$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\arg(b)=\arg(4+2i)+\arg(-1+i)-\arg(2-i)-\arg(3i)+2k\pi=\theta_0+\frac{3\pi}{4}-(-\theta_0)-\frac{\pi}{2}+2k\pi$$
$$=\frac{\pi}{4}+2\theta_0+2k\pi$$

Allez à : Exercice 1 :

Correction exercice 2 :

$$z_1=\frac{3+6i}{3-4i}=z_1=\frac{(3+6i)(3+4i)}{3^2+(-4)^2}=\frac{9+12i+18i-24}{25}=\frac{-15+30i}{25}=-\frac{3}{5}+\frac{6}{5}i$$

$$z_2=\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2=\left(\frac{(1+i)(2+i)}{2^2+(-1)^2}\right)^2=\left(\frac{2+i+2i-1}{2^2+(-1)^2}\right)^2=\left(\frac{1+3i}{5}\right)^2=\frac{1+6i-9}{25}=-\frac{8}{25}+\frac{6}{25}i$$

Autre méthode

$$z_2=\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2=\frac{(1+i)^2}{(2-i)^2}=\frac{1+2i-1}{4-4i-1}=\frac{2i}{3-4i}=\frac{2i(3+4i)}{3^2+(-4)^2}=\frac{6i-8}{25}=-\frac{8}{25}+\frac{6}{25}i$$

$$z_3=\frac{2+5i}{1-i}+\frac{2-5i}{1+i}=\frac{(2+5i)(1+i)+(2-5i)(1-i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{2+2i+5i-5+2-2i-5i-5}{1^2-i^2}$$
$$=-\frac{6}{2}=-3$$

Autre méthode

$$z_3=\frac{2+5i}{1-i}+\frac{2-5i}{1+i}=\frac{2+5i}{1-i}+\overline{\frac{2+5i}{1-i}}=2\mathcal{Re}\left(\frac{2+5i}{1-i}\right)$$

Or

$$\frac{2+5i}{1-i}=\frac{(2+5i)(1+i)}{1^2+(-1)^2}=\frac{2+2i+5i-5}{2}=\frac{-3+7i}{2}=-\frac{3}{2}+\frac{7}{2}i$$

Donc

$$z_3=2\times\left(-\frac{3}{2}\right)=-3$$

$$z_4=\frac{5+2i}{1-2i}=\frac{(5+2i)(1+2i)}{1^2+(-2)^2}=\frac{5+10i+2i-4}{5}=\frac{-1+12i}{5}=-\frac{1}{5}+\frac{12}{5}i$$

$$z_5=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3=\left(-\frac{1}{2}\right)^3+3\left(-\frac{1}{2}\right)^2\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+3\left(-\frac{1}{2}\right)\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$$
$$=-\frac{1}{8}+3\times\frac{1}{4}\times i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}\times\left(-\frac{3}{4}\right)-i\frac{3\sqrt{3}}{8}=-\frac{1}{8}+i\frac{3\sqrt{3}}{8}+\frac{9}{8}-i\frac{3\sqrt{3}}{8}=1$$

Autre méthode

$$z_5=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3=\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^3=e^{2i\pi}=1$$

Ou encore

$$z_5=j^3=1$$

$$z_6=\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$$

On peut toujours s'amuser à développer $(1+i)^9$ et $(1-i)^7$ mais franchement ce n'est pas une bonne idée.

$$z_6=\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}=(1+i)^2\frac{(1+i)^7}{(1-i)^7}=(1+i)^2\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^7=(1+2i-1)\left(\frac{(1+i)(1+i)}{1^2+(-1)^2}\right)^7$$

$$=2i\left(\frac{1+2i-1}{2}\right)^7=\frac{2i(2i)^7}{2^7}=\frac{2^8i^8}{2^7}=2i^8=2$$

Autre méthode

$$z_6=\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}=\frac{\left(\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^9}{\left(\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^7}=\frac{\left(\sqrt{2}\right)^9\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^9}{\left(\sqrt{2}\right)^7\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^7}=\frac{\left(\sqrt{2}\right)^2e^{i\frac{9\pi}{4}}}{e^{-i\frac{7\pi}{4}}}=2e^{i\left(\frac{9\pi}{4}+\frac{7\pi}{4}\right)}=2e^{\frac{16i\pi}{4}}=2e^{4i\pi}$$
$$=2$$

$$z_7=-\frac{2}{1-i\sqrt{3}}=-\frac{2\left(1+i\sqrt{3}\right)}{1^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=-\frac{2\left(1+i\sqrt{3}\right)}{4}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Autre méthode

$$z_7=-\frac{2}{1-i\sqrt{3}}=\frac{1}{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{j}=\frac{j^2}{j^3}=j^2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_8=\frac{1}{(1+2i)(3-i)}=\frac{1}{3-i+6i+2}=\frac{1}{5+5i}=\frac{1}{5}\times\frac{1}{1+i}=\frac{1}{5}\times\frac{1-i}{1^2+1^2}=\frac{1}{10}-\frac{1}{10}i$$

$$z_9=\frac{1+2i}{1-2i}=\frac{(1+2i)(1+2i)}{1^2+(-2)^2}=\frac{(1+2i)^2}{5}=\frac{1+4i-4}{5}=-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$$

Allez à : Exercice 2 :

Correction exercice 3 :

$$z_1=2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)=2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-1+i\sqrt{3}$$

$$z_2=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)+i\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

$$z_3=3e^{-\frac{7i\pi}{8}}=3\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{8}\right)+i\sin\left(-\frac{7\pi}{8}\right)\right)=3\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right)-3i\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right)$$
$$=3\cos\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right)-3i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right)=-3\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)-3i\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)$$
$$=-3\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)+3i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

$$z_4=\left(2e^{\frac{i\pi}{4}}\right)\left(e^{-\frac{3i\pi}{4}}\right)=2e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{3\pi}{4}\right)}=2e^{-i\frac{\pi}{2}}=-2i$$

$$z_5=\frac{2e^{\frac{i\pi}{4}}}{e^{-\frac{3i\pi}{4}}}=2e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}\right)}=2e^{i\pi}=-2$$

$$z_6=\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(3e^{\frac{5i\pi}{6}}\right)=6e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{5\pi}{6}\right)}=6e^{\frac{7i\pi}{6}}=6\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)=6\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)$$
$$=-3\sqrt{3}-3i$$
$$z_7=\frac{2e^{\frac{i\pi}{3}}}{3e^{-\frac{5i\pi}{6}}}=\frac{2}{3}e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{5\pi}{6}\right)}=\frac{2}{3}e^{\frac{8i\pi}{6}}=\frac{2}{3}e^{\frac{4i\pi}{3}}=\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{1}{3}-i\frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$z_8=2e^{i\frac{\pi}{3}}=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1+i\sqrt{3}$$
$$z_9=3e^{-i\frac{\pi}{8}}=3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right)=3\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)-3i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

A moins de connaitre $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ on ne peut pas faire mieux.

Allez à : Exercice 3 :

Correction exercice 4 :

1. $z_1=3(1+i)$ donc $|z_1|=3|1+i|=3\times\sqrt{1^2+1^2}=3\sqrt{2}$
   Si on ne met pas 3 en facteur
$$|z_1|=\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{9+9}=\sqrt{18}=\sqrt{3^2\times 2}=3\sqrt{2}$$
   C'est moins simple.
   On appelle θ_1 un argument de z_1
$$\cos(\theta_1)=\frac{3}{3\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\quad \text{et}\quad \sin(\theta_1)=\frac{3}{3\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$
   Donc $\theta_1=\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}$ et $z_1=3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, et $\overline{z_1}=3\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

Autre méthode (meilleure), on met le module en facteur
$$z_1=3\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=3\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$|z_2|=\sqrt{(-1)^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{4}=2$, soit θ_2 un argument de z_2
$$\cos(\theta_2)=-\frac{1}{2}\qquad \text{et}\qquad \sin(\theta_2)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$
Donc $\theta_2=\frac{4\pi}{3}+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}$ et $z_2=2e^{\frac{4i\pi}{3}}=2e^{-\frac{2i\pi}{3}}$

Autre méthode (meilleure), on met le module en facteur
$$z_2=2\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)=2e^{\frac{4i\pi}{3}}=2e^{-\frac{2i\pi}{3}}$$
Et $\overline{z_2}=2e^{\frac{2i\pi}{3}}$

Pour z_3 la détermination du cosinus et du sinus n'est pas une bonne méthode.
$$z_3=-\frac{4}{3}i=-\frac{4}{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$$
Cette forme n'est pas la forme trigonométrique car $-\frac{4}{3}$ est négatif, ce n'est donc pas le module, mais $-1=e^{i\pi}$, donc $z_3=\frac{4}{3}e^{i\pi}e^{i\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{3}e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right)}=\frac{4}{3}e^{\frac{3i\pi}{2}}=\frac{4}{3}e^{-\frac{i\pi}{2}}$.

On aurait pu directement écrire que $-i=e^{\frac{3i\pi}{2}}=e^{-\frac{i\pi}{2}}$.

Et $\overline{z_3}=\frac{4}{3}e^{\frac{i\pi}{2}}$

Pour z_4 la détermination du cosinus et du sinus n'est pas une bonne méthode.
$$z_4=-2=2e^{i\pi}$$

Et $\overline{z_4} = e^{-i\pi} = e^{i\pi}$

C'est plus dur

$$z_5 = e^{i\theta} + e^{2i\theta} = e^{\frac{3i\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right) = e^{\frac{3i\theta}{2}} \times 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{\frac{3i\theta}{2}}$$

Comme $-\pi < \theta < \pi$, $-\frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$ par conséquent $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$, ce qui signifie que $2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ est bien le module.

Et $\overline{z_5} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{-\frac{3i\theta}{2}}$

$|z_6| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, soit θ_6 un argument de z_6

$$\cos(\theta_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Donc $\theta_6 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$ et $z_6 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$

Autre méthode (meilleure), on met le module en facteur

$$z_6 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Et $\overline{z_6} = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$|z_7| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$, soit θ_7 un argument de z_7

$$\cos(\theta_7) = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta_7) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Donc $\theta_7 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$ et $z_7 = 2e^{\frac{i\pi}{3}}$

Autre méthode (meilleure), on met le module en facteur

$$z_7 = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2e^{\frac{i\pi}{3}}$$

Et $\overline{z_7} = 2e^{-\frac{i\pi}{3}}$

$|z_8| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$, soit θ_8 un argument de z_8

$$\cos(\theta_8) = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta_8) = \frac{1}{2}$$

Donc $\theta_8 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$ et $z_8 = 2e^{\frac{i\pi}{6}}$

Autre méthode (meilleure), on met le module en facteur

$$z_8 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2e^{\frac{i\pi}{6}}$$

Première méthode

$$z_9 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} - i} = \frac{\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3} - i}{2}} = \frac{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}} = \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{-\frac{i\pi}{6}}} = e^{i\frac{\pi}{3}}e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Deuxième méthode

$$z_9 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} - i} = \frac{(1 + i\sqrt{3})(\sqrt{3} + i)}{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{3} + i + 3i - \sqrt{3}}{4} = \frac{4i}{4} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

C'est plus dur

$$z_{10} = 1 + e^{i\theta} = e^{\frac{i\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right) = e^{\frac{i\theta}{2}} \times 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{\frac{i\theta}{2}}$$

Comme $-\pi < \theta < \pi$, $-\frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$ par conséquent $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$, ce qui signifie que $2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ est bien le module.

Et $\overline{z_{10}} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-\frac{i\theta}{2}}$

2. Faisons comme d'habitude

$$|z_1| = \sqrt{1^2 + \left(1+\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{1 + 1 + 2\sqrt{2} + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{4+2\sqrt{2}}$$

Soit θ_1 un argument de z_1

$$\cos(\theta_1) = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \quad \text{et} \quad \sin(\theta_1) = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}$$

L'ennui c'est que l'on ne connait pas d'angle dont le cosinus et le sinus valent ces valeurs.
Il faut être malin.

$$z_1 = 1 + i\left(1+\sqrt{2}\right) = 1 + i + \sqrt{2}i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \sqrt{2}i = \sqrt{2}\left(e^{\frac{i\pi}{4}} + e^{\frac{i\pi}{2}}\right)$$
$$= \sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{8}}\left(e^{-\frac{i\pi}{8}} + e^{\frac{i\pi}{8}}\right) = \sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{8}} \times 2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)e^{\frac{3i\pi}{8}}$$

$2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$ donc $\theta_1 = \frac{3\pi}{8} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ et $|z_1| = 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$

Remarque :

$$2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{4+2\sqrt{2}}$$

Le module de $\overline{z_1}$ est aussi $2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{4+2\sqrt{2}}$ et un argument est $-\frac{3\pi}{8}$.

Faisons comme d'habitude

$$z_2 = \sqrt{10+2\sqrt{5}} + i\left(1-\sqrt{5}\right)$$

$$|z_2| = \sqrt{\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)^2 + \left(1-\sqrt{5}\right)^2} = \sqrt{10 + 2\sqrt{5} + 1 - 2\sqrt{5} + \left(\sqrt{5}\right)^2} = \sqrt{16} = 4$$

Soit θ_2 un argument de z_2

$$\cos(\theta_2) = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \quad \text{et} \quad \sin(\theta_2) = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$$

L'ennui c'est que l'on ne connait pas d'angle dont le cosinus et le sinus valent ces valeurs.
Calculons z_2^5

$$z_2^5=\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}+i\left(1-\sqrt{5}\right)\right)^5$$
$$=\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)^5+5\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)^4 i\left(1-\sqrt{5}\right)+10\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)^3\left(i\left(1-\sqrt{5}\right)\right)^2$$
$$+10\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)^2\left(i\left(1-\sqrt{5}\right)\right)^3+5\sqrt{10+2\sqrt{5}}\left(i\left(1-\sqrt{5}\right)\right)^4+\left(i\left(1-\sqrt{5}\right)\right)^5$$
$$=\left(10+2\sqrt{5}\right)^2\sqrt{10+2\sqrt{5}}+5i\left(10+2\sqrt{5}\right)^2\left(1-\sqrt{5}\right)$$
$$-10\left(10+2\sqrt{5}\right)\left(1-\sqrt{5}\right)^2\sqrt{10+2\sqrt{5}}-10i\left(10+2\sqrt{5}\right)\left(1-\sqrt{5}\right)^3$$
$$+5\sqrt{10+2\sqrt{5}}\left(1-\sqrt{5}\right)^4+i\left(1-\sqrt{5}\right)^5$$
$$=\sqrt{10+2\sqrt{5}}\left(\left(10+2\sqrt{5}\right)^2-10\left(10+2\sqrt{5}\right)\left(1-\sqrt{5}\right)^2+5\left(1-\sqrt{5}\right)^4\right)$$
$$+i\left(1-\sqrt{5}\right)\left(5\left(10+2\sqrt{5}\right)^2-10\left(10+2\sqrt{5}\right)\left(1-\sqrt{5}\right)^2+\left(1-\sqrt{5}\right)^4\right)$$

$$\left(10+2\sqrt{5}\right)^2-10\left(10+2\sqrt{5}\right)\left(1-\sqrt{5}\right)^2+5\left(1-\sqrt{5}\right)^4$$
$$=100+40\sqrt{5}+20-10\left(10+2\sqrt{5}\right)\left(1-2\sqrt{5}+5\right)$$
$$+5\left(1-4\sqrt{5}+6\times\left(\sqrt{5}\right)^2-4\left(\sqrt{5}\right)^3+\left(\sqrt{5}\right)^4\right)$$
$$=120+40\sqrt{5}-10\left(10+2\sqrt{5}\right)\left(6-2\sqrt{5}\right)+5\left(56-24\sqrt{5}\right)$$
$$=120+40\sqrt{5}-10\left(60-20\sqrt{5}+12\sqrt{5}-20\right)+280-120\sqrt{5}=0$$
$$5\left(10+2\sqrt{5}\right)^2-10\left(10+2\sqrt{5}\right)\left(1-\sqrt{5}\right)^2+\left(1-\sqrt{5}\right)^4$$
$$=5\left(100+40\sqrt{5}+20\right)-10\left(10+2\sqrt{5}\right)\left(1-2\sqrt{5}+5\right)$$
$$+\left(1-4\sqrt{5}+6\times\left(\sqrt{5}\right)^2-4\left(\sqrt{5}\right)^3+\left(\sqrt{5}\right)^4\right)$$
$$=600+200\sqrt{5}-10\left(40-8\sqrt{5}\right)+56-24\sqrt{5}=2566+256\sqrt{5}$$
$$=256(1+\sqrt{5})$$
$$z_2^5=256i\left(1-\sqrt{5}\right)\left(1+\sqrt{5}\right)=256i\times(-4)=-2^{10}i$$

Ensuite il faut trouver les solutions de $Z^5=-2^{10}i=2^{10}e^{-\frac{i\pi}{2}}$

$$Z^5=-2^{10}i=2^{10}e^{-\frac{i\pi}{2}}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}|Z^5|=2^{10}\\ \arg(Z^5)=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}|Z|=2^2\\ 5\arg(Z)=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}|Z|=4\\ \arg(Z)=-\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{2k\pi}{5},k\in\{0,1,2,3,4\}\end{array}\right.$$
$$Z_0=4e^{-i\frac{\pi}{10}};\quad Z_1=4e^{\frac{3i\pi}{10}};\quad Z_2=4e^{\frac{7i\pi}{10}};\ Z_3=4e^{\frac{11i\pi}{10}};Z_4=\ 4e^{\frac{15i\pi}{10}}=-4i$$

Parmi ces cinq complexes, le seul qui a une partie réelle positive et une partie imaginaire négative est $4e^{-i\frac{\pi}{10}}$ d'où $z_2=4e^{-i\frac{\pi}{10}}$ donc un argument de z_2 est $-\frac{\pi}{10}$.

Le module de $\overline{z_2}$ est 4 et un argument est $\frac{\pi}{10}$.

$$z_3=\frac{\tan(\varphi)-i}{\tan(\varphi)+i}=\frac{(\tan(\varphi)-i)(\tan(\varphi)-i)}{\tan^2(\varphi)+1^2}=\frac{\tan^2(\varphi)-2i\tan(\varphi)-1}{\frac{1}{\cos^2(\varphi)}}$$
$$=\cos^2(\varphi)\left(\tan^2(\varphi)-1\right)-2i\cos^2(\varphi)\tan(\varphi)$$
$$=\cos^2(\varphi)\left(\frac{\sin^2(\varphi)}{\cos^2(\varphi)}-1\right)-2i\cos^2(\varphi)\frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}$$
$$=-\left(\cos^2(\varphi)-\sin^2(\varphi)\right)-2i\sin(\varphi)\cos(\varphi)=-\cos(2\varphi)-i\sin(2\varphi)$$
$$=-\left(\cos(2\varphi)+i\sin(2\varphi)\right)=e^{i\pi}e^{-2i\varphi}=e^{i(\pi-2\varphi)}$$

Le module de z_3 est 1 et un argument est $\pi-2\varphi$

Autre méthode

$$z_3=\frac{\tan(\varphi)-i}{\tan(\varphi)+i}=\frac{i(\tan(\varphi)-i)}{i(\tan(\varphi)+i)}=\frac{i\tan(\varphi)+1}{i\tan(\varphi)-1}=\frac{i\frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}+1}{i\frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}-1}=\frac{i\sin(\varphi)+\cos(\varphi)}{i\sin(\varphi)-\cos(\varphi)}$$
$$=\frac{\cos(\varphi)+i\sin(\varphi)}{-(\cos(\varphi)-i\sin(\varphi))}=-\frac{e^{i\varphi}}{e^{-i\varphi}}=-e^{2i\varphi}=e^{i\pi}e^{2i\varphi}=e^{i(\pi+2\varphi)}$$

Un argument de $\overline{z_3}$ est $-\pi-2\varphi$

$$z_4=\frac{1}{1+i\tan(\theta)}=\frac{1}{1+i\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}}=\frac{\cos(\theta)}{\cos(\theta)+i\sin(\theta)}=\frac{\cos(\theta)}{e^{i\theta}}=\cos(\theta)\,e^{-i\theta}$$

Si θest tel que $\cos(\theta)>0$ alors $|z_4|=\cos(\theta)$ et un argument de z_4 est $-\theta$

Si θest tel que $\cos(\theta)<0$ alors $|z_4|=-\cos(\theta)$ et un argument de z_4 est $-\theta+\pi$

3. On sait que $j^2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=-j^2$

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2010}=(-j^2)^{2010}=(j^2)^{2010}=j^{4020}=j^{3\times 1340}=(j^3)^{1340}=1^{1340}=1$$

Allez à : Exercice 4 :

Correction exercice 5 :

1. $(3+2i)(1-3i)=3-9i+2i-6i^2=3-7i+6=9-7i$
2. $$2e^{i\frac{\pi}{3}}\times 3e^{i\left(-\frac{5\pi}{6}\right)}=6e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}\right)}=6\,e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}=-6i$$
3. $$\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{3e^{i\left(-\frac{5\pi}{6}\right)}}=\frac{2}{3}e^{i\frac{\pi}{3}}e^{\frac{5i\pi}{6}}=\frac{2}{3}e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{5\pi}{6}\right)}=\frac{2}{3}e^{\frac{7i\pi}{6}}$$

Allez à : Exercice 5 :

Correction exercice 6 :

1. $$\left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)(1+i)=e^{i\frac{\pi}{7}}e^{-i\frac{\pi}{3}}\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{7}}e^{-i\frac{\pi}{3}}e^{i\frac{\pi}{4}}$$
$$=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{7}-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{12\pi}{84}-\frac{28\pi}{84}+\frac{21\pi}{84}\right)}=\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{84}}=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{84}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{84}\right)\right)$$
2.

$$(1-i)\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)(\sqrt{3}-i)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)$$
$$=2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}e^{i\frac{\pi}{5}}e^{-i\frac{\pi}{6}}=2\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{6}\right)}=2\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{15\pi}{60}+\frac{12\pi}{60}-\frac{10\pi}{60}\right)}=2\sqrt{2}e^{-\frac{13i\pi}{60}}$$
$$=2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{13\pi}{60}\right)-i\sin\left(\frac{13\pi}{60}\right)\right)$$
$$\frac{\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)}{1+i}=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i}=\frac{e^{\frac{i\pi}{12}}}{e^{\frac{i\pi}{4}}}=e^{i\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{4}\right)}=e^{-\frac{2i\pi}{12}}=e^{-\frac{i\pi}{6}}$$
$$=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$$

Allez à : Exercice 6 :

Correction exercice 7 :

1. $|u|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ et $|v|=\sqrt{(-1)^2+\sqrt{3}^2}=2$
2. $$u=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$
   Donc un argument de u est $\frac{\pi}{4}$.
   $$v=2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2e^{\frac{2i\pi}{3}}$$
   Donc un argument de v est $\frac{2\pi}{3}$.
3. On cherche les solutions complexes de $z^3=u$
   $$z^3=u\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}|z^3|=\sqrt{2}\\ \arg(z^3)=\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}|z|^3=2^{\frac{1}{2}}\\ 3\arg(z)=\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$
   $$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}|z|=2^{\frac{1}{6}}\\ \arg(z)=\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3},\ \ k\in\{0,1,2\}\end{array}\right.$$
   u admet trois racines cubiques
   $$z_0=2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{\pi}{12}};\quad z_1=2^{\frac{1}{6}}e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}\right)}=2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{9\pi}{12}}=2^{\frac{1}{6}}e^{\frac{3i\pi}{4}}\quad et\quad z_2=2^{\frac{1}{6}}e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{4\pi}{3}\right)}=2^{\frac{1}{6}}e^{\frac{17i\pi}{12}}$$
4. $$\frac{u}{v}=\frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{\frac{2i\pi}{3}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2\pi}{3}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{5i\pi}{12}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right)$$
   Et
   $$\frac{u}{v}=\frac{1+i}{-1+i\sqrt{3}}=\frac{(1+i)(-1-i\sqrt{3})}{4}=\frac{-1+\sqrt{3}+i(-1-\sqrt{3})}{4}$$
   Par conséquent
   $$\left\{\begin{array}{l}\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{-1+\sqrt{3}}{4}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{-1-\sqrt{3}}{4}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\\ \sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{-1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\end{array}\right.$$

Allez à : Exercice 7 :

Correction exercice 8 :

$$|u|=\frac{|\sqrt{6}-i\sqrt{2}|}{2}=\frac{\sqrt{6+2}}{2}=\frac{\sqrt{8}}{2}=\frac{\sqrt{4\times 2}}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

$$u=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2\times 3}-i\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{3}-i\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

Donc $|u|=\sqrt{2}$ et un argument de u est $-\frac{\pi}{6}$.

$$|v|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$$

$$v=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

Donc $|v|=\sqrt{2}$ et un argument de v est $-\frac{\pi}{4}$.

$$\frac{u}{v}=\frac{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}=e^{i\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)}=e^{i\frac{\pi}{12}}$$

Donc $\left|\frac{u}{v}\right|=1$ et un argument de $\frac{u}{v}$ est $\frac{\pi}{12}$.

Allez à : Exercice 8 :

Correction exercice 9 :

$$z_1=\frac{(1+i)(1+i)}{1^2+1^2}=\frac{1+2i-1}{2}=i=e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$z_2=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3=\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^3=e^{\frac{3i\pi}{2}}$$

$$z_3=\left(1+i\sqrt{3}\right)^4=\left(2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^4=2^4\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^4=16e^{\frac{4i\pi}{3}}$$

$$z_4=\left(1+i\sqrt{3}\right)^5+\left(1-i\sqrt{3}\right)^5=\left(2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^5+\left(2\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^5=2^5\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^5+2^5\left(e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^5$$

$$=32\left(e^{\frac{5i\pi}{3}}+e^{-\frac{5i\pi}{3}}\right)=32\times 2\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)=64\left(-\frac{1}{2}\right)=-32$$

$$z_5=\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}=\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-i\right)}{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}=\frac{\sqrt{3}-i+3i+\sqrt{3}}{4}=\frac{2\sqrt{3}+2i}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=e^{i\frac{\pi}{6}}$$

Autre méthode

$$z_5=\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}=\frac{2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)}=\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{6}}}=e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)}=e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$z_6=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2-2i}=\frac{\left(\sqrt{6}-i\sqrt{2}\right)(2+2i)}{2^2+(-2)^2}=\frac{2\sqrt{6}+2i\sqrt{6}-2i\sqrt{2}+2\sqrt{2}}{8}=\frac{2\sqrt{6}+2\sqrt{2}+2i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{8}$$

$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{4}$$

Remarque : il aurait mieux valu mettre $\frac{\sqrt{2}}{2}$ en facteur d'entrée.

Là on est mal parti, il va falloir trouver le module, puis le mettre en facteur,

$$z_6=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1+i\left(\sqrt{3}-1\right)\right)$$

$$|z_6|=\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2+\left(\sqrt{3}-1\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{3+2\sqrt{3}+1+3-2\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{8}=\frac{\sqrt{2}}{4}\times 2\sqrt{2}=1$$

$$z_6=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\cos(\theta)+i\sin(\theta)$$

Mais on ne connait pas d'angle vérifiant cela. Il faut faire autrement

$$\left|\sqrt{6}-i\sqrt{2}\right|=\sqrt{\left(\sqrt{6}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

$$|2-2i|=\sqrt{2^2+(-2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

$$z_6=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2-2i}=\frac{2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)}{2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=\frac{e^{-i\frac{\pi}{6}}}{e^{-i\frac{\pi}{4}}}=e^{i\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)}=e^{i\frac{\pi}{12}}$$

Allez à : Exercice 9 :

Correction exercice 10 :

On cherche les nombres complexes tels que $z^2=-1$

$$Z_1=-i \quad \text{et} \quad Z_2=i$$

On cherche les nombres complexes tels que $z^2=i=e^{\frac{i\pi}{2}}$

$$z_1=-e^{i\frac{\pi}{4}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad z_2=e^{i\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

On cherche les nombres complexes tels que $z^2=1+i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2^{\frac{1}{2}}e^{\frac{i\pi}{4}}$

$$Z_1=-2^{\frac{1}{4}}e^{\frac{i\pi}{8}} \quad \text{et} \quad Z_2=2^{\frac{1}{4}}e^{\frac{i\pi}{8}}$$

C'est un peu insuffisant parce que l'on ne connait pas les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et de $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$

Autre méthode, on cherche $a,b\in\mathbb{R}$ tels que

$$(a+ib)^2=1+i\Leftrightarrow a^2-b^2+2iab=1+i\Leftrightarrow \begin{matrix}L_1\\L_2\end{matrix}\begin{cases}a^2-b^2=1\\2ab=1\end{cases}$$

On rajoute l'équation L_3

$$|(a+ib)^2|=|1+i|\Leftrightarrow|a+ib|^2=\sqrt{1^2+1^2}\Leftrightarrow\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2=\sqrt{2}\Leftrightarrow a^2+b^2=\sqrt{2}$$

En faisant la somme de L_1 et de L_3

$$2a^2=1+\sqrt{2}\Leftrightarrow a^2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow a=\pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}=\pm\sqrt{\frac{2+2\sqrt{2}}{4}}=\pm\frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2}$$

En faisant la différence de L_3 et de L_1

$$2b^2=-1+\sqrt{2}\Leftrightarrow b^2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow b=\pm\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}}=\pm\sqrt{\frac{-2+2\sqrt{2}}{4}}=\pm\frac{\sqrt{-2+2\sqrt{2}}}{2}$$

D'après L_2 a et b sont de même signe donc les deux solutions de $z^2=1+i$ sont

$$Z_1=\frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2}+i\frac{\sqrt{-2+2\sqrt{2}}}{2} \quad \text{et} \quad Z_2=-\frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2}-i\frac{\sqrt{-2+2\sqrt{2}}}{2}$$

On cherche les nombres complexes tels que $z^2=-1-i=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2^{\frac{1}{2}}e^{\frac{5i\pi}{4}}$

$$Z_1=-2^{\frac{1}{4}}e^{\frac{5i\pi}{8}} \quad \text{et} \quad Z_2=2^{\frac{1}{4}}e^{\frac{5i\pi}{8}}$$

C'est un peu insuffisant parce que l'on ne connait pas les valeurs de $\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right)$ et de $\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right)$

Autre méthode, on cherche $a,b\in\mathbb{R}$ tels que

$$(a+ib)^2=-1-i\Leftrightarrow a^2-b^2+2iab=-1-i\Leftrightarrow \begin{matrix}L_1\\L_2\end{matrix}\begin{cases}a^2-b^2=-1\\2ab=-1\end{cases}$$

On rajoute l'équation L_3

$$|(a+ib)^2|=|-1-i|\Leftrightarrow|a+ib|^2=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}\Leftrightarrow\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2=\sqrt{2}\Leftrightarrow a^2+b^2=\sqrt{2}$$

En faisant la somme de L_1 et de L_3

$$2a^2=-1+\sqrt{2}\Leftrightarrow a^2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow a=\pm\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}}=\pm\sqrt{\frac{-2+2\sqrt{2}}{4}}\pm\frac{\sqrt{-2+2\sqrt{2}}}{2}$$

En faisant la différence de L_3 et de L_1

$$2b^2=1+\sqrt{2}\Leftrightarrow b^2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow b=\pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}=\pm\sqrt{\frac{2+2\sqrt{2}}{4}}\pm\frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2}$$

D'après L_2 a et b sont de signes opposés donc les deux solutions de $z^2=-1-i$ sont

$$Z_1=\frac{\sqrt{-2+2\sqrt{2}}}{2}-i\frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2}\quad \text{et}\quad Z_2=-\frac{\sqrt{-2+2\sqrt{2}}}{2}+i\frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2}$$

On cherche les nombres complexes tels que $z^2=1+i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2e^{i\frac{\pi}{3}}$

$$Z_1=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\frac{\sqrt{6}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\quad \text{et}\quad Z_2=-\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=-\frac{\sqrt{6}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

On cherche les nombres complexes tels que $Z^2=3+4i$

On pose $Z=a+ib$, $Z^2\Leftrightarrow 3+4i=(a+ib)^2\Leftrightarrow 3+4i=a^2-b^2+2iab\Leftrightarrow \begin{matrix}L_1\\L_2\end{matrix}\begin{cases}a^2-b^2=3\\ 2ab=4\end{cases}$

On rajoute l'équation $|Z^2|\Leftrightarrow |3+4i|=a^2+b^2\Leftrightarrow a^2+b^2=\sqrt{3^2+4^2}\Leftrightarrow a^2+b^2=\sqrt{25}=5\ \ L_3$

Avec le système $\begin{cases}a^2-b^2=3\\a^2+b^2=5\end{cases}$, en faisant la somme des deux équations L_1 et L_3, on trouve $2a^2=8\Leftrightarrow a^2=4$, d'où l'on tire $b^2=1$. Les valeurs possibles de a sont ± 2 et les valeurs possibles de b sont ± 1, d'après l'équation $2ab=4\Leftrightarrow ab=2$, on en déduit que $ab>0$ et que donc a et b sont de même signe.

Si $a=2$ alors $b=1$ et $Z_1=2+i$ et si $a=-2$ alors $b=-1$ et $Z_2=-2-i$

Deuxième méthode

$3+4i=4+4i-1=(2+i)^2$ et on retrouve le même résultat.

Troisième méthode

On reprend le système

$$\begin{cases}a^2-b^2=3\\ 2ab=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-\left(\frac{2}{a}\right)^2=3\\ b=\frac{2}{a}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-\frac{4}{a^2}=3\\ b=\frac{2}{a}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^4-4=3a^2\\ b=\frac{2}{a}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^4-3a^2-4=0\\ b=\frac{2}{a}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}A^2-3A-4=0\\ b=\frac{2}{a}\end{cases}$$

Les solutions de $A^2-3A-4=0$ sont $A_1=-1<0$ et $A_2=4$, donc $a^2=4$,

Si $a=-2$ alors $b=\frac{2}{a}=-1$ et alors $Z_2=-2-i$, si $a=2$ alors $b=\frac{2}{a}=1$ et alors $Z_1=2+i$.

On cherche les nombres complexes tels que $Z^2=-7-24i$

On pose $Z=a+ib$, $Z^2\Leftrightarrow -7-24i=(a+ib)^2\Leftrightarrow -7-24i=a^2-b^2+2iab\Leftrightarrow$
$\begin{matrix}L_1\\L_2\end{matrix}\begin{cases}a^2-b^2=-7\\ 2ab=-24\end{cases}$

On rajoute l'équation

$$|Z^2|\Leftrightarrow |3+4i|=a^2+b^2\Leftrightarrow a^2+b^2=\sqrt{(-7)^2+(-24)^2}\Leftrightarrow a^2+b^2=\sqrt{49+576}=\sqrt{625}=25\ \ L_3$$

Avec le système $\begin{cases}a^2-b^2=-7\\a^2+b^2=25\end{cases}$, en faisant la somme des deux équations L_1 et L_3, on trouve $2a^2=18\Leftrightarrow a^2=9$, d'où l'on tire $b^2=16$. Les valeurs possibles de a sont ± 3 et les valeurs possibles de b sont ± 4, d'après l'équation $2ab=-24\Leftrightarrow ab=-12$, on en déduit que $ab<0$ et que donc a et b sont de signe opposé.

Si $a=3$ alors $b=-4$ et $Z_1=3-4i$ et si $a=-3$ alors $b=4$ et $Z_2=-3+4i$

Deuxième méthode

$-7-24i=9-24i-16=(3-4i)^2$ et on retrouve le même résultat.

Troisième méthode

On reprend le système

$$\begin{cases} a^2-b^2=-7 \\ 2ab=-24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-\left(\dfrac{-12}{a}\right)^2=-7 \\ b=-\dfrac{12}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-\dfrac{144}{a^2}=-7 \\ b=-\dfrac{12}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4-144=-7a^2 \\ b=-\dfrac{12}{a} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^4+7a^2-144=0 \\ b=-\dfrac{12}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A^2+7A-144=0 \\ b=-\dfrac{12}{a} \end{cases}$$

Les solutions de $A^2+7A-144=0$ sont $A_1=-16<0$ et $A_2=9$, donc $a^2=9$,

Si $a=3$ alors $b=-\frac{12}{a}=-4$ et alors $Z_2=3-4i$, si $a=3$ alors $b=-\frac{12}{a}=-4$ et alors $Z_1=-3+4i$.

On cherche les nombres complexes tels que $Z^2=3-4i=z_8$, on peut refaire comme précédemment mais on va prendre la méthode la plus simple

$$Z^2=3-4i=4-4i-1=(2-i)^2$$

Il y a deux solutions

$$Z_1=2-i \quad \text{et} \quad Z_2=-2+i$$

On cherche les complexes Z tels que $Z^2=z_9=24-10i$

Là encore, on va aller au plus simple

$$24-10i=25-10i-1=(5-i)^2$$

Donc il y a deux solutions

$$Z_1=5-i \quad \text{et} \quad Z_2=-5+i$$

Allez à : Exercice 10 :

Correction exercice 11 :

1. On cherche les complexes Z tels que

$$Z^2=\frac{1+i}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

On pose $Z=a+ib$,

$$Z^2=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}=(a+ib)^2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}=a^2-b^2+2iab \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix}\begin{cases} a^2-b^2=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ 2ab=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

On rajoute l'équation

$$|Z^2| \Leftrightarrow \left|\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right|=a^2+b^2 \Leftrightarrow a^2+b^2=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \Leftrightarrow a^2+b^2=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=1 \;\; L_3$$

Avec le système $\begin{cases} a^2-b^2=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ a^2+b^2=1 \end{cases}$, en faisant la somme des deux équations L_1 et L_3, on trouve

$$2a^2=1+\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow a^2=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

En faisant la différence de L_3 et de L_1

$$2b^2=1-\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow b^2=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

Les valeurs possibles de a sont $\pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et les valeurs possibles de b sont $\pm\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, d'après l'équation $2ab=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow ab=\frac{\sqrt{2}}{4}$, on en déduit que $ab>0$ et que donc a et b sont de même signe.

Si $a=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ alors $b=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ et $Z_1=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}+i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$
Et si $a=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ alors $b=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ et $Z_2=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}-i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$
D'autre part

$$Z^2=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}=e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Admet deux solutions $Z_3=e^{i\frac{\pi}{8}}=\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $z_4=-e^{i\frac{\pi}{8}}=-\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$

Comme $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)>0$ et que $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)>0$,

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}+i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\\ \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\end{cases}$$

2. On cherche les complexes Z tels que

$$Z^2=\frac{\sqrt{3}+i}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$$

On pose $Z=a+ib$,

$$Z^2=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\Leftrightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=(a+ib)^2\Leftrightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=a^2-b^2+2iab\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2\end{matrix}\begin{cases}a^2-b^2=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ 2ab=\frac{1}{2}\end{cases}$$

On rajoute l'équation

$$|Z^2|\Leftrightarrow\left|\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right|=a^2+b^2\Leftrightarrow a^2+b^2=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\Leftrightarrow a^2+b^2=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}=1\quad L_3$$

Avec le système $\begin{cases}a^2-b^2=\frac{\sqrt{3}}{2}\\a^2+b^2=1\end{cases}$, en faisant la somme des deux équations L_1 et L_3, on trouve

$$2a^2=1+\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow a^2=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

En faisant la différence de L_3 et de L_1

$$2b^2=1-\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow b^2=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

Les valeurs possibles de a sont $\pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ et les valeurs possibles de b sont $\pm\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$, d'après l'équation $2ab=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow ab=\frac{\sqrt{3}}{4}$, on en déduit que $ab>0$ et que donc a et b sont de même signe.
Si $a=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ alors $b=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ et $Z_1=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}+i\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$
Et si $a=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ alors $b=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ et $Z_2=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}-i\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$
D'autre part

$$Z^2=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=e^{i\frac{\pi}{6}}$$

Admet deux solutions $Z_3=e^{i\frac{\pi}{12}}=\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $Z_4=-e^{i\frac{\pi}{12}}=-\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

Comme $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)>0$ et que $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)>0$,

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}+i\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\end{cases}$$

Allez à : Exercice 11 :

Correction exercice 12 :

1. $z^2+z+1=0$

$$\Delta=1^2-4=-3=\left(i\sqrt{3}\right)^2$$
$$z_1=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}=\bar{j}=j^2$$
$$z_2=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}=j$$

Allez à : Exercice 12 :

2. $z^2-(5i+14)z+2(5i+12)=0$

$$\Delta=\left(-(5i+14)\right)^2-4\times 2(5i+12)=(-25+140i+196)-40i-96=75+100i=25(3+4i)$$
$$=5^2(3+4i)$$

On cherche $a,b\in\mathbb{R}$ tels que

$$(a+ib)^2=5-4i\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}\begin{cases}a^2-b^2=3\\ 2ab=4\\ a^2+b^2=\sqrt{3^2+4^2}=5\end{cases}$$

En faisant L_1+L_3 on trouve que $2a^2=8\Leftrightarrow a^2=4\Leftrightarrow a=\pm 2$
En faisant L_3-L_2 on trouve que $2b^2=2\Leftrightarrow b^2=1\Leftrightarrow b=\pm 1$
D'après L_2 a et b sont de même signe donc $a+ib=2+i$ ou $a+ib=-2-i$
Autre méthode $3+4i=4+4i-1=(2+i)^2$
et alors

$$\Delta=5^2(2+i)^2=(10+5i)^2$$

Les solutions de l'équation sont

$$z_1=\frac{5i+14-(10+5i)}{2}=\frac{4}{2}=2$$
$$z_1=\frac{5i+14+(10+5i)}{2}=\frac{24+10i}{2}=12+5i$$

Allez à : Exercice 12 :

3. $z^2-\sqrt{3}z-i=0$

$$\Delta=3+4i=(2+i)^2$$
$$z_1=\frac{\sqrt{3}+2+i}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}+1+\frac{1}{2}i=1-i\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1-ij$$
$$z_2=\frac{\sqrt{3}-2-i}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}-1-\frac{1}{2}i=-1+i\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-1+ij^2$$

Allez à : Exercice 12 :

4. $z^2-(1+2i)z+i-1=0$

$$\Delta=(1+2i)^2-4(i-1)=1+4i-4-4i+4=1$$
$$z_1=\frac{1+2i-1}{2}=i$$
$$z_2=\frac{1+2i+1}{2}=1+i$$

Allez à : Exercice 12 :

5. $z^2-(3+4i)z-1+5i=0$

Le discriminant vaut

$$\Delta=\left(-(3+4i)\right)^2-4(-1+5i)=9+24i-16+4-20i=-3-4i=(1-2i)^2$$

Il y a deux solutions

$$z_1=\frac{3+4i-(1-2i)}{2}=2+3i$$
$$z_2=\frac{3+4i+1-2i}{2}=2+i$$

Allez à : Exercice 12 :

6. $4z^2-2z+1=0$

Soit on résout « normalement », soit on ruse, rusons

$$4z^2-2z+1=0\Leftrightarrow Z^2+Z+1=0$$

Avec $Z=-2z$. Les solutions de $Z^2+Z+1=0$ sont connues (et puis on vient de les revoir dans 1°))

$$Z_1=j\quad \text{et}\quad Z_2=j^2$$

Par conséquent

$$z_1=-\frac{1}{2}j\quad \text{et}\quad z_2=-\frac{1}{2}j^2$$

Allez à : Exercice 12 :

7. $z^4+10z^2+169=0$

On pose $Z=z^2$, $Z^2+10Z+169=0$ a pour discriminant

$$\Delta=10^2-4\times 169=10^2-(2\times 13)^2=(10-26)(10+26)=-16\times 36=-4^2\times 6^2=(24i)^2$$

$$Z_1=\frac{-10+24i}{2}=-5+12i$$
$$Z_2=\frac{-10-24i}{2}=-5-12i$$

On cherche $z=a+ib$ tel que

$$z^2=Z_1\Leftrightarrow (a+ib)^2=-5+12i\Leftrightarrow a^2-b^2+2iab=-5+12i$$
$$\Leftrightarrow \begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}\left\{\begin{array}{c}a^2-b^2=-5\\2ab=12\\a^2+b^2=\sqrt{(-5)^2+12^2}=\sqrt{25+144}=\sqrt{169}=13\end{array}\right.$$

En faisant la somme de L_1 et de L_3, on trouve que $2a^2=8\Leftrightarrow a^2=4\Leftrightarrow a=\pm 2$,

En faisant la différence de L_3 et de L_1, on trouve que $2b^2=18\Leftrightarrow b^2=9\Leftrightarrow b=\pm 3$,

D'après L_2, a et b sont de même signe donc $z^2=Z_1$ a deux solutions

$$z_1=2+3i\quad et\quad z_2=-2-3i$$

On peut résoudre de la même façon $Z_2=z^2$ ou dire que $z^4+10z^2+169=0$ est une équation à coefficients réels et que donc si une racine complexe est solution alors son conjugué est aussi solution, par conséquent $\overline{z_1}=2-3i$ et $\overline{z_2}=-2+3i$ sont aussi solution, ce qui donne 4 solutions pour une équation de degré 4, il n'y en a pas plus, on les a toutes.

Allez à : Exercice 12 :

8. $z^4+2z^2+4=0$

On peut faire comme dans le 7°), mais rusons :

$$z^4+2z^2+4=0\Leftrightarrow \frac{z^4}{4}+\frac{z^2}{2}+1=0\Leftrightarrow \left(\frac{z^2}{2}\right)^2+\left(\frac{z^2}{2}\right)+1=0\Leftrightarrow \left[\left(\frac{z^2}{2}\right)-j\right]\left[\left(\frac{z^2}{2}\right)-j^2\right]=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2-j^4\right]\left[\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2-j^2\right]=0\Leftrightarrow \left(\frac{z}{\sqrt{2}}-j^2\right)\left(\frac{z}{\sqrt{2}}+j^2\right)\left(\frac{z}{\sqrt{2}}-j\right)\left(\frac{z}{\sqrt{2}}+j\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left(z-\sqrt{2}j^2\right)\left(z+\sqrt{2}j^2\right)\left(z-\sqrt{2}j\right)\left(z+\sqrt{2}j\right)=0$$

Les solutions sont

$$\left\{\sqrt{2}j^2,-\sqrt{2}j^2,\sqrt{2}j,-\sqrt{2}j\right\}$$

Allez à : Exercice 12 :

9. $x^4-30x^2+289=0$

On pose $X=x^2$

$$X^2-30X+289=0$$

$$\Delta=30^2-4\times 289=900-1156=-256=-16^2=(16i)^2$$

$$X_1=\frac{30-16i}{2}=15-8i$$

$$X_2=15+8i$$

On cherche x tel que $x^2=15-8i=16-8i-1=(4-i)^2$

Il y a donc deux solutions $x_1=4-i$ et $x_2=-(4-i)=-4+i$.

De même on cherche x tel que $x^2=15+8i=16+8i-1=(4+i)^2$

Il y a donc deux solutions $x_3=4+i$ et $x_4=-(4+i)=-4-i$.

Les solutions sont

$$\{4-i,-4+i,4+i,-4-i\}$$

Allez à : Exercice 12 :

10. $x^4+4x^3+6x^2+4x-15=0$

Il faudrait trouver des solutions (réelles ou complexes).

$x=1$ est solution évidente, mais ensuite cela ne vient pas, mais en regardant mieux on s'aperçoit que 4 premiers termes ressemblent fort au développement de $(x+1)^4=x^4+4x^3+6x^2+4x+1$ donc

$$x^4+4x^3+6x^2+4x-15=0\Leftrightarrow (x+1)^4-1-15=0\Leftrightarrow (x+1)^4=16$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |(x+1)^4|=16 \\ \arg((x+1)^4)=\arg(16)+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x+1|^4=2^4 \\ 4\arg(x+1)=0+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x+1|=2 \\ \arg(x+1)=\dfrac{2k\pi}{4},\ \ k\in\{0,1,2,3\}\end{cases} \Leftrightarrow x_k+1=2e^{\frac{ik\pi}{2}},$$

$$k\in\{0,1,2,3\}\Leftrightarrow x_k=-1+2e^{\frac{ik\pi}{2}},\qquad k\in\{0,1,2,3\}$$

$$x_0=-1+2=1;\ \ x_1=-1+2e^{i\frac{\pi}{2}}=-1+2i;$$

$$x_2=-1+2e^{i\pi}=-1-2=-3;\ \ x_3=-1+2e^{\frac{3i\pi}{2}}=-1-2i$$

Sont les solutions.

Allez à : Exercice 12 :

11. $z^3+3z-2i=0$

On voit que i est une solution évidente (car $i^3+3i-2i=0$) donc on peut mettre $z-i$ en facteur.

$$z^3+3z-2i=(z-i)(az^2+bz+c)\Leftrightarrow z^3+3z-2i=az^3+(-ia+b)z^2+(-ib+c)z-ic$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ -ia+b=0 \\ -ib+c=3 \\ -ic=-2i\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=ia=i \\ c=3+ib=2 \\ c=2\end{cases}$$

$$z^3+3z-2i=(z-i)(z^2+iz+2)$$

Le discriminant de z^2+iz+2 est $\Delta=i^2-4\times 2=-9=(3i)^2$

Il y a deux solutions

$$z=\frac{-i-3i}{2}=-2i\qquad \text{et}\qquad z=\frac{-i+3i}{2}=i$$

Il y a donc deux solutions, $z_1=i$ et $z_2=-2i$.

Allez à : Exercice 12 :

12.

$$\begin{aligned}\Delta&=(1+a)^2(1+i)^2-4(1+a^2)i=(1+2a+a^2)(1+2i-1)-4i-4ia^2\\&=2i+4ia+2ia^2-4i-4ia^2=-2i+4ia-2ia^2=-2i(1-2a+a^2)\\&=(1-i)^2(1-a)^2=\big((1-i)(1-a)\big)^2\end{aligned}$$

$$z_1=\frac{(1+a)(1+i)-(1-i)(1-a)}{2}=\frac{1+i+a+ia-(1-a-i+ia)}{2}=a+i$$
$$z_1=\frac{(1+a)(1+i)+(1-i)(1-a)}{2}=\frac{1+i+a+ia+1-a-i+ia}{2}=1+ia$$

Allez à : Exercice 12 :

13. $\Delta=(1-5i)^2-4i(6i-2)=1-25-10i+24+8i=-2i$

Il faut trouver δ tel que $\Delta=\delta^2$

Première méthode :

$-2i=1-2i-1=(1-i)^2$ c'est une identité remarquable. Donc $\delta_1=1-i$ ou $\delta_2=-1+i$

Deuxième méthode

On pose $\delta=a+ib$, $\Delta=\delta^2\Leftrightarrow -2i=(a+ib)^2\Leftrightarrow -2i=a^2-b^2+2iab\Leftrightarrow \begin{cases}a^2-b^2=0\\ 2ab=-2\end{cases}$

On rajoute l'équation $|\Delta|=|\delta^2|\Leftrightarrow |-2i|=a^2+b^2\Leftrightarrow 2=a^2+b^2$

Avec le système $\begin{cases}a^2-b^2=0\\ a^2+b^2=2\end{cases}$, en faisant la somme des deux équations, on trouve $2a^2=2\Leftrightarrow a^2=1$, d'où l'on tire $b^2=1$. Les valeurs possibles de a sont ± 1 et les valeurs possibles de b sont ± 1, d'après l'équation $2ab=-2\Leftrightarrow ab=-1$, on en déduit que $ab<0$ et que donc a et b sont de signe opposé.

Si $a=1$ alors $b=-1$ et $\delta=1-i$ et si $a=-1$ alors $b=1$ et $\delta=-1+i$. Ce sont bien les mêmes solutions qu'avec la première méthode.

Troisième méthode

$\Delta=-2i=2e^{\frac{3i\pi}{2}}$, donc les racines deuxièmes de Δ sont $\delta=\sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}}=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{i\sqrt{2}}{2}\right)=-1+i$ et $\delta=-\sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}}=1-i$.

Pour résoudre $iz^2+(1-5i)z+6i-2=0$, on n'a besoin que d'une racine deuxième, on prend, par exemple $\delta=1-i$.

Les deux solutions sont :

$$z_1=\frac{-(1-5i)-(1-i)}{2i}=\frac{-2+6i}{2i}=\frac{-1+3i}{i}=\frac{(-1+3i)(-i)}{i(-i)}=3+i$$
$$z_2=\frac{-(1-5i)+(1-i)}{2i}=\frac{4i}{2i}=2$$

Allez à : Exercice 12 :

14.

$$\Delta=\left(-(3+i)\right)^2-4(1+i)(-6+4i)=(3+i)^2-4(-6+4i-6i-4)$$
$$=9-1+6i-4(-10-2i)=8+6i+40+8i=48+14i$$

On pose $\delta=a+ib$, $\Delta=\delta^2\Leftrightarrow 48+14i=(a+ib)^2\Leftrightarrow 48+14i=a^2-b^2+2iab\Leftrightarrow$ $\begin{cases}a^2-b^2=48\\ 2ab=14\end{cases}$

On rajoute l'équation

$$|\Delta|=|\delta^2|\Leftrightarrow |48+14i|=a^2+b^2\Leftrightarrow 2|24+7i|=a^2+b^2\Leftrightarrow a^2+b^2=2\sqrt{24^2+7^2}\Leftrightarrow a^2+b^2$$
$$=2\sqrt{576+49}\Leftrightarrow a^2+b^2=2\sqrt{625}=2\times 25=50$$

Avec le système $\begin{cases}a^2-b^2=48\\ a^2+b^2=50\end{cases}$, en faisant la somme des deux équations, on trouve $2a^2=98\Leftrightarrow a^2=49$, d'où l'on tire $b^2=1$. Les valeurs possibles de a sont ± 7 et les valeurs possibles de b sont ± 1, d'après l'équation $2ab=14\Leftrightarrow ab=7$, on en déduit que $ab>0$ et que donc a et b sont de même signe.

Si $a=7$ alors $b=1$ et $\delta=7+i$ et si $a=-7$ alors $b=-1$ et $\delta=-7-i$

Deuxième méthode

$\Delta=48+14i=49+2\times 7i-1=(7+i)^2$ donc $\delta=7+i$ ou $\delta=-7-i$.

Troisième méthode

On reprend le système $\begin{cases} a^2 - b^2 = 48 \\ 2ab = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \left(\frac{7}{a}\right)^2 = 48 \\ b = \frac{7}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \frac{49}{a^2} = 48 \\ b = \frac{7}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4 - 49 = 48a^2 \\ b = \frac{7}{a} \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} a^4 - 48a^2 - 49 = 0 \\ b = \frac{7}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A^2 - 48A - 49 = 0 \\ b = \frac{7}{a} \end{cases}$, le discriminant de $A^2 - 48A - 49 = 0$ est $\Delta' = 48^2 + 4 \times 49 = 2500 = 50^2$ donc ses solutions sont $A_1 = \frac{48-50}{2} = -1$ et $A_2 = \frac{48+50}{2} = 49$, $A_1 < 0$ donc il n'y a pas de solution de $a^2 = -1$, par contre $a^2 = 49$ admet deux solutions $a = -7$ et $a = 7$.

Si $a = -7$ alors $b = \frac{7}{a} = -1$ et si $a = 7$ alors $b = \frac{7}{a} = 1$, on retrouve les mêmes solutions.

Les solutions de $(1+i)z^2 - (3+i)z - 6 + 4i = 0$ sont :

$$z_1 = \frac{(3+i) - (7+i)}{2(1+i)} = -\frac{4}{2(1+i)} = -\frac{2}{1+i} = -\frac{2(1-i)}{1^2+1^2} = -1+i$$

$$z_2 = \frac{(3+i) + (7+i)}{2(1+i)} = \frac{10+2i}{2(1+i)} = \frac{5+i}{1+i} = \frac{(5+i)(1-i)}{1^2+1^2} = \frac{5-5i+i+1}{1^2+1^2} = \frac{6-4i}{2} = 3-2i$$

Allez à : Exercice 12 :

15.

$$\Delta = \left(-(9+3i)\right)^2 - 4(1+2i)(-5i+10) = (3(3+i)^2) - 4(-5i+10+10+20i)$$
$$= 9(9-1+6i) - 4(-25) = 9(8+6i) - 4(20+15i) = 72+54i-80-60i$$
$$= -8-6i$$

On pose $\delta = a + ib$, $\Delta = \delta^2 \Leftrightarrow -8-6i = (a+ib)^2 \Leftrightarrow -8-6i = a^2 - b^2 + 2iab \Leftrightarrow$ $\begin{cases} a^2 - b^2 = -8 \\ 2ab = -6 \end{cases}$

On rajoute l'équation $|\Delta| = |\delta^2| \Leftrightarrow |-8-6i| = a^2 + b^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{(-8)^2 + (-6)^2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{64+36} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{100} = 10$

Avec le système $\begin{cases} a^2 - b^2 = -8 \\ a^2 + b^2 = 10 \end{cases}$, en faisant la somme des deux équations, on trouve $2a^2 = 2 \Leftrightarrow a^2 = 1$, d'où l'on tire $b^2 = 9$. Les valeurs possibles de a sont ± 1 et les valeurs possibles de b sont ± 3, d'après l'équation $2ab = -6 \Leftrightarrow ab = -3$, on en déduit que $ab < 0$ et que donc a et b sont de signe opposé.

Si $a = 1$ alors $b = -3$ et $\delta = 1 - 3i$ et si $a = -1$ alors $b = 3$ et $\delta = -1 + 3i$

Deuxième méthode

On reprend le système $\begin{cases} a^2 - b^2 = -8 \\ 2ab = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \left(\frac{-3}{a}\right)^2 = -8 \\ b = \frac{-3}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \frac{9}{a^2} = -8 \\ b = \frac{-3}{a} \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} a^4 - 9 = -8a^2 \\ b = \frac{-3}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4 + 8a^2 - 9 = 0 \\ b = \frac{-3}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A^2 + 8A - 9 = 0 \\ b = \frac{-3}{a} \end{cases}$, le discriminant de $A^2 + 8A - 9 = 0$ est $\Delta' = 8^2 + 4 \times 9 = 100 = 10^2$ donc ses solutions sont $A_1 = \frac{-8-10}{2} = -9$ et $A_2 = \frac{-8+10}{2} = 1$, $A_2 < 0$ donc il n'y a pas de solution de $a^2 = -9$, par contre $a^2 = 1$ admet deux solutions $a = -1$ et $a = 1$.

Si $a = -1$ alors $b = \frac{-3}{a} = 3$ et si $a = 1$ alors $b = \frac{-3}{a} = -1$, on retrouve les mêmes solutions.

Troisième méthode

$\Delta = -8 - 6i = 1 - 6i - 9 = (1-3i)^2$ donc $\delta = 1 - 3i$ et $\delta = -1 + 3i$

Les solutions de $(1+2i)z^2 - (9+3i)z - 5i + 10 = 0$ sont :

$$z_1 = \frac{(9+3i) - (1-3i)}{2(1+2i)} = \frac{8+6i}{2(1+2i)} = \frac{4+3i}{1+2i} = \frac{(4+3i)(1-2i)}{1^2+2^2} = \frac{4-8i+3i+6}{10} = 2-i$$

$$z_2 = \frac{(9+3i) + (1-3i)}{2(1+2i)} = \frac{10}{2(1+2i)} = \frac{5}{1+2i} = \frac{5(1-2i)}{1^2+2^2} = 1-2i$$

Allez à : Exercice 12 :

16. $\Delta = (-(6i+2)^2) - 4(1+3i)(11i-23) = (6i+2)^2 - 4(11i-23-33-69i) = -36+24i+4-4(-56-58i) = -32+24i+224+232i = 192+256i = 64(3+4i)$

Si j'ai mis 64 en facteur, c'est que maintenant il suffit de trouver une racine deuxième de $3+4i$, ce qui est beaucoup plus facile que de trouver une racine deuxième de $192+256i$.

On pose $\delta = a+ib$, $\Delta = \delta^2 \Leftrightarrow 3+4i = (a+ib)^2 \Leftrightarrow 3+4i = a^2-b^2+2iab \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2=3 \\ 2ab=4 \end{cases}$

On rajoute l'équation $|\Delta| = |\delta^2| \Leftrightarrow |3+4i| = a^2+b^2 \Leftrightarrow a^2+b^2 = \sqrt{3^2+4^2} \Leftrightarrow a^2+b^2 = \sqrt{25} = 5$

Avec le système $\begin{cases} a^2-b^2=3 \\ a^2+b^2=5 \end{cases}$, en faisant la somme des deux équations, on trouve $2a^2 = 8 \Leftrightarrow a^2 = 4$, d'où l'on tire $b^2 = 1$. Les valeurs possibles de a sont ± 2 et les valeurs possibles de b sont ± 1, d'après l'équation $2ab = 4 \Leftrightarrow ab = 2$, on en déduit que $ab > 0$ et que donc a et b sont de même signe.

Si $a = 2$ alors $b = 1$ et $\delta = 2+i$ et si $a = -2$ alors $b = -1$ et $\delta = -2-i$

Donc $(2+i)^2 = 3+4i$ entraine que $\Delta = 64(3+4i) = 8^2(2+i)^2 = \left(8(2+i)\right)^2 = (16+8i)^2$

Deuxième méthode

$3+4i = 4+4i-1 = (2+i)^2$ et on retrouve le même résultat.

Troisième méthode

On reprend le système

$$\begin{cases} a^2-b^2=3 \\ 2ab=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \left(\frac{2}{a}\right)^2 = 3 \\ b = \frac{2}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \frac{4}{a^2} = 3 \\ b = \frac{2}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4 - 4 = 3a^2 \\ b = \frac{2}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4 - 3a^2 - 4 = 0 \\ b = \frac{2}{a} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} A^2 - 3A - 4 = 0 \\ b = \frac{2}{a} \end{cases}$$

Les solutions de $A^2 - 3A - 4 = 0$ sont $A_1 = -1 < 0$ et $A_2 = 4$, donc $a^2 = 4$,

Si $a = -2$ alors $b = \frac{2}{a} = -1$ et alors $\delta = -2-i$, si $a = 2$ alors $b = \frac{2}{a} = 1$ et alors $\delta = 2+i$.

Les solutions de $(1+3i)z^2 - (6i+2)z + 11i - 23 = 0$ sont

$$z_1 = \frac{6i+2-(16+8i)}{2(1+3i)} = \frac{-14-2i}{2(1+3i)} = \frac{-7-i}{1+3i} = \frac{(-7-i)(1-3i)}{1^2+3^2} = \frac{-7+21i-i-3}{10} = -1+2i$$
$$z_2 = \frac{6i+2+(16+8i)}{2(1+3i)} = \frac{18+14i}{2(1+3i)} = \frac{9+7i}{1+3i} = \frac{(9+7i)(1-3i)}{1^2+3^2} = \frac{9-27i+7i+21}{10} = 3-2i$$

Allez à : Exercice 12 :

Correction exercice 13 :

On pose $X = Z^2$,

$$Z^4 + (3-6i)Z^2 - 8 - 6i = 0 \Leftrightarrow X^2 + (3-6i)X - 8 - 6i = 0$$

Le discriminant est

$$\Delta = (3-6i)^2 - 4(-8-6i) = 9 - 36i - 36 + 32 + 24i = 5 - 12i$$

Les racines carrés de $5-12i$:

$$(a+ib)^2 = 5-12i \Leftrightarrow a^2-b^2+2iab = 5-12i \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2=5 \\ 2ab=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} a^2-b^2=5 \\ ab=6 \end{cases}$$

On rajoute l'égalité des modules

$$a^2+b^2 = \sqrt{5^2+12^2} = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13 \quad L_3$$

En additionnant L_1 et L_3, on trouve $2a^2 = 18$ donc $a^2 = 9$, c'est-à-dire $a = \pm 3$.

En soustrayant L_1 à L_3, on trouve $2b^2 = 8$ donc $b^2 = 4$, c'est-à-dire $b = \pm 2$.

D'après L_2, a et b ont le même signe donc les deux racines carrés de $5-12i$ sont : $3+2i$ et $-3-2i$.

Les solutions de $X^2 + (3-6i)X - 8 - 6i = 0$ sont :

$$X_1 = \frac{-(3-6i)-(3+2i)}{2} = -3+4i$$

Et

$$X_2 = \frac{-(3-6i)+(3+2i)}{2} = 2i$$

Or $X_1 = -3+4i = 4+4i-1 = (2+i)^2$ donc $Z^2 = -3+4i$ a deux solutions :

$$Z_1 = 2+i$$

Et

$$Z_2 = -2-i$$

De plus $X_2 = 2i = (1+i)^2$ donc $Z^2 = 2i$ a deux solutions :

$$Z_3 = 1+i$$

Et

$$Z_4 = -1-i$$

Allez à : Exercice 13 :

Correction exercice 14 :

1. On pose $X = a \in \mathbb{R}$

$$(1-i)a^3 - (5+i)a^2 + (4+6i)a - 4i = 0 \Leftrightarrow a^3 - 5a^2 + 4a + i(-a^3 - a^2 + 6a - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - 5a^2 + 4a = 0 \\ -a^3 - a^2 + 6a - 4 = 0 \end{cases}$$

$$a^3 - 5a^2 + 4a = 0 \Leftrightarrow a(a^2 - 5a^2 + 4) = 0$$

Donc cette équation admet 0, 1 et 4 comme racine. Seul 1 est solution de $-a^3 - a^2 + 6a - 4 = 0$ donc il existe une unique solution réelle $a = 1$.

2. On factorise $(1-i)X^3 - (5+i)X^2 + (4+6i)X - 4i$ par $X - 1$. Il existe alors α, β et γ telle que :

$$(1-i)X^3 - (5+i)X^2 + (4+6i)X - 4i = (X-1)(\alpha X^2 + \beta X + \gamma)$$

Or $(X-1)(\alpha X^2 + \beta X + \gamma) = \alpha X^3 + (\beta - \alpha)X^2 + (\gamma - \beta)X - \gamma$

On en déduit que : $\begin{cases} \alpha = 1-i \\ \beta - \alpha = -(5+i) \\ \gamma - \beta = 4+6i \\ -\gamma = -4i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1-i \\ \beta = -(5+i) + 1 - i = -4-2i \\ \gamma = 4+6i-4-2i = 4i \\ \gamma = 4i \end{cases}$

D'où

$$(1-i)X^3 - (5+i)X^2 + (4+6i)X - 4i = 0 \Leftrightarrow (X-1)\big((1-i)X^2 - (4+2i)X + 4i\big) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = 1 \\ (1-i)X^2 - (4+2i)X + 4i = 0 \end{cases}$$

Le discriminant de l'équation du second degré est :

$$\Delta = (4+2i)^2 - 4(1-i)\times 4i = 16 + 16i - 4 - 16i - 16 = -4 = (2i)^2$$

Les deux racines sont alors

$$X_1 = \frac{4+2i-2i}{2(1-i)} = \frac{2}{1-i} = \frac{2(1+i)}{1^2+1^2} = 1+i$$

$$X_2 = \frac{4+2i+2i}{2(1-i)} = \frac{2+2i}{1-i} = \frac{2(1+i)^2}{1^2+1^2} = 2i$$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{1, 1+i, 2i\}$.

Allez à : Exercice 14 :

Correction exercice 15 :

1. Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que :

$$a^3 + (1-2i)a^2 - 3(1+i)a - 2 + 2i = 0 \Leftrightarrow a^3 + a^2 - 3a - 2 + i(-2a^2 - 3a + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^3 + a^2 - 3a - 2 = 0 \\ -2a^2 - 3a + 2 = 0 \end{cases}$$

Les solutions de l'équation $-2a^2-3a+2=0$ sont $a_1=-2$ et $a_2=\frac{1}{2}$

$$(-2)^3+(-2)^2-3(-2)-2=-8+4+6-2=0$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^2-3\left(\frac{1}{2}\right)-2=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}-\frac{3}{2}-2=\frac{1+2-12-16}{8}=-\frac{25}{8}\neq 0$$

Donc seul -2 est solution de (E)

2. On peut diviser $X^3+(1-2i)X^2-3(1+i)X-2+2i$ par $X+2$

$$\begin{array}{r|l}
X^3+(1-2i)X^2-3(1+i)X-2+2i & X+2 \\
\hline
X^3+2X^2 & X^2+(-1-2i)X-1+i \\
\hline
(-1-2i)X^2-3(1+i)X-2+2i & \\
(-1-2i)X^2+2(-1-2i)X & \\
\hline
(-1+i)X-2+2i & \\
(-1+i)X-2+2i & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Par conséquent

$$X^3+(1-2i)X^2-3(1+i)X-2+2i=(X+2)(X^2+(-1-2i)X-1+i)$$
$$=(X+2)(X^2-(1+2i)X-1+i)$$

Les solutions de (E) sont donc

$$X^2-(1+2i)X+i-1=0$$
$$\Delta=(1+2i)^2-4(i-1)=1+4i-4-4i+4=1$$
$$X_1=\frac{1+2i-1}{2}=i$$
$$X_2=\frac{1+2i+1}{2}=1+i$$

Allez à : Exercice 15 :

Correction exercice 16 :

$$\Delta=(-i)^2+4(1+i)=4+4i-1=(2+i)^2$$

Les solutions de $Z^2-iZ-1-i=0$ sont

$$Z_1=\frac{i+2+i}{2}=1+i$$
$$Z_2=\frac{i-(2+i)}{2}=-1$$

Les solutions de $z^6-iz^3-1-i=0$ vérifient

$$z^3=1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}|z^3|=\sqrt{2}\\ \arg(z^3)=\frac{\pi}{4}+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}|z|^3=2^{\frac{1}{2}}\\ 3\arg(z)=\frac{\pi}{4}+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}|z|=2^{\frac{1}{6}}\\ \arg(z)=\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3},\quad k\in\{0,1,2\}\end{array}\right.\Leftrightarrow z\in\left\{2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{\pi}{12}};\ 2^{\frac{1}{6}}e^{\frac{3i\pi}{4}};\ 2^{\frac{1}{6}}e^{\frac{17i\pi}{12}}\right\}$$

Ou

$$z^3=-1\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}|z^3|=1\\ \arg(z^3)=\pi+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}|z|^3=1\\ 3\arg(z)=\pi+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}|z|=1\\ \arg(z)=\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3},\quad k\in\{0,1,2\}\end{array}\right.$$

Il y a donc trois solutions

$$z_0 = e^{\frac{i\pi}{3}}; \quad z_1 = e^{\frac{3i\pi}{3}} = e^{i\pi} = -1; \; z_2 = e^{\frac{5i\pi}{3}} = e^{-\frac{i\pi}{3}}$$

Finalement il y a six solutions

$$\left\{2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{\pi}{12}};\ 2^{\frac{1}{6}}e^{\frac{3i\pi}{4}};\ 2^{\frac{1}{6}}e^{\frac{17i\pi}{12}}; e^{\frac{i\pi}{3}}; -1; e^{-\frac{i\pi}{3}}\right\}$$

Allez à : Exercice 16 :

Correction exercice 17 :

1. Soit $a \in \mathbb{R}$ une solution de (E)

$$a^4 - 3a^3 + (2-i)a^2 - 3 + i = 0 \Leftrightarrow a^4 - 3a^3 + 2a^2 + 3a - 3 + i(-a^2+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^4 - 3a^3 + 2a^2 + 3a - 3 = 0 \\ -a^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

$a_1 = -1$ est solution de $a^4 - 3a^3 + 2a^2 - 3 = 0$ et $a_2 = 1$ est solution de $a^4 - 3a^3 + 2a^2 + 3a - 3 = 0$, donc (E) admet deux solutions réelles, on peut mettre $(X-1)(X+1) = X^2 - 1$ en facteur.

2. Il existe $a, b, c \in \mathbb{C}$ tels que

$$X^4 - 3X^3 + (2-i)X^2 + 3X - 3 + i = (X^2-1)(aX^2 + bX + c)$$

On développe

$$(X^2-1)(aX^2+bX+c) = aX^4 + bX^3 + (c-a)X^2 - bX - c$$

Par conséquent

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c - a = 2 - i \\ -b = 3 \\ -c = -3 + i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 3 - i \end{cases}$$

$$X^4 - 3X^3 + (2-i)X^2 + 3X - 3 + i = (X^2-1)(X^2 - 3X + 3 - i) = 0$$

Il reste à trouver les solutions de $X^2 - 3X + 3 - i = 0$

$$\Delta = 9 - 4(3-i) = -3 + 4i = 1 + 4i - 4 = (1+2i)^2$$

Les racines carrées du discriminant sont $\delta = \pm(1-2i)$

Il y a deux solutions

$$X_1 = \frac{3-(1+2i)}{2} = 1 - i$$

$$X_2 = \frac{3+1+2i}{2} = 2 + i$$

L'ensemble des solutions de (E) est

$$S = \{-1, 1, 1-i, 2+i\}$$

Allez à : Exercice 17 :

Correction exercice 18 :

1. $X^3 = 2\sqrt{2}\left(-\frac{2}{\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2^{\frac{3}{2}}e^{\frac{3i\pi}{4}}$

Donc

$$X^3 = 2\sqrt{2}\left(-\frac{2}{\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2^{\frac{3}{2}}e^{\frac{3i\pi}{4}} \Leftrightarrow \begin{cases} |X^3| = 2^{\frac{3}{2}} \\ \arg(X^3) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \ \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |X|^3 = 2^{\frac{3}{2}} \\ 3\arg(X) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \ \ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X| = 2^{\frac{1}{2}} \\ \arg(X) = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}, \ \ k \in \{0,1,2\} \end{cases} \Leftrightarrow X_k$$

$$= \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}\right)}, \qquad k \in k \in \{0,1,2\}$$

$$X_0=\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1+i$$
$$X_1=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)}=\sqrt{2}e^{\frac{11i\pi}{12}}$$
$$X_2=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}\right)}=\sqrt{2}e^{\frac{19i\pi}{12}}$$

2.

$$X^3=-8i=2^3e^{\frac{3i\pi}{2}}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}|X^3|=2^3\\ \arg(X^3)=\frac{3\pi}{2}+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}|X|^3=2^3\\ 3\arg(X)=\frac{3\pi}{2}+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}|X|=2\\ \arg(X)=\frac{\pi}{2}+\frac{2k\pi}{3},\ \ k\in\{0,1,2\}\end{array}\right.\Leftrightarrow X_k=2e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2k\pi}{3}\right)},\qquad k\in k\in\{0,1,2\}$$
$$X_0=2e^{\frac{i\pi}{2}}=2i$$
$$X_1=2e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}\right)}=2e^{\frac{7i\pi}{6}}=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=-\sqrt{3}-i$$
$$X_2=2e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{4\pi}{3}\right)}=2e^{\frac{11i\pi}{6}}=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=\sqrt{3}-i$$

3. On pose $X=Z^3$
$$\frac{1}{2}Z^6+(1+3i)Z^3+8+8i=0\Leftrightarrow\frac{1}{2}X^2+(1+3i)X+8+8i=0$$
Le discriminant de cette équation est :
$$\Delta=(1+3i)^2-4\times\frac{1}{2}(8+8i)=1+6i-9-16-16i=-24-10i$$
Les racines carrés de $-24-10i$:
$$(a+ib)^2=-24-10i\Leftrightarrow a^2-b^2+2iab=-24-10i\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}a^2-b^2=-24\\ 2ab=-10\end{array}\right.\Leftrightarrow\begin{array}{l}L_1\\ L_2\end{array}\left\{\begin{array}{l}a^2-b^2=-24\\ ab=-5\end{array}\right.$$
On rajoute l'égalité des modules
$$a^2+b^2=\sqrt{24^2+10^2}=\sqrt{576+100}=\sqrt{676}=26\quad L_3$$
En additionnant L_1 et L_3, on trouve $2a^2=2$ donc $a^2=1$, c'est-à-dire $a=\pm1$.
En soustrayant L_1 à L_3, on trouve $2b^2=50$ donc $b^2=25$, c'est-à-dire $b=\pm5$.
D'après L_2, a et b sont de signes différents donc les deux racines carrés de $-24-10i$ sont : $1-5i$ et $-1+5i$.
L'équation du second degré a pour racine :
$$X_1=\frac{-(1+3i)-(1-5i)}{2\times\frac{1}{2}}=-2-2i$$
Et
$$X_2=\frac{-(1+3i)+(1-5i)}{2\times\frac{1}{2}}=-2i$$
Les six racines de
$$\frac{1}{2}Z^6+(1+3i)Z^3+8+8i=0$$
Sont les six complexes trouvés en 1°) et 2°).

Allez à : Exercice 18 :

Correction exercice 19 :

1. Posons $z=a\in\mathbb{R}$, $(E)\Leftrightarrow a^3+1-i(a+1)=0\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}a^3+1=0\\ a+1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow a=-1$

2. On peut diviser $z^3 - iz + 1 - i = 0$ par $z + 1$

$$\begin{array}{r|l}
z^3 - iz + 1 - i & z+1 \\ \cline{2-2}
z^3 + z^2 & z^2 - z + 1 - i \\ \cline{1-1}
-z^2 - iz + 1 - i & \\
-z^2 - z & \\ \cline{1-1}
(1-i)z + 1 - i & \\
(1-i)z + 1 - i & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

$z^2 - z + 1 - i$ a pour discriminant $\Delta = 1 - 4(1 - i) = -3 + 4i = 1 + 4i - 4 = (1 + 2i)^2$
Les racines de ce polynôme sont :
$z_1 = \frac{1-(1+2i)}{2} = -i$ et $z_2 = \frac{1+(1+2i)}{2} = 1 + i$
Les solutions de (E) sont -1, $1 + i$ et $-i$.

Allez à : Exercice 19 :

Correction exercice 20 :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ une racine de (E)

$$x^4 - (3+\sqrt{3})x^3 + (2 + 3\sqrt{3} - i)x^2 + (-2\sqrt{3} + 3i)x - 2i = 0$$
$$\Leftrightarrow x^4 - (3+\sqrt{3})x^3 + (2+3\sqrt{3})x^2 - 2\sqrt{3}x + i(-x^2 + 3x - 2) = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - (3+\sqrt{3})x^3 + (2+3\sqrt{3})x^2 - 2\sqrt{3}x = 0 \quad (*) \\ -x^2 + 3x - 2 = 0 \end{cases}$$

Les racines de $-x^2 + 3x - 2 = 0$ sont après un petit calcul $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$

$$1^4 - (3+\sqrt{3})1^3 + (2+3\sqrt{3})1^2 - 2\sqrt{3} \times 1 = 1 - 3 - \sqrt{3} + 2 + 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 0$$

Donc 1 est racine de $(*)$

$$2^4 - (3+\sqrt{3})2^3 + (2+3\sqrt{3})2^2 - 2\sqrt{3} \times 2 = 16 - 3 \times 8 - 8\sqrt{3} + 8 + 12\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = 0$$

Donc 2 est racine de $(*)$

2. On peut diviser le polynôme par $(X-1)(X-2) = X^2 - 3X + 2$

$$\begin{array}{r|l}
X^4 - (3+\sqrt{3})X^3 + (2+3\sqrt{3}-i)X^2 + (-2\sqrt{3}+3i)X - 2i & X^2 - 3X + 2 \\ \cline{2-2}
X^4 \quad - 3X^3 \quad + 2X^2 \qquad\qquad\qquad & X^2 - \sqrt{3}X - i \\ \cline{1-1}
-\sqrt{3}X^3 + (3\sqrt{3} - i)X^2 + (-2\sqrt{3}+3i)X - 2i & \\
-\sqrt{3}X^3 \quad + 3\sqrt{3}X^2 \quad - 2\sqrt{3}X & \\ \cline{1-1}
-iX^2 \quad + 3iX - 2i & \\
-iX^2 \quad + 3iX - 2i & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Il reste à déterminer les racines de $X^2 - \sqrt{3}X - i = 0$

$$\Delta = 3 + 4i = (2+i)^2$$
$$z_1 = \frac{\sqrt{3} + 2 + i}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{1}{2}i = 1 - i\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{i}{2}$$
$$z_2 = \frac{\sqrt{3} - 2 - i}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 - \frac{1}{2}i = -1 + i\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 - \frac{i}{2}$$
$$S = \left\{1, 2, \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{i}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 - \frac{i}{2}\right\}$$

Allez à : Exercice 20 :

Correction exercice 21 :

1.

$$z^2=\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2=2+\sqrt{3}-\left(2-\sqrt{3}\right)+2i\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$$=2\sqrt{3}+2i\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}=2\sqrt{3}+2i\sqrt{2^2-3}=2\sqrt{3}+2i$$

$$|z^2|=\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2+2^2}=\sqrt{4\times 3+4}=\sqrt{16}=4$$

Si on pose $\theta=\arg(z^2)$, $\cos(\theta)=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\theta)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ donc $\theta=\frac{\pi}{6}+2k\pi$

Autre méthode :

$z^2=2\sqrt{3}+2i=4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=2e^{i\frac{\pi}{6}}$, donc $\theta=\frac{\pi}{6}+2k\pi$.

2.

On déduit de la première question que $|z^2|=4$ donc $|z|^2=4$ et que $|z|=2$. Et que les arguments possible de z sont $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)=\frac{\pi}{12}+k\pi$, $k\in\{0,1\}$, donc $z=2e^{\frac{i\pi}{12}}$ ou $z=-2e^{\frac{i\pi}{12}}$. Mais $z=\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}}$ entraine que le cosinus et le sinus de ses arguments sont positifs, donc $z=2e^{\frac{i\pi}{12}}$.

3. D'après la question précédente

$$2e^{\frac{i\pi}{12}}=\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}}\Leftrightarrow 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)=\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}+i\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\end{array}\right.$$

Allez à : Exercice 21 :

Correction exercice 22 :

1.

$$u^4=-4\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}|u^4|=|-4|\\ \arg(u^4)=\arg(-4)+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}|u|^4=4\\ 4\arg(u)=\pi+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}|u|=4^{\frac{1}{4}}=(2^2)^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}\\ \arg(u)=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},\ \ k\in\{0,1,2,3\}\end{array}\right.$$

Il y a quatre solutions

$$u_0=\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{i\sqrt{2}}{2}\right)=1+i$$

$$u_1=\sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}}=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{i\sqrt{2}}{2}\right)=-1+i$$

$$u_2=\sqrt{2}e^{\frac{5i\pi}{4}}=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{i\sqrt{2}}{2}\right)=-1-i=\overline{u_1}$$

$$u_3=\sqrt{2}e^{\frac{7i\pi}{4}}=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{i\sqrt{2}}{2}\right)=1-i=\overline{u_0}$$

2.

$$(z+1)^4+4(z-1)^4=0\Leftrightarrow(z+1)^4=-4(z-1)^4\Leftrightarrow\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^4=-4$$

On pose $u=\frac{z+1}{z-1}$, il y a donc 4 solutions que l'on trouve en exprimant z en fonction de u.

$$u=\frac{z+1}{z-1}\Leftrightarrow u(z-1)=z+1\Leftrightarrow zu-u=z+1\Leftrightarrow zu-z=u+1\Leftrightarrow z(u-1)=u+1\Leftrightarrow z=\frac{u+1}{u-1}$$

$$z_0=\frac{u_0+1}{u_0-1}=\frac{1+i+1}{1+i-1}=\frac{2+i}{i}=1-2i$$

$$z_1=\frac{u_1+1}{u_1-1}=\frac{-1+i+1}{-1+i-1}=\frac{i}{-2+i}=\frac{i(-2-i)}{(-2)^2+1^2}=\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$$

$$z_2=\frac{u_2+1}{u_2-1}=\frac{\overline{u_1}+1}{\overline{u_1}-1}=\overline{z_1}=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$$

$$z_3=\frac{u_3+1}{u_3-1}=\frac{\overline{u_0}+1}{\overline{u_0}-1}=\overline{z_0}=1+2i$$

Allez à : Exercice 22 :

Correction exercice 23 :

1.

$$X^3=-2\sqrt{2}\Leftrightarrow\begin{cases}|X^3|=2\sqrt{2}\\ \arg(X^3)=\arg(-2\sqrt{2})+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|X|^3=\left(\sqrt{2}\right)^2\\ 3\arg(X)=\pi+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}|X|=\sqrt{2}\\ \arg(X)=\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3},\ \ k\in\{0,1,2\}\end{cases}$$

Les trois solutions sont

$$X_k=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right)}=\sqrt{2}e^{i\frac{(2k+1)\pi}{3}},\ \ k\in\{0,1,2\}$$

Soit

$$X_0=\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{3}}=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$X_1=\sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{3}}=-\sqrt{2}$$

$$X_2=\sqrt{2}e^{\frac{5i\pi}{3}}=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{6}}{2}$$

2.

$$(z+i)^3+2\sqrt{2}(z-i)^3=0\Leftrightarrow(z+i)^3=-2\sqrt{2}(z-i)^3\Leftrightarrow\frac{(z+i)^3}{(z-i)^3}=-2\sqrt{2}\Leftrightarrow\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3=-2\sqrt{2}$$

On pose

$$X=\frac{z+i}{z-i}$$

Il faut trouver z en fonction de X

$$X=\frac{z+i}{z-i}\Leftrightarrow X(z-i)=z+i\Leftrightarrow Xz-iX=z+i\Leftrightarrow Xz-z=iX+i\Leftrightarrow z(X-1)=i(X+1)\Leftrightarrow z=i\frac{X+1}{X-1}$$

Il y a donc trois solutions

$$z_0=i\frac{X_0+1}{X_0-1}=i\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}+1}{\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}-1}=i\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+1+i\frac{\sqrt{6}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}-1+i\frac{\sqrt{6}}{2}}=i\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1+i\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1-i\frac{\sqrt{6}}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}$$

$$=i\frac{\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(1+\frac{i\sqrt{6}}{2}\right)^2\right)}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}=i\frac{\left(\frac{1}{2}-\left(1-\frac{6}{4}+i\sqrt{6}\right)\right)}{\frac{1}{2}-\sqrt{2}+1+\frac{6}{4}}=i\frac{1-i\sqrt{6}}{3-\sqrt{2}}$$

$$=-\frac{\sqrt{6}}{3-\sqrt{2}}+i\frac{1}{3-\sqrt{2}}$$

$$z_1=i\frac{X_1+1}{X_1-1}=i\frac{-\sqrt{2}+1}{-\sqrt{2}-1}=i\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=i\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=i(\sqrt{2}-1)^2=i(2-2\sqrt{2}+1)$$

$$=i(3-2\sqrt{2})$$

$$z_2=i\frac{X_2+1}{X_2-1}=i\frac{\overline{X_0}+1}{\overline{X_0}-1}=i\overline{\left(\frac{X_0+1}{X_0-1}\right)}=-\overline{\left(i\left(\frac{X_0+1}{X_0-1}\right)\right)}=-\overline{z_0}=--\frac{\sqrt{6}}{3-\sqrt{2}}-i\frac{1}{3-\sqrt{2}}$$

Allez à : Exercice 23 :

Correction exercice 24 :

1. Les racines quatrième de l'unité sont $\{1,i,-1,-i\}$.
2. $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{\frac{4i\pi}{3}}$ donc

$$X^4=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow X^4=e^{\frac{4i\pi}{3}}\Leftrightarrow\begin{cases}|X^4|=\left|e^{\frac{4i\pi}{3}}\right|\\ \arg(X^4)=\frac{4\pi}{3}+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|X|^4=1\\ 4\arg(X)=\frac{4\pi}{3}+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}|X|=1\\ \arg(X)=\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2},\quad k\in\{0,1,2,3\}\end{cases}\Leftrightarrow X_k=e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}\right)},k\in\{0,1,2,3\}$$

Il y a quatre solutions :

$$X_0=e^{i\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$X_1=e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)}=e^{\frac{5i\pi}{6}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$$

$$X_2=e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\pi\right)}=e^{\frac{4i\pi}{3}}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$X_3=e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{3\pi}{2}\right)}=e^{\frac{11i\pi}{6}}=e^{-\frac{i\pi}{6}}=\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}$$

Autre solution

$-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}=j^2$. Donc $X^4=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=j^2\Leftrightarrow X^4-j^2=0$. Or

$$X^4-j^2=(X^2-j)(X^2+j)=(X^2-j^4)(X^2-i^2j^4)=(X-j^2)(X+j^2)(X-ij^2)(X+ij^2)$$

D'où les solutions :

$X=j^2=-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}$, $X=\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$, $X=i\left(-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$ et $X=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$

3. On pose $Y=X^4$, l'équation est alors du second degré.

$$Y^2+\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Y-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=0$$

Le discriminant est

$$\Delta = \left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 4\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{4}-\frac{3}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{2}+2+2i\sqrt{3} = \frac{3}{2}+\frac{3i\sqrt{3}}{2} = 3\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$= 3e^{\frac{i\pi}{3}}$$

Donc les solutions de $\delta^2 = \Delta$ sont

$$\delta = \sqrt{3}e^{\frac{i\pi}{6}} = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \delta = -\sqrt{3}e^{\frac{i\pi}{6}} = -(\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})$$

L’équation du second degré a alors deux solutions :

$$Y_1 = \frac{-\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\left(\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2} = -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Et

$$Y_2 = \frac{-\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = 1$$

L’équation du huitième degré a pour solution :

$$\left\{1,\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},i,-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2},-1,-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2},-i,\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right\}$$

Autre solution

$$Y^2+\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Y-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \Leftrightarrow Y^2+jY+j^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{Y}{j}\right)^2+\frac{Y}{j}+1 = 0$$

Les solutions de $T^2+T+1=0$ sont $T_1 = j$ et $T_2 = j^2$

Donc $\frac{Y_1}{j} = j \Leftrightarrow Y_1 = j^2$ et $\frac{Y_2}{j} = j^2 \Leftrightarrow Y_2 = j^3 = 1$

Et on termine de la même façon.

Allez à : Exercice 24 :

Correction exercice 25 :

$$\left(\frac{1+i-\sqrt{3}(1-i)}{1+i}\right)^2 = \left(\frac{1-\sqrt{3}+i(1+\sqrt{3})}{1+i}\right)^2 = \frac{\left(1-\sqrt{3}+i(1+\sqrt{3})\right)^2}{(1+i)^2}$$
$$= \frac{(1-\sqrt{3})^2-(1+\sqrt{3})^2+2i(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}{1-1+2i}$$
$$= \frac{1-2\sqrt{3}+3-(1+2\sqrt{3}+3)+2i(1-3)}{2i} = \frac{-4\sqrt{3}-4i}{2i} = -\frac{4(\sqrt{3}+i)}{2i}$$
$$= 2i(\sqrt{3}+i) = -2+2i\sqrt{3}$$

$$\left(\frac{1+i-\sqrt{3}(1-i)}{1+i}\right)^2 = -2+2i\sqrt{3} = 4\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

Autre méthode

$$\left(\frac{1+i-\sqrt{3}(1-i)}{1+i}\right)^2 = \left(1-\sqrt{3}\frac{1-i}{1+i}\right)^2 = \left(1-\sqrt{3}\frac{(1-i)^2}{1^2+1^2}\right)^2 = \left(1-\sqrt{3}\frac{1-2i-1}{2}\right)^2$$
$$= (1+i\sqrt{3})^2 = \left(2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2 = (-2j^2)^2 = 4j^4 = 4j = 4\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$= -2+2i\sqrt{3}$$

Allez à : Exercice 25 :

Correction exercice 26 :

1.

$$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{1^2+(-1)^2}=\frac{1+2i-1}{2}=\frac{2i}{2}=i=e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Donc le module de $\frac{1+i}{1-i}$ est 1 et un argument est $\frac{\pi}{2}$.

$$2010=4\times 502+2$$

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2010}=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{4\times 502+2}=\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{4\times 502+2}=\left(\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^4\right)^{502}\times\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^2=\left(e^{2i\pi}\right)^{502}\times e^{i\pi}$$
$$=1^{502}\times(-1)=-1$$

2.

$$\left(1+i\sqrt{3}\right)^{2010}=\left(2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^{2010}=\left(2(-j^2)\right)^{2010}=2^{2010}\times j^{4020}=2^{2010}j^{3\times 1340}$$
$$=2^{2010}(j^3)^{1340}=2^{2010}\times 1^{1340}=2^{2010}$$

3.

$$z_1=\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}=\frac{2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=\sqrt{2}\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{4}}}=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)}=2^{\frac{1}{2}}e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$z_1^n=\left(2^{\frac{1}{2}}e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^n=2^{\frac{n}{2}}e^{i\frac{n\pi}{12}}$$

$$z_2=1+j=-j^2$$
$$z_2^n=(-j^2)^n=(-1)^nj^{2n}$$

Si $n\equiv 0\ \ [6], n=6k,\ \ k\in\mathbb{Z}, z_2^{6k}=j^{12k}=(-1)^0(j^3)^{4k}=1^{4k}=1$

Si $n\equiv 1\ \ [6], n=6k+1,\ \ k\in\mathbb{Z}, z_2^{6k+1}=(-1)j^{12k+2}=(-1)(j^3)^{4k}j^2=-1^{4k}j^2=-j^2=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Si $n\equiv 2\ \ [6], n=6k+2,\ \ k\in\mathbb{Z}, z_2^{6k+2}=(-1)^2j^{12k+4}=(-1)^2(j^3)^{4k}j^2=1^{4k}j^4=j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Si $n\equiv 3\ \ [6], n=6k+3,\ \ k\in\mathbb{Z}, z_2^{6k+3}=(-1)^3j^{12k+6}=(-1)^3(j^3)^{4k}j^6=-1^{4k}j^6=-1$

Si $n\equiv 4\ \ [6], n=6k+4,\ \ k\in\mathbb{Z}, z_2^{6k+4}=(-1)^4j^{12k+8}=(j^3)^{4k}j^8=1^{4k}j^2=j^2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Si $n\equiv 5\ \ [6], n=6k+5,\ \ k\in\mathbb{Z}, z_2^{6k+5}=(-1)^5j^{12k+10}=-(j^3)^{4k}j^{10}=-1^{4k}j=-j=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$z_3=\frac{1+i\tan(\theta)}{1-i\tan(\theta)}=\frac{1+i\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}}{1-i\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}}=\frac{\cos(\theta)+i\sin(\theta)}{\cos(\theta)-i\sin(\theta)}=\frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}}=e^{2i\theta}$$
$$z_3^n=e^{2in\theta}$$

$$z_4=1+\cos(\phi)+i\sin(\phi)=2\cos^2(\phi)+2i\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\right)$$
$$=\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)e^{i\frac{\phi}{2}}$$

$$z_4^n=\left(\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\right)^n e^{\frac{ni\phi}{2}}$$

Remarque :

$\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)$ n'est pas forcément le module de z_4 car $\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)$ n'est positif que pour certaine valeur de ϕ.

Allez à : Exercice 26 :

Correction exercice 27 :

$$\left(\sqrt{3}+i\right)^n=\left(2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)\right)^n=2^n\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^n=2^n e^{\frac{ni\pi}{6}}$$

$$\left(\sqrt{3}+i\right)^n\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\left(\sqrt{3}+i\right)^n-\overline{\left(\sqrt{3}+i\right)^n}=0\Leftrightarrow e^{\frac{ni\pi}{6}}-e^{-\frac{ni\pi}{6}}=0\Leftrightarrow\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)=0\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{Z},\frac{n\pi}{6}$$
$$=k\pi\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{Z},\frac{n}{6}=k\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{Z},n=6k$$

$$\left(\sqrt{3}+i\right)^n\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow\left(\sqrt{3}+i\right)^n+\overline{\left(\sqrt{3}+i\right)^n}=0\Leftrightarrow e^{\frac{ni\pi}{6}}+e^{-\frac{ni\pi}{6}}=0\Leftrightarrow\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{Z},\frac{n\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{Z},\frac{n}{6}=\frac{1}{2}+k\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{Z},n=3+6k$$

Allez à : Exercice 27 :

Correction exercice 28 :

$$z=\rho e^{i\theta}$$
$$z^k+\overline{z}^k=\rho^k e^{ki\theta}+\rho^k e^{-ki\theta}=\rho^k\left(e^{ki\theta}+e^{-ki\theta}\right)=2\rho^k\cos(k\theta)$$
$$(z+\overline{z})\left(z^2+\overline{z}^2\right)\dots\left(z^n+\overline{z}^n\right)=2\rho\cos(\theta)\,2\rho^2\cos(2\theta)\dots2\rho^n\cos(n\theta)$$
$$=2^n\rho^{1+2+\dots+n}\cos(\theta)\cos(2\theta)\dots\cos(n\theta)=2^n\rho^{\frac{n(n+1)}{2}}\cos(\theta)\cos(2\theta)\dots\cos(n\theta)$$

Allez à : Exercice 28 :

Correction exercice 29 :

1.
$$|1+iz|=|1-iz|\Leftrightarrow|1+iz|^2=|1-iz|^2\Leftrightarrow(1+iz)\left(\overline{1+iz}\right)=(1-iz)\left(\overline{1-iz}\right)$$
$$\Leftrightarrow(1+iz)(1-i\overline{z})=(1-iz)(1+i\overline{z})\Leftrightarrow1-i\overline{z}+iz+z\overline{z}=1+i\overline{z}-iz+z\overline{z}$$
$$\Leftrightarrow-i\overline{z}+iz=i\overline{z}-iz\Leftrightarrow z=\overline{z}\Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$$

2.
$$\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n=\frac{1+ia}{1-ia}\Rightarrow\left|\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n\right|=\left|\frac{1+ia}{1-ia}\right|\Rightarrow\left|\frac{1+iz}{1-iz}\right|^n=1\Rightarrow|1+iz|=|1-iz|\Rightarrow z\in\mathbb{R}$$

On pose $z=\tan(\theta)=\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$ (ce qui est toujours possible puisque pour $z\in\mathbb{R}$ il existe un unique $\theta\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $z=\tan(\theta)$) ainsi

$$\frac{1+iz}{1-iz}=\frac{1+i\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}}{1-i\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}}=\frac{\cos(\theta)+i\sin(\theta)}{\cos(\theta)-i\sin(\theta)}=\frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}}=e^{2i\theta}$$

Et $a=\tan(\alpha)=\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ ainsi

$$\frac{1+ia}{1-ia}=e^{2i\alpha}$$

$$\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n=\frac{1+ia}{1-ia}\Leftrightarrow e^{2in\theta}=e^{2i\alpha}\Leftrightarrow2n\theta=2\alpha+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\theta=\frac{\alpha}{n}+\frac{k\pi}{n},k\in\{0,1,\dots,n-1\}$$

Donc les solutions sont

$$z_k=\tan\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{k\pi}{n}\right),k\in\{0,1,\dots,n-1\}$$

Avec $a=\tan(\alpha)$

3.

$$\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}=\frac{\frac{\sqrt{3}+i}{2}}{\frac{\sqrt{3}-i}{2}}=\frac{e^{i\frac{\pi}{6}}}{e^{-i\frac{\pi}{6}}}=e^{i\frac{\pi}{3}}$$

On peut aussi exprimer ce quotient sous forme algébrique et constater qu'il vaut $e^{i\frac{\pi}{3}}$.
On cherche les complexes tels que

$$z^3=e^{i\frac{\pi}{3}}\Leftrightarrow\begin{cases}|z^3|=\left|e^{i\frac{\pi}{3}}\right|\\ \arg(z^3)=\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|z|^3=1\\ 3\arg(z)=\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}|z|=1\\ \arg(z)=\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3},\ \ k\in\{0,1,2\}\end{cases}$$

Il y a trois racines cubique de $\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}$, $z_k=e^{i\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}}, k\in\{0,1,2\}$

$$z_0=e^{i\frac{\pi}{9}};z_1=e^{i\frac{7\pi}{9}};z_2=e^{i\frac{13\pi}{9}}$$

Allez à : Exercice 29 :

Correction exercice 30 :

On pose $Z=\frac{2z+1}{z-1}$, les solutions de $Z^4=1$ sont $1, i, -1$ et $-i$ (ce sont les racines quatrième de l'unité)

$$Z=\frac{2z+1}{z-1}\Leftrightarrow(z-1)Z=2z+1\Leftrightarrow zZ-Z=2z+1\Leftrightarrow zZ-2z=Z+1\Leftrightarrow z(Z-2)=Z+1$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{Z+1}{Z-2}$$

Il y a 4 solutions

$$z_0=\frac{1+1}{1-2}=-2$$

$$z_1=\frac{i+1}{i-2}=\frac{(i+1)(-i-2)}{1^2+(-2)^2}=\frac{1-2i-i-2}{5}=-\frac{1}{5}-\frac{3}{5}i$$

$$z_2=\frac{-1+1}{-1-2}=0$$

$$z_3=\frac{-i+1}{-i-2}=\frac{(-i+1)(i-2)}{(-2)^2+(-1)^2}=\frac{1+2i+i-2}{5}=-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i$$

Allez à : Exercice 30 :

Correction exercice 31 :

Il faut d'abord écrire $\frac{1-i}{1-i\sqrt{3}}$ sous forme trigonométrique

$$\frac{1-i}{1-i\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\,\sqrt{2}\right)}{2\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=\sqrt{2}\frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{e^{-i\frac{\pi}{3}}}=\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)}=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$$

Première méthode

$$z^4=\left(\frac{1-i}{1-i\sqrt{3}}\right)^4\Leftrightarrow z^4=\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^4=4e^{i\frac{\pi}{3}}\Leftrightarrow\begin{cases}|z^4|=\left|4e^{i\frac{\pi}{3}}\right|\\ \arg(z^4)=\frac{\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}|z|^4=4\\ 4\arg(z)=\frac{\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|z|=\sqrt{2}\\ \arg(z)=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2},k\in\{0,1,2,3\}\end{cases}$$

Il y a quatre solutions

$$z_0=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}};z_1=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}\right)}=\sqrt{2}e^{\frac{7i\pi}{12}};z_2=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\pi\right)}=\sqrt{2}e^{\frac{13i\pi}{12}};z_3=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{3\pi}{2}\right)}=\sqrt{2}e^{\frac{19i\pi}{12}}$$

Deuxième méthode

On pose $a=\frac{1-i}{1-i\sqrt{3}}=\frac{(1-i)(1+i\sqrt{3})}{1^2+(-\sqrt{3})^2}=\frac{1+i\sqrt{3}-i+\sqrt{3}}{4}=\frac{1+\sqrt{3}}{4}+i\frac{\sqrt{3}-1}{4}$

$$z^4=\left(\frac{1-i}{1-i\sqrt{3}}\right)^4\Leftrightarrow z^4=a^4\Leftrightarrow\left(\frac{z}{a}\right)^4=1\Leftrightarrow\frac{z}{a}\in\{1,i,-1,-i\}\Leftrightarrow z\in\{a,ia,-a,-ia\}$$

$$ia=i\left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}+i\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)=-\frac{\sqrt{3}-1}{4}+i\frac{1+\sqrt{3}}{4}$$

$$-a=-\frac{1+\sqrt{3}}{4}-i\frac{\sqrt{3}-1}{4}$$

$$-ia=\frac{\sqrt{3}-1}{4}-i\frac{1+\sqrt{3}}{4}$$

Remarque :

En réunissant ces deux méthodes on pourrait en déduire les valeurs de $e^{i\left(\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{2}\right)}, k\in\{0,1,2,3\}$.

Allez à : Exercice 31 :

Correction exercice 32 :

1.

$$u^2=4\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=4e^{\frac{2i\pi}{3}}\Leftrightarrow u=\pm2e^{\frac{i\pi}{3}}=\pm2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\pm(1+i\sqrt{3})$$

2. On pose $u=\frac{z+i}{z-i}$

$$u=\frac{z+i}{z-i}\Leftrightarrow u(z-i)=z+i\Leftrightarrow uz-iu=z+i\Leftrightarrow uz-z=iu+i\Leftrightarrow z(u-1)=i(u+1)\Leftrightarrow z=i\frac{u+1}{u-1}$$

Il y a deux solutions

$$z_1=i\frac{1+i\sqrt{3}+1}{1+i\sqrt{3}-1}=i\frac{2+i\sqrt{3}}{i\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}+i$$

$$z_2=i\frac{-1-i\sqrt{3}+1}{-1-i\sqrt{3}-1}=i\frac{-i\sqrt{3}}{-2-i\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{2+i\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}(2-i\sqrt{3})}{2^2+(\sqrt{3})^2}=-\frac{2\sqrt{3}}{7}+\frac{3}{7}i$$

Allez à : Correction exercice 32 :

Correction exercice 33 :

On pose $u=\frac{z-1}{z-i}$ et on cherche les solutions de $u^3=-8$

$$u^3=-8\Leftrightarrow\begin{cases}|u^3|=|-8|\\ \arg(u^3)=\arg(-8)+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|u|^3=8\\ 3\arg(u)=\pi+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}|u|=2\\ \arg(u)=\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3},\ \ k\in\{0,1,2\}\end{cases}$$

Il y a 3 solutions

$$u_0=2e^{i\frac{\pi}{3}}=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1+i\sqrt{3};\ \ u_1=2e^{i\pi}=-2\ \ \text{et}\ \ u_2=2e^{i\frac{5\pi}{3}}=2\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1-i\sqrt{3}$$

$$u=\frac{z-1}{z-i}\Leftrightarrow u(z-i)=z-1\Leftrightarrow uz-iu=z-1\Leftrightarrow uz-z=-1+iu\Leftrightarrow z(u-1)=-1+iu\Leftrightarrow z=\frac{-1+iu}{u-1}$$

$$z_0=\frac{-1+iu_0}{u_0-1}=\frac{-1+i(1+i\sqrt{3})}{1+i\sqrt{3}-1}=\frac{-1-\sqrt{3}+i}{i\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}+i\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$z_1=\frac{-1+iu_1}{u_1-1}=\frac{-1-2i}{-3}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i$$

$$z_2=\frac{1+iu_2}{u_2-1}=\frac{-1+i(1-i\sqrt{3})}{1-i\sqrt{3}-1}=\frac{-1+\sqrt{3}+i}{-i\sqrt{3}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}+i\frac{-1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

Allez à : Exercice 33 :

Correction exercice 34 :

1. $X_k=e^{\frac{2ik\pi}{3}}$, avec $k\in\{0,1,2\}$.
$$X_0=1, X_1=e^{\frac{2i\pi}{3}}=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}=j, X_2=e^{\frac{4i\pi}{3}}=\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$$
$$=-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}=\bar{j}$$
2. $\bar{j}=X_2=e^{\frac{4i\pi}{3}}=\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^2=j^2$
3. $j^3=1$, puisque j est solution de $X^3=1$, donc $j\times j^2=1\Rightarrow j=\frac{1}{j^2}$.
4. $1+j+j^2=\frac{1-j^3}{1-j}=\frac{0}{1-j}=0$ car $j\neq 1$ et $j^3=1$.

Autre solution $1+j+j^2=1+\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)=0$

C'est moins bien car un résultat du cours est que la somme des racines n-ième de l'unité est nul, et, ici 1, j et j^2 sont les trois racines troisième de l'unité.

5. $\frac{1}{1+j}=\frac{1}{-j^2}=-j$, car $1+j=-j^2$ et $\frac{1}{j^2}=j$.
6. La division euclidienne de n par trois dit qu'il existe un unique couple $(q,r)\in\mathbb{N}\times\{0,1,2\}$ tel que $n=3q+r$, donc $j^n=j^{3q+r}=(j^3)^q j^r=1^q j^r=j^r$, autrement dit si $n\equiv 0\quad[3]$, $j^n=1$ si $n\equiv 1\quad[3]$, $j^n=j$ et si $j\equiv 2\quad[3]$ alors $j^n=j^2$.

Allez à : Exercice 34 :

Correction exercice 35 :

$$z^3=\frac{1}{4}(-1+i)\Leftrightarrow z^3=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\Leftrightarrow z^3=\frac{1}{2\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}|z^3|=\left|\frac{1}{(\sqrt{2})^3}e^{\frac{3i\pi}{4}}\right|\\ \arg(z^3)=\frac{3\pi}{4}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}|z|^3=\frac{1}{(\sqrt{2})^3}\\ 3\arg(z)=\frac{3\pi}{4}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}|z|=\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \arg(z)=\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}, k\in\{0,1,2\}\end{array}\right.$$

Il y a trois solutions $z_k=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}\right)},\ k\in\{0,1,2\}$

$$z_0=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}};\ z_1=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{11i\pi}{12}};\ z_2=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{19i\pi}{12}}$$

$$(z_k)^4=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}\right)}\right)^4=\frac{1}{4}e^{i\left(\pi+\frac{8k\pi}{3}\right)}=\frac{1}{4}e^{i\frac{(8k+3)\pi}{3}}$$

$$(z_0)^4=\frac{1}{4}e^{i\pi}=-\frac{1}{4}\in\mathbb{R};\ (z_1)^4=\frac{1}{4}e^{i\frac{11\pi}{3}}=\frac{1}{4}e^{-i\frac{\pi}{3}}\notin\mathbb{R};\ (z_2)^4=\frac{1}{4}e^{i\frac{19\pi}{3}}=\frac{1}{4}e^{i\frac{\pi}{3}}=\notin\mathbb{R}$$

Il n'y a que z_0 dont la puissance quatrième est dans $\mathbb{R}$.

Allez à : Exercice 35 :

Correction exercice 36 :

1. Les racines quatrième de l'unité sont $\{1, i, -1, -i\}$.
2. $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{4i\pi}{3}}$ donc

3.

$$X^4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow X^4 = e^{\frac{4i\pi}{3}} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} |X^4| = \left|e^{\frac{4i\pi}{3}}\right| \\ \arg(X^4) = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} |X|^4 = 1 \\ 4\arg(X) = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} |X| = 1 \\ \arg(X) = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \{0,1,2,3\} \end{array}\right. \Leftrightarrow X_k = e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}\right)}, k \in \{0,1,2,3\}$$

Il y a quatre solutions :

$$X_0 = e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$X_1 = e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right)} = e^{\frac{5i\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$$

$$X_2 = e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \pi\right)} = e^{\frac{4i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$X_3 = e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{2}\right)} = e^{\frac{11i\pi}{6}} = e^{-\frac{i\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$$

Autre solution

$-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} = j^2$. Donc $X^4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = j^2 \Leftrightarrow X^4 - j^2 = 0$. Or

$$X^4 - j^2 = (X^2 - j)(X^2 + j) = (X^2 - j^4)(X^2 - i^2 j^4) = (X - j^2)(X + j^2)(X - ij^2)(X + ij^2)$$

D'où les solutions :

$$X = j^2 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}, X = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, X = i\left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \text{ et } X = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

On pose $Y = X^4$, l'équation est alors du second degré.

$$Y^2 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Y - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

Le discriminant est

$$\Delta = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 4\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + 2 + 2i\sqrt{3} = \frac{3}{2} + \frac{3i\sqrt{3}}{2} = 3\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3e^{\frac{i\pi}{3}}$$

Donc les solutions de $\delta^2 = \Delta$ sont $\delta = \sqrt{3}e^{\frac{i\pi}{6}} = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\delta = -\sqrt{3}e^{\frac{i\pi}{6}} = -(\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$

L'équation du second degré a alors deux solutions :

$$Y_1 = \frac{-\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Et

$$Y_2 = \frac{-\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = 1$$

L'équation du huitième degré a pour solution :

$$\left\{1,\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},i,-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2},-1,-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2},-i,\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right\}$$

Autre solution

$$Y^2+\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Y-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=0\Leftrightarrow Y^2+jY+j^2=0\Leftrightarrow\left(\frac{Y}{j}\right)^2+\frac{Y}{j}+1=0$$

Les solutions de $T^2+T+1=0$ sont $T_1=j$ et $T_2=j^2$

Donc $\frac{Y_1}{j}=j\Leftrightarrow Y_1=j^2$ et $\frac{Y_2}{j}=j^2\Leftrightarrow Y_2=j^3=1$

Et on termine de la même façon.

Allez à : Exercice 36 :

Correction exercice 37 :

Là on a un problème parce qu'il n'est pas simple de mettre $11+2i$ sous forme trigonométrique, essayons tout de même :

$$|11+2i|=\sqrt{11^2+2^2}=\sqrt{121+4}=\sqrt{125}=\sqrt{5^3}=5\sqrt{5}=\left(\sqrt{5}\right)^3$$

Si on appelle θ un argument de $11+2i$, on a

$$\cos(\theta)=\frac{11}{5\sqrt{5}}\quad\text{et}\quad\sin(\theta)=\frac{2}{5\sqrt{5}}$$

Il ne s'agit pas d'un angle connu. Donc il va falloir être malin, on cherche $z=a+ib$ tel que

$$(a+ib)^3=11+2i\Leftrightarrow a^3+3a^2(ib)+3a(ib)^2+(ib)^3=11+2i$$

$$\Leftrightarrow a^3-3ab^2+i(3a^2b-b^3)=11+2i\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}a^3-3ab^2=11\\3a^2b-b^3=2\end{array}\right.$$

On sait aussi que

$$|(a+ib)^3|=|11+2i|\Leftrightarrow|a+ib|^3=\left(\sqrt{5}\right)^3\Leftrightarrow\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^3=\left(\sqrt{5}\right)^3\Leftrightarrow a^2+b^2=5$$

On remplace $a^2=5-b^2$ dans $3a^2b-b^3=2$

$$3(5-b^2)b-b^3=2\Leftrightarrow-4b^3+15b=2\Leftrightarrow 4b^3-15b+2=0$$

Il y a une racine presque évidente $b=-2$, si on ne la voit pas on peut aussi remplacer $b^2=5-a^2$ dans $a^3-3ab^2=11$

$$a^3-3a(5-a^2)=11\Leftrightarrow 4a^3-15a-11=0$$

Là c'est plus clair, $a_0=-1$ est solution donc on peut factoriser par $a+1$

$$4a^3-15a-11=(a+1)(4a^2-4a-11)$$

(C'est facile à factoriser)

Les racines de $4a^2-4a-11$ sont $a_1=\frac{1}{2}-\sqrt{3}$ et $a_2=\frac{1}{2}+\sqrt{3}$

Pour trouver les valeurs de b correspondantes on réutilise l'équation

$$3a^2b-b^3=2\Leftrightarrow b(3a^2-b^2)=2\Leftrightarrow b\left(3a^2-(5-a^2)\right)=2\Leftrightarrow b=\frac{2}{4a^2-5}$$

$$a=-1\Rightarrow b=\frac{2}{4(-1)^2-5}=-2$$

$$a=\frac{1}{2}-\sqrt{3}\Rightarrow b=\frac{2}{4\left(\frac{1}{2}-\sqrt{3}\right)^2-5}=\frac{2}{4\left(\frac{1}{4}-\sqrt{3}+4\right)-5}=\frac{2}{12-4\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3-\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\times\frac{3+\sqrt{3}}{9-3}$$
$$=\frac{3+\sqrt{3}}{12}$$

$$a=\frac{1}{2}+\sqrt{3}\Rightarrow b=\frac{2}{4\left(\frac{1}{2}+\sqrt{3}\right)^2-5}=\frac{2}{4\left(\frac{1}{4}+\sqrt{3}+4\right)-5}=\frac{2}{12+4\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3+\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\times\frac{3-\sqrt{3}}{9-3}$$
$$=\frac{3-\sqrt{3}}{12}$$

Pour bien faire, il faudrait faire la réciproque (parce que les équivalences ne sont pas claires), admis.

$11+2i$ admet trois racines cubiques

$$-1-2i;\ \frac{1}{2}-\sqrt{3}+i\frac{3+\sqrt{3}}{12};\ \frac{1}{2}+\sqrt{3}+i\frac{3-\sqrt{3}}{12}$$

Allez à : Exercice 37 :

Correction exercice 38 :

$$\frac{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}(1+i)}{2}}=\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{4}}}=e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)}=e^{i\frac{\pi}{12}}=\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

$$\frac{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}(1+i)}{2}}=\frac{2\left(1+i\sqrt{3}\right)}{\sqrt{2}(1+i)}=\sqrt{2}\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)(1-i)}{1^2+1^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-i+i\sqrt{3}+\sqrt{3}\right)$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)+i\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-1+\sqrt{3}\right)$$

On déduit de ces deux égalités que

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-1+\sqrt{3}\right)=\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$$

Puis que

$$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-1+\sqrt{3}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)}=\frac{\left(-1+\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)}{\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)}=\frac{-1+2\sqrt{3}-3}{1-3}=2-\sqrt{3}$$

Et enfin que

$$\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}=\frac{2+\sqrt{3}}{4-3}=2+\sqrt{3}$$

Allez à : Exercice 38 :

Correction exercice 39 :

On cherche les complexes z tels que $z^4=81$

$$z^4=81\Leftrightarrow z^4-9^2=0\Leftrightarrow (z^2-9)(z^2+9)=0\Leftrightarrow (z^2-3^2)(z^2-(3i)^2)=0$$
$$\Leftrightarrow (z-3)(z+3)(z-3i)(z+3i)=0$$

Il y a 4 racines quatrième de 81 : $3,-3,3i$ et -3i

La même méthode ne marche pas pour les racines quatrième de -81.

$$z^4=-81\Leftrightarrow\begin{cases}|z^4|=|-81|\\ \arg(z^4)=\arg(-81)+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|z|^4=81=3^4\\ 4\arg(z)=\pi+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}|z|=3\\ \arg(z)=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},k\in\{0,1,2,3\}\end{cases}$$

Il y a 4 racines quatrième de -81 : $z_k=3e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right)},\ k\in\{0,1,2,3\}$

$$z_0 = 3e^{i\frac{\pi}{4}} = 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3\sqrt{2}(1+i)$$

$$z_1 = 3e^{i\frac{3\pi}{4}} = 3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3\sqrt{2}(-1+i)$$

$$z_2 = 3e^{i\frac{5\pi}{4}} = 3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -3\sqrt{2}(1+i)$$

$$z_3 = 3e^{i\frac{7\pi}{4}} = 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3\sqrt{2}(1-i)$$

Allez à : Exercice 39 :

Correction exercice 40 :

1.

a. $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{2n}} = e^{\frac{ik\pi}{n}}, k \in \{0,1,\dots,2n-1\}$.

b.

$$z^n = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} |z^n| = 1 \\ \arg(z^n) = \arg(-1) + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^n = 1 \\ n\arg(z) = \pi + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ \arg(z) = \frac{\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n}, k \in \{0,1,\dots,n-1\} \end{cases}$$

Il y a n solutions $z_k = e^{\frac{i(\pi+2k\pi)}{n}}, k \in \{0,1,\dots,n-1\}$

Soit encore $z_k = e^{\frac{i\pi}{n}} e^{\frac{2ik\pi}{n}}$

2. Première solution $z^{2n} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} z^n = 1 \\ z^n = -1 \end{cases}$

La somme des racines $2n$-ième de l'unité (qui est nulle) est la somme des racines n-ième de l'unité (qui est nulle) plus la somme des complexes qui vérifient $z^n = -1$, donc la somme des complexes qui vérifient $z^n = -1$ est nulle.

Deuxième solution

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{i\pi}{n}} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = e^{\frac{i\pi}{n}} \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = e^{\frac{i\pi}{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^k = e^{\frac{i\pi}{n}} \frac{1-\left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^n}{1-e^{\frac{2i\pi}{n}}} = e^{\frac{i\pi}{n}} \frac{1-e^{\frac{2in\pi}{n}}}{1-e^{\frac{2i\pi}{n}}}$$

$$= e^{\frac{i\pi}{n}} \frac{1-e^{2i\pi}}{1-e^{\frac{2i\pi}{n}}} = 0$$

Car $e^{\frac{2i\pi}{n}} \neq 1$ pour $n \geq 2$.

Allez à : Exercice 40 :

Correction exercice 41 :

Il s'agit de la somme des termes d'une suite géométrique de raison z^2, $z^2 \neq 1$ car $z \neq -1$ d'après l'énoncé et $z \neq 1$ car 1 n'est pas une racine n-ième de -1.

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (z^2)^k = \frac{1-(z^2)^n}{1-z^2} = \frac{1-z^{2n}}{1-z^2}$$

Or $z^n = -1$ donc $(z^n)^2 = z^{2n} = 1$, par conséquent $S_n = 0$

Allez à : Exercice 41 :

Correction exercice 42 :

1. On pose $z_1^3 = z_2^3 = z_3^3$

$$z_2^3 = z_1^3 \Leftrightarrow \begin{cases} |z_2^3| = |z_1^3| \\ \arg(z_2^3) = \arg(z_1^3) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z_2|^3 = |z_1|^3 \\ 3\arg(z_2) = 3\arg(z_1) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z_2| = |z_1| \\ \arg(z_2) = \arg(z_1) + \frac{2k\pi}{3}, k \in \{0,1,2\} \end{cases}$$

Donc

$$z_2 = |z_1| e^{i\left(\arg(z_1) + \frac{2k\pi}{3}\right)} = |z_1| e^{i\arg(z_1)} e^{\frac{2ik\pi}{3}} = z_1 \left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^k = z_1 j^k$$

Les solutions sont $z_2 = z_1$, $z_2 = jz_1$ et $z_2 = j^2 z_1$

De même les solutions de $z_3^3 = z_1^3$ sont $z_3 = z_1$, $z_3 = jz_1$ et $z_3 = j^2 z_1$

2. $z^6 + (7-i)z^3 - 8 - 8i = 0$

On pose $Z = z^3$

$$z^6 + (7-i)z^3 - 8 - 8i = 0 \Leftrightarrow Z^2 + (7-i) - 8 - 8i = 0$$

Le discriminant est

$$\Delta = (7-i)^2 - 4(-8-8i) = 49 - 14i - 1 + 32 + 32i = 80 + 18i = 81 + 2 \times 9i - 1$$
$$= (9+i)^2$$

$$Z_1 = \frac{-(7-i) - (9+i)}{2} = \frac{-16}{2} = -8$$

$$Z_2 = \frac{-(7-i) + (9+i)}{2} = \frac{2+2i}{2} = 1 + i$$

On cherche alors les z tels que $z^3 = -8 = (2i)^3$ et les z tels que

$$z^3 = 1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} = \left(2^{\frac{1}{6}} e^{\frac{i\pi}{12}}\right)^3$$

D'après la première question

$$z^3 = (-2)^3 \Leftrightarrow z \in \{-2, -2j, -2j^2\}$$

$$z^3 = \left(2^{\frac{1}{6}} e^{\frac{i\pi}{12}}\right)^3 \Leftrightarrow z \in \left\{2^{\frac{1}{6}} e^{\frac{i\pi}{12}}, j2^{\frac{1}{6}} e^{\frac{i\pi}{12}}, j^2 2^{\frac{1}{6}} e^{\frac{i\pi}{12}}\right\}$$

On peut arranger ces deux dernières solutions

$$j2^{\frac{1}{6}} e^{\frac{i\pi}{12}} = 2^{\frac{1}{6}} e^{\frac{2i\pi}{3}} e^{\frac{i\pi}{12}} = 2^{\frac{1}{6}} e^{i\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}\right)} = 2^{\frac{1}{6}} e^{\frac{9i\pi}{12}} = 2^{\frac{1}{6}} e^{\frac{3i\pi}{2}} = -i2^{\frac{1}{6}}$$

$$j^2 2^{\frac{1}{6}} e^{\frac{i\pi}{12}} = 2^{\frac{1}{6}} e^{\frac{4i\pi}{3}} e^{\frac{i\pi}{12}} = 2^{\frac{1}{6}} e^{i\left(\frac{\pi}{12} + \frac{4\pi}{3}\right)} = 2^{\frac{1}{6}} e^{\frac{17i\pi}{12}}$$

Bref l'ensemble des solutions est

$$\left\{-2, -2j, -2j^2, 2^{\frac{1}{6}} e^{\frac{i\pi}{12}}, -i2^{\frac{1}{6}}, 2^{\frac{1}{6}} e^{\frac{17i\pi}{12}}\right\}$$

Allez à : Exercice 42 :

Correction exercice 43 :

On ne peut pas trouver la forme trigonométrique de $-7 - 24i$.

$$-7 - 24i = 9 - 2 \times 12i - 16 = (3-4i)^2 = (4 - 4i - 1)^2 = ((2-i)^2)^2 = (2-i)^4$$

On cherche les z qui vérifient $z^4 = (2-i)^4$

$$z^4 = (2-i)^4 \Leftrightarrow z^4 - (2-i)^4 = 0 \Leftrightarrow (z^2 - (2-i)^2)(z^2 + (2-i)^2) = 0$$
$$\Leftrightarrow (z^2 - (2-i)^2)(z^2 + i^2(2-i)^2) = 0 \Leftrightarrow (z^2 - (2-i)^2)(z^2 - (2i+1)^2) = 0$$
$$\Leftrightarrow \big(z - (2-i)\big)\big(z + (2-i)\big)\big(z - (2i+1)\big)\big(z + (2i+1)\big) = 0$$

L'ensemble des solutions est

$$\{2 - i, -2 + i, 1 + 2i, -1 - 2i\}$$

Allez à : Exercice 43 :

Correction exercice 44 :

Il faut mettre $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$ sous sa forme trigonométrique.

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}=\frac{2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{-i\frac{\pi}{3}}}=e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

Autre méthode

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}=\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)^2}{1^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=\frac{1+2i\sqrt{3}-3}{4}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

$$z^6=\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\Leftrightarrow z^6=e^{\frac{2i\pi}{3}}\Leftrightarrow\begin{cases}|z^6|=1\\ \arg(z^6)=\frac{2\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|z|^6=1\\ 6\arg(z)=\frac{2\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}|z|=1\\ \arg(z)=\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3},k\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}\end{cases}$$

Les solutions sont

$$z_k=e^{i\left(\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}\right)},k\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$$

$$z^4=\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{e^{i\frac{\pi}{3}}}=2^{-\frac{1}{2}}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)}=2^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{7i\pi}{12}}$$

$$z^4=2^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{7i\pi}{12}}\Leftrightarrow\begin{cases}|z^4|=2^{-\frac{1}{2}}\\ \arg(z^4)=-\frac{7\pi}{12}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|z|^4=2^{-\frac{1}{2}}\\ 4\arg(z)=-\frac{7\pi}{12}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}|z|=\left(2^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}}=2^{-\frac{1}{8}}\\ \arg(z)=-\frac{7\pi}{48}+\frac{k\pi}{2},k\in\{0,1,2,3\}\end{cases}$$

Il y a 4 solutions

$$z_k=2^{-\frac{1}{8}}e^{i\left(-\frac{7\pi}{48}+\frac{k\pi}{2}\right)},k\in\{0,1,2,3\}$$

$$z^6+27=0\Leftrightarrow z^6=-27\Leftrightarrow\begin{cases}|z^6|=|-27|\\ \arg(z^6)=\arg(-27)+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|z|^6=27=3^3\\ 6\arg(z)=\pi+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}|z|=(3^3)^{\frac{1}{6}}=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}\\ \arg(z)=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3},k\in\{0,1,2,3,4,5\}\end{cases}$$

Il y a 6 solutions

$$z_k=\sqrt{3}e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}\right)},k\in\{0,1,2,3,4,5\}$$

$$z_0=\sqrt{3}e^{\frac{i\pi}{6}}=\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_1=\sqrt{3}e^{\frac{i\pi}{2}}=i\sqrt{3}$$

$$z_2=\sqrt{3}e^{\frac{5i\pi}{6}}=\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_3=\sqrt{3}e^{\frac{7i\pi}{6}}=\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_4=\sqrt{3}e^{\frac{3i\pi}{2}}=-i\sqrt{3}$$

$$z_5=\sqrt{3}e^{\frac{11i\pi}{6}}=\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$27(z-1)^6+(z+1)^6=0\Leftrightarrow (z+1)^6=-27(z-1)^6\Leftrightarrow \frac{(z+1)^6}{(z-1)^6}=-27\Leftrightarrow \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^6=-27$$

On pose $Z=\frac{z+1}{z-1}$

$$Z^6=-27\Leftrightarrow \begin{cases}|Z^6|=|-27|\\ \arg(Z^6)=\arg(-27)+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|Z|^6=27=3^3\\ 6\arg(Z)=\pi+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}|Z|=(3^3)^{\frac{1}{6}}=\sqrt{3}\\ \arg(Z)=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3},k\in\{0,1,2,3,4,5\}\end{cases}$$

Il y a 6 solutions

$$Z_k=\sqrt{3}e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}\right)},k\in\{0,1,2,3,4,5\}$$

Il faut alors trouver z en fonction de Z,

$$Z=\frac{z+1}{z-1}\Leftrightarrow Z(z-1)=z+1\Leftrightarrow Zz-Z=z+1\Leftrightarrow Zz-z=Z+1\Leftrightarrow z(Z-1)=Z+1\Leftrightarrow z=\frac{Z+1}{Z-1}$$

Il y a 6 solutions

$$z_k=\frac{Z_k+1}{Z_k-1}=\frac{(Z_k+1)(\overline{Z_k}-1)}{(Z_k-1)(\overline{Z_k}-1)}=\frac{Z_k\overline{Z_k}-Z_k+\overline{Z_k}-1}{Z_k\overline{Z_k}-Z_k-\overline{Z_k}+1}=\frac{|Z_k|^2-(Z_k-\overline{Z_k})-1}{|Z_k|^2-(Z_k+\overline{Z_k})+1}$$
$$=\frac{|Z_k|^2-2i\mathcal{Im}(Z_k)-1}{|Z_k|^2-2\mathcal{Re}(Z_k)+1}=\frac{3-2i\mathcal{Im}(Z_k)-1}{3-2\mathcal{Re}(Z_k)+1}=\frac{2-2i\mathcal{Im}(Z_k)}{4-2\mathcal{Re}(Z_k)}=\frac{1-i\mathcal{Im}(Z_k)}{2-\mathcal{Re}(Z_k)}$$

$$Z_0=\sqrt{3}e^{\frac{i\pi}{6}}=\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow z_0=\frac{1-i\frac{\sqrt{3}}{2}}{2-\frac{3}{2}}=2-i\sqrt{3}$$

$$Z_1=\sqrt{3}e^{\frac{i\pi}{2}}=i\sqrt{3}\Rightarrow z_1=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$Z_2=\sqrt{3}e^{\frac{5i\pi}{6}}=-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow z_2=\frac{1-i\frac{\sqrt{3}}{2}}{2+\frac{3}{2}}=\frac{2}{7}-i\frac{\sqrt{3}}{7}$$

$$Z_3=\sqrt{3}e^{\frac{7i\pi}{6}}=-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow z_3=\frac{1+i\frac{\sqrt{3}}{2}}{2+\frac{3}{2}}=\frac{2}{7}+i\frac{\sqrt{3}}{7}$$

$$Z_4=\sqrt{3}e^{\frac{3i\pi}{2}}=-i\sqrt{3}\Rightarrow z_4=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$Z_5=\sqrt{3}e^{\frac{11i\pi}{6}}=\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow z_0=\frac{1+i\frac{\sqrt{3}}{2}}{2-\frac{3}{2}}=2+i\sqrt{3}$$

Allez à : Exercice 44 :

Correction exercice 45 :

1. Ce sont les racines cinquièmes de l'unité, il vaut mieux connaitre la formule $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{5}}$, $k \in \{0,1,2,3,4\}$
   Sinon il faut absolument retrouver la formule très rapidement
$$z^5 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} |z^5| = |1| \\ \arg(z^5) = \arg(1) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^5 = 1 \\ 5\arg(z) = 0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ \arg(z) = \dfrac{2k\pi}{5}, k \in \{0,1,2,3,4\} \end{cases}$$
   D'où $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{5}}$, $k \in \{0,1,2,3,4\}$, c'est-à-dire
$$z_0 = 1; z_1 = e^{\frac{2i\pi}{5}}; z_2 = e^{\frac{4i\pi}{5}}; z_3 = e^{\frac{6i\pi}{5}} = e^{-\frac{4i\pi}{5}} = \overline{z_3};\ z_4 = e^{\frac{8i\pi}{5}} = e^{-\frac{2i\pi}{5}} = \overline{z_1}$$
2.
$$z^5 = 1 - i \Leftrightarrow z^5 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Leftrightarrow z^5 = 2^{\frac{1}{2}}e^{i\frac{\pi}{4}} \Leftrightarrow \begin{cases} |z^5| = 2^{\frac{1}{2}} \\ \arg(z^5) = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z|^5 = 2^{\frac{1}{2}} \\ 5\arg(z) = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{1}{10}} \\ \arg(z) = \dfrac{\pi}{20} + \dfrac{2k\pi}{5}, k \in \{0,1,2,3,4\} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow z_k = 2^{\frac{1}{10}}e^{i\left(\frac{\pi}{20}+\frac{2k\pi}{5}\right)}, \qquad k \in \{0,1,2,3,4\}$$
   Il y a cinq solutions
$$z_0 = 2^{\frac{1}{10}}e^{i\frac{\pi}{20}}; z_1 = 2^{\frac{1}{10}}e^{i\frac{9\pi}{20}};\ z_2 = 2^{\frac{1}{10}}e^{i\frac{17\pi}{20}};\ z_3 = 2^{\frac{1}{10}}e^{i\frac{25\pi}{20}} = 2^{\frac{1}{10}}e^{i\frac{5\pi}{4}} = -2^{\frac{1}{10}} \times \sqrt{2}(1+i)$$
$$= -2^{\frac{1}{10}+\frac{1}{2}}(1+i) = -2^{\frac{3}{5}}(1+i);\ z_4 = 2^{\frac{1}{10}}e^{i\frac{32\pi}{20}} = 2^{\frac{1}{10}}e^{i\frac{8\pi}{5}}$$
3.
$$z^3 = 2 - 2i \Leftrightarrow z^3 = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Leftrightarrow z^3 = \left(\sqrt{2}\right)^3 e^{-i\frac{\pi}{4}} \Leftrightarrow \begin{cases} |z^3| = \left(\sqrt{2}\right)^3 \\ \arg(z^3) = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z|^3 = \left(\sqrt{2}\right)^3 \\ 3\arg(z) = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt{2} \\ \arg(z) = -\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{2k\pi}{3}, k \in \{0,1,2\} \end{cases}$$
   Il y a trois solutions $z_k = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right)}, k \in \{0,1,2\}$
$$z_0 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}; z_1 = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}\right)} = \sqrt{2}e^{\frac{7i\pi}{12}}; z_2 = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{4\pi}{3}\right)} = \sqrt{2}e^{\frac{15i\pi}{12}} = \sqrt{2}e^{\frac{5i\pi}{4}} = -\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$
4.
$$z^5 = \overline{z} \Leftrightarrow \begin{cases} |z^5| = |\overline{z}| \\ \arg(z^5) = \arg(\overline{z}) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^5 = |z| \\ 5\arg(z) = -\arg(z) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (|z|^4 - 1)|z| = 0 \\ 6\arg(z) = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^4 - 1 = 0 \text{ ou } |z| = 0 \\ \arg(z) = \dfrac{k\pi}{3}, k \in \{0,1,2,3,4,5\} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \{z = 0 \text{ ou} \begin{cases} |z| = 1 \\ \arg(z) = \dfrac{k\pi}{3}, k \in \{0,1,2,3,4,5\} \end{cases}$$
   Il y a 6 solutions : $z = 0$ et $z_k = e^{i\frac{k\pi}{3}}, k \in \{0,1,2,3,4,5\}$
$$z = 0;\ z_0 = 1;\ z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2};\ z_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2};$$
$$z_3 = e^{i\pi} = -1;\ z_4 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2};\ z_5 = e^{i\frac{5\pi}{3}} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Allez à : Exercice 45 :

Correction exercice 46 :

1. On cherche les complexes tels que

$$z^n=-i\Leftrightarrow\begin{cases}|z^n|=|-i|\\ \arg(z^n)=\arg(-i)+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|z|^n=1\\ n\arg(z)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}|z|=1\\ \arg(z)=-\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{n},k\in\{0,1,\dots,n-1\}\end{cases}$$

Les solutions sont les

$$z_k=e^{i\left(-\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{n}\right)},k\in\{0,1,\dots,n-1\}$$

On cherche les complexes tels que

$$z^n=1+i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\Leftrightarrow\begin{cases}|z^n|=\sqrt{2}\\ \arg(z^n)=\frac{\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}|z|^n=\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}\\ n\arg(z)=\frac{\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|z|=2^{\frac{1}{2n}}\\ \arg(z)=\frac{\pi}{4n}+\frac{2k\pi}{n},k\in\{0,1,\dots,n-1\}\end{cases}$$

Les solutions sont les

$$z_k=2^{\frac{1}{2n}}e^{i\left(\frac{\pi}{4n}+\frac{2k\pi}{n}\right)},k\in\{0,1,\dots,n-1\}$$

2. $z^2-z+1-i=0$

Le discriminant vaut

$$\Delta=(-1)^2-4(1-i)=-3-4i=1+4i-4=(1+2i)^2$$

Il y a deux solutions

$$z_1=\frac{1-(1+2i)}{2}=-i$$
$$z_2=\frac{1+1+2i}{2}=1+i$$

3. $z^{2n}-z^n+1-i=0$, on pose $Z=z^n$

$$z^{2n}-z^n+1-i=0\Leftrightarrow Z^2-Z+1-i=0\Leftrightarrow\begin{cases}Z=-i\\ \text{ou}\\ Z=1+i\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z^n=-i\\ \text{ou}\\ z^n=1+i\end{cases}$$

L'ensemble des solutions est

$$\left\{e^{i\left(-\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{n}\right)},k\in\{0,1,\dots,n-1\},2^{\frac{1}{2n}}e^{i\left(\frac{\pi}{4n}+\frac{2k'\pi}{n}\right)},k'\in\{0,1,\dots,n-1\}\right\}$$

Allez à : Exercice 46 :

Correction exercice 47 :

1.

$$(z-1)(1+z+z^2+\dots+z^{n-1})=z+z^2+\dots+z^{n-1}+z^n-(1+z+z^2+\dots+z^{n-1})$$
$$=z^n-1$$

Donc

$$1+z+z^2+\dots+z^{n-1}=\frac{z^n-1}{z-1}$$

Il s'agit de la formule connue donnant la somme des termes d'une suite géométrique.

2.

$$e^{ix}-1=e^{\frac{ix}{2}}\left(e^{\frac{ix}{2}}-e^{-\frac{ix}{2}}\right)=e^{\frac{ix}{2}}\times 2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)=2ie^{\frac{ix}{2}}\sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

3.

$$Z_n=1+e^{ix}+e^{2ix}+\cdots+e^{(n-1)ix}=1+e^{ix}+\left(e^{ix}\right)^2+\cdots+\left(e^{ix}\right)^n=\frac{\left(e^{ix}\right)^n-1}{e^{ix}-1}=\frac{e^{inx}-1}{e^{ix}-1}$$

$$=\frac{e^{\frac{inx}{2}}\left(e^{\frac{inx}{2}}-e^{-\frac{inx}{2}}\right)}{e^{\frac{ix}{2}}\left(e^{\frac{ix}{2}}-e^{-\frac{ix}{2}}\right)}=e^{\frac{inx}{2}-\frac{ix}{2}}\frac{2i\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)}=e^{\frac{(n-1)ix}{2}}\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$=\big(\cos((n-1)x)+i\sin((n-1)x)\big)\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$=\cos((n-1)x)\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}+i\sin((n-1)x)\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Comme

$$X_n+iY_n=1+e^{ix}+e^{2ix}+\cdots+e^{(n-1)ix}$$

On a

$$1+\cos(x)+\cos(2x)+\cdots+\cos((n-1)x)=\cos((n-1)x)\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Et

$$\sin(x)+\sin(2x)+\cdots+\sin((n-1)x)=\sin((n-1)x)\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Allez à : Exercice 47 :

Correction exercice 48 :

1. D’après le cours, il existe $k\in\{1,2,3,4\}$ tel que $\alpha=e^{\frac{2ik\pi}{5}}$.
2. Comme $\alpha\neq 1$

$$1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4=\frac{1-\alpha^5}{1-\alpha}=\frac{1-1}{1-\alpha}=0$$

3. $f'(x)=1+2x+3x^2+4x^3+5x^4$ d’une part et pour tout $x\neq 1$

$$f(x)=\frac{1-x^6}{1-x}$$

On a

$$f'(x)=\frac{-6x^5(1-x)-(1-x^6)(-1)}{(1-x)^2}=\frac{-6x^5+6x^6+1-x^6}{(1-x)^2}=\frac{-6x^5+5x^6+1}{(1-x)^2}$$

On obtient donc l’égalité

$$1+2x+3x^2+4x^3+5x^4=\frac{-6x^5+5x^6+1}{(1-x)^2}$$

On prend $x=\alpha$

$$1+2\alpha+3\alpha^2+4\alpha^3+5\alpha^4=\frac{-6\alpha^5+5\alpha^6+1}{(1-\alpha)^2}=\frac{-6+5\alpha+1}{(1-\alpha)^2}$$

Car $\alpha^5=1$ et $\alpha^6=\alpha^5\times\alpha=\alpha$, par conséquent

$$1+2\alpha+3\alpha^2+4\alpha^3+5\alpha^4=\frac{-5+5\alpha}{(1-\alpha)^2}=-5\frac{1-\alpha}{(1-\alpha)^2}=-\frac{5}{1-\alpha}=-5\frac{1-e^{-\frac{2ik\pi}{5}}}{\left(1-e^{\frac{2ik\pi}{5}}\right)\left(1-e^{-\frac{2ik\pi}{5}}\right)}$$
$$=-5\frac{1-\cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi}{5}\right)}{1-e^{\frac{2ik\pi}{5}}-e^{-\frac{2ik\pi}{5}}+1}=-5\frac{1-\cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi}{5}\right)}{2-2\cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right)}$$
$$=-\frac{5}{2}-i\frac{5\sin\left(\frac{2k\pi}{5}\right)}{2\left(1-\cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right)\right)}=-\frac{5}{2}-i\frac{10\sin\left(\frac{k\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{k\pi}{5}\right)}{4\cos^2\left(\frac{k\pi}{5}\right)}==-\frac{5}{2}-\frac{5}{2}i\tan\left(\frac{k\pi}{5}\right)$$

Allez à : Exercice 48 :

Correction exercice 49 :

Soit f la fonction définie par

$$f(x)=1+x+x^2+\cdots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$
$$f'(x)=1+2x+\cdots+nx^{n-1}=\frac{(-(n+1)x^n)(1-x)-(1-x^{n+1})(-1)}{(1-x)^2}$$
$$=\frac{-(n+1)x^n+(n+1)x^{n+1}+1-x^{n+1}}{(1-x)^2}=\frac{-(n+1)x^n+nx^{n+1}+1}{(1-x)^2}$$

On prend cette fonction en ϵ, et on rappelle que $\epsilon^n=1$ (et que donc $\epsilon^{n+1}=\epsilon$)

$$1+2\epsilon+3\epsilon^2+\cdots+n\epsilon^{n-1}=\frac{-(n+1)\epsilon^n+n\epsilon^{n+1}+1}{(1-\epsilon)^2}=\frac{-(n+1)+n\epsilon+1}{(1-\epsilon)^2}=\frac{-n+n\epsilon}{(1-\epsilon)^2}$$
$$=-n\frac{1-\epsilon}{(1-\epsilon)^2}=-\frac{n}{1-\epsilon}$$

Ce résultat est relativement satisfaisant mais on va tout de même l'écrire sous forme algébrique.

Comme $|\epsilon|=1$

$$|\epsilon|=1\Leftrightarrow|\epsilon|^2=1\Leftrightarrow\epsilon\overline{\epsilon}=1\Leftrightarrow\overline{\epsilon}=\frac{1}{\epsilon}=\frac{\epsilon^{n-1}}{\epsilon\epsilon^{n-1}}=\frac{\epsilon^{n-1}}{\epsilon^n}=\epsilon^{n-1}$$

Donc

$$\frac{1}{1-\epsilon}=\frac{1-\overline{\epsilon}}{(1-\epsilon)(1-\overline{\epsilon})}=\frac{1-\epsilon^{n-1}}{1-(\epsilon+\overline{\epsilon})+|\epsilon|^2}=\frac{1-\epsilon^{n-1}}{2-2\mathcal{R}e(\epsilon)}$$
$$1+2\epsilon+3\epsilon^2+\cdots+n\epsilon^{n-1}=-n\times\frac{1-\epsilon^{n-1}}{2-2\mathcal{R}e(\epsilon)}$$

Allez à : Exercice 49 :

Correction exercice 50 :

Pour $z\neq1$

$$(z+1)^n=(z-1)^n\Leftrightarrow\frac{(z+1)^n}{(z-1)^n}=1\Leftrightarrow\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n=1$$

On pose $Z=\frac{z+1}{z-1}$,

Par conséquent Z est une racine n-ième de l'unité et donc $Z=e^{\frac{2ik\pi}{n}},k\in\{0,1,\dots,n-1\}$

$$\frac{z+1}{z-1}=Z\Leftrightarrow z+1=Z(z-1)\Leftrightarrow z+1=Zz-Z\Leftrightarrow z(1-Z)=-(1+Z)\Leftrightarrow z=\frac{Z+1}{Z-1}$$

Ces équivalences sont vraies si $z\neq1$ et $Z\neq1$. Il faut faire un cas particulier si $k=0$ car alors $Z=1$.

$$\frac{z+1}{z-1}=e^{\frac{2ik\pi}{n}},k\in\{1,\dots,n-1\}$$

$$z=\frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}+1}{e^{\frac{2ik\pi}{n}}-1}=\frac{e^{\frac{ik\pi}{n}}\left(e^{\frac{ik\pi}{n}}+e^{-\frac{ik\pi}{n}}\right)}{e^{\frac{ik\pi}{n}}\left(e^{\frac{ik\pi}{n}}-e^{-\frac{ik\pi}{n}}\right)}=\frac{2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}=-i\operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

Si $k=0$, $\frac{z+1}{z-1}=1$ n'a pas de solution.

On trouve $n-1$ solutions, ce qui n'est pas une contradiction car

$$(z+1)^n=(z-1)^n\Leftrightarrow(z+1)^n-(z-1)^n=0$$

Est une équation polynômiale de degré $n-1$ (puisque les z^n se simplifient), est admet donc au plus $n-1$ solutions.

Allez à : Exercice 50 :

Correction exercice 51 :

$$z^n=\overline{z}\Leftrightarrow\begin{cases}|z^n|=|\overline{z}|\\ \arg(z^n)=\arg(\overline{z})+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|z|^n=|z|\\ n\arg(z)=-\arg(z)+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}|z|^{n-1}=1\quad\text{ou}\quad|z|=0\\ n\arg(z)=-\arg(z)+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow z=0\text{ ou }\begin{cases}|z|=1\\ (n+1)\arg(z)=2k\pi,k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow z=0\text{ ou }\begin{cases}|z|=1\\ \arg(z)=\frac{2k\pi}{n+1},k\in\{0,1,\dots,n\}\end{cases}$$

Les solutions sont $z=0$ et les $z_k=e^{\frac{2ik\pi}{n+1}},k\in\{0,1,\dots,n\}$.

Allez à : Exercice 51 :

Correction exercice 52 :

On rappelle que

$$1+\beta+\beta^2+\beta^3+\beta^4+\beta^5+\beta^6=0$$

$$\frac{\beta}{1+\beta^2}+\frac{\beta^2}{1+\beta^4}+\frac{\beta^3}{1+\beta^6}=\frac{\beta(1+\beta^4)(1+\beta^6)+\beta^2(1+\beta^2)(1+\beta^6)+\beta^3(1+\beta^2)(1+\beta^4)}{(1+\beta^2)(1+\beta^4)(1+\beta^6)}$$

$$=\frac{\beta^{11}+\beta^7+\beta^5+\beta+\beta^{10}+\beta^8+\beta^4+\beta^2+\beta^9+\beta^7+\beta^5+\beta^3}{\beta^{12}+\beta^{10}+\beta^8+2\beta^6+\beta^4+\beta^2+1}$$

$$=\frac{\beta^4+1+\beta^5+\beta+\beta^3+\beta+\beta^4+\beta^2+\beta^2+1+\beta^5+\beta^3}{\beta^5+\beta^3+\beta+2\beta^6+\beta^4+\beta^2+1}$$

$$=\frac{2(1+\beta+\beta^2+\beta^3+\beta^4+\beta^5)}{\beta^6}=-\frac{2\beta^6}{\beta^6}=-2$$

Cette solution n'est pas élégante du tout, il doit y avoir plus malin.

Allez à : Exercice 52 :

Correction exercice 53 :

$$A(X)=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3=\frac{e^{3ix}+3e^{2ix}e^{-ix}+3e^{ix}e^{-2ix}+e^{-3ix}}{8}$$

$$=\frac{e^{3ix}+e^{-3ix}+3\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)}{8}=\frac{2\cos(3x)+3\times2\cos(x)}{8}$$

$$=\frac{1}{4}\cos(3x)+\frac{3}{4}\cos(x)$$

$$B(x)=\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3=\frac{e^{3ix}-3e^{2ix}e^{-ix}+3e^{ix}e^{-2ix}-e^{-3ix}}{-8i}$$
$$=\frac{e^{3ix}-e^{-3ix}-3\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)}{-8i}=\frac{2i\sin(3x)-3\times 2i\sin(x)}{-8i}$$
$$=-\frac{1}{4}\sin(3x)+\frac{3}{4}\sin(x)$$
$$C(X)=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4=\frac{e^{4ix}+4e^{3ix}e^{-ix}+6e^{2ix}e^{-2ix}+4e^{ix}e^{-3ix}+e^{-4ix}}{16}$$
$$=\frac{e^{4ix}+e^{-4ix}+4\left(e^{2ix}+4e^{-2ix}\right)+6}{16}=\frac{2\cos(4x)+4\times 2\cos(2x)+6}{16}$$
$$=\frac{1}{8}\cos(4x)+\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{3}{8}$$
$$D(X)=\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^4=\frac{e^{4ix}-4e^{3ix}e^{-ix}+6e^{2ix}e^{-2ix}-4e^{ix}e^{-3ix}+e^{-4ix}}{16}$$
$$=\frac{e^{4ix}+e^{-4ix}-4\left(e^{2ix}+4e^{-2ix}\right)+6}{16}=\frac{2\cos(4x)-4\times 2\cos(2x)+6}{16}$$
$$=\frac{1}{8}\cos(4x)-\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{3}{8}$$
$$E(x)=\cos^2(x)\sin^2(x)=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2$$
$$=\frac{e^{2ix}+2e^{ix}e^{-ix}+e^{-2ix}}{4}\times\frac{e^{2ix}-2e^{ix}e^{-ix}+e^{-2ix}}{-4}=\frac{\left(e^{2ix}+2+e^{-2ix}\right)\left(e^{2ix}-2+e^{-2ix}\right)}{-16}$$
$$=\frac{e^{2ix}e^{2ix}-2e^{2ix}+e^{2ix}e^{-2ix}+2e^{2ix}-4+2e^{-2ix}+e^{-2ix}e^{2ix}-2e^{-2ix}+e^{-2ix}e^{-2ix}}{-16}$$
$$=\frac{e^{4ix}-2e^{2ix}+1+2e^{2ix}-4+2e^{-2ix}+1-2e^{-2ix}+e^{-4ix}}{-16}=\frac{e^{4ix}+e^{-4ix}-2}{-16}$$
$$=\frac{2\cos(4x)-2}{-16}=-\frac{1}{8}\cos(4x)+\frac{1}{8}$$

Autre méthode en utilisant les formules trigonométriques

$$E(x)=\cos^2(x)\sin^2(x)=(\cos(x)\sin(x))^2=\left(\frac{1}{2}\sin(2x)\right)^2=\frac{1}{4}\sin^2(2x)=\frac{1}{4}\times\frac{1-\cos(4x)}{2}$$
$$=-\frac{1}{8}\cos(4x)+\frac{1}{8}$$

En utilisant les formules

$$\sin(2a)=2\sin(a)\cos(a)\,,a=x$$
$$\cos(2a)=1-\sin^2(a)\Leftrightarrow\sin^2(a)=\frac{1-\cos(2a)}{2},a=2x$$
$$F(x)=\cos(x)\sin^3(x)=\cos(x)\,B(x)=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\times\frac{e^{3ix}-3e^{ix}+3e^{-ix}-e^{-3ix}}{-8i}$$
$$=\frac{e^{4ix}-3e^{2ix}+3-e^{-2ix}+e^{2ix}-3+3e^{-2ix}-e^{-4ix}}{-16i}$$
$$=\frac{e^{4ix}-e^{-4ix}-2\left(e^{2ix}-e^{-2ix}\right)}{-16i}=\frac{2i\sin(4x)-2\times 2i\sin(2x)}{-16i}$$
$$=-\frac{1}{8}\sin(4x)+\frac{1}{4}\sin(2x)$$

$$G(x)=\cos^3(x)\sin(x)=A(x)\sin(x)=\frac{e^{3ix}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-3ix}}{8}\times\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$
$$=\frac{e^{4ix}-e^{2ix}+3e^{2ix}-3+3-3e^{-2ix}+e^{-2ix}-e^{-4ix}}{16i}$$
$$=\frac{e^{4ix}-e^{-4ix}+2\left(e^{2ix}-e^{-2ix}\right)}{16i}=\frac{2i\sin(4x)+2\times 2i\sin(2x)}{16i}$$
$$=\frac{1}{8}\sin(4x)+\frac{1}{4}\sin(2x)$$

On peut toujours faire « comme d'habitude » améliorons un peu les choses

$$H(x)=\cos^3(x)\sin^2(x)=\cos(x)\left(\cos(x)\sin(x)\right)^2=\cos(x)\left(\frac{1}{2}\sin(2x)\right)^2=\frac{1}{4}\cos(x)\sin^2(2x)$$
$$=\frac{1}{4}\cos(x)\left(\frac{1-\cos(4x)}{2}\right)=\frac{1}{8}\cos(x)\left(1-\cos(4x)\right)=\frac{1}{8}\cos(x)-\frac{1}{8}\cos(x)\cos(4x)$$

Alors on utilise des formules souvent inconnues des étudiants (et c'est fort dommage) ou on fait comme d'habitude

$$H(x)=\frac{1}{8}\cos(x)-\frac{1}{8}\cos(x)\cos(4x)=\frac{1}{8}\cos(x)-\frac{1}{8}\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)\left(\frac{e^{4ix}+e^{-4ix}}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{8}\cos(x)-\frac{1}{32}\left(e^{5ix}+e^{-3ix}+e^{3ix}+e^{-5ix}\right)$$
$$=\frac{1}{8}\cos(x)-\frac{1}{32}\left(e^{5ix}+e^{-5ix}+e^{-3ix}+e^{3ix}\right)$$
$$=\frac{1}{8}\cos(x)-\frac{1}{32}(2\cos(5x)+2\cos(3x)=\frac{1}{8}\cos(x)-\frac{1}{16}\cos(5x)-\frac{1}{16}\cos(3x)$$

$$I(x)=\cos^2(x)\sin^3(x)$$

Allez, encore une autre technique !

On pose $t=\frac{\pi}{2}-x\Leftrightarrow x=t-\frac{\pi}{2}$ ainsi $\cos(x)=\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)=\sin(t)$ et $\sin(x)=\sin\left(t-\frac{\pi}{2}\right)=\cos(t)$

Donc

$$I(x)=\sin^2(t)\cos^3(t)=\frac{1}{8}\cos(t)-\frac{1}{16}\cos(5t)-\frac{1}{16}\cos(3t)$$
$$=\frac{1}{8}\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{16}\cos\left(5\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right)-\frac{1}{16}\cos\left(3\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$
$$=\frac{1}{8}\sin(x)-\frac{1}{16}\cos\left(5x-\frac{5\pi}{2}\right)-\frac{1}{16}\cos\left(3x-\frac{3\pi}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{8}\sin(x)-\frac{1}{16}\cos\left(5x-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{16}\cos\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{8}\sin(x)-\frac{1}{16}\sin(5x)+\frac{1}{16}\sin(3x)$$

$$J(x)=\cos(x)\sin^4(x)=\cos(x)D(x)=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\times\frac{e^{4ix}+e^{-4ix}-4e^{2ix}-4e^{-2ix}+6}{16}$$
$$=\frac{1}{32}\left(e^{5ix}+e^{-3ix}-4e^{3ix}-4e^{-ix}+6e^{ix}+e^{3ix}+e^{-5ix}-4e^{ix}-4e^{-3ix}+6e^{-ix}\right)$$
$$=\frac{1}{32}\left(e^{5ix}+e^{-5ix}-3\left(e^{3ix}+e^{-3ix}\right)+2\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\right)$$
$$=\frac{1}{32}(2\cos(5x)-3\times\cos(3x)+2\times 2\cos(x))$$
$$=\frac{1}{16}\cos(5x)-\frac{3}{32}\cos(3x)+\frac{1}{8}\cos(x)$$

Allez à : Exercice 53 :

Correction exercice 54 :

1. $\frac{1-z}{1-iz}$ est réel si et seulement si $\frac{1-z}{1-iz}=\overline{\left(\frac{1-z}{1-iz}\right)}=\frac{1-\overline{z}}{1+i\overline{z}}$

$$\frac{1-z}{1-iz}=\frac{1-\overline{z}}{1+i\overline{z}}\Leftrightarrow (1-z)(1+i\overline{z})=(1-\overline{z})(1-iz)\Leftrightarrow 1+i\overline{z}-z-iz\overline{z}=1-iz-\overline{z}+iz\overline{z}$$
$$\Leftrightarrow i\overline{z}-z-iz\overline{z}=-iz-\overline{z}+iz\overline{z}\Leftrightarrow i(z+\overline{z})-2i|z|^2=z-\overline{z}$$

On pose $z=a+ib$

$$\frac{1-z}{1-iz}=\frac{1-\overline{z}}{1+i\overline{z}}\Leftrightarrow 2ia-2i(a^2+b^2)=2ib\Leftrightarrow a-(a^2+b^2)=b\Leftrightarrow a^2-a+b^2+b=0$$
$$\Leftrightarrow \left(a-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+\left(b+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=0\Leftrightarrow \left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\left(b+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$$

Il s'agit du cercle de centre $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

2. $\frac{1-z}{1-iz}$ est imaginaire pur si et seulement si $\frac{1-z}{1-iz}=-\overline{\left(\frac{1-z}{1-iz}\right)}=-\frac{1-\overline{z}}{1+i\overline{z}}$

$$\frac{1-z}{1-iz}=-\frac{1-\overline{z}}{1+i\overline{z}}\Leftrightarrow (1-z)(1+i\overline{z})=-(1-\overline{z})(1-iz)\Leftrightarrow 1+i\overline{z}-z-iz\overline{z}$$
$$=-(1-iz-\overline{z}+iz\overline{z})\Leftrightarrow 1+i\overline{z}-z-iz\overline{z}=-1+iz+\overline{z}-iz\overline{z}\Leftrightarrow 1+i\overline{z}-z$$
$$=-1+iz+\overline{z}$$
$$\Leftrightarrow 2-i(z-\overline{z})=z+\overline{z}$$

On pose $z=a+ib$

$$\frac{1-z}{1-iz}=-\frac{1-\overline{z}}{1+i\overline{z}}\Leftrightarrow 2-i(a+ib-a+ib)=2a\Leftrightarrow 2+2b=2a\Leftrightarrow 1=a-b$$

Il s'agit de la droite d'équation : $b=-1+a$.

Allez à : Exercice 54 :

Correction exercice 55 :

$$z=\frac{1+\rho e^{i\theta}}{1-\rho e^{i\theta}}=\frac{(1+\rho e^{i\theta})(1-\rho e^{-i\theta})}{(1-\rho e^{i\theta})(1-\rho e^{-i\theta})}=\frac{1+\rho e^{i\theta}-\rho e^{-i\theta}-\rho^2}{1-\rho e^{i\theta}-\rho e^{-i\theta}+\rho^2}=\frac{1+\rho\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)-\rho^2}{1-\rho(e^{i\theta}+\rho e^{-i\theta})+\rho^2}$$
$$=\frac{1-\rho^2+2i\rho\sin(\theta)}{1-2\rho\cos(\theta)+\rho^2}=\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\theta)+\rho^2}+i\frac{2\rho\sin(\theta)}{1-2\rho\cos(\theta)+\rho^2}$$

Donc la partie réelle de z est

$$Re(z)=\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\theta)+\rho^2}$$

Et sa partie imaginaire est

$$Im(z)=\frac{2\rho\sin(\theta)}{1-2\rho\cos(\theta)+\rho^2}$$

Allez à : Exercice 55 :

Correction exercice 56 :

1. $(1+i)^2=1+2i-1=2i\Rightarrow (1+i)^6=((1+i)^2)^3=(2i)^3=8\times i^3=-8i$
2. $z^2=-8i\Leftrightarrow z^2=(1+i)^6\Leftrightarrow z^2=((1+i)^3)^2\Leftrightarrow z=(1+i)^3$ ou $z=-(1+i)^3$
$\Leftrightarrow z=(1+i)^2(1+i)$ ou $z=-(1+i)^2(1+i)\Leftrightarrow z=2i(1+i)$ ou $z=-2i(1+i)$
$\Leftrightarrow z=-2+2i$ ou $z=2-2i$
3.
$$z=-2+2i=2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}}$$
$$z=2-2i=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\sqrt{2}e^{\frac{7i\pi}{4}}=2\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}$$
4.
$$z^3=-8i\Leftrightarrow z^3=((1+i)^2)^3\Leftrightarrow z^3=(2i)^3\Leftrightarrow \left(\frac{z}{2i}\right)^3=1\Leftrightarrow \frac{z}{2i}=1 \text{ ou } \frac{z}{2i}=j \text{ ou } \frac{z}{2i}=j^2$$
$$\Leftrightarrow z=2i \text{ ou } z=2ij \text{ ou } z=2ij^2\Leftrightarrow z=2i \text{ ou } z=2i\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ ou } z=2i\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow z = 2i \text{ ou } z = -\sqrt{3} - i \text{ ou } z = \sqrt{3} - i$$

Allez à : Exercice 56 :

Correction exercice 57 :

1.
$$f(z) = z \Leftrightarrow z(1-z) = z \Leftrightarrow z(1-z) - z = 0 \Leftrightarrow z - z^2 - z = 0 \Leftrightarrow z^2 = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

2.
$$\left|f(z) - \frac{1}{2}\right| = \left|z(1-z) - \frac{1}{2}\right| = \left|\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - z\right) + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right| = \left|-\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right| \leq \left|\left(z - \frac{1}{2}\right)^2\right| + \frac{1}{4}$$
$$\leq \left|z - \frac{1}{2}\right|^2 + \frac{1}{4} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Allez à : Correction exercice 57 :

Correction exercice 58 :

1. Pour tout z_1, z_2 différent de $-i$,
$$f(z_1) = f(z_2) \Leftrightarrow \frac{z_1 - i}{z_1 + i} = \frac{z_2 - i}{z_2 + i} \Leftrightarrow (z_1 - i)(z_2 + i) = (z_2 - i)(z_1 + i)$$
$$\Leftrightarrow z_1 z_2 + i z_1 - i z_2 + 1 = z_2 z_1 + i z_2 - i z_1 + 1 \Leftrightarrow 2i z_1 = 2i z_2 \Leftrightarrow z_1 = z_2$$

Donc f est injective.

2.
$$1 - f(z) = 1 - \frac{z - i}{z + i} = \frac{z + i - (z - i)}{z + i} = \frac{2i}{z + i} \neq 0$$

Donc
$$f(z) \neq 1$$

3.
Si $z \in E$ alors $f(z) \neq 1$ ce qui signifie que $f(z) \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, ce al montre que
$$f(E) \subset \mathbb{C} \setminus \{1\}$$
Si $Z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ alors il faut montrer qu'il existe $z \in E$ tel que $Z = f(z)$.
$$Z = f(z) \Leftrightarrow Z = \frac{z - i}{z + i} \Leftrightarrow Z(z + i) = z - i \Leftrightarrow Zz + iZ = z - i \Leftrightarrow Zz - z = -iZ - i \Leftrightarrow z(Z - 1)$$
$$= -i(Z + 1) \Leftrightarrow z = -i\frac{Z + 1}{Z - 1}$$
Il reste à montrer que $z \neq -i$, si
$$z = -i\frac{Z + 1}{Z - 1} = -i \Leftrightarrow \frac{Z + 1}{Z - 1} = 1 \Leftrightarrow Z + 1 = Z - 1 \Leftrightarrow 1 = -1$$
Donc z ne peut être égal à $-i$. On a montré que si $Z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ alors $Z \in f(E)$ cela montre que
$$\mathbb{C} \setminus \{1\} \subset f(E)$$
On a bien montré l'égalité demandé.
On en déduit que f est surjective et donc bijective.

4.
$$1 - |f(z)|^2 = 1 - \left|\frac{z - i}{z + i}\right|^2 = 1 - \frac{(z - i)(\overline{z} + i)}{(z + i)(\overline{z} - i)} = \frac{(z + i)(\overline{z} - i) - (z - i)(\overline{z} + i)}{(z + i)(\overline{z} - i)}$$
$$= \frac{|z^2| - iz + i\overline{z} + 1 - (|z^2| + iz - i\overline{z} + 1)}{|z + i|^2} = \frac{-2iz + 2i\overline{z}}{|z + i|^2} = -\frac{2i(z - \overline{z})}{|z + i|^2}$$
$$= -\frac{2i \times 2i\mathcal{Im}(z)}{|z + i|^2} = 4\frac{\mathcal{Im}(z)}{|z + i|^2}$$

5. Si $z \in \mathbb{R}$ alors $\mathcal{Im}(z) = 0$, d'après la question précédente
$$1 - |f(z)|^2 = 0 \Leftrightarrow |f(z)| = 1$$

Ce qui signifie que $f(z) \in \mathcal{U}$
Comme $f(z) \neq 1$, $f(z) \in \mathcal{U} \setminus \{1\}$
On a montré que

$$f(\mathbb{R}) \subset \mathcal{U} \setminus \{1\}$$

Si $Z \in \mathcal{U} \setminus \{1\}$ l'image réciproque de Z est $z = -i\frac{Z+1}{Z-1}$, il faut montrer que ce complexe est réel.

$$-i\frac{Z+1}{Z-1} - \left(\overline{-i\frac{Z+1}{Z-1}}\right) = -i\frac{Z+1}{Z-1} - i\frac{\overline{Z}+1}{\overline{Z}-1} = -i\frac{(Z+1)(\overline{Z}-1)+(\overline{Z}+1)(Z-1)}{(Z-1)(\overline{Z}-1)}$$

$$= -i\frac{|Z|^2 - Z + \overline{Z} - 1 + |Z|^2 - \overline{Z} + Z - 1}{|Z-1|^2} = -2i\frac{|Z|^2-1}{|Z-1|^2} = 0$$

Cela montre que $-i\frac{Z+1}{Z-1} \in \mathbb{R}$. On a montré que si $Z \in \mathcal{U} \setminus \{1\}$ alors il existe $z \in \mathbb{R}$ tel que $Z = f(z)$.
Autrement dit

$$\mathcal{U} \setminus \{1\} \subset f(\mathbb{R})$$

D'où l'égalité demandée.

Allez à : Exercice 58 :

Polynômes et fractions rationnelles

Exercice 1.

Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $P = -X^8 + 2X^4 - 1$

Allez à : Correction exercice 1

Exercice 2.

Soit $P = 1 - X^8$

Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$ et enfin dans $\mathbb{Q}[X]$

Allez à : Correction exercice 2

Exercice 3.

Soit $P = (X+1)^7 - X^7 - 1$. On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

1. Montrer que $1 + j = -j^2$
2. Montrer que j est une racine multiple de P.
3. Trouver deux racines réelles évidentes de P.
4. Factoriser P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Allez à : Correction exercice 3

Exercice 4.

Déterminer les racines réelles et complexes du polynôme :

$$P(X) = X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$$

En déduire sa factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

Allez à : Correction exercice 4

Exercice 5.

Soit $P = X^7 + X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$

1. Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$.
2. Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$.
3. Factoriser P dans $\mathbb{Q}[X]$.

Allez à : Correction exercice 5

Exercice 6.

Factoriser sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$ le polynôme

$$P(X) = X^6 + X^4 + X^2 + 1$$

Indication : $P(X) = 1 + X^2 + X^4 + X^6$

Allez à : Correction exercice 6

Exercice 7.

Déterminer les racines réelles et complexes du polynôme :

$$P(X) = \frac{1}{32}X^5 + \frac{1}{16}X^4 + \frac{1}{8}X^3 + \frac{1}{4}X^2 + \frac{1}{2}X + 1$$

En déduire sa factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

Allez à : Correction exercice 7

Exercice 8.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ défini par

$$P = X^4 - X^3 + X^2 - X + 1$$

1. Déterminer les racines de P.
2. Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Allez à : Correction exercice 8

Exercice 9.

1. Soit $P = -X^3 + X^2 - X + 1$ un polynôme.
   Factoriser ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.
2. Soit
$$P = 1 - X + X^2 - \cdots + (-1)^n X^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k X^k$$
   Déterminer les racines réelles et complexes de P.

Allez à : Correction exercice 9

Exercice 10.

Soit $P = X^6 + 2X^5 + 4X^4 + 4X^3 + 4X^2 + 2X + 1$

On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

1. Montrer que j est une racine multiple de P.
2. Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$.
3. Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$.

Allez à : Correction exercice 10

Exercice 11.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ défini par
$$P = X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1$$

1. Montrer que $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ est une racine multiple de P.
2. En remarquant que P est un polynôme pair, donner toutes les racines de P ainsi que leur multiplicité.
3. Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Allez à : Correction exercice 11

Exercice 12.

Soit $P = 2X^3 + 3X^2 + 6X + 1 - 3j$

1. Montrer que j est une racine double de P
2. Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$

Allez à : Correction exercice 12

Exercice 13.

1. Déterminer les racines réelles et complexes de $(X + 1)^6 - X^6$
2. Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $P \in \mathbb{R}[X]$ défini par
$$P = (X + 1)^7 - X^7 - a$$
   Déterminer a pour que P admette une racine réelle multiple.

Allez à : Correction exercice 13

Exercice 14.

1. Le polynôme $A = X^4 + 3X + 1$, est-il irréductible dans $\mathbb{R}[X]$?
2. Le polynôme $B = X^3 + 3X + 1$, est-il irréductible dans $\mathbb{R}[X]$?

Allez à : Correction exercice 14

Exercice 15.

Déterminer les réels a, b et c tels que $P = X^5 - 2X^4 - 6X^3 + aX^2 + bX + c$ soit factorisable par

$$Q = (X^2 - 1)(X - 3)$$

Allez à : Correction exercice 15

Exercice 16.

Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que le polynôme $A_n = (X - 1)^{n+2} + X^{2n+1}$ est divisible par $B = X^2 - X + 1$

Allez à : Correction exercice 16

Exercice 17.

Soit

$$P_n = (X + 1)^n - X^n - 1$$

On pose $n \equiv a \quad [6]$ avec $a \in \{0,1,2,3,4,5\}$

Pour quelles valeurs de n, $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ est-il racine de P_n ?

On pourra discuter selon les valeurs de a.

Allez à : Correction exercice 17

Exercice 18.

Déterminer le reste de la division euclidienne de $(X + 1)^n$ par $X^2 + 1$.

Allez à : Correction exercice 18

Exercice 19.

Quel est le reste de la division euclidienne de $P = X^n + X + 1$ par $Q = (X - 1)^2$?

Allez à : Correction exercice 19

Exercice 20.

Soit $R \in \mathbb{R}[X]$ le reste de la division euclidienne de $(X + 1)^n$ par $(X - 1)^2$.

Déterminer R.

Allez à : Correction exercice 20

Exercice 21.

Quel est le reste de la division euclidienne de $A_n = X^n + X + b$ par $B = (X - a)^2$, pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Allez à : Correction exercice 21

Exercice 22.

Déterminer le reste dans la division euclidienne de $A = X^{2n} + 2X^n + 1$ par $B = X^2 + 1$

Allez à : Correction exercice 22

Exercice 23.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X^{4n} - 1$ est divisible par $X^4 - 1$.
2. En déduire que le polynôme $P = X^{4a+3} + X^{4b+2} + X^{4c+1} + X^{4d}$ avec a, b, c et d entiers naturels est divisible par $Q = X^3 + X^2 + X + 1$.

Allez à : Correction exercice 23

Exercice 24.

Soit $P = X^3 + pX + q$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$, on note α, β et γ ses racines.

1. Calculer $A = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$.
2. Calculer $B = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$.

3. Calculer $C = \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \alpha^2\gamma + \alpha\gamma^2 + \beta^2\gamma + \beta\gamma^2$.
4. On pose $D = \alpha^3\beta + \alpha\beta^3 + \alpha^3\gamma + \alpha\gamma^3 + \beta^3\gamma + \beta\gamma^3$
   Calculer D en fonction de p.

Allez à : Correction exercice 24

Exercice 25.

On pose $P(X) = X^3 - 63X + 162$

Sachant que l'une des racines de ce polynôme est le double d'une autre racine, trouver les trois racines de P.

Indication : On pourra utiliser les relations entre les racines et les coefficients du polynôme.

Allez à : Correction exercice 25

Exercice 26.

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme tel que $XP(X-1) = (X-2)P(X)$

1. Montrer que 0 et 1 sont racines de P.
2. Soit a une racine de P. Si $a \neq 0$, montrer que $a-1$ est racine. Si $a \neq 1$, montrer que $a+1$ est racine.
3. On suppose que P n'est pas le polynôme nul. Montrer que 0 et 1 sont les seules racines de P.

Indication :

S'il existe une racine a telle que $\mathcal{R}e(a) < 1$ différente de 0 ($a \neq 0$), montrer qu'il y a une infinité de racines.

S'il existe une racine a telle que $\mathcal{R}e(a) > 0$ différente de 1 ($a \neq 1$), montrer qu'il y a une infinité de racines.

4. En déduire que P est de la forme $\alpha X^k(X-1)^l$ avec $\alpha \in \mathbb{C}[X]$, $k \in \mathbb{N}^*$ et $l \in \mathbb{N}^*$.
5. Quel est l'ensemble des polynômes de $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $XP(X-1) = (X-2)P(X)$.

Allez à : Correction exercice 26

Exercice 27.

Effectuer la division suivante les puissances croissantes de $X^4 + X^3 - 2X + 1$ par $X^2 + X + 1$ à l'ordre 2.

Allez à : Correction exercice 27

Exercice 28.

On considère le couple de polynôme à coefficients réels

$$P = X^3 - X^2 - X - 2 \quad \text{et} \quad Q = X^3 - 1$$

1. Utiliser l'algorithme d'Euclide pour calculer le $PGCD(P, Q)$.
2. Décomposer P et Q en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
3. Retrouvez le résultat de la question 1.
4. Décomposer P en facteur irréductible dans $\mathbb{C}[X]$.

Allez à : Correction exercice 28

Exercice 29.

Soient $P = X^5 + X^4 - 6X^3 - X^2 - X + 6$ et $Q = X^4 + 2X^3 - X - 2$

Déterminer le $PGCD$ de P et Q et en déduire les racines communes de P et Q.

Allez à : Correction exercice 29

Exercice 30.

Déterminer les P.G.C.D. des polynômes

$$A = X^5 + 2X^4 + X^3 - X^2 - 2X - 2 \quad \text{et} \quad B = X^4 + 3X^3 + 3X^2 - 2$$

En utilisant l'algorithme d'Euclide. En déduire les factorisations de A et B dans $\mathbb{R}[X]$.

Allez à : Correction exercice 30

Exercice 31.

Déterminer une identité de Bézout entre les polynômes $P=(X-1)^2$ et $Q=X^2+1$.

Allez à : Correction exercice 31

Exercice 32.

1. Déterminer une identité de Bézout entre les polynômes
$$P=2X^4+X^3-2X-1 \quad \text{et} \quad Q=2X^4-X^3-3X^2+X+1$$
2. En déduire les racines communes de P et Q.

Allez à : Correction exercice 32

Exercice 33.

Soit $P=X^5+X^4+2X^3+2X^2+X+1$

1. Calculer le PGCD de P et P'.
2. Quelles sont les racines communes à P et P' ?
   Quelles sont les racines multiples de P dans $\mathbb{C}$?
3. Montrer que $(X^2+1)^2$ divise P.
4. Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$.

Allez à : Correction exercice 33

Exercice 34.

Pour tout polynôme $P\in\mathbb{R}[X]$ on désigne par $P(X+1)$ le polynôme obtenu en remplaçant X par $X+1$ dans P.

1. Existe-t-il des polynômes $P\in\mathbb{R}[X]$ de degré 3 tels que $P(0)=1$?
2. Si $P\in\mathbb{R}[X]$ est un polynôme de degré 3, quel est le degré du polynôme $P(X+1)-P(X)$?
3. Existe-t-il des polynômes $P\in\mathbb{R}[X]$ de degré trois qui vérifient :
$$P(X+1)-P(X)=X^2-1 \quad \text{et} \quad P(0)=1$$

(Indication : On pourra dériver le polynôme P dans l'équation ci-dessus.)

Allez à : Correction exercice 34

Exercice 35.

Soit n un entier strictement positif.

1. Déterminer le pgcd des polynômes X^n-1 et $(X-1)^n$.
2. Pour $n=3$ démontrer qu'il existe un couple de polynômes (U,V) tel que :
$$(X^3-1)U+(X-1)^3V=X-1$$
   Donnez-en un.

Allez à : Correction exercice 35

Exercice 36.

1. Déterminer le $PGCD$ et une identité de Bézout des polynômes P et Q.
$$P=(X^2-3X+2)(X^2+1)=X^4-3X^3+3X^2-3X+2$$
$$Q=(X^2+3X+2)(X^2+1)=X^4+3X^3+3X^2+3X+2$$
2. Factoriser P et Q.

Allez à : Correction exercice 36

Exercice 37.

Soit
$$(X+1)^2A+(X-1)^2B=1 \qquad (E)$$

1. Trouver une solution particulière $A_0,B_0\in\mathbb{R}[X]$ de (E).
2. En déduire toutes les solutions de (E).

3. Déterminer tous les polynômes P tels que $P-1$ soit un multiple de $(X+1)^2$ et que $P+1$ soit un multiple de $(X-1)^2$.

Allez à : Correction exercice 37

Exercice 38.

Soient P et Q deux polynômes définis par :

$P(X)=X^6-X^4-X^2+1$ et $Q(X)=X^4+2X^3-2X-1$

Déterminer le PGCD de P et Q et en déduire les racines communes de P et Q ainsi que leur multiplicité.

Allez à : Correction exercice 38

Exercice 39.

Quels sont les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tels que P' divise P.

Allez à : Correction exercice 39

Exercice 40.

Soit $P(X)=2X^4+3X^3-3X^2+3X+2$

On pose $Y=X+\frac{1}{X}$

1. Montrer qu'il existe un polynôme Q, de degré 2 tel que $Q(Y)=\frac{P(X)}{X^2}$.
2. Calculer les racines de Q.
3. En déduire les racines de P, puis la factorisatistion de P dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

Allez à : Correction exercice 40

Exercice 41.

Soit $\theta\in\mathbb{R}$, on suppose que $\sin(n\theta)\neq 0$.

1. Déterminer toutes les racines du polynôme

$$P=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\sin(k\theta)\,X^k$$

2. Montrer que toutes les racines sont réelles.

Allez à : Correction exercice 41

Exercice 42.

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle :

$$F(X)=\frac{X^4-X+2}{(X-1)(X^2-1)}$$

Allez à : Correction exercice 42

Exercice 43.

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle :

$$F(X)=\frac{6X^3+3X^2-5}{X^4-1}$$

1. Dans $\mathbb{R}(X)$
2. Dans $\mathbb{C}(X)$

Allez à : Correction exercice 43

Exercice 44.

Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ les fractions rationnelles suivantes :

1.

$$F(X)=\frac{-X^2+2X+1}{(X-1)^2(X^2+1)}$$

2.

$$G(X)=\frac{X^3}{(X-1)(X+1)}$$

Allez à : Correction exercice 44

Exercice 45.

Soit

$$F=\frac{3}{(X^2+X+1)(X-1)^2}$$

Décomposer F en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$, dans $\mathbb{C}(X)$.

Allez à : Correction exercice 45

Exercice 46.

Décomposer la fraction rationnelle suivante dans $\mathbb{R}(X)$.

$$F=\frac{X^2}{(X^2+1)^{2010}}$$

Allez à : Correction exercice 46

Exercice 47.

Décomposer la fraction rationnelle suivante en éléments simples.

$$F=\frac{X^8+X+1}{X^4(X-1)^3}$$

Allez à : Correction exercice 47

Exercice 48.

Décomposer la fraction suivante en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

$$F=\frac{X^4+1}{X^2(X^2+X+1)^2}$$

Allez à : Correction exercice 48

Exercice 49.

Décomposer la fraction rationnelle suivante dans $\mathbb{R}(X)$ et dans $\mathbb{C}(X)$

$$G=\frac{X^5}{(X^4-1)^2}$$

Allez à : Correction exercice 49

Exercice 50.

1. Soit $F=\frac{P}{Q}$. Si $\alpha\in\mathbb{C}$ est une racine simple de Q, montrer que le coefficient de l'élément simple $\frac{1}{X-\alpha}$ est $\frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}$.
2. Décomposer dans $\mathbb{C}(X)$ la fraction

$$F=\frac{X}{X^n-1}$$

Allez à : Correction exercice 50

Exercice 51.

On considère le polynôme $P = X^5 - X^3 + X^2 - 1$

1. Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$
2. Décomposer la fraction $\frac{X+1}{P}$ en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$

Allez à : Correction exercice 51

CORRECTIONS

Correction exercice 1.

Dans $\mathbb{R}[X]$

$$P = -(X^8 - 2X^4 + 1) = -(X^4 - 1)^2 = -(X^2 - 1)^2(X^2 + 1)^2 = -(X - 1)^2(X + 1)^2(X^2 + 1)^2$$

Dans $\mathbb{C}[X]$

$$P = -(X - 1)^2(X + 1)^2(X - i)^2(X + i)^2$$

Allez à : Exercice 1

Correction exercice 2.

Première méthode

$P(X) = 1 - X^8 = (1 - X^4)(1 + X^4)$, $(1 - X^4)$ se décompose facilement en $(1 - X)(1 + X)(i - X)(i + X) = -(X - 1)(1 + X)(X - i)(X + i)$, mais pour décomposer $1 + X^4$, c'est beaucoup plus délicat, il faut utiliser une bonne ruse, allons-y

$$1 + X^4 = 1 + 2X^2 + X^4 - 2X^2 = (1 + X^2)^2 - \left(\sqrt{2}X\right)^2 = \left(1 + X^2 - \sqrt{2}X\right)(1 + X^2 + \sqrt{2}X)$$

$1 + X^2 - \sqrt{2}X = X^2 - \sqrt{2}X + 1$ et $1 + X^2 + \sqrt{2}X = X^2 + \sqrt{2}X + 1$ sont deux polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ car leur discriminant sont négatifs. Donc la décomposition de $P(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$ est :

$$P(X) = -(X - 1)(1 + X)(X^2 + 1)\left(X^2 - \sqrt{2}X + 1\right)(X^2 + \sqrt{2}X + 1)$$

Pour la décomposition dans $\mathbb{C}[X]$ il suffit de trouver les racines complexes de $X^2 - \sqrt{2}X + 1$ et $X^2 + \sqrt{2}X + 1$

Le discriminant de $X^2 - \sqrt{2}X + 1$ est $\Delta_1 = \left(-\sqrt{2}\right)^2 - 4 = -2 = \left(i\sqrt{2}\right)^2$, ses racines sont $X_1 = \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{4}}$ et $X_2 = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Le discriminant de $X^2 + \sqrt{2}X + 1$ est $\Delta_1 = \left(\sqrt{2}\right)^2 - 4 = -2 = \left(i\sqrt{2}\right)^2$, ses racines sont $X_3 = \frac{-\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2} = e^{-3i\frac{\pi}{4}}$ et $X_4 = \frac{-\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2} = e^{3i\frac{\pi}{4}}$.

$$P(X) = -(X - 1)(1 + X)(X - i)(X + i)\left(X - \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2}\right)\left(X - \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}\right)\left(X - \frac{-\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2}\right)\left(X - \frac{-\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}\right)$$

Deuxième méthode

On cherche les racines réelles et complexes de $1 - X^8 = 0$

$X^8 = 1 \Leftrightarrow X_k = e^{\frac{2ik\pi}{8}} = e^{\frac{ik\pi}{4}}$ avec $k \in \{0,1;2,3,4,5,6,7\}$

Ce qui donne $X_0 = 1$, $X_1 = e^{\frac{i\pi}{4}}$, $X_2 = e^{\frac{i\pi}{2}} = i$, $X_3 = e^{\frac{3i\pi}{4}}$, $X_4 = e^{i\pi} = -1$, $X_5 = e^{\frac{5i\pi}{4}} = e^{-\frac{3i\pi}{4}}$, $X_6 = e^{\frac{3i\pi}{2}} = -i$, $X_7 = e^{\frac{7i\pi}{4}} = e^{-\frac{i\pi}{4}}$

La décomposition dans $\mathbb{C}[X]$ est :

$$P(X) = -(X - 1)\left(X - e^{\frac{i\pi}{4}}\right)(X - i)\left(X - e^{\frac{3i\pi}{4}}\right)(X + 1)\left(X - e^{-\frac{3i\pi}{4}}\right)(X + i)\left(X - e^{-\frac{i\pi}{4}}\right)$$

Pour la décomposition dans $\mathbb{R}[X]$, on regroupe les conjugués

$$P(X) = -(X - 1)(1 + X)(X - i)(X + i)\left(X - e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)\left(X - e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(X - e^{-3i\frac{\pi}{4}}\right)\left(X - e^{3i\frac{\pi}{4}}\right)$$

$$P(X) = -(X-1)(1+X)(X^2+1)\left(X^2 - \left(e^{-i\frac{\pi}{4}} + e^{i\frac{\pi}{4}}\right)X + e^{-i\frac{\pi}{4}}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(X^2 - \left(e^{-3i\frac{\pi}{4}} + e^{3i\frac{\pi}{4}}\right)X + e^{-3i\frac{\pi}{4}}e^{3i\frac{\pi}{4}}\right)$$

$$= -(X-1)(X+1)(X^2+1)\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)X + 1\right)\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)X + 1\right)$$

$$= -(X-1)(X+1)(1+X^2)\left(X^2 - 2\frac{\sqrt{2}}{2}X + 1\right)\left(X^2 + 2\frac{\sqrt{2}}{2}X + 1\right)$$

$$= -(X-1)(X+1)(1+X^2)\left(X^2 - \sqrt{2}X + 1\right)\left(X^2 + \sqrt{2}X + 1\right)$$

Dans $\mathbb{Q}[X]$ on regroupe les deux derniers polynômes

$$P(X) = -(X-1)(X+1)(1+X^2)\left(X^2 + 1 - \sqrt{2}X\right)\left(X^2 + 1 + \sqrt{2}X\right)$$

$$= -(X-1)(X+1)(1+X^2)\left((X^2+1)^2 - \left(\sqrt{2}X\right)^2\right)$$

$$= -(X-1)(X+1)(1+X^2)(X^4+1)$$

Allez à : Exercice 2

Correction exercice 3.

1.

$$1 + j = 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} = -\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = -e^{\frac{4i\pi}{3}} = -\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^2 = -j^2$$

Ou mieux

$$1 + j + j^2 = \frac{1 - j^3}{1 - j} = 0$$

Car $j^3 = \left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^3 = e^{2i\pi} = 1$.

2.

$$P(j) = (j+1)^7 - j^7 - 1 = (-j^2)^7 - j^6 j - 1 = -j^{14} - j - 1 - j^{12}j^2 - j - 1 = -(j^2 + j + 1) = 0$$

$$P' = 7(X+1)^6 - 7X^6$$

$$P'(j) = 7((j+1)^6 - j^6) = 7((-j^2)^6 - 1) = 7(j^{12} - 1) = 7(1-1) = 0$$

Donc j est au moins racine double.

3. $P(0) = (0+1)^7 - 0^7 - 1 = 1^7 - 1 = 0$ et $P(-1) = (-1+1)^7 - (-1)^7 - 1 = 0 - (-1) - 1 = 0$
Donc 0 et -1 sont deux racines évidentes.

4. Le début de la formule du binôme de $(X+1)^7$ est $X^7 + 7X^6$ (il y a plein d'autre terme mais il est inutile de les calculer) donc P est un polynôme de degré 6 et son coefficient dominant est 7.
D'autre part, j est racine double (au moins) donc $\bar{j} = j^2$ est aussi racine double (au moins) car P est un polynôme à coefficients réels. 0 et -1 sont aussi racine, cela donne 6 racine (au moins), comme $d°P = 6$ on a toutes les racines. La factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ est :

$$P = 7X(X+1)(X-j)^2\left(X - \bar{j}\right)^2$$

Dans $\mathbb{R}[X]$:

$$(X-j)\left(X-\bar{j}\right) = (X-j)(X-j^2) = X^2 - (j+j^2)X + j^3 = X^2 + X + 1$$

Donc

$$P = 7X(X+1)\left((X-j)\left(X-\bar{j}\right)\right)^2 = 7X(X+1)(X^2+X+1)^2$$

Allez à : Exercice 3

Correction exercice 4.

$$P(X) = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1 - X^6}{1 - X} = 0 \\ X \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - X^6 = 0 \\ X \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X^6 = 1 \\ X \neq 1 \end{cases}$$

Or $X^6 = 1 \Leftrightarrow X_k = e^{\frac{2ik\pi}{6}} = e^{\frac{ik\pi}{3}}$ avec $k \in \{0,1;2,3,4,5\}$

Ce qui donne $X_0 = 1$, $X_1 = e^{\frac{i\pi}{3}} = -\bar{j} = -j^2$, $X_2 = e^{\frac{2i\pi}{3}} = j$, $X_3 = e^{i\pi} = -1$, $X_4 = e^{\frac{4i\pi}{3}} = j^2$, $X_5 = e^{\frac{5i\pi}{3}} = -j$

Les 5 racines de P sont $X_1=-j^2$, $X_2=j$, $X_3=-1$, $X_4=j^2$ et $X_5=-j$.
La décomposition dans $\mathbb{C}[X]$ est :

$$P(X)=1\times(X+j^2)(X-j)(X+1)(X-j^2)(X+j)=(X+j^2)(X-j)(X+1)(X-j^2)(X+j)$$

La décomposition dans $\mathbb{R}[X]$ est :

$$\begin{aligned}P(X)&=(X+1)(X-j)(X-j^2)(X+j^2)(X+j)=(X+1)(X^2-(j+j^2)X+j^3)(X^2+(j+j^2)X+j^3)\\&=(X+1)(X^2+X+1)(X^2-X+1)\end{aligned}$$

Allez à : Exercice 4

Correction exercice 5.

1.

$$P=1+X+X^2+X^3+X^4+X^5+X^6+X^7=\frac{1-X^8}{1-X}$$

Pour $X\neq 1$

Les racines de P vérifient $\begin{cases}X^8=1\\X\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}X_k=e^{\frac{2ik\pi}{8}},\ k\in\{0,1,2,3,4,5,6,7\}\\X\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow X_k=e^{\frac{ik\pi}{4}},\ k\in\{1,2,3,4,5,6,7\}$

$X_1=e^{\frac{i\pi}{4}}$, $X_2=e^{\frac{i\pi}{2}}=i$, $X_3=e^{\frac{3i\pi}{4}}$, $X_4=e^{i\pi}=-1$, $X_5=e^{\frac{5i\pi}{4}}=e^{-\frac{3i\pi}{4}}$, $X_6=e^{\frac{3i\pi}{2}}=-i$ et $X_7=e^{\frac{7i\pi}{4}}=e^{-\frac{i\pi}{4}}$

Donc

$$P=\left(X-e^{\frac{i\pi}{4}}\right)(X-i)\left(X-e^{\frac{3i\pi}{4}}\right)(X+1)\left(X-e^{-\frac{3i\pi}{4}}\right)(X+i)\left(X-e^{-\frac{i\pi}{4}}\right)$$

2. On rappelle que

$$\left(X-e^{i\theta}\right)\left(X-e^{-i\theta}\right)=X^2-2\cos(\theta)+1$$

$$\begin{aligned}P&=(X+1)(X-i)(X+i)\left(X-e^{\frac{i\pi}{4}}\right)\left(X-e^{-\frac{i\pi}{4}}\right)\left(X-e^{\frac{3i\pi}{4}}\right)\left(X-e^{-\frac{3i\pi}{4}}\right)\\&=(X+1)(X^2+1)\left(X^2-2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)X+1\right)\left(X^2-2\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)X+1\right)\\&=(X+1)(X^2+1)\left(X^2-\sqrt{2}X+1\right)\left(X^2+\sqrt{2}X+1\right)\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}P&=(X+1)(X^2+1)\left(X^2+1-\sqrt{2}X\right)\left(X^2+1+\sqrt{2}X\right)=(X+1)(X^2+1)\left((X^2+1)^2-\left(\sqrt{2}X\right)^2\right)\\&=(X+1)(X^2+1)(X^4+2X^2+1-2X^2)=(X+1)(X^2+1)(X^4+1)\end{aligned}$$

Allez à : Exercice 5

Correction exercice 6.

Pour $X^2\neq 1$

$$P(X)=1+X^2+(X^2)^2+(X^2)^3=\frac{1-(X^2)^4}{1-X^2}=\frac{1-X^8}{1-X^2}$$

$$\begin{aligned}P(X)=0&\Leftrightarrow\begin{cases}X^8=1\\X^2\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}X=e^{\frac{2ik\pi}{8}},\ k\in\{0,1,2,3,4,5,6,7\}\\X\neq\pm 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}X=e^{\frac{ik\pi}{4}},\ k\in\{0,1,2,3,4,5,6,7\}\\X\neq\pm 1\end{cases}\Leftrightarrow X\\&=e^{\frac{ik\pi}{4}},k\in\{1,2,3,5,6,7\}\end{aligned}$$

Car pour $k=0$, $e^{\frac{ik\pi}{4}}=1$ et pour $k=4$, $e^{\frac{ik\pi}{4}}=e^{i\pi}=-1$

Les racines de P sont :

$$X_1=e^{\frac{i\pi}{4}};X_2=e^{\frac{2i\pi}{4}}=i;X_3=e^{\frac{3i\pi}{4}};X_5=e^{\frac{5i\pi}{4}}=e^{-\frac{3i\pi}{4}};X_6=e^{\frac{6i\pi}{4}}=-i\ \ et\ \ X_7=e^{\frac{7i\pi}{4}}=e^{-\frac{i\pi}{4}}$$

La factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ est :

$$P(X)=\left(X-e^{\frac{i\pi}{4}}\right)\left(X-e^{-\frac{i\pi}{4}}\right)(X-i)(X+i)\left(X-e^{\frac{3i\pi}{4}}\right)\left(X-e^{-\frac{3i\pi}{4}}\right)$$

Et dans $\mathbb{R}[X]$:

$$P(X) = \left(X^2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)X + 1\right)(X^2+1)\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)X + 1\right)$$
$$= \left(X^2 - \sqrt{2}X + 1\right)(X^2+1)\left(X^2 + \sqrt{2}X + 1\right)$$

Allez à : Exercice 6

Correction exercice 7.

$$P(X) = 1 + \left(\frac{X}{2}\right) + \left(\frac{X}{2}\right)^2 + \left(\frac{X}{2}\right)^3 + \left(\frac{X}{2}\right)^4 + \left(\frac{X}{2}\right)^5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1-\left(\frac{X}{2}\right)^6}{1-\frac{X}{2}} = 0 \\ \dfrac{X}{2} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-\left(\frac{X}{2}\right)^6 = 0 \\ X \neq 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{X}{2}\right)^6 = 1 \\ X \neq 2 \end{cases}$$

Or $\left(\frac{X}{2}\right)^6 = 1 \Leftrightarrow X_k = 2e^{\frac{2ik\pi}{6}} = 2e^{\frac{ik\pi}{3}}$ avec $k \in \{0,1,2,3,4,5\}$ donc $X_k = 2e^{\frac{ik\pi}{3}}$

Ce qui donne $X_0 = 2$, $X_1 = 2e^{\frac{i\pi}{3}} = -2\bar{j} = -2j^2$, $X_2 = 2e^{\frac{2i\pi}{3}} = 2j$, $X_3 = 2e^{i\pi} = -2$, $X_4 = 2e^{\frac{4i\pi}{3}} = 2j^2$, $X_5 = 2e^{\frac{5i\pi}{3}} = -2j$

Les 5 racines de P sont $X_1 = -2j^2$, $X_2 = 2j$, $X_3 = -2$, $X_4 = 2j^2$ et $X_5 = -2j$. On a enlevé $X = 2$.

La décomposition dans $\mathbb{C}[X]$ est :

$$P(X) = \frac{1}{32} \times (X+2j^2)(X-2j)(X+2)(X-2j^2)(X+2j)$$
$$= (X+2j^2)(X-2j)(X+2)(X-2j^2)(X+2j)$$

La décomposition dans $\mathbb{R}[X]$ est :

$$P(X) = \frac{1}{32}(X+2)(X-2j)(X-2j^2)(X+2j^2)(X+2j)$$
$$= \frac{1}{32}(X+2)(X^2 - 2(j+j^2)X + 4j^3)(X^2 + 2(j+j^2)X + 4j^3)$$
$$= \frac{1}{32}(X+1)(X^2+2X+4)(X^2-2X+4)$$

Allez à : Exercice 7

Correction exercice 8.

1.

$$P = 1 + (-X) + (-X)^2 + (-X)^3 + (-X)^4 = \frac{1-(-X)^5}{1-(-X)} = \frac{1+X^5}{1+X}$$

Pour $X \neq -1$

Les racines vérifient

$$\begin{cases} X^5 = -1 \\ X \neq 1 \end{cases} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |X^5| = |-1| \\ \arg(X^5) = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ X \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X| = 1 \\ 5\arg(X) = (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ X \neq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |X| = 1 \\ \arg(X) = \dfrac{2k+1}{5}\pi, \quad k \in \{0,1,2,3,4\} \\ X \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = e^{\frac{2k+1}{5}i\pi}, \quad k \in \{0,1,2,3,4\} \\ X \neq -1 \end{cases}$$

$$X_0 = e^{\frac{i\pi}{5}}; X_1 = e^{\frac{3i\pi}{5}}; X_2 = e^{\frac{5i\pi}{5}} = -1; X_3 = e^{\frac{7i\pi}{5}} = e^{\frac{-3i\pi}{5}}; X_4 = e^{\frac{-i\pi}{5}}$$

On élimine $X_3 = -1$

2. Dans $\mathbb{C}[X]$

$$P=\left(X-e^{\frac{i\pi}{5}}\right)\left(X-e^{-\frac{i\pi}{5}}\right)\left(X-e^{\frac{3i\pi}{5}}\right)\left(X-e^{-\frac{3i\pi}{5}}\right)$$

Dans $\mathbb{R}[X]$

$$P=\left(X^2-2X\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+1\right)\left(X^2-2X\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)+1\right)$$

Allez à : Exercice 8

Correction exercice 9.

1. $P=X^2(-X+1)+(-X+1)=-(X-1)(X^2+1)$ dans $\mathbb{R}[X]$
   $P=-(X-1)(X-i)(X+i)$ dans $\mathbb{C}[X]$
2. Si $X\neq -1$.

$$P=\sum_{k=0}^{2n-1}(-X)^k=\frac{1-(-X)^{(n+1)}}{1-(-X)}=\frac{1-(-X)^{n+1}}{1+X}$$

Les racines de P vérifie $X^{(n+1)}=1$ et $X\neq -1$.

$$P(X)=0\Leftrightarrow\begin{cases}(-X)^{n+1}=1\\ X\neq -1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-X=e^{\frac{2ik\pi}{n+1}},k\in\{0,1,\dots,n\}\\ X\neq -1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}X=-e^{\frac{2ik\pi}{n+1}},k\in\{0,1,\dots,n\}\\ X\neq -1\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow X=-e^{\frac{2ik\pi}{n+1}},k\in\{1,\dots,n\}$$

Allez à : Exercice 9

Correction exercice 10.

1.

$$P(j)=j^6+2j^5+4j^4+4j^3+4j^2+2j+1=1+2j^2+4j+4+4j^2+2j+1=6j^2+6j+6$$
$$=6(j^2+j+1)=0$$
$$P'=6X^5+10X^4+16X^3+12X^2+8X+2$$
$$P'(j)=6j^5+10j^4+16j^3+12j^2+8j+2=6j^2+10j+16+12j^2+8j+2=18j^2+18j+18$$
$$=18(j^2+j+1)=0$$

Donc j est racine double, comme P est un polynôme à coefficients réels, $\bar{j}$ est aussi racine double.
On peut essayer de voir si j ne serait pas racine triple (mais cela ne marche pas).

2. Soit on a l'intuition de voir que i est racine (et que donc $-i$ est aussi racine), soit on ne le voit pas et il faut diviser P par

$$(X-j)^2\left(X-\bar{j}\right)^2=\left((X-j)\left(X-\bar{j}\right)\right)^2=(X^2+X+1)^2=X^4+X^2+1+2X^3+2X^2+2X$$
$$=X^4+2X^3+3X^2+2X+1$$

$$\begin{array}{r|l}
X^6+2X^5+4X^4+4X^3+4X^2+2X+1 & X^4+2X^3+3X^2+2X+1\\ \cline{2-2}
X^6+2X^5+3X^4+2X^3+X^2 & X^2+1\\ \hline
X^4+2X^3+3X^2+2X+1 & \\
X^4+2X^3+3X^2+2X+1 & \\ \hline
0 &
\end{array}$$

$$P=(X-j)^2\left(X-\bar{j}\right)^2(X-i)(X+i)$$

3.

$$P=(X^2+X+1)^2(X^2+1)$$

Allez à : Exercice 10

Correction exercice 11.

1.

$$P(j)=j^8+2X^6+3j^4+2j^2+1=j^2+2+3j+2j^2+1=3j^2+3j+3=3(j^2+j+1)=0$$

j est une racine de P

$$P' = 8X^7 + 12X^5 + 12X^3 + 4X$$

$$P'(j) = 8j^7 + 12j^5 + 12j^3 + 4j = 8j + 12j^2 + 12 + 4j = 12j^2 + 12j + 12 = 12(j^2 + j + 1) = 0$$

j est racine au moins double, j est donc une racine multiple.

2. Comme P est pair, $-j$ est aussi une racine double, ce polynôme est à coefficients réels donc $\bar{j} = j^2$ est racine double et $\overline{-j} = -j^2$ est aussi racine double, cela fait 8 racines en tout (en comptant la multiplicité de racines), comme ce polynôme est degré 8, on les a toutes. Le coefficient dominant est 1, on en déduit la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$

$$P = (X - j)^2(X - j^2)^2(X + j)^2(X + j^2)^2$$

Dans $\mathbb{R}[X]$

$$P = [(X - j)(X - j^2)]^2[(X + j)(X + j^2)]^2 = [X^2 + X + 1]^2[X^2 - X + 1]^2$$

Allez à : Exercice 11

Correction exercice 12.

1.

$$P(j) = 2j^3 + 3j^2 + 6j + 1 + 3j = 2 + 3j^2 + 6j + 1 - 3j = 3j^2 + 3j + 3 = 3(j^2 + j + 1) = 0$$

$$P' = 6X^2 + 6X + 6$$

$$P'(j) = 6j^2 + 6j + 6 = 6(j^2 + j + 1) = 0$$

Donc j est une racine double de P.

2. La somme des racines de P est $-\frac{3}{2}$, si on appelle α la troisième racine on a

$$\alpha + 2j = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \alpha = -\frac{3}{2} - 2j = -\frac{3}{2} - 2\left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2} + i\sqrt{3}$$

Donc

$$P = 2(X - j)^2\left(X + \frac{1}{2} - i\sqrt{3}\right)$$

Allez à : Exercice 12

Correction exercice 13.

1.

$$(X + 1)^6 = X^6 \Leftrightarrow \left(\frac{X + 1}{X}\right)^6 = 1$$

Il est clair que 0 n'est pas racine. Mais attention $(X + 1)^6 - X^6$ est un polynôme de degré 5

$$(X + 1)^6 = X^6 \Leftrightarrow \left(\frac{X + 1}{X}\right)^6 = 1$$

$$\frac{X + 1}{X} = e^{\frac{2ik\pi}{6}}, \quad k \in \{0,1,2,3,4,5\}$$

La racine « en trop » est celle qui aurait vérifié $\frac{X+1}{X} = 1$ qui n'a pas de solution, on enlève donc $k = 0$.

$$1 + \frac{1}{X} = e^{\frac{2ik\pi}{6}}, \quad k \in \{1,2,3,4,5\} \Leftrightarrow \frac{1}{X} = e^{\frac{ik\pi}{3}} - 1, \quad k \in \{1,2,3,4,5\} \Leftrightarrow X = \frac{1}{e^{\frac{ik\pi}{3}} - 1}, k \in \{1,2,3,4,5\}$$

$$\Leftrightarrow X = \frac{e^{-\frac{ik\pi}{3}} - 1}{\left(e^{\frac{ik\pi}{3}} - 1\right)\left(e^{-\frac{ik\pi}{3}} - 1\right)}, k \in \{1,2,3,4,5\}$$

Les cinq racines sont

$$X_k = \frac{e^{-\frac{ik\pi}{3}} - 1}{\left(e^{\frac{ik\pi}{3}} - 1\right)\left(e^{-\frac{ik\pi}{3}} - 1\right)} = \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{3}\right) - 1 + i\sin\left(\frac{k\pi}{3}\right)}{2 - 2\cos\left(\frac{k\pi}{3}\right)}$$

2. Pour que P admette une racine multiple réelle (donc au moins double), P et P' ont une racine réelle commune.
$$P' = 7(X+1)^6 - 7X^6$$
Les racines réelles et complexes de P' vérifient $(X+1)^6 - X^6 = 0$
On cherche les racines réelles donc $\sin\left(\frac{k\pi}{3}\right) = 0$ ce qui équivaut à $k = 0$ (mais on a éliminé ce cas) et $k = 3$
$$X_3 = \frac{\cos(\pi) - 1}{2 - 2\cos(\pi)} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$
P admet une racine double si et seulement si $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$.
$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2}+1\right)^7 - \left(-\frac{1}{2}\right)^7 + a = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^7} + a = 0 \Leftrightarrow a = -2 \times \frac{1}{2^7} = -\frac{1}{2^6}$$
Et alors
$$P = (X+1)^7 - X^7 - \frac{1}{2^6}$$

Allez à : Exercice 13

Correction exercice 14.

1. La réponse est non car les seuls polynômes irréductibles sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 qui n'ont pas de racines réelles. La question ne demande pas de factoriser ce polynôme.
2. Les limites de la fonction polynômiale définie par $B(x) = x^3 + 3x + 1$ en $-\infty$ vaut $-\infty$ et en $+\infty$ vaut $+\infty$, cette fonction est continue, donc le théorème des valeurs intermédiaires entraine qu'il existe x_0 tel que $B(x_0) = 0$. B admet une racine réelle. Ceci dit le même raisonnement qu'au 1°) est valable aussi.

Allez à : Exercice 14

Correction exercice 15.

$P = X^5 - 2X^4 - 6X^3 + aX^2 + bX + c$ est factorisable par $Q = (X^2-1)(X-3)$ si et seulement si -1, 1 et 3 sont racines de P.
$$\begin{cases} P(-1) = (-1)^5 - 2\times(-1)^4 - 6\times(-1)^3 + a\times(-1)^2 + b\times(-1) + c = 0 \\ P(1) = 1^5 - 2\times 1^4 - 6\times 1^3 + a\times 1^2 + b + c = 0 \\ P(3) = 3^5 - 2\times 3^4 - 6\times 3^3 + a\times 3^2 + b\times 3 + c = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 - 2 + 6 + a - b + c = 0 \\ 1 - 2 - 6 + a + b + c = 0 \\ 3^4(3-2-2) + 9a + 3b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{cases} a - b + c = -3 \\ a + b + c = 7 \\ 9a + 3b + c = 81 \end{cases}$$
$L_2 - L_1$ entraine que $2b = 10$ donc $b = 5$
Et $L_2 + L_1$ entraine que $2a + 2c = 4$ donc $a + c = 2 : L'_1$
On remplace $b = 5$ dans L_3 : $9a + 15 + c = 81$ donc $9a + c = 66 : L'_2$
$L'_2 - L'_1$ entraine que $8a = 64$ donc $a = 8$ et donc $c = 2 - 8 = -6$
Finalement $P = X^5 - 2X^4 - 6X^3 + 8X^2 + 5X - 6$

Allez à : Exercice 15

Correction exercice 16.

A_n est divisible par B si et seulement si les racines de B sont aussi des racines de A_n.
Le discriminant de $X^2 - X + 1$ est $\Delta = 1 - 4 = -3$ donc les deux racines de B sont :
$$X_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = -j^2$$
$$X_2 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} = -j$$
Remarque : $X^2 - X + 1 = 0 \Leftrightarrow (-X)^2 + (-X) + 1 = 0$

Donc les racines du polynôme B vérifient

$$-X = j \quad \text{ou} \quad -X = j^2$$

$$A_n(-j) = (-j-1)^{n+2} + (-j)^{2n+1} = (j^2)^n (j^2)^2 + (-j)^{2n}(-j) = j^{2n} j^4 - j^{2n} j = 0$$

Comme A_n est un polynôme à coefficients réels, $-\overline{j} = -j^2$ est aussi racine.

On conclut que $X^2 - X + 1$ divisise $(X-1)^{n+2} + X^{2n+1}$.

Allez à : Exercice 16

Correction exercice 17.

$$P_n(j) = (j+1)^n - j^n - 1 = (-j^2)^n - j^n - 1 = (-1)^n j^{2n} - j^n - 1$$

Si $n = 6p$

$$P_{6p}(j) = j^{12p} - j^{6p} - 1 = 1 - 1 - 2 = -2 \neq 0$$

Si $n = 6p + 1$

$$P_{6p+1}(j) = -j^{12p+2} - j^{6p+1} - 1 = -j^2 - j - 1 = 0$$

Si $n = 6p + 2$

$$P_{6p+2}(j) = j^{12p+4} - j^{6p+2} - 1 = j - j^2 - 1 = 2j \neq 0$$

Si $n = 6p + 3$

$$P_{6p+3}(j) = -j^{12p+6} - j^{6p+3} - 1 = -1 - 1 - 1 = -3 \neq 0$$

Si $n = 6p + 4$

$$P_{6p+4}(j) = j^{12p+8} - j^{6p+4} - 1 = j^2 - j - 1 = 2j^2 \neq 0$$

Si $n = 6p + 5$

$$P_{6p+5}(j) = -j^{12p+10} - j^{6p+5} - 1 = -j - j^2 - 1 = 0$$

Allez à : Exercice 17

Correction exercice 18.

Il existe $A, R \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$X^n + X + 1 = A(X-1)^2 + R \quad (*)$$

Avec $d°R < 2$ donc il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $R = aX + b$, ce qui entraine que $R' = a$

Prenons $X = 1$

$$3 = R(1) = a + b$$

On dérive $(*)$

$$nX^{n-1} + 1 = A'(X-1)^2 + A(X-1) + R'$$

On prend $X = 1$

$$n + 1 = a$$

On en déduit que

$$b = 3 - a = 3 - (n+1) = 2 - n$$

Et finalement

$$R = (n+1)X + 2 - n$$

Allez à : Exercice 18

Correction exercice 19.

$$(X+1)^n = (X^2+1)Q + R$$

Or $d°R < 2$ et donc $R = aX + b$.

On pose $X = i$.

$$(i+1)^n = ai+b \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right)^n = b+ai \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}\right)^n\left(e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^n = b+ai \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}\right)^n e^{\frac{ni\pi}{4}}$$

$$= b+ai \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}\right)^n\left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right) = b+ai \Leftrightarrow \begin{cases} a = \left(\sqrt{2}\right)^n \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \\ b = \left(\sqrt{2}\right)^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \end{cases}$$

Donc

$$R = \left(\sqrt{2}\right)^n \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)X + \left(\sqrt{2}\right)^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

Allez à : Exercice 19

Correction exercice 20.

Il existe un unique couple (Q,R) de polynômes, avec $d°R < 2$ tels que :

$$(X+1)^n = (X-1)^2Q + R$$

Il existe a et b réels tels que $R = aX + b$

$$(X+1)^n = (X-1)^2Q + aX + b \quad (*)$$

On pose $X = 1$

$$2^n = a + b$$

On dérive $(*)$

$$n(X+1)^{n-1} = 2(X-1)Q + (X-1)^2Q' + a$$

On pose $X = 1$

$$n2^{n-1} = a$$

Donc $b = 2^n - n2^{n-1}$

Finalement

$$R = n2^{n-1}X + 2^n - n2^{n-1}$$

Allez à : Exercice 20

Correction exercice 21.

Il existe Q_n et R_n tels que :

$$A_n = BQ_n + R_n \Leftrightarrow X^n + X + b = (X-a)^2Q_n + R_n$$

Avec $d°R_n < 2$. Donc il existe α_n et β_n tels que :

$$X^n + X + b = (X-a)^2Q_n + \alpha_n X + \beta_n \quad (1)$$

En dérivant on trouve

$$nX^{n-1} + 1 = (X-a)[2Q_n + (X-a)^2Q'_n] + \alpha_n \quad (2)$$

On fait $X = a$ dans (1) et dans (2).

$$\begin{cases} a^n + a + b = \alpha_n a + \beta_n \\ na^{n-1} + 1 = \alpha_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_n = na^n + 1 \\ \beta_n = a^n + a + b - (na^{n-1}+1)a = -(n-1)a^n + b \end{cases}$$

Donc

$$R_n = (na^n + 1)X - (n-1)a^n + b$$

Allez à : Exercice 21

Correction exercice 22.

Il existe Q et R tels que $A = BQ + R$ et $d°R < d°B = 2$ donc degré de R est inférieur ou égal à 1 on a alors $R = aX + b$ où a et b sont des réels.

$A(i) = B(i)Q(i) + R(i) \Leftrightarrow i^{2n} + 2i^n + 1 = ai + b$ car $B(i) = i^2 + 1 = 0$

Si $n = 2p$ $i^{2n} + 2i^n + 1 = ai + b \Leftrightarrow i^{4p} + 2i^{2p} + 1 = ai + b \Leftrightarrow 1 + 2(-1)^p + 1 = ai + b \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 2 + 2(-1)^p \end{cases}$$

Donc $R = 2 + 2(-1)^p$

Si $n=2p+1$

$$i^{2n}+2i^n+1=ai+b\Leftrightarrow i^{4p+2}+2i^{2p+1}+1=ai+b\Leftrightarrow -1+2(-1)^p i+1=ai+b$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=2(-1)^p\\ b=0\end{cases}$$

Donc $R=2(-1)^p X$

Allez à : Exercice 22

Correction exercice 23.

1. Les quatre racines de $X^4-1=0$, c'est-à-dire $\{1,i,-1,-i\}$ vérifie $X^4=1$ donc $(X^4)^n-1=1^n-1=0$ donc ces racines sont des racines de $X^{4n}-1$, on peut mettre X^4-1 en facteur dans ce polynôme.
2.

Première méthode :

D'après la première question il existe Q_a, Q_b, Q_c et Q_d tels que :

$$X^{4a}-1=Q_a(X^4-1)\Leftrightarrow X^{4a}=Q_a(X^4-1)+1$$
$$X^{4b}-1=Q_b(X^4-1)\Leftrightarrow X^{4b}=Q_b(X^4-1)+1$$
$$X^{4c}-1=Q_c(X^4-1)\Leftrightarrow X^{4c}=Q_c(X^4-1)+1$$
$$X^{4d}-1=Q_d(X^4-1)\Leftrightarrow X^{4d}=Q_d(X^4-1)+1$$

Donc

$$\begin{aligned}P&=X^{4a+3}+X^{4b+2}+X^{4c+1}+X^{4d}=X^{4a}X^3+X^{4b}X^2+X^{4c}X+X^{4d}\\&=(Q_a(X^4-1)+1)X^3+(Q_b(X^4-1)+1)X^2+(Q_c(X^4-1)+1)X+Q_d(X^4-1)\\&+1=(X^4-1)[Q_aX^3+Q_bX^2+Q_cX+Q_d]+X^3+X^2+X+1\\&=(X-1)(X^3+X^2+X+1)[Q_aX^3+Q_bX^2+Q_cX+Q_d]+X^3+X^2+X+1\\&=(X^3+X^2+X+1)((X-1)(Q_aX^3+Q_bX^2+Q_cX+Q_d)+1)\end{aligned}$$

Deuxième méthode : $X^{4n}-1\equiv 0\ \ [X^4-1]\Leftrightarrow X^{4n}\equiv 1\ \ [X^4-1]$

Donc

$$\begin{aligned}X^{4a+3}+X^{4b+2}+X^{4c+1}+X^{4d}&=X^{4a}X^3+X^{4b}X^2+X^{4c}X+X^{4d}\\&\equiv 1\times X^3+1\times X^2+1\times X+1\ \ [X^4-1]\equiv X^3+X^2+X+1\ \ [X^4-1]\end{aligned}$$

Donc il existe Q tel que

$$\begin{aligned}X^{4a+3}+X^{4b+2}+X^{4c+1}+X^{4d}&=(X^4-1)Q+X^3+X^2+X+1\\&=(X^3+X^2+X+1)((X-1)Q+1)\end{aligned}$$

Allez à : Exercice 23

Correction exercice 24.

1. On rappelle que $\alpha+\beta+\gamma=0$, $\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=p$ et $\alpha\beta\gamma=-q$

$$(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)$$

Donc

$$A=0^2-2p=-2p$$

2. $\alpha^3+p\alpha+q=0$ entraine que $\alpha^3=-p\alpha-q$, idem pour β et γ.

$$B=-p\alpha-q-p\beta-q-p\gamma-q=-p(\alpha+\beta+\gamma)-3q=-3q$$

3.

$$C=\alpha\beta(\alpha+\beta)+\alpha\gamma(\alpha+\gamma)+\beta\gamma(\beta+\gamma)=\alpha\beta(-\gamma)+\alpha\gamma(-\beta)+\beta\gamma(-\alpha)=-3\alpha\beta\gamma=3q$$

4.

$$\begin{aligned}D&=\alpha^3\beta+\alpha\beta^3+\alpha^3\gamma+\alpha\gamma^3+\beta^3\gamma+\beta\gamma^3=\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)+\alpha\gamma(\alpha^2+\gamma^2)+\beta\gamma(\beta^2+\gamma^2)\\&=\alpha\beta(-2p-\gamma^2)+\alpha\gamma(-2p-\beta^2)+\beta\gamma(-2p-\alpha^2)\\&=-2p(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)-\alpha\beta\gamma^2-\alpha\beta^2\gamma-\alpha^2\beta\gamma=-2p^2-\alpha\beta\gamma(\gamma+\beta+\alpha)\\&=-2p^2-(q)\times 0=-2p^2\end{aligned}$$

Allez à : Exercice 24

Correction exercice 25.

Les trois racines de P sont $\alpha, 2\alpha$ et β, les relations entre les racines et les coefficients de P donnent

$$\begin{cases} \alpha+2\alpha+\beta=0 \\ \alpha\times 2\alpha+\alpha\beta+2\alpha\beta=-63 \\ \alpha\times 2\alpha\times\beta=-162 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha+\beta=0 \\ 2\alpha^2+3\alpha\beta=-63 \\ 2\alpha^2\beta=-162 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=-3\alpha \\ 2\alpha^2+3\alpha(-3\alpha)=-63 \\ 2\alpha^2(-3\alpha)=-162 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=-3\alpha \\ -7\alpha^2=-63 \\ -6\alpha^3=-162 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta=-3\alpha \\ \alpha^2=9 \\ \alpha^3=27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=-3\alpha \\ \alpha=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=-9 \\ \alpha=3 \end{cases}$$

Les trois racines de P sont 3, 6 et -9

Allez à : Exercice 25

Correction exercice 26.

1. $0\times P(-1)=(0-2)P(0)\Leftrightarrow 0=-2P(0)\Leftrightarrow P(0)=0$
   $1\times P(0)=(1-2)P(1)\Leftrightarrow P(0)=-P(1)\Leftrightarrow 0=P(1)$
   Donc 0 et 1 sont des racines de P.
2. Soit $a\neq 0$ tel que $P(a)=0$. $aP(a-1)=(a-2)P(a)\Leftrightarrow aP(a-1)=0\Leftrightarrow P(a-1)=0$
   $a-1$ est une racine de P.
   Soit $a\neq 1$ tel que $P(a)=0$.
   $$(a+1)P(a+1-1)=(a+1-2)P(a+1)\Leftrightarrow (a+1)P(a)=(a-1)P(a+1)\Leftrightarrow 0 = (a-1)P(a+1)$$
   Donc $P(a+1)=0$, $a+1$ est une racine de P.
3. Supposons que P admette une racine a telle que $\mathcal{Re}(a)<1$ différente de 0 alors $a-1$ est racine, $a-1$ est différent de 0, donc $a-2$ est aussi racine, on en déduit aisément que pour tout $k\in\mathbb{N}$, $a-k$ est racine de P, ce qui voudrait dire que P admettrait une infinité de solution or un polynôme non nul admet un nombre fini de solutions.
   Supposons que P admette une racine a telle que $\mathcal{Re}(a)>1$ différente de 1 alors $a+1$ est racine, $a+1$ est différent de 1, donc $a+2$ est aussi racine, on en déduit aisément que pour tout $k\in\mathbb{N}$, $a+k$ est racine de P, ce qui voudrait dire que P admettrait une infinité de solution or un polynôme non nul admet un nombre fini de solutions.
   0 et 1 sont les deux seules racines de P si P n'est pas le polynôme nul.
4. Si P n'est pas le polynôme nul, comme 0 et 1 sont les seules racines de P il existe $\alpha\neq 0$ tels que $P=\alpha X^k(X-1)^l$, et si $P=0$ alors $P=0\times X^k(X-1)^l$ (c'est-à-dire que $\alpha=0$).
5. Si P vérifie $XP(X-1)=(X-2)P(X)$ alors P est de la forme $P=\alpha X^k(X-1)^l$, il faut étudier la réciproque, c'est-à-dire chercher parmi ces polynômes lesquels sont effectivement solution.
   On remplace $P=\alpha X^k(X-1)^l$ dans $XP(X-1)=(X-2)P(X)$, on trouve que :
   $$X\alpha(X-1)^k(X-2)^l=(X-2)\alpha X^k(X-1)^l$$
   Les puissances en $X-2$ sont les mêmes donc $l=1$.
   Les puissances en $X-1$ sont les mêmes donc $k=l=1$
   On vérifie qu'alors les puissances en X sont les mêmes, finalement
   $$P=\alpha X(X-1)$$

Allez à : Exercice 26

Correction exercice 27.

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -2X & & +X^3+X^4 & 1+X+X^2 \\ \cline{5-5} 1 & +X & +X^2 & & 1-3X+2X^2 \\ \cline{1-4} & -3X & -X^2 & +X^3+X^4 & \\ & -3X & -3X^2 & -3X^3 & \\ \cline{1-4} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|}
\hline
2X^2+4X^3+X^4 \\
2X^2+2X^3+2X^4 \\
\hline
2X^3-X^4
\end{array}$$

$$1-2X+X^3+X^4=(1+X+X^2)(1-3X+X^2)+X^3(2-X)$$

Allez à : Exercice 27

Correction exercice 28.

1.

$$\begin{array}{r|l}
X^3-X^2-X-2 & X^3-1 \\
\cline{2-2}
X^3\qquad\quad -1 & 1 \\
\cline{1-1}
-X^2-X-1 &
\end{array}$$

$$X^3-X^2-X-2=(X^3-1)\times 1+(-X^2-X-1)$$

$$\begin{array}{r|l}
X^3\qquad\quad -1 & X^2+X+1 \\
\cline{2-2}
X^3+X^2+X & X-1 \\
\cline{1-1}
-X^2-X-1 & \\
-X^2-X-1 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

$$X^3-1=(X^2+X+1)(X-1)$$

$$PGCD(P,Q)=\frac{-X^2-X-1}{-1}=X^2+X+1$$

2. X^2+X+1 est un diviseur de P (et de Q bien sur) donc on peut mettre X^2+X+1 en facteur dans P.

$$\begin{array}{r|l}
X^3-X^2\quad -X-2 & X^2+X+1 \\
\cline{2-2}
X^3+X^2\quad +X & X-2 \\
\cline{1-1}
-2X^2-2X-2 & \\
-2X^2-2X-2 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Comme X^2+X+1 est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$, la factorisation de P est :

$$P=(X-2)(X^2+X+1)$$

Et il est évident d'après la deuxième division de l'algorithme d'Euclidienne

$$Q=(X-1)(X^2+X+1)$$

3. Il est alors clair que

$$PGCD(P,Q)=X^2+X+1$$

4. Les deux racines complexes de X^2+X+1 sont $j=e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $\overline{j}=j^2=e^{\frac{4i\pi}{3}}$

Donc

$$P=(X-2)(X-j)(X-j^2)$$

Allez à : Exercice 28

Correction exercice 29.

$$\begin{array}{r|l}
X^5+X^4-6X^3-X^2-X\ +6 & X^4+2X^3-X-2 \\
\cline{2-2}
X^5+2X^4\qquad -X^2-2X\qquad & X-1 \\
\cline{1-1}
-X^4-6X^3\qquad +X\ +6 & \\
-X^4-2X^3\qquad +X+2 & \\
\cline{1-1}
-4X^3\qquad\qquad +4 &
\end{array}$$

On peut « éliminer » le -4 dans $-4X^3+4$

$$\begin{array}{rrr|l} X^4+2X^3 & & -X-2 & X^3-1 \\ \cline{4-4} X^4 & & -X & X+2 \\ \cline{1-3} & 2X^3 & -2 & \\ & 2X^3 & -2 & \\ \cline{1-3} & & 0 & \end{array}$$

Donc le $PGCD$ de P et Q est

$$D=\frac{-4X^3+4}{-4}=X^3-1$$

Les racines communes de P et Q sont celles de X^3-1, c'est-à-dire $1, j$ et j^2.

Allez à : Exercice 29

Correction exercice 30.

$$\begin{array}{rr|l} X^5+2X^4+2X^3 & -X^2-2X-2 & X^4+3X^3+3X^2-2 \\ \cline{3-3} X^5+3X^4+3X^3 & -2X & X-1 \\ \cline{1-2} -X^4-X^3-X^2 & -2 & \\ -X^4-3X^3-3X^2 & +2 & \\ \cline{1-2} 2X^3+2X^2 & -4 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rr|l} X^4+3X^3+3X^2 & -2 & 2X^3+2X^2-4 \\ \cline{3-3} X^4+X^3 & -2X & \frac{1}{2}X+1 \\ \cline{1-2} 2X^3+3X^2 & +2X-2 & \\ 2X^3+2X^2 & -4 & \\ \cline{1-2} X^2 & +2X+2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rr|l} 2X^3+2X^2 & -4 & X^2+2X+2 \\ \cline{3-3} 2X^3+4X^2 & +4X & 2X \\ \cline{1-2} -2X^2-4X & -4 & \\ -2X^2-4X & -4 & \\ \cline{1-2} & 0 & \end{array}$$

Le P.G.C.D. est le dernier reste non nul unitaire donc X^2+2X+2

A et B sont divisible par X^2+2X+2 (qui n'a pas de racine réelle)

$$\begin{array}{rr|l} X^5+2X^4+2X^3 & -X^2-2X-2 & X^2+2X+2 \\ \cline{3-3} X^5+2X^4+2X^3 & & X^3-1 \\ \cline{1-2} & -X^2-2X-2 & \\ & -X^2-2X-2 & \\ \cline{1-2} & 0 & \end{array}$$

Donc

$$A=(X^2+2X+2)(X^3-1)$$

Comme $X^3-1=(X-1)(X^2+X+1)$ et que X^2+X+1 n'a pas de racine réelle, la factorisation de A dans $\mathbb{R}[X]$ est

$$A=(X-1)(X^2+2X+2)(X^2+X+1)$$

$$\begin{array}{rr|l} X^4+3X^3+3X^2 & -2 & X^2+2X+2 \\ \cline{3-3} X^4+2X^3+2X^2 & & X^2+X-1 \\ \cline{1-2} X^3+X^2 & -2 & \\ X^3+2X^2+2X & & \\ \cline{1-2} -X^2-2X & -2 & \\ -X^2-2X & -2 & \\ \cline{1-2} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|}\hline 0\end{array}$$

Donc

$$B=(X^2+2X+2)(X^2+X-1)$$

X^2+X-1 admet deux racines réelles

$$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\quad \text{et}\quad \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$$B=(X^2+2X+2)\left(X+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(X+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

Allez à : Exercice 30

Correction exercice 31.

$$P=X^2-2X+1$$

$$\begin{array}{r|l} X^2-2X+1 & X^2+1 \\ \cline{2-2} X^2\qquad\ +1 & 1 \\ \cline{1-1} -2X & \end{array}$$

$$X^2-2X+1=1\times(X^2+1)+(-2X)$$

$$\begin{array}{r|l} X^2+1 & -2X \\ \cline{2-2} X^2\quad & -\frac{1}{2}X \\ \cline{1-1} 1 & \end{array}$$

$$X^2+1=-2X\times\left(-\frac{1}{2}X\right)+1$$

$$1=(X^2+1)+(-2X)\left(-\frac{1}{2}X\right)=(X^2+1)+\left((X^2-2X+1)-1\times(X^2+1)\right)\left(-\frac{1}{2}X\right)$$

$$\Leftrightarrow 1=\left(1+\frac{1}{2}X\right)(X^2+1)+\left(-\frac{1}{2}X\right)(X-1)^2$$

Allez à : Exercice 31

Correction exercice 32.

1.

$$\begin{array}{r|l} 2X^4+X^3\qquad\quad -2X\ -1 & 2X^4-X^3-3X^2+X+1 \\ \cline{2-2} 2X^4-X^3-3X^2+X\ +1 & 1 \\ \cline{1-1} 2X^3+3X^2-3X-2 & \end{array}$$

$$P=1\times Q+2X^3+3X^2-3X-2$$

$$\begin{array}{r|l} 2X^4-X^3\ -3X^2\ \ +X+1 & 2X^3+3X^2-3X-2 \\ \cline{2-2} 2X^4+3X^3-3X^2-2X\qquad & X-2 \\ \cline{1-1} -4X^3\qquad\quad +3X+1 & \\ -4X^3-6X^2+6X+4 & \\ \cline{1-1} 6X^2-3X-3 & \end{array}$$

$$Q=(X-2)(2X^3+3X^2-3X-2)+6X^2-3X-3$$

$$\begin{array}{r|l} 2X^3+3X^2-3X-2 & 6X^2-3X-3 \\ \cline{2-2} 2X^3\ \ -X^2\ \ -X\qquad & \frac{1}{3}X+\frac{2}{3} \\ \cline{1-1} 4X^2-2X-2 & \\ 4X^2-2X-0 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

$$6X^2-3X-3=Q-(X-2)(2X^3+3X^2-3X-2)=Q-(X-2)(P-Q)$$
$$=-(X-2)P+(X-1)Q$$

$$X^2-\frac{1}{2}X-\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}(X-2)P+\frac{1}{6}(X-1)Q$$

2. Les racines communes de P et Q sont celles de leur $PGCD$, c'est-à-dire celles de $X^2-\frac{1}{2}X-\frac{1}{2}$ soit $X_1=1$ et $X_2=-\frac{1}{2}$.

Allez à : Exercice 32

Correction exercice 33.

1. $P'=5X^4+4X^3+6X^2+4X+1$

$$\begin{array}{r|l}
X^5+X^4\quad+2X^3\quad+2X^2+X+1 & 5X^4+4X^3+6X^2+4X+1 \\ \cline{2-2}
X^5+\frac{4}{5}X^4+\frac{6}{5}X^3\quad+\frac{4}{5}X^2+\frac{X}{5} & \frac{1}{5}X+\frac{1}{25} \\ \cline{1-1}
\frac{1}{5}X^4+\frac{4}{5}X^3\quad+\frac{6}{5}X^2+\frac{4}{5}X+1 & \\
\frac{1}{5}X^4+\frac{4}{25}X^3+\frac{6}{25}X^2+\frac{4}{25}X+\frac{1}{25} & \\ \cline{1-1}
\frac{16}{25}X^3+\frac{24}{25}X^2+\frac{16}{25}X+\frac{24}{25} &
\end{array}$$

Pour éviter les fractions on remarque que $\frac{16}{25}X^3+\frac{24}{25}X^2+\frac{16}{25}X+\frac{24}{25}=\frac{8}{25}(2X^3+3X^2+2X+3)$

$$\begin{array}{r|l}
5X^4+4X^3\quad+6X^2\quad+4X+1 & 2X^3+3X^2+2X+3 \\ \cline{2-2}
5X^4+\frac{15}{2}X^3+5X^2\quad+\frac{15}{2}X\quad & \frac{5}{2}X-\frac{7}{4} \\ \cline{1-1}
-\frac{7}{2}X^3+X^2\quad-\frac{7}{2}X+1 & \\
-\frac{7}{2}X^3-\frac{21}{4}X^2-\frac{7}{2}X-\frac{21}{4} & \\ \cline{1-1}
\frac{25}{4}X^2\qquad\quad+\frac{25}{4} &
\end{array}$$

Pour éviter les fractions on remarque que $\frac{25}{4}X^2+\frac{25}{4}=\frac{25}{4}(X^2+1)$

$$\begin{array}{r|l}
2X^3+3X^2+2X+3 & X^2+1 \\ \cline{2-2}
2X^3\qquad\quad+2X\quad & 2X+3 \\ \cline{1-1}
3X^2\qquad+3 & \\
3X^2\qquad+3 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Le PGCD de P et P' est X^2+1.

2. Les racines communes à P et P' sont i et $-i$, les racines multiples de P sont i et $-i$. Ce sont au moins des racines doubles. Ce ne sont pas des racines triples car sinon P auraient 6 racines en comptant leurs multiplicités.
3. P est divisible par $(X-i)^2(X+i)^2=[(X-i)(X+i)]^2=[X^2+1]^2$.
4. il reste à diviser P par $(X^2+1)^2=X^4+2X^2+1$ et on trouve, après calculs, $X+1$, donc

$$P=(X^2+1)^2(X+1)$$

Allez à : Exercice 33

Correction exercice 34.

1. Oui ! Par exemple $P=X^3+1$
2. Si $P=aX^3+bX^2+cX+d$, avec $a\neq 0$, pour qu'il soit de degré exactement 3.

$$\begin{aligned}P(X+1)-P(X)&=a(X+1)^3+b(X+1)^2+c(X+1)+d-aX^3-bX^2-cX-d\\&=a(X^3+3X^2+3X+1)+b(X^2+2X+1)+c(X+1)+d-aX^3-bX^2-cX-d\\&=3aX^2+(3a+2b)X+a+b+c\end{aligned}$$

Le degré de ce polynôme est 2 puisque $a\neq 0$

3.

$$\begin{cases} P(X+1)-P(X)=X^2-1 \\ P(0)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3a+b)X^2+(3a+2b+c)X+a+b+c=X^2-1 \\ P(0)=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \begin{cases} 3a=1 \\ 3a+2b=0 \\ a+b+c=-1 \\ d=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{3} \\ 2b=-3a=-1 \\ c=-1-a-b \\ d=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{3} \\ b=-\frac{1}{2} \\ c=-1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=-\frac{5}{6} \\ d=1 \end{cases}$$

$$P=\frac{1}{3}X^3-\frac{1}{2}X^2-\frac{5}{6}X+1$$

Allez à : Exercice 34

Correction exercice 35.

1. $(X-1)^n$ n'a qu'une racine $X=1$, or 1 est racine simple de X^n-1 donc
$$PGCD\big((X^n-1),(X-1)^n\big)=X-1$$
2. D'après le théorème de Bézout il existe (U,V) tels que :
$$(X^3-1)U+(X-1)^3V=X-1$$
Cette équation équivaut à :
$$(X^2+X+1)U+(X^2-2X+1)=1$$
Car $X^3-1=(X-1)(X^2+X+1)$ et $(X-1)^3=(X-1)(X^2-2X+1)$

$$\begin{array}{c|l} X^2-2X+1 & X^2+X+1 \\ \cline{2-2} X^2+X\ \ +1 & 1 \\ \hline -3X & \end{array}$$

Donc
$$X^2-2X+1=1\times(X^2+X+1)+(-3X)$$

$$\begin{array}{l|c} X^2+X+1 & -3X \\ \cline{2-2} X^2 & -\frac{1}{3}X-\frac{1}{3} \\ \hline \quad X+1 & \\ \quad X & \\ \hline \qquad 1 & \end{array}$$

Donc
$$X^2+X+1=(-3X)\left(-\frac{1}{3}X-\frac{1}{3}\right)+1$$
On en tire que :
$$\begin{aligned} 1 &= (X^2+X+1)-(-3X)\left(-\frac{1}{3}X-\frac{1}{3}\right) \\ &= X^2+X+1-\big((X^2-2X+1)-1\times(X^2+X+1)\big)\left(-\frac{1}{3}X-\frac{1}{3}\right) \\ &= -\left(-\frac{1}{3}X-\frac{1}{3}\right)(X^2-2X+1)+\left(1+\left(-\frac{1}{3}X-\frac{1}{3}\right)\right)(X^2+X+1) \\ &= \left(\frac{1}{3}X+\frac{1}{3}\right)(X^2-2X+1)+\left(-\frac{1}{3}X+\frac{2}{3}\right)(X^2+X+1) \end{aligned}$$
Donc
$$U=-\frac{1}{3}X+\frac{2}{3}$$
Et

$$V=\frac{1}{3}X+\frac{1}{3}$$

Allez à : Exercice 35

Correction exercice 36.

1.

$$\begin{array}{r|l} X^4-3X^3+3X^2-3X+2 & X^4+3X^3+3X^2+3X+2 \\ \cline{2-2} X^4+3X^3+3X^2+3X+2 & 1 \\ \cline{1-1} -6X^3 \qquad -6X & \end{array}$$

$$X^4-3X^3+2X^2-3X+2=(X^4+3X^3+2X^2+3X+2\,)\times 1+(-6X^3-6)$$

$$\begin{array}{r|l} X^4+3X^3+3X^2+3X+2 & -6X^3-6X \\ \cline{2-2} X^4 \qquad +\ X^2 \qquad\qquad & -\frac{1}{6}X-\frac{1}{2} \\ \cline{1-1} 3X^3+2X^2+3X+2 & \\ 3X^3 \qquad\quad +3X & \\ \cline{1-1} 2X^2 \qquad +2 & \end{array}$$

$$X^4+3X^3+3X^2+3X+2=(-6X^3-6X)\left(-\frac{1}{6}X-\frac{1}{2}\right)+2X^2+2$$

$$\begin{array}{r|l} -6X^3-6X & 2X^2+2 \\ \cline{2-2} -6X^3-6X & -\frac{1}{3}X \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

$$-6X^3-6X=(2X^2+2)\left(-\frac{1}{3}X\right)$$

Donc

$$PGCD(X^4-3X^3+3X^2-3X+2,X^4+3X^3+3X^2+3X+2)=\frac{2X^2+2}{2}=X^2+1$$

On trouve une identité de Bézout de la façon suivante :

$$\begin{aligned} 2X^2+2 &= X^4+3X^3+3X^2+3X+2+(-6X^3-6X)\left(-\frac{1}{6}X-\frac{1}{2}\right) \\ &= X^4+3X^3+3X^2+3X+2 \\ &\quad -(X^4-3X^3+2X^2-3X+2-(X^4+3X^3+2X^2+3X+2\,)\times 1)\left(-\frac{1}{6}X-\frac{1}{2}\right) \\ &= (X^4+3X^3+3X^2+3X+2)\left(1-\left(-\frac{1}{6}X-\frac{1}{2}\right)\right) \\ &\quad +(X^4-3X^3+2X^2-3X+2)\left(\frac{1}{6}X+\frac{1}{2}\right) \\ &= (X^4+3X^3+3X^2+3X+2)\left(\frac{1}{6}X+\frac{3}{2}\right) \\ &\quad +(X^4-3X^3+2X^2-3X+2)\left(\frac{1}{6}X+\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Puis il reste à diviser par 2

$$X^2+1=(X^4+3X^3+3X^2+3X+2)\left(\frac{1}{12}X+\frac{3}{4}\right)+(X^4-3X^3+2X^2-3X+2)\left(\frac{1}{12}X+\frac{1}{4}\right)$$

2. En divisant P par X^2+1, on trouve :

$$P=X^4-3X^3+3X^2-3X+2=(X^2-3X+2)(X^2+1)$$

Il reste à factoriser X^2-3X+2, ce polynôme a deux racines réelles 1 et 2 donc

$$P = (X - 1)(X - 2)(X^2 + 1)$$

En divisant Q par $X^2 + 1$, on trouve :

$$Q = X^4 + 3X^3 + 3X^2 + 3X + 2 = (X^2 + 3X + 2)(X^2 + 1)$$

Il reste à factoriser $X^2 + 3X + 2$, ce polynôme a deux racines réelles -1 et -2 donc

$$Q = (X + 1)(X + 2)(X^2 + 1)$$

Allez à : Exercice 36

Correction exercice 37.

1. Je vais juste écrire les résultats des divisions successives de l'algorithme d'Euclide

$$X^2 + 2X + 1 = 1 \times (X^2 - 2X + 1) + 4X$$

$$X^2 - 2X + 1 = \left(\frac{1}{4}X - \frac{1}{2}\right) \times 4X + 1$$

On en déduit une identité de Bézout

$$1 = (X - 1)^2 - \left(\frac{1}{4}X - \frac{1}{2}\right) \times 4X = (X - 1)^2 - \left(\frac{1}{4}X - \frac{1}{2}\right)\left((X + 1)^2 - 1 \times (X - 1)^2\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{4}X + \frac{1}{2}\right)(X + 1)^2 + \left(\frac{1}{4}X + \frac{1}{2}\right)(X - 1)^2$$

On note

$$A_0 = -\frac{1}{4}X + \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad B_0 = \frac{1}{4}X + \frac{1}{2}$$

2. On a

$$\begin{cases} (X + 1)^2 A + (X - 1)^2 B = 1 \\ (X + 1)^2 A_0 + (X - 1)^2 B_0 = 1 \end{cases}$$

En faisant la soustraction de ces deux équations

$$(X + 1)^2(A - A_0) + (X - 1)^2(B - B_0) = 0 \Leftrightarrow (X + 1)^2(A - A_0) = -(X - 1)^2(B - B_0)$$

$(X + 1)^2$ divise $-(X - 1)^2(B - B_0)$ comme $(X + 1)^2$ et $(X - 1)^2$ sont premiers entre eux (ils n'ont aucune racine en commun), d'après le théorème de Gauss $(X + 1)^2$ divise $-(B - B_0)$, il existe $U \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$-(B - B_0) = U(X + 1)^2 \Leftrightarrow B = B_0 - U(X + 1)^2$$

On remplace dans $(X + 1)^2(A - A_0) = -(X - 1)^2(B - B_0)$

$$(X + 1)^2(A - A_0) = (X - 1)^2 U(X + 1)^2 \Leftrightarrow A - A_0 = (X - 1)^2 U \Leftrightarrow A = A_0 + U(X - 1)^2$$

L'ensemble des couples $(A = A_0 + U(X - 1)^2, B_0 - U(X + 1)^2)$ avec $U \in \mathbb{R}[X]$ quelconque sont les solutions de (E).

3. On cherche les polynômes P qui sont de la forme

$$\begin{cases} P - 1 = (X + 1)^2 Q_1 \\ P + 1 = (X - 1)^2 Q_2 \end{cases}$$

Où Q_1 et Q_2 sont deux polynômes.

En faisant la soustraction de ces deux égalités

$$2 = (X - 1)^2 Q_2 - (X + 1)^2 Q_1 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2}Q_1\right)(X + 1)^2 + \left(\frac{1}{2}Q_2\right)(X - 1)^2 = 1$$

D'après la deuxième question, il existe $U \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}Q_1 = A_0 + U(X - 1)^2 \\ \frac{1}{2}Q_2 = B_0 - U(X + 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q_1 = -2A_0 - 2U(X - 1)^2 \\ Q_2 = 2B_0 - 2U(X + 1)^2 \end{cases}$$

Ce qui entraine que

$$P - 1 = (X + 1)^2(-2A_0 - 2U(X - 1)^2) \Leftrightarrow P = 1 - 2A_0(X + 1)^2 - 2U(X + 1)^2(X - 1)^2$$

$$1-2A_0(X+1)=1-2\left(-\frac{1}{4}X+\frac{1}{2}\right)(X+1)=1+\left(\frac{1}{2}X-1\right)(X^2+2X+1)$$
$$=1+\frac{1}{2}X^3+X^2+\frac{1}{2}X-X^2-2X-1=\frac{1}{2}X^3-\frac{3}{2}X$$

On pose aussi $V=-2U$. Par conséquent

$$P=\frac{1}{2}X^3-\frac{3}{2}X+V(X^2-1)^2,\quad V\in\mathbb{R}[X]$$

Il faut faire une réciproque

$\frac{1}{2}X^3-\frac{3}{2}X-1$ admet -1 comme racine double (c'est facile à vérifier) et 2 comme racine simple.

$$P-1=\frac{1}{2}X^3-\frac{3}{2}X-1+V(X^2-1)^2=\frac{1}{2}(X+1)^2(X-2)+V(X+1)^2(X-1)^2$$
$$=(X+1)^2\left[\frac{1}{2}(X-2)+V(X-1)^2\right]$$

$\frac{1}{2}X^3-\frac{3}{2}X+1$ admet 1 comme racine double (c'est facile à vérifier) et -2 comme racine simple.

$$P+1=\frac{1}{2}X^3-\frac{3}{2}X+1+V(X^2-1)^2=\frac{1}{2}(X-1)^2(X+2)+V(X+1)^2(X-1)^2$$
$$=(X-1)^2\left[\frac{1}{2}(X+2)+V(X+1)^2\right]$$

La réciproque est vérifiée

Allez à : Exercice 37

Correction exercice 38.

$$\begin{array}{l|l} X^6 \qquad -X^4 \qquad -X^2 \qquad +1 & X^4+2X^3-2X-1 \\ \cline{2-2} X^6+2X^5 \qquad -2X^3-X^2 & X^2-2X+3 \\ \hline -2X^5-X^4+2X^3 \qquad +1 & \\ -2X^5-4X^4 \qquad +4X^2+2X & \\ \hline 3X^4+2X^3-4X^2-2X+1 & \\ 3X^4+6X^3 \qquad -6X-3 & \\ \hline -4X^3-4X^2+4X+4 & \end{array}$$

$$PGCD(P,Q)=PGCD(Q,-4X^3-4X^2+4X+4)=PGCD(Q,X^3+X^2-X-1)$$

$$\begin{array}{l|l} X^4+2X^3 \qquad -2X-1 & X^3+X^2-X-1 \\ \cline{2-2} X^4+X^3-X^2-X & X+1 \\ \hline X^3+X^2-X-1 & \\ X^3+X^2-X-1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Donc $PGCD(P,Q)=X^3+X^2-X-1=X^2(X+1)-(X+1)=(X^2-1)(X+1)=(X-1)(X+1)^2$

Les racines complexes communes à P et Q sont 1 de multiplicité 1 et -1 de multiplicité 2.

Allez à : Exercice 38

Correction exercice 39.

On pose $d°P=n$.

P' divise P si et seulement si il existe un polynôme Q tel que :

$$P=QP'$$
$$d°P=n \text{ et } d°P'=n-1\Rightarrow d°Q=1$$

Donc Q admet une racine complexe α.

On pose $Q=aX+b$ et $P=a_nX^n+\cdots+a_1X+a_0$ (avec $a_n\neq 0$) alors $P'=na_nX^{n-1}+\cdots+a_1$

En identifiant les coefficients dominant on trouve que :

$$a_n = na \Leftrightarrow a_n = \frac{1}{n}$$

Première méthode :

La formule de Taylor pour le polynôme P en α donne

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k (X-\alpha)^k = a_0 + a_1(X-\alpha) + a_2(X-\alpha)^2 + \cdots + a_n(X-\alpha)^n$$

Donc

$$P' = \sum_{k=0}^{n} a_k k (X-\alpha)^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} a_k k (X-\alpha)^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} a_k k (X-\alpha)^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} (X-\alpha)^k$$
$$= a_1 + 2a_2(X-\alpha) + \cdots + na_n(X-\alpha)^{n-1}$$

En changeant k en $k+1$.

Comme Q est un polynôme de degré 1 dont α est une racine donc $Q = \frac{1}{n}(X-\alpha)$

On remplace ces deux expressions dans $P = QP'$.

$$a_0 + a_1(X-\alpha) + a_2(X-\alpha)^2 + \cdots + a_n(X-\alpha)^n$$
$$= a(X-\alpha)[a_1 + 2a_2(X-\alpha) + \cdots + na_n(X-\alpha)^{n-1}]$$
$$\Leftrightarrow a_0 + a_1(X-\alpha) + a_2(X-\alpha)^2 + \cdots + a_k(X-\alpha)^k + \cdots + a_n(X-\alpha)^n$$
$$= \frac{1}{n}a_1(X-\alpha) + \frac{2}{n}a_2(X-\alpha)^2 + \cdots + \frac{k}{n}a_k(X-\alpha)^k \ldots + a_n(X-\alpha)^n$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = \dfrac{2}{n}a_1 \\ \vdots \\ a_k = \dfrac{k+1}{n}a_k \\ \vdots \\ a_n = a_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 0 \\ \vdots \\ a_k = 0 \\ \vdots \\ a_n = a_n \end{cases}$$

Donc

$$P = a_n(X-\alpha)^n$$

Deuxième méthode :

En dérivant $P = QP'$, et on rappelle que $Q' = \frac{1}{n}$

$$P' = Q'P' + QP'' \Leftrightarrow P' = \frac{1}{n}P' + QP'' \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{n}\right)P' = QP'' \Leftrightarrow P' = \frac{n}{n-1}QP''$$

Donc

$$P = QP' = \frac{n}{n-1}Q^2P''$$

En dérivant $\left(1 - \frac{1}{n}\right)P' = QP''$

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)P'' = Q'P'' + QP''' = \frac{1}{n}P'' + QP''' \Leftrightarrow \left(1 - \frac{2}{n}\right)P'' = QP''' \Leftrightarrow P'' = \frac{n}{n-2}QP'''$$

Donc

$$P = \frac{n}{n-1}Q^2P'' = \frac{n^2}{(n-1)(n-2)}Q^3P'''$$

Pour tout $k \in \{0,1,\ldots,n-1\}$. On montre par récurrence que

$$\left(1 - \frac{k}{n}\right)P^{(k)} = QP^{(k+1)}$$

Et que

$$P=\frac{n^k}{(n-1)(n-2)\dots(n-k)}Q^{k+1}P^{(k+1)}$$

On dérive $\left(1-\frac{k}{n}\right)P^{(k)}=QP^{(k+1)}$

$$\left(1-\frac{k}{n}\right)P^{(k+1)}=Q'P^{(k+1)}+QP^{(k+2)}=\frac{1}{n}P^{(k+1)}+QP^{(k+2)}\Leftrightarrow\left(1-\frac{k+1}{n}\right)P^{(k+1)}=QP^{(k+2)}$$

$$\Leftrightarrow P^{(k+1)}=\frac{n}{n-k-1}QP^{(k+2)}$$

$$P=\frac{n^k}{(n-1)(n-2)\dots(n-k)}Q^{k+1}P^{(k+1)}=\frac{n^k}{(n-1)(n-2)\dots(n-k)}Q^{k+1}\frac{n}{n-k-1}QP^{(k+2)}$$

$$=\frac{n^{k+1}}{(n-1)(n-2)\dots(n-k)(n-(k+1))}Q^{k+2}P^{(k+2)}$$

Cette relation étant vraie au rang 0, elle est vraie pour tout $k\le n-1$.
On l'applique au rang $n-1$:

$$P=\frac{n^{n-1}}{(n-1)(n-2)\dots(n-(n-1))}Q^nP^{(n)}$$

$P^{(n)}=n\times(n-1)\times\dots\times 2\times 1\times a_n$ (ce qui est important c'est que c'est une constante).
Peu importe la constante, il est clair que $P=KQ^n$, comme Q est un polynôme de degré 1, on peut écrire ce polynôme sous la forme :

$$P=\lambda(X-\alpha)^n$$

Allez à : Exercice 39

Correction exercice 40.

1.

$$\frac{P(X)}{X^2}=\frac{2X^4+3X^3-X^2+3X+2}{X^2}=2X^2+3X-1+\frac{3}{X}+\frac{2}{X^2}$$

Comme

$$Y^2=X^2+2+\frac{1}{X^2}\Rightarrow X^2+\frac{1}{X^2}=Y^2-2$$

On a

$$\frac{P(X)}{X^2}=2\left(X^2+\frac{1}{X^2}\right)+3\left(X+\frac{1}{X}\right)-1=2(Y^2-2)+3Y-1=2Y^2+3Y-5$$

Les racines de Q sont 1 et $-\frac{5}{2}$

Donc les racines de P vérifient

$$\left\{\begin{array}{l}X+\frac{1}{X}=1\\X+\frac{1}{X}=\frac{5}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}X^2+1=X\\\text{ou}\\X^2+1=\frac{5}{2}X\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}X^2-X+1=0\\\text{ou}\\X^2-\frac{5}{2}X+1=0\end{array}\right.$$

Les racines de $X^2-X+1=0$ sont

$$-j=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\quad\text{et}\quad -j^2=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Et celles de $X^2-\frac{5}{2}X+1=0$ sont

$$\frac{1}{2}\quad\text{et}\quad 2$$

On en déduit la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$

$$P(X)=2\left(X-\frac{1}{2}\right)(X-2)(X^2-X+1)$$

Et dans $\mathbb{C}[X]$

$$P(X)=2\left(X-\frac{1}{2}\right)(X-2)(X+j)(X+j^2)$$

Allez à : Exercice 40

Correction exercice 41.

1. Comme $\sin(n\theta)\neq 0$, $d^\circ P=n$.

$$P=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\sin(k\theta)X^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(k\theta)X^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{e^{ik\theta}-e^{-ik\theta}}{2i}X^k$$
$$=\frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{ik\theta}X^k-\frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{-ik\theta}X^k=\frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(e^{i\theta}X\right)^k-\frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(e^{-i\theta}X\right)^k$$
$$=\frac{1}{2i}\left(1+e^{i\theta}X\right)^n-\frac{1}{2i}\left(1+e^{-i\theta}X\right)^n$$

Les racines $z\in\mathbb{C}$ de P vérifient

$$\frac{1}{2i}\left(1+e^{i\theta}z\right)^n-\frac{1}{2i}\left(1+e^{-i\theta}z\right)^n=0\Leftrightarrow\left(1+e^{i\theta}z\right)^n=\left(1+e^{-i\theta}z\right)^n\Leftrightarrow\left(\frac{1+e^{i\theta}z}{1+e^{-i\theta}z}\right)^n=1$$
$$\Leftrightarrow\exists k\in\{0,1,\dots,n-1\},\frac{1+e^{i\theta}z}{1+e^{-i\theta}z}=e^{\frac{2ik\pi}{n}}\Leftrightarrow\exists k\in\{0,1,\dots,n-1\},1+e^{i\theta}z=e^{\frac{2ik\pi}{n}}\left(1+e^{-i\theta}z\right)$$
$$\Leftrightarrow\exists k\in\{0,1,\dots,n-1\},e^{i\theta}z-e^{\frac{2ik\pi}{n}}e^{-i\theta}z=e^{\frac{2ik\pi}{n}}-1$$
$$\Leftrightarrow\exists k\in\{0,1,\dots,n-1\},z\left(e^{i\theta}-e^{\frac{2ik\pi}{n}}e^{-i\theta}\right)=e^{\frac{2ik\pi}{n}}-1$$

Il faut quand même vérifier que $e^{i\theta}-e^{\frac{2ik\pi}{n}}e^{-i\theta}\neq 0$

$$e^{i\theta}-e^{\frac{2ik\pi}{n}}e^{-i\theta}=0\Leftrightarrow e^{2i\theta}=e^{\frac{2ik\pi}{n}}\Leftrightarrow\exists j\in\mathbb{Z},2\theta=\frac{2k\pi}{n}+2l\pi\Leftrightarrow\exists j\in\mathbb{Z},\theta=\frac{k\pi}{n}+l\pi\Leftrightarrow\exists j\in\mathbb{Z},n\theta=k\pi+nl\pi\Leftrightarrow\sin(n\theta)=0$$

Ce qui n'est pas possible d'après l'énoncé.

$$P(z)=0\Leftrightarrow\exists k\in\{0,1,\dots,n-1\},z=\frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}-1}{e^{i\theta}-e^{\frac{2ik\pi}{n}}e^{-i\theta}}$$

Les n racines de P sont les complexes $z_k=\frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}-1}{e^{i\theta}-e^{\frac{2ik\pi}{n}}e^{-i\theta}}$ avec $k\in\{0,1,\dots,n-1\}$

2.

$$\overline{z_k}=\overline{\frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}-1}{e^{i\theta}-e^{\frac{2ik\pi}{n}}e^{-i\theta}}}=\frac{e^{-\frac{2ik\pi}{n}}-1}{e^{-i\theta}-e^{-\frac{2ik\pi}{n}}e^{i\theta}}=\frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}\left(e^{-\frac{2ik\pi}{n}}-1\right)}{e^{\frac{2ik\pi}{n}}\left(e^{-i\theta}-e^{-\frac{2ik\pi}{n}}e^{i\theta}\right)}=\frac{1-e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{e^{\frac{2ik\pi}{n}}e^{-i\theta}-e^{i\theta}}$$
$$=\frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}-1}{e^{i\theta}-e^{\frac{2ik\pi}{n}}e^{-i\theta}}=z_k$$

Donc ces complexes sont des réels.

Allez à : Exercice 41

Correction exercice 42.

Le degré du numérateur est supérieur au degré du dénominateur, il faut diviser X^4-X+2 par $(X-1)(X^2-1)=X^3-X^2-X+1$

$X^4 \qquad -X+2$	X^3-X^2-X+1
$X^4-X^3-X^2+X$	$X+1$
X^3+X^2-2X+2	
X^3-X^2-X+1	

$$\begin{array}{r|}\hline 2X^2 \quad -X+1\end{array}$$

$$F(X)=\frac{X^4-X+2}{(X-1)(X^2-1)}=X+1+\frac{2X^2-X+1}{(X-1)(X^2-1)}$$

On pose

$$G(X)=\frac{2X^2-X+1}{(X-1)(X^2-1)}=\frac{2X^2-X+1}{(X-1)^2(X+1)}=\frac{a}{(X-1)^2}+\frac{b}{X-1}+\frac{c}{X+1}$$

Je multiplie par $(X-1)^2$ puis $X=1$

$$a=\left[\frac{2X^2-X+1}{X+1}\right]_{X=1}=\frac{2}{2}=1$$

Je multiplie par $X+1$ puis $X=-1$

$$c=\left[\frac{2X^2-X+1}{(X-1)^2}\right]_{X=-1}=\frac{4}{4}=1$$

Je multiplie par X puis X tend vers l'infini.

$2=b+c$ donc $b=1$.

Donc

$$F(X)=X+1+\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{1}{X-1}+\frac{1}{X+1}$$

Allez à : Exercice 42

Correction exercice 43.

1.

$$F(X)=\frac{6X^3+3X^2-5}{(X-1)(X+1)(X^2+1)}=\frac{a}{X-1}+\frac{b}{X+1}+\frac{cX+d}{X^2+1}$$

Je multiplie par $X-1$ puis $X=1$

$$a=\left[\frac{6X^3+3X^2-5}{(X+1)(X^2+1)}\right]_{X=1}=\frac{6+3-5}{2\times 2}=1$$

Je multiplie par $X+1$ puis $X=-1$

$$b=\left[\frac{6X^3+3X^2-5}{(X-1)(X^2+1)}\right]_{X=-1}=\frac{-6+3-5}{-2\times 2}=2$$

Je multiplie par X, puis X tend vers l'infini.

$6=a+b+c$, donc $c=6-1-2=3$

$X=0$

$5=-5+b+d$ donc $d=5+1-2=4$

Donc

$$F(X)=\frac{6X^3+3X^2-5}{(X-1)(X+1)(X^2+1)}=\frac{1}{X-1}+\frac{2}{X+1}+\frac{3X+4}{X^2+1}$$

2. Il reste à décomposer dans $\mathbb{C}[X]$

$$\frac{3X+4}{X^2+1}=\frac{3X+4}{(X-i)(X+i)}=\frac{a}{X-i}+\frac{\overline{a}}{X+i}$$

Je multiplie par $X-i$, puis $X=i$.

$$a=\left[\frac{3X+4}{X+i}\right]_{X=i}=\frac{3i+4}{2i}=\frac{(3i+4)(-i)}{2}=\frac{3}{2}-2i$$

Donc

$$F(X)=\frac{6X^3+3X^2-5}{(X-1)(X+1)(X^2+1)}=\frac{1}{X-1}+\frac{2}{X+1}+\frac{\frac{3}{2}-2i}{X-i}+\frac{\frac{3}{2}+2i}{X+i}$$

Allez à : Exercice 43

Correction exercice 44.

1. Il existe a, b, c et d tels que :
$$\frac{-X^2+2X+1}{(X-1)^2(X^2+1)}=\frac{a}{X-1}+\frac{b}{(X-1)^2}+\frac{cX+d}{X^2+1}$$
Je multiplie par $(X-1)^2$, puis $X=1$
$$b=\left[\frac{-X^2+2X+1}{X^2+1}\right]_{X=1}=\frac{2}{2}=1$$
Je multiplie par X^2+1, puis $X=i$
$$ci+d=\left[\frac{-X^2+2X+1}{(X-1)^2}\right]_{X=i}=\frac{-i^2+2i+1}{(i-1)^2}=\frac{2+2i}{i^2-2i+1}=\frac{2+2i}{-2i}=\frac{1+i}{-i}=-1+i$$
Donc $c=1$ et $d=-1$
Je multiplie par X, puis $X\to+\infty$
$$0=a+c$$
Donc $a=-1$
$$\frac{-X^2+2X+1}{(X-1)^2(X^2+1)}=\frac{-1}{X-1}+\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{X-1}{X^2+1}$$
Autre méthode
On trouve $b=1$ et $a+c=0$ comme ci-dessus.
On prend $X=0$
$$1=-a+b+d\Leftrightarrow d=a$$
Puis on prend $X=-1$
$$-\frac{2}{4\times 2}=-\frac{a}{2}+\frac{b}{4}+\frac{-c+d}{2}$$
On multiplie le tout par 2 et on remplace b par 1
$$-\frac{1}{2}=-a+\frac{1}{2}-c+d\Leftrightarrow-(a+c)+d=-1\Leftrightarrow d=-1$$
D'où : $a=-1$ et $c=-a=1$

2.
$$\begin{array}{r|l} X^3 & X^2-1 \\ \cline{2-2} X^3-X & X \\ \cline{1-1} X & \end{array}$$
Donc $X^3=(X^2-1)X+X$ et
$$G(X)=\frac{(X^2-1)X+X}{X^2-1}=X+\frac{X}{(X-1)(X+1)}$$
Il existe a et b des réels tels que
$$\frac{X}{(X-1)(X+1)}=\frac{a}{X-1}+\frac{b}{X+1}$$
Je multiplie par $X-1$, puis $X=1$
$$a=\left[\frac{X}{X+1}\right]_{X=1}=\frac{1}{2}$$
Je multiplie par $X+1$, puis $X=-1$
$$b=\left[\frac{X}{X-1}\right]_{X=-1}=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}$$
Donc
$$G(X)=X+\frac{\frac{1}{2}}{X-1}+\frac{\frac{1}{2}}{X+1}$$

Allez à : Exercice 44

Correction exercice 45.

$$\frac{3}{(X^2+X+1)(X-1)^2}=\frac{aX+b}{X^2+X+1}+\frac{c}{X-1}+\frac{d}{(X-1)^2}\quad (*)$$

On multiplie par $(X-1)^2$, puis $X=1$

$$d=\left[\frac{3}{X^2+X+1}\right]_{X=1}=1$$

Première méthode

On multiplie par X^2+X+1, puis $X=j$

$$aj+b=\left[\frac{3}{(X-1)^2}\right]_{X=j}=\frac{3}{(j-1)^2}=\frac{3}{j^2-2j+1}=\frac{3}{-3j}=-\frac{1}{j}=-j^2=1+j$$

Donc $b=1$ et $a=1$

On prend $X=0$ dans $(*)$

$$3=b-c+d\Rightarrow c=-3+b+d=-3+1+1=-1$$

Et donc

$$\frac{3}{(X^2+X+1)(X-1)^2}=\frac{X+1}{X^2+X+1}-\frac{1}{X-1}+\frac{1}{(X-1)^2}$$

Deuxième méthode

$X=0$ dans $(*)$

$$3=b-c+d\Leftrightarrow b-c=3-d=2\Leftrightarrow b=2+c$$

On multiplie par X, puis $X\to+\infty$

$$0=a+c\Leftrightarrow a=-c$$

$X=-1$ dans $(*)$

$$\frac{3}{4}=-a+b-\frac{c}{2}+\frac{d}{4}\Leftrightarrow\frac{3}{4}=c+(2+c)-\frac{c}{2}+\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{3}{4}-\frac{1}{4}-2=\frac{3}{2}c\Leftrightarrow-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}c\Leftrightarrow c=-1$$

Et donc

$$\frac{3}{(X^2+X+1)(X-1)^2}=\frac{X+1}{X^2+X+1}-\frac{1}{X-1}+\frac{1}{(X-1)^2}$$

Pour la décomposition dans $\mathbb{C}(X)$, il suffit de décomposer $\frac{X+1}{X^2+X+1}$, comme

$$X^2+X+1=(X-j)(X-j^2)$$

Il existe $A\in\mathbb{C}$ tel que

$$\frac{X+1}{X^2+X+1}=\frac{X+1}{(X-j)(X-j^2)}=\frac{A}{X-j}+\frac{\overline{A}}{X-j^2}$$

On multiplie par $X-j$, puis $X=j$

$$A=\left[\frac{X+1}{X-j^2}\right]_{X=j}=\frac{j+1}{j-j^2}=\frac{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+1}{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=\frac{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}{i\sqrt{3}}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$\frac{X+1}{X^2+X+1}=\frac{\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{6}}{X-j}+\frac{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{6}}{X-j^2}$$

$$\frac{3}{(X^2+X+1)(X-1)^2}=\frac{\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{6}}{X-j}+\frac{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{6}}{X-j^2}-\frac{1}{X-1}+\frac{1}{(X-1)^2}$$

Allez à : Exercice 45

Correction exercice 46.

$$F=\frac{X^2+1-1}{(X^2+1)^{2010}}=\frac{X^2+1}{(X^2+1)^{2010}}-\frac{1}{(X^2+1)^{2010}}=\frac{1}{(X^2+1)^{2009}}-\frac{1}{(X^2+1)^{2010}}$$

Allez à : Exercice 46

Correction exercice 47.

Il faut d'abord diviser le numérateur par le dénominateur.

$$X^4(X-1)^3=X^4(X^3-3X^2+3X-1)=X^7-3X^6+3X^5-X^4$$

$$\begin{array}{ll|l}
X^8 & +X+1 & X^7-3X^6+3X^5-X^4 \\ \cline{3-3}
X^8-3X^7+3X^6-X^5 & & X+3 \\ \cline{1-2}
3X^7-3X^6+X^5 & +X+1 & \\
3X^7-9X^6+9X^5-3X^4 & & \\ \cline{1-2}
6X^6-8X^5+3X^4 & +X+1 &
\end{array}$$

$$\begin{aligned}\frac{X^8+X+1}{X^4(X-1)^3}&=\frac{(X^7-3X^6+3X^5-X^4)(X+3)+6X^6-8X^5+3X^4+X+1}{X^4(X-1)^3}\\&=X+3+\frac{6X^6-8X^5+3X^4+X+1}{X^4(X-1)^3}\end{aligned}$$

On pose alors

$$G(X)=\frac{6X^6-8X^5+3X^4+X+1}{X^4(X-1)^3}$$

0 est un pôle d'ordre 4 du dénominateur on effectue alors la division suivant les puissances croissantes de

$1+X+3X^4-8X^5+6X^6$ par $(X-1)^3=-1+3X-3X^2+X^3$ à l'ordre $4-1=3$

(Le 4 est le 4 de X^4)

$$\begin{array}{l|l}
1+X \qquad\qquad\qquad +3X^4-8X^5+6X^6 & -1+3X-3X^2+X^3 \\ \cline{2-2}
1-3X+3X^2 \qquad -X^3 & -1-4X-9X^2-16X^3 \\ \cline{1-1}
4X-3X^2 \quad +X^3+3X^4-8X^5+6X^6 & \\
4X-12X^2+12X^3-4X^4 & \\ \cline{1-1}
9X^2-11X^3+7X^4-8X^5+6X^6 & \\
9X^2-27X^3+27X^4-9X^5 & \\ \cline{1-1}
16X^3-20X^4+X^5+6X^6 & \\ \cline{1-1}
16X^3-48X^4+48X^5-16X^6 & \\ \cline{1-1}
28X^4-47X^5+22X^6 &
\end{array}$$

On en tire

$$\begin{aligned}&1+X+3X^4-8X^5+6X^6\\&=(-1+3X-3X^2+X^3)(-1-4X-9X^2-16X^3)+28X^4-47X^5+22X^6\\&\Leftrightarrow\frac{6X^6-8X^5+3X^4+X+1}{(X-1)^3}\\&=\frac{(-1+3X-3X^2+X^3)(-1-4X-9X^2-16X^3)+28X^4-47X^5+22X^6}{(X-1)^3}\\&\Leftrightarrow\frac{6X^6-8X^5+3X^4+X+1}{(X-1)^3}=-1-4X-9X^2-16X^3+\frac{28X^4-47X^5+22X^6}{(X-1)^3}\\&\Leftrightarrow\frac{6X^6-8X^5+3X^4+X+1}{X^4\,(X-1)^3}=\frac{-1-4X-9X^2-16X^3}{X^4}+\frac{X^4(28-47X+22X^2)}{X^4(X-1)^3}\\&\Leftrightarrow G=-\frac{1}{X^4}-\frac{4}{X^3}-\frac{9}{X^2}-\frac{16}{X}+\frac{28-47X+22X^2}{(X-1)^3}\end{aligned}$$

On pose alors

$$H=\frac{28-47X+22X^2}{(X-1)^3}=\frac{a}{X-1}+\frac{b}{(X-1)^2}+\frac{c}{(X-1)^3}$$

On multiplie par $(X-1)^3$, puis $X=1$.

$$c=[28-47X+22X^2]_{X=1}=3$$

On multiplie par X, puis $X\to+\infty$

$$22=a$$

$X=0$,

$$28=-a+b-c\Leftrightarrow -28=-22+b-3\Leftrightarrow b=-33$$

Donc

$$H=\frac{28-47X+22X^2}{(X-1)^3}=\frac{22}{X-1}+\frac{53}{(X-1)^2}+\frac{3}{(X-1)^3}$$

Et alors

$$F=X+3-\frac{1}{X^4}-\frac{4}{X^3}-\frac{9}{X^2}-\frac{16}{X}+\frac{22}{X-1}-\frac{3}{(X-1)^2}+\frac{3}{(X-1)^3}$$

Allez à : Exercice 47

Correction exercice 48.

Le degré du numérateur est strictement inférieur à celui du dénominateur, pas de division.

La forme de la décomposition est :

$$\frac{X^4+1}{X^2(X^2+X+1)^2}=\frac{a}{X}+\frac{b}{X^2}+\frac{cX+d}{X^2+X+1}+\frac{eX+f}{(X^2+X+1)^2}$$

On multiplie par X^2, puis $X=0$.

$$b=\left[\frac{X^4+1}{(X^2+X+1)^2}\right]_{X=0}=1$$

On multiplie par $(X^2+X+1)^2$, puis $X=j$.

$$ej+f=\left[\frac{X^4+1}{X^2}\right]_{X=j}=\frac{j^4+1}{j^2}=\frac{j+1}{j^2}=\frac{-j^2}{j^2}=-1$$

Donc $e=0$ et $f=-1$.

Ensuite ce n'est pas simple, il manque encore 3 coefficients.

On pourrait multiplier par X puis faire tendre X vers l'infini, mais ensuite il faudra prendre deux valeurs et bonjour les fractions pénibles, alors on va inaugurer une nouvelle technique qui sert dans des cas un peu compliqués.

$$\frac{X^4+1}{X^2(X^2+X+1)^2}=\frac{a}{X}+\frac{1}{X^2}+\frac{cX+d}{X^2+X+1}+\frac{-1}{(X^2+X+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{X^4+1}{X^2(X^2+X+1)^2}-\frac{1}{X^2}+\frac{1}{(X^2+X+1)^2}=\frac{a}{X}+\frac{cX+d}{X^2+X+1}$$

J'appelle

$$G=\frac{X^4+1}{X^2(X^2+X+1)^2}-\frac{1}{X^2}+\frac{1}{(X^2+X+1)^2}$$

C'est une fraction rationnelle, d'après l'unicité de sa décomposition en élément simple, qui est, d'après la ligne ci-dessus, $\frac{a}{X}+\frac{cX+d}{X^2+X+1}$, on doit pouvoir, en réduisant au même dénominateur, trouver que le dénominateur de G est $X(X^2+X+1)$. On y va.

$$G=\frac{X^4+1}{X^2(X^2+X+1)^2}-\frac{1}{X^2}+\frac{1}{(X^2+X+1)^2}=\frac{X^4+1-(X^2+X+1)^2+X^2}{X^2(X^2+X+1)^2}$$
$$=\frac{X^4+X^2+1-(X^4+X^2+1+2X^3+2X^2+2X)}{X^2(X^2+X+1)^2}=\frac{-2X^3-2X^2-2X)}{X^2(X^2+X+1)^2}$$
$$=\frac{-2}{X(X^2+X+1)}$$

On a donc

$$\frac{-2}{X(X^2+X+1)}=\frac{a}{X}+\frac{cX+d}{X^2+X+1}$$

On multiplie par X, puis $X=0$

$$a=\left[\frac{-2}{X^2+X+1}\right]_{X=0}=-2$$

On multiplie par X^2+X+1, puis $X=j$.

$$cj+d=\left[\frac{-2}{X^2}\right]_{X=j}=\frac{-2}{j^2}=-2j$$

Donc $c=-2$ et $d=0$

Finalement

$$\frac{X^4+1}{X^2(X^2+X+1)^2}=\frac{-2}{X}+\frac{1}{X^2}+\frac{-2X}{X^2+X+1}+\frac{-1}{(X^2+X+1)^2}$$

Allez à : Exercice 48

Correction exercice 49.

Ensuite je diviserai par 16

$$F=\frac{16X^5}{(X^4-1)^2}=\frac{16X^5}{(X-1)^2(X+1)^2(X-i)^2(X+i)^2}$$
$$=\frac{a}{X-1}+\frac{b}{(X-1)^2}+\frac{c}{X+1}+\frac{d}{(X+1)^2}+\frac{e}{X-i}+\frac{f}{(X-i)^2}+\frac{\bar{e}}{X+i}+\frac{\bar{f}}{(X+i)^2}$$

Avec a, b, c et d réels et e et f complexes.

Il est facile de trouver b, d et f.

Je multiplie par $(X-1)^2$, puis $X=1$

$$b=\left[\frac{16X^5}{(X+1)^2(X-i)^2(X+i)^2}\right]_{X=1}=\left[\frac{16X^5}{(X+1)^2(X^2+1)^2}\right]_{X=1}=1$$

Je multiplie par $(X+1)^2$, puis $X=-1$

$$d=\left[\frac{16X^5}{(X-1)^2(X-i)^2(X+i)^2}\right]_{X=1}=\left[\frac{16X^5}{(X-1)^2(X^2+1)^2}\right]_{X=-1}=-1$$

Je multiplie par $(X-i)^2$, puis $X=i$

$$f=\left[\frac{16X^5}{(X+1)^2(X-1)^2(X+i)^2}\right]_{X=1}=\left[\frac{16X^5}{(X^2-1)^2(X+i)^2}\right]_{X=i}=\frac{16i^5}{(-2)^2(2i)^2}=\frac{16i}{4(-4)}=-i$$

F est impaire donc $F(-X)=-F(X)$, soit encore : $-F(-X)=F(X)$

$$-F(-X)=-\left(\frac{a}{-X-1}+\frac{b}{(-X-1)^2}+\frac{c}{-X+1}+\frac{d}{(-X+1)^2}+\frac{e}{-X-i}+\frac{f}{(-X-i)^2}+\frac{\bar{e}}{-X+i}+\frac{\bar{f}}{(-X+i)^2}\right)$$

$$-F(-X)=\frac{a}{X+1}-\frac{b}{(X+1)^2}+\frac{c}{X-1}-\frac{d}{(X-1)^2}+\frac{e}{X+i}-\frac{f}{(X+i)^2}+\frac{\bar{e}}{X-i}-\frac{\bar{f}}{(X-i)^2}$$

En identifiant les coefficients avec ceux de $F(X)$, on a :

$a=c$, $b=-d$, $e=\bar{e}$ et $f=-\bar{f}$

$b=-d$, çà on le savait déjà, $e=\bar{e}$ donc e est réel et $f=-\bar{f}$ entraine que f est un imaginaire pur, ce que l'on savait déjà.

$X=0$ donne

$$F(0)=0=-a+b+c+d+ie-f-i\bar{e}-\bar{f}=-a+c+i(e-\bar{e})$$

Car $b+d=0$ et $-f-\bar{f}=i-i=0$

Cela donne $0=-a+c+i(e-\bar{e})-a+c+2i(i\mathrm{Im}(e)=-a+c-2\mathrm{Im}(e)$

Or $a=c$ donc $\mathrm{Im}(e)=0$ autrement dit e est réel.

Je multiplie par X, puis je fais tendre X vers ∞.

$$0=a+c+e+\bar{e}=2a+2e$$

Donc $e=-a$

Comme $c=a$, $b=1$, $d=-1$ et $f=-i$

On a :

$$F=\frac{16X^5}{(X^4-1)^2}=\frac{a}{X-1}+\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{a}{X+1}-\frac{1}{(X+1)^2}-\frac{a}{X-i}-\frac{i}{(X-i)^2}-\frac{a}{X+i}+\frac{i}{(X+i)^2}$$

Ceci étant vrai pour tout $X\in\mathbb{C}\setminus\{-1,1,-i,i\}$, je prends $X=2$.

$$\frac{16\times 32}{(16-1)^2}=\frac{a}{2-1}+\frac{1}{(2-1)^2}+\frac{a}{2+1}-\frac{1}{(2+1)^2}-\frac{a}{2-i}-\frac{i}{(2-i)^2}-\frac{a}{2+i}+\frac{i}{(2+i)^2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{16\times 32}{15^2}=a+1+\frac{a}{3}-\frac{1}{9}-\frac{a(2+i)}{5}-\frac{i(2+i)^2}{5^2}-\frac{a(2-i)}{5}+\frac{i(2-i)^2}{5^2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{16\times 32}{15^2}=\frac{4a}{3}+\frac{8}{9}-\frac{4a}{5}-\frac{i(3+4i)}{25}+\frac{i(3-4i)}{25}$$

$$\Leftrightarrow\frac{16\times 32}{3^2\times 5^2}=\frac{20-12}{15}a+\frac{8}{9}+\frac{8}{25}$$

$$\Leftrightarrow 16\times 32=8\times 15a+8\times 25+8\times 9\Leftrightarrow 2\times 32=15a+25+9\Leftrightarrow 30=15a\Leftrightarrow a=2$$

Donc

$$F=\frac{16X^5}{(X^4-1)^2}=\frac{2}{X-1}+\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{2}{X+1}-\frac{1}{(X+1)^2}-\frac{2}{X-i}-\frac{i}{(X-i)^2}-\frac{2}{X+i}+\frac{i}{(X+i)^2}$$

Il reste à diviser par 16 :

$$\frac{X^5}{(X^4-1)^2}=\frac{\frac{1}{8}}{X-1}+\frac{\frac{1}{16}}{(X-1)^2}+\frac{\frac{1}{8}}{X+1}-\frac{\frac{1}{16}}{(X+1)^2}-\frac{\frac{1}{8}}{X-i}-\frac{\frac{i}{16}}{(X-i)^2}-\frac{\frac{1}{8}}{X+i}+\frac{\frac{i}{16}}{(X+i)^2}$$

Ensuite pour décomposer dans $\mathbb{R}[X]$ il faut réunir les conjugués.

$$\frac{X^5}{(X^4-1)^2}=\frac{\frac{1}{8}}{X-1}+\frac{\frac{1}{16}}{(X-1)^2}+\frac{\frac{1}{8}}{X+1}-\frac{\frac{1}{16}}{(X+1)^2}-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{X-i}+\frac{1}{X+i}\right)$$
$$-\frac{i}{16}\left(\frac{1}{(X-i)^2}-\frac{1}{(X+i)^2}\right)$$

$$\frac{X^5}{(X^4-1)^2}=\frac{\frac{1}{8}}{X-1}+\frac{\frac{1}{16}}{(X-1)^2}+\frac{\frac{1}{8}}{X+1}-\frac{\frac{1}{16}}{(X+1)^2}-\frac{\frac{X}{4}}{X^2+1}-\frac{i}{16}\frac{(X+i)^2-(X-i)^2}{(X^2+1)^2}$$

$$\frac{X^5}{(X^4-1)^2}=\frac{\frac{1}{8}}{X-1}+\frac{\frac{1}{16}}{(X-1)^2}+\frac{\frac{1}{8}}{X+1}-\frac{\frac{1}{16}}{(X+1)^2}-\frac{\frac{X}{4}}{X^2+1}-\frac{i}{16}\frac{4iX}{(X^2+1)^2}$$

$$\frac{X^5}{(X^4-1)^2}=\frac{\frac{1}{8}}{X-1}+\frac{\frac{1}{16}}{(X-1)^2}+\frac{\frac{1}{8}}{X+1}-\frac{\frac{1}{16}}{(X+1)^2}-\frac{\frac{X}{4}}{X^2+1}+\frac{\frac{X}{4}}{(X^2+1)^2}$$

Je vais maintenant décomposer directement cette fraction dans $\mathbb{R}[X]$.

Comme dans $\mathbb{C}[X]$ je vais décomposer $F=\frac{16X^5}{(X^4-1)^2}$

$$F=\frac{16X^5}{(X^4-1)^2}=\frac{\alpha}{X-1}+\frac{\beta}{(X-1)^2}+\frac{\gamma}{X+1}+\frac{\delta}{(X+1)^2}+\frac{\varepsilon X+\zeta}{X^2+1}+\frac{\eta X+\theta}{(X^2+1)^2}$$

De la même façon, on trouve que $\beta=1$ et $\delta=-1$

Je multiplie par $(X^2+1)^2$, puis je prends $X=i$

$$\eta i+\theta=\left[\frac{16X^5}{(X^2-1)^2}\right]_{X=i}=\frac{16i^5}{(-1-1)^2}=4i$$

Donc $\eta=4$ et $\theta=0$.

F est impaire donc $-F(-X)=F(X)$

$$-F(-X)=-\left(\frac{\alpha}{-X-1}+\frac{\beta}{(-X-1)^2}+\frac{\gamma}{-X+1}+\frac{\delta}{(-X+1)^2}+\frac{-\varepsilon X+\zeta}{X^2+1}+\frac{-\eta X+\theta}{(X^2+1)^2}\right)$$
$$=\frac{\alpha}{X+1}-\frac{\beta}{(X+1)^2}+\frac{\gamma}{X-1}-\frac{\delta}{(X-1)^2}+\frac{\varepsilon X-\zeta}{X^2+1}+\frac{\eta X-\theta}{(X^2+1)^2}$$

$$-F(-X)=F(X)\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=\gamma\\ \beta=-\delta\\ \zeta=0\\ \theta=0\end{cases}$$

On savait déjà que $\beta=-\delta$ et que $\theta=0$.

Pour l'instant on en est à :

$$F=\frac{16X^5}{(X^4-1)^2}=\frac{\alpha}{X-1}+\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{\gamma}{X+1}-\frac{1}{(X+1)^2}+\frac{\varepsilon X}{X^2+1}+\frac{4X}{(X^2+1)^2}$$

Je multiplie par X, puis on fait tendre X vers ∞.

$$0=\alpha+\gamma+\varepsilon$$

Comme $\alpha=\gamma$, on a $\varepsilon=-2\gamma$.

On peut essayer $X=0$ mais cela redonne $\alpha=\gamma$.

Pour l'instant on en est à :

$$F=\frac{16X^5}{(X^4-1)^2}=\frac{\gamma}{X-1}+\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{\gamma}{X+1}-\frac{1}{(X+1)^2}-\frac{2\gamma X}{X^2+1}+\frac{4X}{(X^2+1)^2}$$

Comme dans $\mathbb{C}[X]$, je vais prendre $X=2$.

$$\frac{16\times 32}{(16-1)^2}=\gamma+1+\frac{\gamma}{3}-\frac{1}{9}-\frac{4\gamma}{5}+\frac{8}{5^2}\Leftrightarrow\frac{16\times 32}{15^2}=\frac{4\gamma}{3}-\frac{4\gamma}{5}+\frac{8}{9}+\frac{8}{25}\Leftrightarrow\frac{16\times 32}{15^2}=\frac{8\gamma}{15}+\frac{8\times 34}{9\times 25}$$
$$\Leftrightarrow 16\times 32=8\times 15\gamma+8\times 34\Leftrightarrow 2\times 32=15\gamma+34\Leftrightarrow\gamma=2$$
$$F(X)=\frac{16X^5}{(X^4-1)^2}=\frac{2}{X-1}+\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{2}{X+1}-\frac{1}{(X+1)^2}-\frac{4X}{X^2+1}+\frac{4X}{(X^2+1)^2}$$

On divise par 16 et voilà.

A partir de là, on peut retrouver la décomposition dans $\mathbb{C}[X]$, pour cela il suffit de décomposer

$$\frac{4X}{X^2+1}=\frac{a}{X-i}+\frac{\bar{a}}{X+i}$$

Et

$$\frac{4X}{(X^2+1)^2}=\frac{b}{X-i}+\frac{\bar{b}}{X+i}+\frac{c}{(X-i)^2}+\frac{\bar{c}}{(X+i)^2}$$

A faire.

Troisième méthode

On repart de

$$F(X)=\frac{16X^5}{(X^4-1)^2}=\frac{\alpha}{X-1}+\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{\gamma}{X+1}-\frac{1}{(X+1)^2}+\frac{\varepsilon X+\zeta}{X^2+1}+\frac{4X}{(X^2+1)^2}$$
$$=\frac{\alpha}{X-1}+\frac{\gamma}{X+1}+\frac{\varepsilon X+\zeta}{X^2+1}+\frac{1}{(X-1)^2}-\frac{1}{(X+1)^2}+\frac{4X}{(X^2+1)^2}$$

On va calculer

$$\frac{1}{(X-1)^2}-\frac{1}{(X+1)^2}+\frac{4X}{(X^2+1)^2}$$
$$=\frac{(X+1)^2(X^2+1)^2-(X-1)^2(X^2+1)^2+4X(X-1)^2(X+1)^2}{(X-1)^2(X+1)^2(X^2+1)^2}$$
$$=\frac{((X+1)^2-(X-1)^2)(X^2+1)^2+4X(X^2-1)^2}{(X^2-1)^2(X^2+1)^2}$$
$$=\frac{(X^2+2X+1-X^2+2X-1)(X^4+2X^2+1)+4X(X^4-2X^2+1)}{(X^4-1)^2}$$
$$=\frac{4X(X^4+2X^2+1)+4X(X^4-2X^2+1)}{(X^4-1)^2}=\frac{8X(X^4+1)}{(X^4-1)^2}$$

Donc

$$F=\frac{16X^5}{(X^4-1)^2}=\frac{\alpha}{X-1}+\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{\gamma}{X+1}-\frac{1}{(X+1)^2}+\frac{\varepsilon X+\zeta}{X^2+1}+\frac{4X}{(X^2+1)^2}$$
$$=\frac{\alpha}{X-1}+\frac{\gamma}{X+1}+\frac{\varepsilon X+\zeta}{X^2+1}+\frac{8X(X^4+1)}{(X^4-1)^2}\Leftrightarrow F-\frac{8X(X^4+1)}{(X^4-1)^2}$$
$$=\frac{\alpha}{X-1}+\frac{\gamma}{X+1}+\frac{\varepsilon X+\zeta}{X^2+1}\Leftrightarrow\frac{16X^5}{(X^4-1)^2}-\frac{8X(X^4+1)}{(X^4-1)^2}=\frac{\alpha}{X-1}+\frac{\gamma}{X+1}+\frac{\varepsilon X+\zeta}{X^2+1}$$
$$\Leftrightarrow\frac{16X^5-8X(X^4+1)}{(X^4-1)^2}=\frac{\alpha}{X-1}+\frac{\gamma}{X+1}+\frac{\varepsilon X+\zeta}{X^2+1}$$
$$\Leftrightarrow\frac{16X^5-8X^5-8X}{(X^4-1)^2}=\frac{\alpha}{X-1}+\frac{\gamma}{X+1}+\frac{\varepsilon X+\zeta}{X^2+1}$$
$$\Leftrightarrow\frac{8X^5-8X}{(X^4-1)^2}=\frac{\alpha}{X-1}+\frac{\gamma}{X+1}+\frac{\varepsilon X+\zeta}{X^2+1}$$
$$\Leftrightarrow\frac{8X(X^4-1)}{(X^4-1)^2}=\frac{\alpha}{X-1}+\frac{\gamma}{X+1}+\frac{\varepsilon X+\zeta}{X^2+1}$$
$$\Leftrightarrow\frac{8X}{X^4-1}=\frac{\alpha}{X-1}+\frac{\gamma}{X+1}+\frac{\varepsilon X+\zeta}{X^2+1}$$
$$\Leftrightarrow\frac{8X}{(X-1)(X+1)(X^2+1)}=\frac{\alpha}{X-1}+\frac{\gamma}{X+1}+\frac{\varepsilon X+\zeta}{X^2+1}$$

On multiplie par $X-1$, puis $X=1$

$$\alpha=\left[\frac{8X}{(X+1)(X^2+1)}\right]_{X=1}=2$$

On multiplie par $X+1$, puis $X=-1$

$$\beta=\left[\frac{8X}{(X-1)(X^2+1)}\right]_{X=-1}=2$$

On multiplie par X^2+1, puis $X=i$

$$\epsilon+i\zeta=\left[\frac{8X}{X^2-1}\right]_{X=i}=-4i\Rightarrow\epsilon=0\ \text{ et }\ \zeta=-4$$

Donc

$$\frac{\alpha}{X-1}+\frac{\gamma}{X+1}+\frac{\varepsilon X+\zeta}{X^2+1}=\frac{2}{X-1}+\frac{2}{X+1}-\frac{4X}{X^2+1}$$

Et enfin

$$F=\frac{16X^5}{(X^4-1)^2}=\frac{2}{X-1}+\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{2}{X+1}-\frac{1}{(X+1)^2}-\frac{4X}{X^2+1}+\frac{4X}{(X^2+1)^2}$$

Il ne reste qu'à diviser par 16

Allez à : Exercice 49

Correction exercice 50.

1. α est une racine simple de Q donc il existe Q_1 tel que $Q = (X-\alpha)Q_1$ avec $Q_1(\alpha) \neq 0$
$$F = \frac{P}{Q} = \frac{P}{(X-\alpha)Q_1} = \frac{a}{X-\alpha} + \cdots$$
En multipliant par $X-\alpha$, puis en faisant $X=\alpha$, on trouve (classiquement)
$$a = \frac{P(\alpha)}{Q_1(\alpha)}$$
D'autre part
$$Q = (X-\alpha)Q_1 \Rightarrow Q' = Q_1 + (X-\alpha)Q_1'$$
En faisant $X=\alpha$ dans cette dernière expression on trouve que $Q'(\alpha) = Q_1(\alpha)$
Par conséquent
$$a = \frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}$$
2.
$$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)$$
Donc il existe $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ tels que :
$$F = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}}$$
En appliquant le résultat du 1°), avec $P = X$ et $Q' = nX^{n-1}$
$$a_k = \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{n\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^{n-1}} = \frac{1}{n}e^{\frac{2ik(1-(n-1))\pi}{n}} = \frac{1}{n}e^{\frac{2ik(2-n)\pi}{n}} = \frac{1}{n}e^{\frac{4ik\pi}{n}}$$
Donc
$$F = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\frac{1}{n}e^{\frac{4ik\pi}{n}}}{X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}}$$

Allez à : Exercice 50

Correction exercice 51.

1. $P = X^5 - X^3 + X^2 - 1 = X^3(X^2-1) + (X^2-1) = (X^2-1)(X^3+1)$
-1 est racine de X^3+1 donc on peut factoriser par $X+1$, et on trouve, à l'aide d'une division élémentaire $X^3 + 1 = (X+1)(X^2-X+1)$. $X^2 - X + 1$ n'a pas de racine réelle
On déduit de tout cela que la décomposition dans $\mathbb{R}[X]$ est :
$$P = (X-1)(X+1)(X+1)(X^2-X+1) = (X-1)(X+1)^2(X^2-X+1)$$
$X^2 - X + 1$ admet deux racines complexes conjuguées
$$\frac{1-i\sqrt{3}}{2} = -j \quad \text{et} \quad \frac{1+i\sqrt{3}}{2} = -j^2$$
La décomposition dans $\mathbb{C}[X]$ est :
$$P = (X-1)(X+1)^2(X+j)(X+j^2)$$
2. Il existe a, b, c et d réels tels que :
$$\frac{X+1}{P} = \frac{X+1}{(X-1)(X+1)^2(X^2-X+1)} = \frac{1}{(X-1)(X+1)(X^2-X+1)}$$
$$= \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1} + \frac{cX+d}{X^2-X+1}$$
On multiplie par $X-1$, puis $X=1$
$$a = \left[\frac{1}{(X+1)(X^2-X+1)}\right]_{X=1} = \frac{1}{2}$$

On multiplie par $X+1$, puis $X=-1$

$$b=\left[\frac{1}{(X-1)(X^2-X+1)}\right]_{X=-1}=-\frac{1}{6}$$

On pose $X=0$

$$-1=-a+b+d\Rightarrow d=-1+a-b=-1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=-\frac{1}{3}$$

On multiplie par X, puis X tend vers l'infini

$$0=a+b+c\Rightarrow c=-a-b=-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=-\frac{1}{3}$$

$$\frac{X+1}{P}=\frac{\frac{1}{2}}{X-1}-\frac{\frac{1}{6}}{X+1}+\frac{-\frac{1}{3}X-\frac{1}{3}}{X^2-X+1}$$

Allez à : Exercice 51

Groupes, anneaux, corps

Exercice 1.

1. On munit $\mathbb{R}$ de la loi de composition interne $*$ définie par :
$$\forall x,y \in \mathbb{R}, \qquad x * y = xy + (x^2 - 1)(y^2 - 1)$$
Montrer que $*$ est commutative, non associative, et que 1 est élément neutre.
2. On munit $\mathbb{R}^{+*}$ de la loi de composition interne $*$ définie par :
$$\forall x,y \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad x * y = \sqrt{x^2 + y^2}$$
Montrer que $*$ est commutative, associative, et que 0 est élément neutre. Montrer que aucun élément de $\mathbb{R}^{+*}$ n'a de symétrique pour $*$.
3. On munit $\mathbb{R}$ de la loi de composition interne $*$ définie par :
$$\forall x,y \in \mathbb{R}, \qquad x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$$
Montrer que l'application $x \mapsto x^3$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R},*)$ vers $(\mathbb{R},+)$. En déduire que $(\mathbb{R},*)$ est un groupe commutatif.

Allez à : Correction exercice 1

Exercice 2.

Soit $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et $*$ la loi dans G définie par $(x,y) * (x',y') = (xx', xy' + y)$

1. Montrer que $(G,*)$ est un groupe non commutatif
2. Montrer que $(]0,+\infty[\times \mathbb{R},*)$ est un sous-groupe de $(G,*)$.

Allez à : Correction exercice 2

Exercice 3.

On munit $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de deux lois définies par :
$$(x,y) + (x',y') = (x + x', y + y') \quad \text{et} \quad (x,y) * (x',y') = (xx', xy' + x'y)$$

1. Montrer que $(A,+)$ est un groupe commutatif.
2.
   a) Montrer que la loi $*$ est commutative.
   b) Montrer que $*$ est associative
   c) Déterminer l'élément neutre de A pour la loi $*$.
   d) Montrer que $(A,+,*)$ est un anneau commutatif.

Allez à : Correction exercice 3

Exercice 4.

On pose
$$id = (1,2,3,4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$
$$c_1 = (2,3,4,1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\alpha = (3,4,1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$c_2 = (4,1,2,3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$
Calculer, $c_1 \circ c_2$, $c_1 \circ c_1$, $c_1 \circ \alpha$, $c_2 \circ \alpha$.

Allez à : Correction exercice 4

Exercice 5.

Montrer que l'intersection de deux sous-groupes H et K de G est un sous-groupe de G.

Allez à : Correction exercice 5

Exercice 6.

Montrer que les ensembles $b\mathbb{Z}$ muni de l'addition sous des sous-groupes de $(\mathbb{Z},+)$

Allez à : Correction exercice 6

Exercice 7.

Soit $(G,*)$ un groupe, et soit e son élément neutre.

1. Soient $x, y \in G$, déterminer $(x * y)^{-1}$.

On suppose que pour tout $g \in G$, $g^2 = g * g = e$

2. Soient $x, y \in G$, déterminer x^{-1} et y^{-1}.
3. En déduire que $(G,*)$ est commutatif.

Allez à : Correction exercice 7

Exercice 8.

Soit $G = \{e, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon\}$ muni de la loi $*$ un groupe. Compléter sa table. On ne demande pas de justification.

e est l'élément neutre de G

$*$	e	α	β	γ	δ	ϵ
e						
α			δ			γ
β		ϵ		δ	γ	
γ		δ				
δ			α		ϵ	e
ϵ		β		α		

Allez à : Correction exercice 8

Exercice 9.

Montrer que $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ muni de la multiplication est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*,\times)$.

Allez à : Correction exercice 9

Exercice 10.

Dresser les tables des groupes $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z},+)$ et $(\mathcal{U}_5,\times)$ où $\mathcal{U}_5 = \{z \in \mathbb{C}, z^5 = 1\}$ et montrer qu'il existe un isomorphisme entre ces deux groupes.

Pour simplifier les notations on pourra poser $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$ et exprimer les éléments de $\mathcal{U}_5$ en fonction des puissances de ω.

Allez à : Correction exercice 10

Exercice 11.

Soit $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

Soit $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C}, \ z^6 = 1\}$

1. Montrer que U muni de la multiplication est un groupe.
2. Déterminer tous les éléments de $\mathcal{U}$, on les exprimera en fonction de j, puis déterminer les ordres possibles des éléments de $\mathcal{U}$, puis enfin déterminer l'ordre de chacun de ces éléments.
3. A l'aide de la question précédente, déterminer deux sous-groupes de $(\mathcal{U},\times)$, écrire leur table de multiplication.

Allez à : Correction exercice 11

Exercice 12.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $X^6 = 1$ (donner les solutions sous forme algébrique et trigonométrique), et exprimer ces solution en fonction de j.
2. Montrer que $\mathcal{U}_6 = \{z \in \mathbb{C}, z^6 = 1\}$ muni de la multiplication est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*,\times)$.
3. Déterminer les ordres possible des sous-groupes de $(\mathcal{U}_6,\times)$, en déduire tous les sous-groupes de $(\mathcal{U}_6,\times)$.

Allez à : Correction exercice 12

Exercice 13.

Soit $n \geq 3$.

On pose $\mathcal{U}_n = \left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \{0,1,2,\dots,n-1\}\right\}$. Soit $\omega_{k_0} = e^{\frac{2ik_0\pi}{n}}$, avec $k_0 \geq 1$, et d_0 l'ordre de ω_{k_0}, on rappelle que d_0 est le plus petit entier non nul tel que $\omega_{k_0}^{d_0} = 1$.

1. Montrer que $(\mathcal{U}_n,\times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*,\times)$.
2.

a) En faisant la division euclidienne de $k_0 d_0$ par n montrer que $k_0 d_0$ est un multiple de n.

b) Montrer que si k_0 et n sont premiers entre eux alors l'ordre de ω_{k_0} est n.

3. Montrer que si $D = PGCD(n, k_0) > 1$ alors l'ordre de ω_{k_0} est strictement inférieur à n.
4. Que peut-on conclure à l'aide des questions 2°) et 3°).
   Montrer que si l'ordre de ω_{k_0} est n alors k_0 et n sont premiers entre eux. (On pourra montrer la contraposée)

Allez à : Correction exercice 13

Exercice 14.

Soit E l'ensemble des fonctions $f:]0,+\infty[\to]0,+\infty[$ telles qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}^*$ vérifiant :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \qquad f(x) = x^\alpha$$

1. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$, f est une bijection de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$.
2. Montrer que E muni de la loi de composition $\circ$ des fonctions est un groupe.

Allez à : Correction exercice 14

Exercice 15.

On sait que si n est un entier premier, $H_n = \{\overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{n-1}\}$ est un groupe pour la multiplication des classes.

1. Trouver deux entiers relatifs u et v tels que $8u + 29v = 1$.
2. En déduire le symétrique de $\overline{8}$ dans le groupe H_{29}.
3. Déterminer les $x \in \mathbb{Z}$ solutions de $8x \equiv 9 \mod 29$.

Allez à : Correction exercice 15

Exercice 16.

1. Existe-t-il un inverse pour la multiplication de $\overline{8}$ dans $(\mathbb{Z}/24\mathbb{Z})^*$.
2. Trouver tous les éléments de $(\mathbb{Z}/24\mathbb{Z})^*$ qui admettent un inverse dans $(\mathbb{Z}/24\mathbb{Z})^*$.
3. Trouver l'inverse pour la multiplication de la classe de 5 dans $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^*$.
4. Montrer que pour tous éléments de $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^*$, $x^9 = x^{-1}$, où x^{-1} désigne l'inverse de x pour la multiplication dans $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^*$.
5. En déduire les solutions de $x^9 + 5 = 0$.

Allez à : Correction exercice 16

Exercice 17.

On considère les groupes $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (pour l'addition). On notera $\bar{l}$ la classe de l'entier l dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et $\hat{l}$ la classe de l'entier l dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

1. Montrer que l'application $f: \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ définie par $f(\bar{l}) = \hat{l}$ est bien définie et que c'est un morphisme surjectif de groupes.
2. Déterminer le noyau $\ker(f)$ et dresser sa table de composition.
3. Construire un isomorphisme entre $\ker(f)$ et $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Allez à : Correction exercice 17

Exercice 18.

1. Montrer que l'application
$$f: \mathcal{U}_8 \to \mathcal{U}_2 : z \mapsto z^4$$
Est bien définie et que c'est un morphisme surjectif de groupes.
2. Déterminer le noyau $\ker(f)$ du morphisme f et dresser sa table de multiplication.
3. Expliciter un isomorphisme du groupe $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ pour l'addition sur le groupe $\ker(f)$.

Allez à : Correction exercice 18

Exercice 19.

On note $H = \{z \in \mathbb{C},\ z^8 = 1\}$, où $\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes.

1. Montrer que $(H,\times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*,\times)$.
2. Pour $z_1 \in H$ et $z_2 \in H$ on pose $z_1 \sim z_2 \Leftrightarrow z_1^4 = z_2^4$.
Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur H.
3. Montrer que H admet deux classes d'équivalence.
Déterminer les éléments de ces deux classes d'équivalence.

Allez à : Correction exercice 19

Exercice 20.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on note $U_n = \{z \in \mathbb{C},\ z^n = 1\}$.

1. Démontrer que c'est un sous-groupe de $\mathbb{C}^*$ pour la multiplication.
2. Montrer que si $n \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{N}^*$ et n divise m alors $U_n \subseteq U_m$.
3. Montrer que si $d = PGCD(n,m)$ alors $U_d = U_n \cap U_m$.
4. Pour $n = 5$: on pose $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ telle que $f(k) = e^{i\frac{2k\pi}{5}}$. Montrer que f est un morphisme du groupe additif $\mathbb{Z}$ dans le groupe multiplicatif U_5. Déterminer $\ker(f)$.

Allez à : Correction exercice 20

Exercice 21.

Pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on appelle classe de x, notée $\bar{x}$, l'ensemble des entiers congrus à x modulo 7.

On appelle $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ l'ensemble des classe d'équivalence modulo 7 et $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*$ l'ensemble des classes d'équivalence modulo 7 différentes de $\bar{0}$.

On appelle groupe engendré par $\bar{x}$ l'ensemble des puissances de $\bar{x}$, c'est-à-dire $\left\{\bar{x}^k, k \in \mathbb{Z}\right\}$

On appelle $\mathcal{U}_6 = \{z \in \mathbb{C}, z^6 = 1\}$ l'ensemble des racines sixième de l'unité.

1.
   a) Calculer $\bar{3}^k$ pour $k \in \{0,1,2,3,4,5\}$
   b) Déterminer $\bar{3}^k$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
   On pourra utiliser la division euclidienne de k par 6.
2. Pour quelle raison $((\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*, \times)$ est-il un groupe ?
3. Montrer que le groupe engendré par $\bar{3}$ est égal à $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*$.

4. Soit φ définie pour tout $k \in \mathbb{Z}$ par
$$\varphi\left(\overline{3}^k\right) = e^{\frac{ik\pi}{3}}$$
   a) Montrer que φ est bien définie.
   b) Montrer que φ est un morphisme de $((\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*, \times)$ sur $(\mathcal{U}_6, \times)$.
   c) Déterminer le noyau de φ et en déduire que φ est un isomorphisme (morphisme bijectif) de $((\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*, \times)$ sur $(\mathcal{U}_6, \times)$.

Allez à : Correction exercice 21

Exercice 22.

Soit $(G,*)$ un groupe. Pour tout $g \in G$, on note γ_g l'application de multiplication à gauche par g, qui va de G dans G et associe $g * h$ à tout $h \in G$; autrement dit on a $\gamma_g(h) = g * h$ pour tous g et h dans G.

1. Prouver que pour $g \in G$, l'application γ_g est dans le groupe symétrique $\mathcal{S}_G$, autrement dit que γ_g est une bijection de G sur G.
2. Démontrer que l'application $\varphi: g \mapsto \gamma_g$ est un homomorphisme de groupe de $(G,*)$ dans $(\mathcal{S}_G, \circ)$.
3. Démontrer que l'application φ est injective.
   Pour tout $g \in G$, on note δ_g l'application de multiplication à droite par g, qui va de G dans G et associe $h * g$ à tout $h \in G$; autrement dit on a $\delta_g(h) = h * g$ pour tous g et h dans G.
4. Prouver que pour tout $g \in G$, l'application δ_g est dans le groupe symétrique $\mathcal{S}_G$, puis que l'application $\psi: g \mapsto \delta_g$ est une injection de G dans $\mathcal{S}_G$.
5. Démontrer que ψ est un homomorphisme de groupe si et seulement si le groupe G est abélien.

Allez à : Correction exercice 22

Exercice 23.

Soit $(G,*)$ un groupe d'élément neutre e.

1. Soit φ l'application de G dans G qui à tout élément $g \in G$ son inverse g^{-1}.
   Prouver que φ est un (homo)morphisme de groupe si et seulement si G est abélien.
2. Soit x un élément d'ordre fini m de G. Justifier que la partie $\{e, x, x^2, \dots, x^{m-1}\}$ est un sous-groupe de G.
3. On suppose maintenant que G est fini, de cardinal impair n. En utilisant le théorème de Lagrange, prouver que l'application ψ qui à g associe g^2 est surjective.
4. Donner une condition simple assurant que ψ est un (homo)morphisme de G vers G.

Allez à : Correction exercice 23

Exercice 24.

Soit $(G,*)$ un groupe. On considère le centre Z de G défini par :
$$Z = \{z \in G, \forall g \in G \quad z * g = g * z\}$$

1. Montrer que $(Z,*)$ est un sous-groupe de G.
2. Si G est un groupe commutatif, que vaut Z ?

Allez à : Correction exercice 24

Exercice 25.

Soit E l'ensemble des parties d'un ensemble à deux éléments, par exemple $E = \mathcal{P}(\{0,1\})$ donc
$$E = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$$
On considère les lois de composition $*$ suivantes sur l'ensemble E.

1. Réunion : $A * B = A \cup B$.
2. Intersection : $A * B = A \cap B$

3. Différence symétrique : $A * B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
4. Réunion des complémentaires : $A * B = \overline{A} \cup \overline{B}$
5. Intersection des complémentaires : $A * B = \overline{A} \cap \overline{B}$

Pour chacune d'entre elles :

a) Écrire la table de composition de la loi $*$.
b) L'ensemble E possède-t-il un élément neutre pour la loi $*$?
c) La loi $*$ est-elle associative ?
d) La loi $*$est-elle commutative ?
e) L'ensemble E muni de la loi $*$ est-il un groupe ?
f) Répondre aux questions 2 à 5 en remplaçant E par l'ensemble des parties d'un ensemble quelconque.

Allez à : Correction exercice 25

Exercice 26.

Le but de l'exercice est d'étudier les groupes à 1, 2, 3 ou 4 éléments.

1. Ecrire la table de composition d'un groupe à 1 élément.
2. Ecrire la table de composition d'un groupe à 2 éléments. Vérifier qu'il est isomorphe aux groupes suivants.
$$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +) \ ; \ (\{-1,1\},\times) \ ; \left(\left\{x \mapsto x, x \mapsto \frac{1}{x}\right\},\circ\right)$$
3. Ecrire la table de composition d'un groupe à 3 éléments. Vérifier qu'il est isomorphe aux groupes suivants.
$$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +) \ ; \ \left(\left\{1, e^{\frac{2i\pi}{3}}, e^{\frac{4i\pi}{3}}\right\},\times\right); \ \ (\{(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2)\},\circ)$$
4. Soit $(\{e,a,b,c\},*)$ un groupe à 4 éléments, d'élément neutre e.
   a) Montrer qu'il existe au moins un élément, autre que l'élément neutre, qui est son propre symétrique.
   On suppose désormais que b est son propre symétrique.
   b) On suppose $a * c = c * a = e$. Remplir la table de composition du groupe.
   Montrer qu'il est isomorphe aux groupes suivants.
   $$(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +) \ ; (\{1,i,-1,-i\},\times); (\{(1,2,3,4),(2,3,4,1),(3,4,1,2),(4,1,2,3)\},\circ)$$
   c) On suppose $a * a = c * c = e$. Remplir la table de composition du groupe. Montrer qu'il est isomorphe aux groupes suivants.
   $$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +) \ ; (\{(1,2,3,4),(1,2,4,3),(2,1,3,4),(2,1,4,3)\},\circ)$$
   d) Vérifier que l'on est toujours dans le cas de la question (4b) ou dans le cas de la question (4c).
5. Vérifier que tous les groupes de cet exercice sont abéliens.

Allez à : Correction exercice 26

Exercice 27.

On considère les éléments suivants de $\mathcal{S}_5$.
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \ \text{ et } \ \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$
Calculer les puissances successives et déterminer l'ordre de σ et ρ, ainsi que de $\sigma\rho$, $\rho\sigma$, $\sigma\rho^{-1}$ et $\rho\sigma^{-1}$.

Allez à : Correction exercice 27

Exercice 28.

On considère un pentagone régulier : pour fixer les idées, l'ensemble des points du plan complexe dont des sommets ont pour affixes les racines cinquièmes de l'unité, soit
$$P = \left\{e^{\frac{2ik\pi}{5}}, k = 0,1,2,3,4\right\}$$
Le but de l'exercice est d'étudier le groupe (pour la composition des applications) des isométries du plan complexe qui laissent invariant ce pentagone. On notera ρ la rotation de centre l'origine et d'angle $\frac{2\pi}{5}$, et σ la symétrie qui à un nombre complexe associe son conjugué.
$$\rho: z \mapsto ze^{\frac{2i\pi}{5}}; \quad \sigma: z \mapsto \overline{z}$$

1. Vérifier que σ et ρ laissent invariant l'ensemble P.

2. Vérifier que les puissances successives de ρ sont des rotations dont on donnera l'angle, et déterminer l'ordre de ρ.
3. Pour $n = 0,1,2,3,4$, montrer que $\sigma\rho^n$ et $\rho^n\sigma$ sont des symétries par rapport à un axe passant par l'origine, dont on donnera l'angle par rapport à l'axe réel.
4. Quel est l'ordre d'une symétrie ?
5. Montrer que le produit de deux des symétries de la question 3°) est une puissance de ρ.
6. Montrer que le plus petit groupe contenant ρ et σ possède 10 éléments.

Allez à : Correction exercice 28

Exercice 29.

1. Montrer que l'ordre de $\overline{1}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ vaut n.
2. Montrer que l'ordre de $\overline{k}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ vaut n si et seulement si k est premier avec n.
3. Si k est un diviseur de n, montrer que l'ordre de $\overline{k}$ est le quotient de n par k.
4. Soit $(G,*)$ un groupe de cardinal n. On suppose que G contient un élément a d'ordre n. On note f l'application de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans G qui à $\overline{0}$ associe l'élément neutre de G et à $\overline{k}$ associe la puissance k-ième de a dans G. Montrer que f est un isomorphisme de groupes.

Allez à : Correction exercice 29

Exercice 30.

$+$ est l'addition entre deux classes d'équivalence de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$\times$ est la multiplication entre deux classes d'équivalence de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

1.
   a) Pourquoi $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},+,\times)$ est-il un corps ?
   b) Donner la table d'addition de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
2. Soit $A = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

   On munit A d'une addition que l'on notera $\oplus$ définie par :
$$(\bar{a},\bar{b}) \oplus (\bar{c},\bar{d}) = (\bar{a}+\bar{c},\bar{b}+\bar{d})$$
   On munit A d'une multiplication que l'on notera $\otimes$ définie par :
$$(\bar{a},\bar{b}) \otimes (\bar{c},\bar{d}) = (\bar{a}\times\bar{c},\bar{b}\times\bar{d})$$
   a) Montrer que $(A,\oplus)$ est un groupe commutatif.
   b) Montrer que la multiplication est commutative.
   c) Montrer que la multiplication est une loi interne.
   d) Montrer que la multiplication est distributive sur l'addition
   e) Montrer que A possède un élément neutre pour la multiplication.
   f) $(A,\oplus,\otimes)$ est-il un anneau commutatif unitaire, un corps ?

Allez à : Correction exercice 30

Exercice 31.

1. Soit S un ensemble quelconque et $E = \{0,1\}^S$ l'ensemble des applications de S dans $\{0,1\}$. On munit E de l'addition modulo 2 des images : pour tout $f,g \in E$, $f \oplus g$ est l'application de S dans $\{0,1\}$ définie par :
$$(f \oplus g)(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } f(x) \neq g(x) \\ 0 & \text{si } f(x) = g(x) \end{cases}$$
   Montrer que $(E,\oplus)$ est un groupe abélien, dans lequel chaque élément est son propre symétrique.
2. Soit $F = \mathcal{P}(S)$ l'ensemble des parties de S. On munit F de la différence symétrique ensembliste. On considère l'application ϕ, de F dans E qui, à une partie de S, associe sa fonction indicatrice :
$$\phi : A \in \mathcal{P}(S) \mapsto \mathbb{I}_A$$
   où pour tout $x \in S, \mathbb{I}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\mathbb{I}_A(x) = 0$ sinon.

   Montrer que ϕ est un isomorphisme de F vers E, pour les lois Δ et $\oplus$. En déduire que (F,Δ) est un groupe

abélien, dans lequel chaque élément est son propre symétrique.
Dans toute la suite, G désigne un groupe dans lequel chaque élément est son propre symétrique.

3. Montrer que G est abélien.
4. Soit a un élément quelconque de G, différent de l'élément neutre. On définit la relation $\sim$ sur G par :
$$\forall x, y \in G, \qquad x \sim y \Leftrightarrow (x = y \text{ ou } x = ay)$$
Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur G. Montrer que chaque classe d'équivalence a deux éléments.
5. On définit la loi $*$ sur l'ensemble-quotient $G/\sim$ par :
$$\forall x, y \in G, \quad \text{cl}(x) * \text{cl}(y) = \text{cl}(xy)$$
Montrer que $*$ est une loi de composition interne sur $G/\sim$, et que $G/\sim$ muni de $*$ est un groupe abélien, dans lequel chaque élément est son propre symétrique.
6. On suppose que G est fini. Déduire des questions précédentes que le cardinal de G est une puissance de 2.

Allez à : Correction exercice 31

Exercice 32.

On considère les applications suivantes, de $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ dans lui-même.
$$f_1: x \mapsto x; \;\; f_2: x \mapsto 1 - x; \;\; f_3: x \mapsto \frac{1}{1-x}; \;\; f_4: x \mapsto \frac{1}{x}; \;\; f_5: x \mapsto \frac{x}{x-1}; \;\; f_6: x \mapsto \frac{x-1}{x}$$
On munit l'ensemble $E = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$ de la composition des applications.

1. Écrire la table de composition de $(E,\circ)$
2. Montrer que $G = (E,\circ)$ est un groupe.
3. Est-ce un groupe abélien ?
4. Déterminer tous les sous-groupes de G.
5. Déterminer l'ordre de chacun des éléments de G.
6. Quels sont les éléments de $< f_2 >$?
7. Quels sont les éléments de$< f_3 >$?

Allez à : Correction exercice 32

Exercice 33.

Soient $(E,*)$ et $(F,.)$ deux groupes. On munit l'ensemble produit $E \times F$ de la loi de composition $\odot$ définie par :
$$\forall (x,y),(x',y') \in E \times F, \qquad (x,y)\odot(x',y') = (x * x', y.y')$$

1. Montrer que $(E \times F, \odot)$ est un groupe.
2. Soit E' un sous-groupe de E, F' un sous-groupe de F. Montrer que $E' \times F'$ est un sous-groupe de $E \times F$, muni de la loi $\odot$.

Allez à : Correction exercice 33

Exercice 34.

Montrer que les ensembles suivants d'applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, munis de la loi de composition des applications, sont des groupes.

1. $E_1 = \{z \mapsto z + t, t \in \mathbb{Z}\}$
2. $E_2 = \{z \mapsto z + t, t \in \mathbb{C}\}$
3. $E_3 = \{z \mapsto e^{i\theta} z, \theta \in \mathbb{R}\}$
4. $E_4 = \{z \mapsto sz + t, (s,t) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}\}$

Allez à : Correction exercice 34

Exercice 35.

Soit G un sous-groupe additif de $\mathbb{R}^*$. On supppose que $G \neq \{0\}$.

1. Montrer que $G \cap \mathbb{R}^{+*}$ possède une borne inférieure, que l'on notera b.
2. Montrer que $b \in G$.
3. On suppose $b > 0$. Montrer que $G = b\mathbb{Z}$.

4. On suppose $b = 0$. Montrer que si x et y sont deux réels tels que $x < y$, l'intervalle $]x, y[$ contient au moins un élément de G (on dit que G est dense dans $\mathbb{R}$).
5. Montrer que l'ensemble $\{m + n\sqrt{2}, (n, m) \in \mathbb{Z}^2\}$ muni de l'addition est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$, et qu'il est dense dans $\mathbb{R}$ (on rappelle que $\sqrt{2}$ est irrationnel).

Allez à : Correction exercice 35

Exercice 36.

Soit $\mathbb{K}$ l'ensemble des complexes de la forme $z = r + is$ où $r \in \mathbb{Q}$ et $s \in \mathbb{Q}$.

1. Montrer que $(\mathbb{K}, +)$ est un groupe commutatif.
2. Montrer que $(\mathbb{K}^*, .)$ est un groupe commutatif.
3. En déduire que $(\mathbb{K}, +, .)$ est un corps commutatif.

Allez à : Correction exercice 36

Exercice 37.

On note $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ l'ensemble de réels suivant :

$$\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{m + n\sqrt{2}, m, n \in \mathbb{Z}\}$$

1. Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, muni de l'addition et de la multiplication des réels, est un sous-anneau de $\mathbb{R}$.
2. On considère l'application ϕ, de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ dans lui-même, qui à $m + n\sqrt{2}$ associe
$$\phi(m + n\sqrt{2}) = m - n\sqrt{2}$$
Montrer que ϕ est un automorphisme de l'anneau $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, \times)$ (c'est une bijection, et un morphisme pour chacune des deux lois).
3. Pour tout $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, on pose $N(x) = x\phi(x)$. Montrer que N est une application de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ dans $\mathbb{Z}$, qui est un morphisme pour la multiplication.
4. Démontrer que x est un élément inversible de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ si et seulement si $N(x) = \pm 1$.
5. Vérifier que $3 + 2\sqrt{2}$ et $-3 + 2\sqrt{2}$ sont inversibles dans $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

Allez à : Correction exercice 37

Exercice 38.

Soient r et s les applications de $\mathbb{C}$ dans lui-même définies comme suit.

$$\begin{array}{l} r: \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ \quad z \mapsto iz \end{array} ; \quad \begin{array}{l} s: \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ \quad z \mapsto \overline{z} \end{array}$$

Dans tout l'exercice, on identifiera l'application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, avec l'application du plan complexe dans lui-même, qui à un point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $f(z)$.

1. On note r_2 et r_3 les composées $r^2 = r \circ r$ et $r^3 = r \circ r \circ r$. Interpréter comme transformations géométriques du plan complexe les applications r, r^2, r^3, s, $s \circ r$, $s \circ r^2$ et $s \circ r^3$.
2. On note e l'application identité du plan complexe. Montrer que l'ensemble,
$$\{e, r, r^2, r^3, s, s \circ r, s \circ r^2, s \circ r^3\}$$
muni de la composition des applications est un groupe, dont on donnera la table de composition. Il sera noté G.
3. Montrer que $\{e, r^2\}$, $\{e, s\}$, $\{e, s \circ r\}$, $\{e, s \circ r^2\}$, $\{e, s \circ r^3\}$, sont des sous-groupes de G, tous isomorphes à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
4. Montrer que $\{e, s, r^2, s \circ r^2\}$ est un sous-groupe de G, isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
5. Montrer que $\{e, r, r^2, r^3\}$ est un sous-groupe de G, isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
6. On note :
A_1 le point du plan complexe d'affixe $1 + i$,
A_2 le point du plan complexe d'affixe $-1 + i$,
A_3 le point du plan complexe d'affixe $-1 - i$,
A_4 le point du plan complexe d'affixe $1 - i$,
Vérifier que chaque élément du groupe G laisse invariant l'ensemble $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$
7. Étant donné un élément f du groupe G, on lui associe la permutation $\varphi(f)$ de $\{1, 2, 3, 4\}$ définie par :

$$\forall i,j \in \{1,2,3,4\}, \varphi(f)(i) = j \Leftrightarrow f(A_i) = A_j$$

On définit ainsi une application φ de G dans $\mathcal{S}_4$. Montrer que φ est un morphisme de groupes.

8. Écrire in extenso l'image par φ de chacun des éléments de G.
9. Soit H l'image de G par φ. Montrer que H est un sous-groupe de$\mathcal{S}_4$, isomorphe à G.

Allez à : Correction exercice 38

Exercice 39.

On note A l'ensemble de réels suivant :

$$A = \{m + n\sqrt{6}, m, n \in \mathbb{Z}\}$$

1. Montrer que $(A, +, \times)$ (ensemble A muni de l'addition et de la multiplication des réels), est un sous-anneau de $(R, +, \times)$.
2. On considère l'application φ, de A dans lui-même, qui à $m + n\sqrt{6}$ associe :
$$\varphi(m + n\sqrt{6}) = m - n\sqrt{6}$$
Montrer que φ est un automorphisme de l'anneau $(A, +, \times)$ (c'est-à-dire une bijection, et un morphisme pour chacune des deux lois).
3. Pour tout $x \in A$, on pose $N(x) = x\varphi(x)$. Montrer que N est une application de A dans $\mathbb{Z}$, qui est un morphisme pour la multiplication.
4. Démontrer que x est un élément inversible de A si et seulement si $N(x) = \pm 1$.
5. Vérifier que $5 + 2\sqrt{6}$ est inversible dans A et calculer son inverse.

Allez à : Correction exercice 39

CORRECTION

Correction exercice 1.

1.

$$x * y = xy + (x^2 - 1)(y^2 - 1) = yx + (y^2 - 1)(x^2 - 1) = y * x$$

La loi $*$ est commutative

Pour montrer que la loi n'est pas associative, il suffit de trouver x, y et z tels que :

$$x * (y * z) \neq (x * y) * z$$

Comme on le verra ci-dessous, 1 sera l'élément neutre il ne faut pas prendre 1 dans x, y et z.

Prenons, par exemple : $x = 0$, $y = 2$ et $z = 3$

$$x * (y * z) = 0 * (2 * 3) = 0 * \left(2 \times 3 + (2^2 - 1)(3^2 - 1)\right) = 0 * (6 + 3 \times 8) = 0 * 30$$
$$= 0 \times 30 + (0^2 - 1)(30^2 - 1) = -899$$
$$(x * y) * z = (0 * 2) * 3 = \left(0 \times 2 + (0^2 - 1)(2^2 - 1)\right) * 3 = (-3) * 3$$
$$= -3 \times 3 + ((-3)^2 - 1)(3^2 - 1) = -9 + 8^2 = 55$$

La loi $*$ n'est pas associative

$$1 * x = 1 \times x + (1^2 - 1)(x^2 - 1) = x$$

De plus, comme la loi est commutative $x * 1 = 1 * x$

On a bien $x * 1 = 1 * x = x$, 1 est l'élément neutre.

2.

$$x * y = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{y^2 + x^2} = y * x$$

La loi $*$ est commutative.

$$(x * y) * z = \sqrt{x^2 + y^2} * z = \sqrt{\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

En reprenant le calcul ci-dessus en changeant (x, y, z) en (y, z, x) :

$$(y * z) * x = \sqrt{y^2 + z^2 + x^2}$$

Comme $*$ est commutative :

$$(y * z) * x = x * (y * z)$$

Et finalement :

$$(x * y) * z = x * (y * z)$$

La loi $*$ est associative.

Remarque : On aurait pu calculer directement $x * (y * z)$

$$0 * x = \sqrt{0^2 + x^2} = |x| = x, \quad \text{car } x \geq 0$$

Comme $*$ est commutative

$$0 * x = x * 0$$

Et finalement

$$0 * x = x * 0 = x$$

0 est l'élément neutre.

Supposons que x admette un symétrique y

$$x * y = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$$

Or $x > 0$ et $y > 0$ donc $x * y = 0$ est impossible, pour tout $x > 0$, x n'a pas de symétrique.

3. On pose $\varphi(x) = x^3$, $\varphi'(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$ et est nul en 0, φ est une fonction strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Il reste à montrer qu'il s'agit d'un morphisme.

$$\varphi(x * y) = (x * y)^3 = \left(\sqrt[3]{x^3 + y^3}\right)^3 = x^3 + y^3 = \varphi(x) + \varphi(y)$$

φ est un morphisme de $(\mathbb{R},*)$ dans $(\mathbb{R},+)$ et donc un isomorphisme de $(\mathbb{R},*)$ dans $(\mathbb{R},+)$ (puisque φ est bijective).

φ^{-1} est un isomorphisme de $(\mathbb{R},+)$ dans $(\mathbb{R},*)$, donc un morphisme, $(\mathbb{R},+)$ est un groupe commutatif et l'image d'un groupe commutatif par un morphisme de groupe est un groupe. $(\mathbb{R},*)$ est un groupe.

Allez à : Exercice 1

Correction exercice 2.

1. Si $x \neq 0$ et $x' \neq 0$ alors $xx' \neq 0$ donc $(x,y) * (x',y') = (xx', xy' + y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

La loi $*$ est une loi interne.

$$(x,y) * \big((x',y') * (x'',y'')\big) = (x,y) * (x'x'', x'y'' + y') = (xx'x'', x(x'y'' + y') + y)$$
$$= (xx'x'', xx'y'' + xy' + y)$$

Et

$$\big((x,y) * (x',y')\big) * (x'',y'') = (xx', xy' + y) * (x'',y'') = (xx'x'', xx'y'' + xy' + y)$$

Donc la loi $*$ est associative.

Soit (a,b) tel que pour tout $(x,y) \in G$:

$$(a,b) * (x,y) = (x,y) = (x,y) * (a,b)$$

Ces égalités équivalent à :

$$(ax, ay + b) = (x,y) = (xa, xb + y) \Leftrightarrow \begin{cases} ax = x = xa \\ ay + b = y = xb + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$$

Donc $(1,0)$ est l'élément neutre.

Soit $(x,y) \in G$, on cherche (x',y') tel que $(x,y) * (x',y') = (1,0) = (x',y') * (x,y)$

Ces égalités équivalent à :

$$(xx', xy' + y) = (1,0) = (x'x, x'y + y') \Leftrightarrow \begin{cases} xx' = 1 = x'x \\ xy' + y = 0 = x'y + y' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{1}{x} \\ xy' + y = 0 = \dfrac{1}{x}y + y' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{1}{x} \neq 0 \\ y' = -\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

Le symétrique de (x,y) est $\left(\frac{1}{x}, -\frac{y}{x}\right)$.

Donc $(G,*)$ est un groupe.

Comme $(1,2) * (2,0) = (2,2)$ et que $(2,0) * (1,2) = (2,4)$ il est clair que ce groupe n'est pas commutatif.

2. L'élément neutre de $(G,*)$, $(1,0) \in]0,+\infty[\times \mathbb{R}$.

Soit $(x,y) \in]0,+\infty[\times \mathbb{R}$ et $(x',y') \in]0,+\infty[\times \mathbb{R}$. Alors

$$(x,y)*\left(\frac{1}{x'},-\frac{y'}{x'}\right)=\left(\frac{x}{x'},x\left(-\frac{y'}{x'}\right)+y\right)=\left(\frac{x}{x'},\frac{-xy'+x'y}{x'}\right)$$

Comme $\frac{x}{x'}>0$ alors $\left(\frac{x}{x'},\frac{-xy'+x'y}{x'}\right)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R}$.

Donc $(]0,+\infty[\times\mathbb{R},*)$ est un sous-groupe de $(G,*)$.

Allez à : Exercice 2

Correction exercice 3.

1. $(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')\in A$ donc la loi est interne.

$$(x,y)+[(x',y')+(x'',y'')]=(x,y)+(x'+x'',y'+y'')=\big(x+(x'+x''),y+(y'+y'')\big)$$
$$=\big((x+x')+x'',(y+y')+y''\big)=[(x,y)+(x',y')]+(x'',y'')$$

Donc la loi $+$ est associative.

$$(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')=(x'+x,y'+y)=(x',y')+(x,y)$$

Donc la loi $+$ est commutative

Soit (a,b) tel que $(x,y)+(a,b)=(x,y)$, il est clair que $(a,b)=(0,0)$ est l'unique élément neutre.

Soit (x',y') tel que $(x,y)+(x',y')=(0,0)$ cela équivaut à

$$(x+x',y+y')=(0,0)\Leftrightarrow\begin{cases}x+x'=0\\y+y'=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x'=-x\\y'=-y\end{cases}$$

Donc le symétrique de (x,y) est $(-x,-y)$.

Donc $(A,+)$ est un groupe commutatif.

2.

a) $(x,y)*(x',y')=(xx',xy'+x'y)=(x'x,x'y+xy')=(x',y')*(x,y)$ donc $*$ est commutative.

b)

$$[(x,y)*(x',y')]*(x'',y'')=(xx',xy'+x'y)*(x'',y'')=\big(xx'x'',xx'y''+x''(xy'+x'y)\big)$$
$$=(xx'x'',xx'y''+x''xy'+x''x'y)$$
$$(x,y)*[(x',y')*(x'',y'')]=(x,y)*(x'x'',x'y''+x''y')=(xx'x'',x(x'y''+x''y')+x'x''y)$$
$$=(xx'x'',xx'y''+xx''y'+x'x''y)$$

Donc $[(x,y)*(x',y')]*(x'',y'')=(x,y)*[(x',y')*(x'',y'')]$

La loi $*$ est associative.

c) Soit (e,f) tel que pour tout $(x,y)\in A$, $(x,y)*(e,f)=(x,y)$, e et f vérifient :

$$\begin{cases}xe=x\\xf+ye=y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}e=1\\xf+y=y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}e=1\\f=0\end{cases}$$

$(1,0)\in A$ est l'élément neutre de A pour la loi $*$.

d) Toutes les propriétés pour qu'un ensemble muni de deux lois soit un anneau sont dans les questions précédentes sauf la distributivité de $*$ par rapport à l'addition (à gauche ou à droite puisque la loi $*$ est commutative, c'est d'ailleurs cette commutativité qui rend l'anneau commutatif).

$$(x,y)*[(x',y')+(x''+y'')]=(x,y)*(x'+x'',y'+y'')$$
$$=\big(x(x'+x''),x(y'+y'')+(x'+x'')y\big)=(xx'+xx'',xy'+xy''+x'y+x''y)$$
$$=(xx'+xx'',xy'+x'y+xy''+x''y)=(xx',xy'+x'y)+(xx'',xy''+x''y)$$
$$=(x,y)*(x',y')+(x,y)*(x'',y'')$$

Et voilà, $(A,+,*)$ est un anneau commutatif.

Allez à : Exercice 3

Correction exercice 4.

$$c_1\circ c_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\\1&2&3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}=id$$

$$c_1\circ c_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}=\alpha$$

$$c_1\circ\alpha=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}=c_2$$

$$c_2\circ\alpha=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\\2&3&4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}=c_1$$

Allez à : Exercice 4

Correction exercice 5.

$e\in H$ et $e\in K$ donc $e\in H\cap K$.

Soient $a\in H\cap K$ et $b\in H\cap K$.

$a*b^{-1}\in H$, car H est un sous-groupe de G et $a*b^{-1}\in K$, car K est un sous-groupe de G donc

$$a*b^{-1}\in H\cap K$$

Cela montre que $H\cap K$ est un sous-groupe de G.

Allez à : Exercice 5

Correction exercice 6.

Vérifions que les $b\mathbb{Z}$ sont des sous-groupes de $\mathbb{Z}$.

$0=b\times 0\in b\mathbb{Z}$.

Si $x\in b\mathbb{Z}$ et $y\in b$, il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $x=kb$ et $l\in\mathbb{Z}$ tel que $y=lb$, on en déduit que

$$x-y=(k-l)b\in\mathbb{Z}$$

donc $b\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$.

Allez à : Exercice 6

Correction exercice 7.

1. $(x*y)^{-1}=y^{-1}*x^{-1}$
2. $x*x=e\Rightarrow x^{-1}=x$ de même $y^{-1}=y$.
3. $x*y=(x*y)^{-1}=y^{-1}*x^{-1}$ d'après 1°), puis $x*y=y*x$ d'après 2.

Allez à : Exercice 7

Correction exercice 8.

$\circ$	e	α	β	γ	δ	ϵ
e	e	α	β	γ	δ	ϵ
α	α	e	δ	ϵ	β	γ
β	β	ϵ	e	δ	γ	α
γ	γ	δ	ϵ	e	α	β
δ	δ	γ	α	β	ϵ	e
ϵ	ϵ	β	γ	α	e	δ

Allez à : Exercice 8

Correction exercice 9.

$|1| = 1$ donc $1 \in \mathcal{U}$, soient $z_1 \in \mathcal{U}$ et $z_2 \in \mathcal{U}$ donc $|z_1| = 1$ et $|z_2| = 1$

$$|z_1 z_2^{-1}| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{1}{1} = 1$$

donc $z_1 z_2^{-1} \in \mathcal{U}$, $(\mathcal{U},\times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*,\times)$.

Allez à : Exercice 9

Correction exercice 10.

$$z \in \mathcal{U}_5 \Leftrightarrow \exists k \in \{0,1,2,3,4\}, z = e^{\frac{2ik\pi}{5}} = \omega^k$$

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$

$\times$	1	ω	ω^2	ω^3	ω^4
1	1	ω	ω^2	ω^3	ω^4
ω	ω	ω^2	ω^3	ω^4	1
ω^2	ω^2	ω^3	ω^4	1	ω
ω^3	ω^3	ω^4	1	ω	ω^2
ω^4	ω^4	1	ω	ω^2	ω^3

Pour tout $k \in \{0,1,2,3,4\}$ on pose $\varphi(\overline{k}) = \omega^k$, il s'agit évidemment d'une bijection, de plus la place de $\overline{k}$ dans la table de $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, +)$ est la même que celle de $\omega^k = \varphi(\overline{k})$ dans la table de $(\mathcal{U}_5,\times)$ donc il s'agit d'un morphisme, finalement φ est un isomorphisme de $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, +)$ sur $(\mathcal{U}_5,\times)$.

Allez à : Exercice 10

Correction exercice 11.

1. Montrons que $\mathcal{U}$ est un sous-groupe de $\mathbb{C}^*$.
   $1^6 = 1$ donc l'élément neutre de $\mathbb{C}^*$ appartient à $\mathcal{U}$.
   Soient z_1 et z_2 deux éléments de $\mathcal{U}$, $(z_1 z_2^{-1})^6 = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^6 = \frac{z_1^6}{z_2^6} = \frac{1}{1} = 1$ donc $z_1 z_2^{-1} \in \mathcal{U}$.
   $\mathcal{U}$ est un sous-groupe de $\mathbb{C}$.
2. $z \in \mathcal{U} \Leftrightarrow \exists k \in \{0,1,2,3,4,5\}, z = e^{\frac{2ik\pi}{6}} = e^{\frac{ik\pi}{3}}, \mathcal{U} = \{1, -j^2, j, -1, j^2, -j\}$
   L'ordre d'un élément de $\mathcal{U}$ divise $Card(\mathcal{U}) = 6$, il vaut 1,2,3 ou 6.
   L'ordre de 1 est 1.
   L'ordre de $-j^2$ est 6, car $(-j^2)^2 = j \neq 1$, $(-j^2)^3 = -j^6 = -1 \neq 1$, son ordre est donc 6.
   L'ordre de j est 3.
   L'ordre de -1 est 2.
   L'ordre de j^2 est 3, car $(j^2)^2 = j^4 = j \neq 1$ et $(j^2)^3 = j^6 = 1$.
   L'ordre de $-j$ est 6, car $(-j)^2 = j^2 \neq 1$, $(-j)^3 = -j^3 = -1 \neq 1$, son ordre est donc 6.
3. $\mathcal{H}_1 = \{-1,1\}$ est un sous-groupe de $\mathcal{U}$ d'ordre 2.
   $\mathcal{H}_2 = \{1, j, j^2\}$ est un sous-groupe d'ordre 3.

$\times$	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

$\times$	1	j	j^2
1	1	j	j^2
j	j	j^2	1
j^2	j^2	1	j

Allez à : Exercice 11

Correction exercice 12.

1. $X_k = e^{\frac{2ik\pi}{6}} = e^{\frac{ik\pi}{3}}$ avec $k \in \{0,1,2,3,4,5\}$
   $X_0 = 1$, $X_1 = e^{\frac{i\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = -j^2$, $X_2 = e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = j$, $X_3 = e^{\frac{3i\pi}{3}} = e^{i\pi} = -1$,
   $X_4 = e^{\frac{4i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = j^2$, $X_5 = e^{\frac{5i\pi}{3}} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = -j$.
2. $1^6 = 1$ donc $1 \in \mathcal{U}_6$
   Soient $z_1 \in \mathcal{U}_6$ et $z_2 \in \mathcal{U}_6$, $z_1^6 = 1$ et $z_2^6 = 1$
   $(z_1 z_2^{-1})^6 = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^6 = \frac{z_1^6}{z_2^6} = \frac{1}{1} = 1$ donc $z_1 z_2^{-1} \in \mathcal{U}_6$.
   $(\mathcal{U}_6,\times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*,\times)$.
3. L'ordre des sous-groupes de $(\mathcal{U}_6,\times)$ divise l'ordre de $(\mathcal{U}_6,\times)$, c'est-à-dire le nombre d'éléments de $\mathcal{U}_6$, soit 6. L'ordre des sous-groupes des $(\mathcal{U}_6,\times)$ sont d'ordre 1,2,3 ou 6.
   Il y a un sous-groupe d'ordre 1 : $\{1\}$.
   Il y a un sous-groupe d'ordre 6 : $\{1, -j^2, j, -1, j^2, -j\} = \mathcal{U}_6$.
   Dans les sous-groupes d'ordre 2, il y a forcément 1 et un élément d'ordre 2, parmi $\{-j^2, j, -1, j^2, -j\}$ il n'y a que -1 qui soit d'ordre 2, il n'y a qu'un sous-groupe d'ordre 2 : $\{1, -1\}$.
   Dans les sous-groupes d'ordre 3, il y a forcément 1 et deux éléments dont l'ordre divise 3, ce sont donc des éléments d'ordre 3.
   j est d'ordre 3 (car $j^3 = 1$), le troisième éléments du sous-groupe est $j^{-1} = j^2$, $\{1, j, j^2\}$ est un sous-groupe d'ordre 3 de $(\mathcal{U}_6,\times)$.
   j^2 est aussi un élément d'ordre 3 (car $(j^2)^3 = j^6 = (j^3)^2 = 1^2 = 1$), le troisième élément est j, on retombe sur le cas précédent.
   $-j^2$ n'est pas d'ordre 3 car $(-j^2)^3 = -j^6 = -1 \neq 1$. $-j$ n'est pas d'ordre 3 car $(-j)^3 = -j^3 = -1 \neq 1$, -1 est d'ordre 2, donc n'est pas d'ordre 3. Il n'y a pas d'autre sous-groupe d'ordre 3.

Allez à : Exercice 12

Correction exercice 13.

1. $\mathcal{U}_n = \{z \in \mathbb{C}, z^n = 1\}$, $1^n = 1$ donc $1 \in \mathcal{U}_n$, si $z_1 \in \mathcal{U}_n$ et $z_2 \in \mathcal{U}_n$ alors $(z_1 z_2^{-1})^n = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n = \frac{z_1^n}{z_2^n} = \frac{1}{1} = 1$ donc $z_1 z_2^{-1} \in \mathcal{U}_n$, par conséquent $(\mathcal{U}_n,\times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*,\times)$.
2.
   a) Par définition de l'ordre d_0 est le plus petit entier supérieur ou égal à 1 tel que $\left(\omega_{k_0}\right)^{d_0} = 1$, ce qui équivaut à $e^{\frac{2ik_0 d_0 \pi}{n}} = 1$. La division euclidienne de $k_0 d_0$ par n donne qu'il existe un unique couple d'entiers (q, r) avec $0 \le r < n$ tel que $k_0 d_0 = qn + r$. $e^{\frac{2ik_0 d_0 \pi}{n}} = 1 \Leftrightarrow e^{\frac{2i(qn+r)\pi}{n}} = 1 \Leftrightarrow e^{2iq\pi} e^{\frac{2ir\pi}{n}} = 1 \Leftrightarrow e^{\frac{2ir\pi}{n}} = 1$, or $0 \le r < n \Leftrightarrow 0 \le \frac{2r\pi}{n} < 2\pi$ donc $r = 0$. On en déduit que $k_0 d_0 = qn$.
   b) D'après le théorème de Gauss k_0 divise qn et k_0 est premier avec n entraine que k_0 divise q, il exite donc $a \in \mathbb{N}$ tel que $q = ak_0$. D'autre part l'ordre de ω_{k_0} divise n d'après le théorème de Lagrange donc il existe $b \in \mathbb{N}$ tel que $n = bd_0$ on a donc
   $$k_0 d_0 = qn \Leftrightarrow k_0 d_0 = abk_0 d_0 \Leftrightarrow 1 = ab$$
   Par conséquent $a = b = 1$ et alors $n = d_0$.

3. Si k_0 et n ne sont pas premiers entre eux alors l'ordre de ω_{k_0} n'est pas n. Soit $D = PGCD(n, k_0) > 1$, il existe alors $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$ tels que $n = aD$ et $k_0 = bD$, donc $\omega_{k_0} = e^{\frac{2ik_0\pi}{n}} = e^{\frac{2ib\pi}{a}}$, on en déduit alors que $\left(\omega_{k_0}\right)^a = e^{2ib\pi} = 1$. Et évidemment $a < n$ car sinon $D = 1$.
   Ce qui montre que l'ordre de ω_{k_0} n'est pas n.
4. 3. est la contraposée de « si l'ordre de ω_{k_0}est n alors k_0 et n sont premiers entre eux », on en déduit que « l'ordre de ω_{k_0} est n si et seulement si k_0 et n sont premier entre eux ».

Allez à : Exercice 13

Correction exercice 14.

1. Si $\alpha > 0$ alors $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} > 0$ donc f est croissante, de plus $\lim_{x\to 0^*} x^\alpha = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$
   f est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$.
   Si $\alpha < 0$ alors $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} < 0$ donc f est décroissante, de plus $\lim_{x\to 0^*} x^\alpha = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = 0$
   f est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$.
2. Rappelons que la composition est une loi associative.
   Soit $Id_{]0,+\infty[}$ définie pour tout $x \in]0, +\infty[$, $Id_{]0,+\infty[}(x) = x = x^1$, $Id_{]0,+\infty[} \in E$ car $1 \in \mathbb{R}^*$.
   Soient $f \in E$ et $g \in E$, ils existent $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $\beta \in \mathbb{R}^*$ tels que pour tout $x \in]0, +\infty[$:
   $f(x) = x^\alpha$ et $g(x) = x^\beta$
   $f \circ g$ est une fonction de $]0, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$ et $f \circ g(x) = f\big(g(x)\big) = f\left(x^\beta\right) = \left(x^\beta\right)^\alpha = x^{\alpha\beta}$
   $\alpha\beta \in \mathbb{R}^*$ donc $f \circ g \in E$
   Le symétrique de f pour la composition est sa bijection réciproque, de plus $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{\alpha}}$, comme $\frac{1}{\alpha} \in \mathbb{R}^*$, $f^{-1} \in E$.
   Conclusion, $\circ$ est une loi interne, associative, qui admet $Id_{]0,+\infty[} \in E$ comme élément neutre et la bijection réciproque de f comme symétrique dans E. $(E,\circ)$ est un groupe.

Allez à : Exercice 14

Correction exercice 15.

1. Utilisons l'algorithme d'Euclide
$$29 = 3 \times 8 + 5$$
$$8 = 1 \times 5 + 3$$
$$5 = 1 \times 3 + 2$$
$$3 = 1 \times 2 + 1$$
$$2 = 2 \times 1 + 0$$
$$1 = 3 - 1 \times 2 = 3 - 1 \times (5 - 1 \times 3) = -1 \times 5 + 2 \times 3 = -1 \times 5 + 2 \times (8 - 1 \times 5) = 2 \times 8 - 3 \times 5$$
$$= 2 \times 8 - 3 \times (29 - 3 \times 8) = -3 \times 29 + 11 \times 8$$
   $u = 11$ et $v = -3$ est un couple de solution.
2. D'après la question précédente, $-3 \times 29 + 11 \times 8 = 1$, donc la classe de $-3 \times 29 + 11 \times 8$ dans H_{29} est égal à la classe de 1 dans H_{29}.
$$\overline{-3 \times 29 + 11 \times 8} = \overline{1} \Leftrightarrow \overline{-3} \times \overline{29} + \overline{11} \times \overline{8} = \overline{1} \Leftrightarrow \overline{11} \times \overline{8} = \overline{1}$$
   Car $\overline{29} = \overline{0}$, le symétrique de $\overline{8}$ est $\overline{11}$.
3. Les classes sont celles de H_{29}.
   $8x \equiv 9 \mod 29$ équivaut à $\overline{8x} = \overline{9}$, en multipliant par $\overline{11}$ à gauche et à droite :
$$\overline{11} \times \overline{8} \times \overline{x} \ = \overline{11} \times \overline{9} \Leftrightarrow \overline{1} \times \overline{x} = \overline{99} \Leftrightarrow \overline{x} = \overline{3 \times 29 + 12} \Leftrightarrow \overline{x} = \overline{3 \times 29} + \overline{12} = \overline{12}$$

Les solutions sont donc les entiers x congrus à 12 modulo 29.

Allez à : Exercice 15

Correction exercice 16.

1. On cherche $\overline{u} \in (\mathbb{Z}/24\mathbb{Z})^*$ tel que :
$$\overline{8}\overline{u} = \overline{1} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, 8u = 1 + 24k \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, 8u - 24k = 1$$
$PGCD(8,24) = 8$ qui ne divise pas 1 donc $\overline{8}$ n'admet pas d'inverse.
2. Soit $\overline{a} \in (\mathbb{Z}/24\mathbb{Z})^*$, $\overline{a}$ admet un inverse si et seulement s'il existe $\overline{u} \in (\mathbb{Z}/24\mathbb{Z})^*$ tel que
$$\overline{a} \times \overline{u} = \overline{1}$$
Ce qui équivaut à, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $au = 1 + 24k$, autrement dit $au - 24k = 1$
Finalement à ce que a et 24 sont premiers entre eux, l'ensemble recherché est
$$\{1,5,7,11,13,17,19,23\}$$
3.
On cherche $\overline{u} \in (\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^*$ tel que :
$$\overline{5}\overline{u} = \overline{1} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, 5u = 1 + 11k \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, 5u - 11k = 1$$
Soit on voit une solution évidente $(u,k) = (-2,-1)$ soit on utilise l'algorithme d'Euclide
$$5 \times (-2) - 11 \times (-1) = 1 \Leftrightarrow 5 \times (-2) = 1 + 11 \times (-1) \Rightarrow \overline{5} \times \overline{-2} = \overline{1}$$
L'inverse de $\overline{5}$ est $\overline{-2} = \overline{9}$.
4. $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^*$ est un groupe multiplicatif à 10 éléments donc, pour tout $x \in (\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^*$, $x^{10} = \overline{1}$
Par conséquent $x^9 = x^{-1}$
5.
$$x^9 + \overline{5} = \overline{0} \Leftrightarrow x^{-1} + \overline{5} = \overline{0} \Leftrightarrow \overline{1} + \overline{5}x = \overline{0} \Leftrightarrow -x \times \overline{5} = \overline{1}$$
On a vu à la question 3. que l'opposé de la classe de 5 est $\overline{-2}$ donc $x = \overline{2}$.

Allez à : Exercice 16

Correction exercice 17.

1. Soit $l' \in \overline{l}$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $l' = l + 6k$, donc $l' = l + 2 \times (3k) \equiv l \quad [2]$ par conséquent
$$f(\overline{l'}) = \hat{l}$$
Si on change de représentant dans la classe de l dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, on ne change pas la valeur de $f(\overline{l})$ donc f est bien définie.
On notera $+$ l'addition dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, c'est un peu abusif mais pas trop.
$$f(\overline{l_1} + \overline{l_2}) = f(\overline{l_1 + l_2}) = \widehat{l_1 + l_2} = \widehat{l_1} + \widehat{l_2} = f(\overline{l_1}) + f(\overline{l_2})$$
f est bien un morphisme de groupe.
Il reste à montrer que f est surjectif. Dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ il n' y a que deux classes $\hat{0}$ et $\hat{1}$, comme
$$f(\overline{0}) = \hat{0} \quad \text{et} \quad f(\overline{1}) = \hat{1}$$
Ces deux classes ont au moins un antécédent.

Remarque :

Celui-ci n'a aucun chance d'être unique pour plein de raison, la première est que sinon f serait une bijection d'un ensemble à 6 éléments sur un ensemble à 2 éléments, ce qui est bien sur complétement impossible, la seconde est que
$f(\overline{2}) = \hat{2} = \hat{0}$; $f(\overline{3}) = \hat{3} = \hat{1}$; $f(\overline{4}) = \hat{4} = \hat{0}$ et $f(\overline{5}) = \hat{5} = \hat{1}$.

2. Si on reprend la remarque on a
$$\ker(f) = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\}$$
Sinon (pour faire plus général), on cherche $\overline{l} \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ tel que

$$f(\bar{l}) = \hat{0} \Leftrightarrow \hat{l} = \hat{0} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, l = 0 + 2k = 2k \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \bar{l} = \overline{2k}$$

Dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ il y a trois classes « paires », $\bar{0}$, $\bar{2}$ et $\bar{4}$.

On rappelle que le noyau d'un morphisme est un sous-groupe de l'ensemble de départ.

$+$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$

3. On notera $\dot{l}$ les classes de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. On définit φ de $\ker(f)$ dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ par :

$$\varphi(\bar{0}) = \dot{0};\quad \varphi(\bar{2}) = \dot{1} \quad \text{et} \quad \varphi(\bar{4}) = \dot{2}$$

Soit d'une manière plus générale $\varphi(\overline{2k}) = \dot{k}$.

Comme pour f on doit se demander ce qu'il se passe si on change de représentant dans $\overline{2k}$, est-ce que l'on retombe bien sur la même classe modulo 3 ?

Soit $2k' \in \overline{2k}$, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $2k' = 2k + 6n$, ce qui entraine que $k' = k + 3n$ et que par conséquent $\dot{k'} = \dot{k}$, tout va bien.

Manifestement φ est une bijection, est-ce un morphisme ?

$$\varphi(\overline{2k_1} + \overline{2k_2}) = \varphi(\overline{2k_1 + 2k_2}) = \widehat{2k_1 + 2k_2} = \widehat{2k_1} + \widehat{2k_2} = \varphi(\overline{2k_1}) + \varphi(\overline{2k_2})$$

φ est bien un morphisme.

Autre méthode :

On pouvait dresser la table de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et constater qu'elle est identique à celle de $\ker(f)$.

Allez à : Exercice 17

Correction exercice 18.

1. Il faut vérifier que l'image de $\mathcal{U}_8$ par f est bien incluse dans $\mathcal{U}_2$, or pour tout $z \in \mathcal{U}_8$, $z^8 = 1$ par conséquent $(f(z))^2 = (z^4)^2 = z^8 = 1$ ce qui montre que $f(z) \in \mathcal{U}_2$.
2. Soit $z \in \mathcal{U}_8$, $z \in Ker(f) \Leftrightarrow f(z) = 1 \Leftrightarrow z^4 = 1 \Leftrightarrow z \in \{1, i, -1, -i\}$

Donc $\ker(f) = \{1, i, -1, -i\} = \mathcal{U}_4$

$\times$	1	i	-1	$-i$
1	1	i	-1	$-i$
i	i	-1	$-i$	1
-1	-1	$-i$	1	i
$-i$	$-i$	1	i	-1

3.

Première méthode compliquée mais qui se généralise aux isomorphismes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sur $\mathcal{U}_n$.

On pose $\varphi(\bar{a}) = e^{\frac{2ia\pi}{4}} = e^{\frac{ia\pi}{2}}$, où $\bar{k} \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Il faut d'abord vérifier que φ est bien définie, c'est-à-dire que si on change de représentant dans $\bar{a}$ alors l'image est bien la même. Soit $b \in \bar{a}$, $b = a + 4k$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$e^{\frac{2ib\pi}{4}} = e^{\frac{2i(a+4k)\pi}{4}} = e^{\frac{2ia\pi + 2i\times 4k\pi}{4}} = e^{\frac{2ia\pi}{4}} e^{\frac{2ik\times 4\pi}{4}} = e^{\frac{2ia\pi}{4}} \times e^{2ik\pi} = e^{\frac{2ia\pi}{4}} \times 1 = e^{\frac{2ia\pi}{4}}$$

Donc tout va bien.

$$\varphi(\bar{a} + \bar{b}) = \varphi(\overline{a+b}) = e^{\frac{i(a+b)\pi}{2}} = e^{\frac{ia\pi}{2}} e^{\frac{ib\pi}{2}} = \varphi(\bar{a})\varphi(\bar{b})$$

φ est bien un morphisme de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ sur $\mathcal{U}_4$.

Montrons que le noyau de φ est bien réduit à $\overline{0}$ (l'élément neutre de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$), ce qui montrera que φ est injective.

$$\overline{a} \in Ker(\varphi) \Leftrightarrow \varphi(\overline{a}) = 1 \Leftrightarrow e^{\frac{ia\pi}{2}} = 1 \Leftrightarrow \text{il existe } k \in \mathbb{Z}, \frac{a\pi}{2} = 2k\pi \Leftrightarrow \text{il existe } k \in \mathbb{Z}, a = 4k \Leftrightarrow \overline{a} = \overline{0}$$

Donc φ est injective.

Comme le cardinal de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ est le même que le cardinal de $\mathcal{U}_4$, on en déduit que φ est bijective, finalement φ est un isomorphisme de groupe.

Deuxième méthode.

On pose $\varphi(\overline{0}) = 1$, $\varphi(\overline{1}) = i$, $\varphi(\overline{2}) = -1$ et $\varphi(\overline{3}) = -i$

Chaque élément de $\mathcal{U}_4$ admet un unique antécédent donc φ est une bijection.

Il reste à montrer que c'est un morphisme.

Le plus simple est de comparer la table de $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ avec celle de $(\mathcal{U}_4, \times)$

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$

Les éléments de chaque groupe étant situé au même endroit, φ est un morphisme entre ces deux groupes

Sinon on peut faire l'effort de vérifier « à la main » que tout marche bien.

$$\varphi(\overline{0} + \overline{0}) = \varphi(\overline{0}) = 1 = 1 \times 1 = \varphi(\overline{0})\varphi(\overline{0})$$
$$\varphi(\overline{0} + \overline{1}) = \varphi(\overline{1}) = i = 1 \times i = \varphi(\overline{0})\varphi(\overline{1})$$
$$\varphi(\overline{0} + \overline{2}) = \varphi(\overline{2}) = -1 = 1 \times (-1) = \varphi(\overline{0})\varphi(\overline{2})$$
$$\varphi(\overline{0} + \overline{3}) = \varphi(\overline{3}) = -i = 1 \times (-i) = \varphi(\overline{0})\varphi(\overline{3})$$

$$\varphi(\overline{1} + \overline{1}) = \varphi(\overline{2}) = -1 = i \times i = \varphi(\overline{1})\varphi(\overline{1})$$
$$\varphi(\overline{1} + \overline{2}) = \varphi(\overline{3}) = -i = i \times (-1) = \varphi(\overline{1})\varphi(\overline{2})$$
$$\varphi(\overline{1} + \overline{3}) = \varphi(\overline{0}) = 1 = i \times (-i) = \varphi(\overline{1})\varphi(\overline{3})$$

$$\varphi(\overline{2} + \overline{2}) = \varphi(\overline{0}) = 1 = (-1) \times (-1) = \varphi(\overline{2})\varphi(\overline{2})$$
$$\varphi(\overline{2} + \overline{3}) = \varphi(\overline{1}) = i = (-1) \times (-i) = \varphi(\overline{2})\varphi(\overline{3})$$

$$\varphi(\overline{3} + \overline{3}) = \varphi(\overline{2}) = -1 = (-i) \times (-i) = \varphi(\overline{3})\varphi(\overline{3})$$

Par commutativité on obtient ceux qui manquent.

φ est bien un morphisme de groupe. Comme il est bijectif, c'est un isomorphisme.

Allez à : Exercice 18

Correction exercice 19.

1. $1^8 = 1$ donc $1 \in H$. Soient $z_1 \in H$ et $z_2 \in H$ alors $(z_1 z_2^{-1})^8 = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^8 = \frac{z_1^8}{z_2^8} = \frac{1}{1} = 1$ donc $z_1 z_2^{-1} \in H$, $(H, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.
2. $z^4 = z^4$ donc $z \sim z$, autrement dit $\sim$ est réflexive.

$z_1 \sim z_2 \Rightarrow z_1^4 = z_2^4 \Rightarrow z_2^4 = z_1^4 \Rightarrow z_2 \sim z_1$ donc $\sim$ est symétrique.

$\begin{cases} z_1 \sim z_2 \\ z_2 \sim z_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1^4 = z_2^4 \\ z_2^4 = z_3^4 \end{cases} \Rightarrow z_1^4 = z_3^4 \Rightarrow z_1 \sim z_3$ donc $\sim$ est transitive, $\sim$ est une relation d'équivalence.

3. Soit $a \in H$, $z \in \dot{a} \Leftrightarrow z^4 = a^4 \Leftrightarrow \left(\frac{z}{a}\right)^4 = 1$ or les racines quatrième de 1 sont $\{1, i, -1, -i\}$ donc $\frac{z}{a} \in \{1, i, -1, -i\}$ ou encore $z \in \{a, ai, -a, -ia\}$, et donc $\dot{a} = \{a, ai, -a, -ia\}$.
Ces éléments sont évidemment tous distincts (sauf pour $a = 0$, mais $0 \notin H$) donc une classe pour cette relation d'équivalence a 4 éléments, or le cardinal de H est 8, il y a donc deux classes d'équivalence.
$\dot{1} = \{1, i, -1, -i\}$ il reste à trouver une racine huitième de 1 qui ne soit pas dans $\dot{1}$. Par exemple $\omega = e^{\frac{2i\pi}{8}} = e^{\frac{i\pi}{4}}$, La seconde classe d'équivalence est alors $\dot{\omega} = \{\omega, \omega i, -\omega, -i\omega\}$. On peut un peu améliorer la « clarté » de ces complexes, en effet $\omega i = e^{\frac{i\pi}{4}} e^{\frac{i\pi}{2}} = e^{\frac{3i\pi}{4}}$, $-\omega = -e^{\frac{i\pi}{4}} = e^{i\pi} e^{\frac{i\pi}{4}} = e^{\frac{5i\pi}{4}}$, $-i\omega = e^{\frac{3i\pi}{2}} e^{\frac{i\pi}{4}} = e^{\frac{7i\pi}{4}}$.

Allez à : Exercice 19

Correction exercice 20.

1. $1^n = 1$ donc $1 \in U_n$
Soient $z \in U_n$ et $z' \in U_n$ donc $z^n = 1$ et $z'^n = 1$
$$(zz'^{-1})^n = \left(\frac{z}{z'}\right)^n = \frac{z^n}{z'^n} = \frac{1}{1} = 1$$
Cela montre que $zz'^{-1} \in U_n$, U_n muni de la multiplication est un sous-groupe de $\mathbb{C}^*$.
2. Comme n divise m, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $m = kn$.
Soit $z \in U_n$, alors $z^n = 1$.
$$z^m = z^{kn} = (z^n)^k = 1^k = 1$$
Ce qui montre que $z \in U_m$ et que $U_n \subset U_m$.
3. d divise n, d'après b) $U_d \subset U_n$, de même d divise m, d'après b) $U_d \subset U_m$, cela montre que $U_d \subset U_n \cap U_m$
Soit $z \in U_n \cap U_m$, $z \in U_n$ et $z \in U_m$ donc $z^n = 1$ et $z^m = 1$. D'après l'identité de Bézout il existe $u \in \mathbb{Z}$ et $v \in \mathbb{Z}$ tels que $nu + mv = d$, on en déduit que $z^d = z^{nu+mv} = (z^n)^u (z^m)^v = 1^u \times 1^v = 1$, ce qui montre que $z \in U_d$, par conséquent $U_n \cap U_m \subset U_d$.
D'après cette double inclusion : $U_d = U_n \cap U_m$.
4. Soient $k \in \mathbb{Z}$ et $k' \in \mathbb{Z}$
$$f(k + k') = e^{i\frac{2(k+k')\pi}{5}} = e^{i\left(\frac{2k\pi}{5} + \frac{2k'\pi}{5}\right)} = e^{i\frac{2k\pi}{5}} e^{i\frac{2k'\pi}{5}} = f(k)f(k')$$
Cela montre que f est un morphisme du groupe additif $\mathbb{Z}$ dans le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$. Il reste à montrer que l'image de $\mathbb{Z}$ par f est incluse dans U_5.
Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\left(f(k)\right)^5 = \left(e^{i\frac{2k\pi}{5}}\right)^5 = e^{2i\pi} = 1$, ce qui montre que $f(k) \in U_5$.
f est un morphisme du groupe additif $\mathbb{Z}$ dans le groupe multiplicatif U_5.
$$k \in \ker(f) \Leftrightarrow f(k) = 1$$
Le « 1 » est l'élément neutre du groupe U_5 muni de la multiplication.
$k \in \ker(f) \Leftrightarrow f(k) = 1 \Leftrightarrow e^{i\frac{2k\pi}{5}} = 1 \Leftrightarrow$il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $\frac{2k\pi}{5} = 2k'\pi$, autrement dit $k = 5k'$
$\ker(f)$ est l'ensemble des multiples de 5, ce qui s'écrit aussi $5\mathbb{Z}$.

Allez à : Exercice 20

Correction exercice 21.

1.

a)

$$\overline{3}^0=\overline{1}$$
$$\overline{3}^1=\overline{3}$$
$$\overline{3}^2=\overline{9}=\overline{2}$$
$$\overline{3}^3=\overline{3}^2\times\overline{3}=\overline{2}\times\overline{3}=\overline{6}$$
$$\overline{3}^4=\overline{3}^3\times\overline{3}=\overline{6}\times\overline{3}=\overline{18}=\overline{4}$$
$$\overline{3}^5=\overline{3}^4\times\overline{3}=\overline{4}\times\overline{3}=\overline{12}=\overline{5}$$
$$\overline{3}^6=\overline{1}$$

La dernière égalité n'étant que le petit théorème de Fermat.

b) Si $k\notin\{0,1,2,3,4,5\}$, il existe un unique couple $(q,r)\in\mathbb{Z}\times\{0,1,2,3,4,5\}$ tels que $k=6q+r$

$$\overline{3}^k=\overline{3}^{6q+r}=\left(\overline{3}^6\right)^q\times\overline{3}^r=\left(\overline{1}\right)^q\times\overline{3}^r=\overline{3}^r\in\left\{\overline{3}^k,k\in\{0,1,2,3,4,5\}\right\}$$

2. 7 est premier donc $((\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*,\times)$ est un groupe.
3. D'après la première question le groupe engendré par $\overline{3}$ est

$$\{\overline{1},\overline{3},\overline{2},\overline{6},\overline{4},\overline{5}\}$$

C'est bien le même ensemble que $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*$.

4.

a) Il faut vérifier que si $\overline{3}^{k'}=\overline{3}^k$ alors on a bien $\varphi\left(\overline{3}^{k'}\right)=\varphi\left(\overline{3}^k\right)$

$$\overline{3}^{k'}=\overline{3}^k\Leftrightarrow\overline{3}^{k'-k}=\overline{1}\Leftrightarrow\exists l\in\mathbb{Z},k'-k=6l\Leftrightarrow\exists l\in\mathbb{Z},k'=k+6l$$

La seconde égalité vient du fait que l'ordre de $\overline{3}$ est 6, d'après la première question.

$$\varphi\left(\overline{3}^{k'}\right)=e^{\frac{ik'\pi}{3}}=e^{\frac{i(k+6l)\pi}{3}}=e^{\frac{ik\pi+i\times 6l\pi}{3}}=e^{\frac{ik\pi}{3}}e^{2il\pi}=e^{\frac{ik\pi}{3}}=\varphi\left(\overline{3}^k\right)$$

Il faut aussi vérifier que $\varphi\left(\overline{3}^k\right)\in\mathcal{U}_6$, ce qui est exact car $\left(e^{\frac{ik\pi}{3}}\right)^6=e^{2ik\pi}=1$

φ est bien définie.

b) Pour toutes classes a et b de $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*$, il existe un unique $k\in\{0,1,2,3,4,5\}$ et un unique $l\in\{0,1,2,3,4,5\}$ tel que $a=\overline{3}^k$ et $b=\overline{3}^l$

$$\varphi(ab)=\varphi\left(\overline{3}^k\overline{3}^l\right)=\varphi\left(\overline{3}^{k+l}\right)=e^{\frac{i(k+l)\pi}{3}}=e^{\frac{ik\pi}{3}}e^{\frac{il\pi}{3}}=\varphi\left(\overline{3}^k\right)\varphi\left(\overline{3}^l\right)=\varphi(a)\varphi(b)$$

φ est un morphisme de groupe.

c) Soit $a\in\ker(\varphi)$

$$\varphi(a)=1\Leftrightarrow\varphi\left(\overline{3}^k\right)=1\Leftrightarrow e^{\frac{ik\pi}{3}}=1\Leftrightarrow\exists k'\in\mathbb{Z},\frac{k\pi}{3}=2k'\pi\Leftrightarrow\exists k'\in\mathbb{Z},k=6k'$$

Donc

$$a=\overline{3}^k=\overline{3}^{6k'}=\left(\overline{3}^6\right)^{k'}=\overline{1}^{k'}=\overline{1}$$

le noyau de φ est réduit à l'élément neutre de $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*$, ce qui montre que φ est injective, comme $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*$
et $\mathcal{U}_6$ ont tous les deux 6 éléments φ est bijective.

Allez à : Exercice 21

Correction exercice 22.

1. Pour tout $k \in G$, il existe un unique $h = g^{-1} * k \in G$ tel que $\gamma_g(h) = \gamma_g(g^{-1} * k) = g * g^{-1} * k = k$
   Donc γ_g est une bijection de G sur G.
2. Pour tout $g, g' \in G$ et pour tout $h \in G$
   $$\varphi(g * g')(h) = \gamma_{g*g'}(h) = (g * g') * h = g * (g' * h) = g * \gamma_{g'}(h) = \gamma_g\left(\gamma_{g'}(h)\right) = \gamma_g \circ \gamma_{g'}(h)$$
   Par conséquent
   $$\varphi(g * g') = \gamma_g \circ \gamma_{g'} = \varphi(g) \circ \varphi(g')$$
   Ce qui montre que φ est un morphisme de $(G,*)$ dans $(\mathcal{S}_G,\circ)$.
3. Pour montrer que φ est injective il faut et il suffit de montrer que le noyau de φ est réduit à l'élément neutre de G car φ est un morphisme.
   $$g \in \ker(\varphi) \Leftrightarrow \varphi(g) = Id_G \Leftrightarrow \forall h \in G, \varphi(g)(h) = h \Leftrightarrow \forall h \in G, \gamma_g(h) = h \Leftrightarrow \forall h \in G, g * h = h \Leftrightarrow g = e$$
   Ce qui montre que $\ker(\varphi) = \{e\}$, et que donc φ est injective.
4. Pour tout $k \in G$, il existe un unique $h = k * g^{-1} \in G$ tel que $\delta_g(h) = \delta_g(k * g^{-1}) = k * g^{-1} * g = k$
   Donc δ_g est une bijection de G sur G.
   Pour montrer l'injectivité de ψ on ne peut pas utiliser le « noyau » puisque pour l'instant ψ n'est pas un morphisme.
   $$\psi(g) = \psi(g') \Leftrightarrow \forall h \in G, \psi(g)(h) = \psi(g')(h) \Leftrightarrow \forall h \in G, \delta_g(h) = \delta_{g'}(h)$$
   $$\Leftrightarrow \forall h \in G, h * g = h * g' \Leftrightarrow g = g'$$
   ψ est injective.
5.

Si ψ est un (homo)morphisme de groupe

Pour tous $g, g' \in G$, $\psi(g * g') = \psi(g) \circ \psi(g')$, donc pour tout $h \in G$
$$\psi(g * g')(h) = \psi(g) \circ \psi(g')(h) \Leftrightarrow \delta_{g*g'}(h) = \delta_g \circ \delta_{g'}(h) \Leftrightarrow h * (g * g') = \delta_g\left(\delta_{g'}(h)\right)$$
$$\Leftrightarrow h * (g * g') = \delta_g(h * g') \Leftrightarrow h * g * g' = h * g' * g$$
Il reste à composer par h^{-1} à gauche pour en déduire que pour tous $g, g' \in G$, $g * g' = g' * g$, autrement dit G est abélien.

Réciproque, supposons que G soit abélien.

C'est pareil dans l'autre sens, faisons le tout de même.

Pour tout $g, g', h \in G$
$$h * g * g' = h * g' * g \Leftrightarrow h * (g * g') = \delta_g(h * g') \Leftrightarrow h * (g * g') = \delta_g\left(\delta_{g'}(h)\right) \Leftrightarrow h * (g * g') = \delta_g\left(\delta_{g'}(h)\right) \Leftrightarrow \delta_{g*g'}(h) = \delta_g \circ \delta_{g'}(h)\psi(g * g')(h) = \psi(g) \circ \psi(g')(h)$$
$$\Leftrightarrow \psi(g * g') = \psi(g) \circ \psi(g')$$
Ce qui montre que ψ est un morphisme de groupe.

Allez à : Exercice 22

Correction exercice 23.

1. Si φ est un morphisme de G
   Pour tout $g, g' \in G$
   $$\varphi\left(g^{-1} * g'^{-1}\right) = \varphi(g^{-1}) * \varphi\left(g'^{-1}\right) \Rightarrow \left(g^{-1} * g'^{-1}\right)^{-1} = (g^{-1})^{-1} * (g'^{-1})^{-1}$$
   $$\Rightarrow (g'^{-1})^{-1} * (g^{-1})^{-1} = g * g' \Rightarrow g' * g = g * g'$$
   Ce qui montre que le groupe est abélien.
   Si le groupe est abélien alors pour tous $g, g' \in G$, $g^{-1} * g'^{-1} = g'^{-1} * g^{-1}$
   $$g^{-1} * g'^{-1} = g'^{-1} * g^{-1} \Rightarrow \varphi(g) * \varphi(g') = (g * g')^{-1} = \varphi(g * g')$$
   Ce qui montre que φ est un morphisme de G.

Ces deux implications montre que φ est un morphisme si et seulement si G est abélien.

2. $e \in \{e, x, x^2, \dots, x^{m-1}\}$

   Soit $g, h \in \{e, x, x^2, \dots, x^{m-1}\}$, il existe $a, b \in \{0,1,2, \dots, m-1\}$ tels que $g = x^p$ et $h = x^q$

   Donc $g * h^{-1} = x^a * x^{-b} = x^{a-b}$

   On effectue la division euclidienne de $a - b$ par m, il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \{0,1,2, \dots, m-1\}$ tel que $a - b = mq + r$, par conséquent

   $$g * h^{-1} = x^{mq+r} = (x^m)^q * x^r = e^q * x^r = x^r \in \{e, x, x^2, \dots, x^{m-1}\}$$

   Ces deux propriétés montrent que $\{e, x, x^2, \dots, x^{m-1}\}$ muni de $*$ est un sous-groupe de $(G,*)$.

3. n est pair donc il existe $n' \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2n' - 1$, une des conséquences du théorème de Lagrange veut que pour tout $g \in G$, $g^n = e$, par conséquent

   $$g^{2n'-1} = e \Leftrightarrow g^{2n'} = g \Leftrightarrow \left(g^{n'}\right)^2 = g \Leftrightarrow \psi\left(g^{n'}\right) = g$$

   Donc pour tout $g \in G$ il existe $h = g^{n'}$ tel que $g = \psi(h)$, ce qui montre que ψ est surjective.

4. Supposons que ψ soit un morphisme, pour tous $g, g' \in G$

   $$\psi(g * g') = \psi(g) * \psi(g') \Leftrightarrow (g * g')^2 = g^2 * g'^2 \Leftrightarrow g * g' * g * g' = g * g * g' * g' \Leftrightarrow g' * g = g * g'$$

   En simplifiant à gauche par g et à droite par g'

   Bref ψ est un morphisme si et seulement si G est abélien.

Allez à : Exercice 23

Correction exercice 24.

1. $\forall g \in G \quad e * g = g * e$ donc $e \in Z$.

   Pour tout $z_1 \in Z$ et pour tout $z_2 \in Z$,

   $$(z_1 * z_2^{-1}) * g = z_1 * (z_2^{-1} * g) = z_1 * (g^{-1} * z_2)^{-1}$$

   Or $g^{-1} \in G$ donc $g^{-1} * z_2 = z_2 * g^{-1}$

   $$(z_1 * z_2^{-1}) * g = z_1 * (g^{-1} * z_2)^{-1} = z_1 * (z_2 * g^{-1})^{-1} = z_1 * (g * z_2^{-1}) = (z_1 * g) * z_2^{-1} = (g * z_1) * z_2^{-1} = g * (z_1 * z_2^{-1})$$

   Ce qui montre que $z_1 * z_2^{-1} \in Z$.

   Donc $(Z,*)$ est un sous-groupe de $(G,*)$

2. Si G est commutatif alors pour tout $z \in G$ et pour $g \in G$, $z * g = g * z$ donc $Z = G$.

Allez à : Exercice 24

Correction exercice 25.

1.

   a)

$A \cup B$	$\emptyset$	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{0,1\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{0,1\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0,1\}$	$\{0,1\}$
$\{1\}$	$\{1\}$	$\{0,1\}$	$\{1\}$	$\{0,1\}$
$\{0,1\}$	$\{0,1\}$	$\{0,1\}$	$\{0,1\}$	$\{0,1\}$

   b) $\emptyset$ est l'élément neutre pour la réunion.

   c) Oui, la réunion est toujours associative.

   d) Oui, la réunion est toujours commutative.

   e) Non, par exemple $\{1\} \cup B$ n'est jamais égal à $\{0\}$, ce qui signifie que $\{1\}$ n'a pas de symétrique.

   f) Même réponse pour les questions de b à e.

Allez à : Exercice 25

2.

$A \cap B$	$\emptyset$	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{0,1\}$

a)

$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{0\}$	$\emptyset$	$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0\}$
$\{1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{1\}$
$\{0,1\}$	$\emptyset$	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{0,1\}$

b) $\{0,1\}$ est l'élément neutre pour l'intersection.
c) Oui, l'intersection est toujours associative.
d) Oui, l'intersection est toujours commutative.
e) Non, par exemple $\{0\} \cap B$ n'est jamais égal à $\{0,1\}$, donc $\{0\}$ n'a pas de symétrique.
f) Même réponse pour les questions de b à e.

Allez à : Exercice 25

3.
a)

$(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$	$\emptyset$	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{0,1\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{0,1\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	$\emptyset$	$\{0,1\}$	$\{1\}$
$\{1\}$	$\{1\}$	$\{0,1\}$	$\emptyset$	$\{0\}$
$\{0,1\}$	$\{0,1\}$	$\{1\}$	$\{0\}$	$\emptyset$

b) $\emptyset$ est l'élément neutre pour la différence symétrique.
c) d) e) Sur chaque ligne de la table il y a, une et une seule fois, chacun des 4 éléments de E ce qui entraine que E muni de la différence symétrique est un groupe, cette loi est associative et commutative, le symétrique de $\emptyset$ est $\emptyset$, celui de $\{0\}$ est $\{0\}$, celui de $\{1\}$ est $\{1\}$ et celui de $\{0,1\}$ est $\{0,1\}$.
f)

$$(\emptyset \setminus B) \cup (B \setminus \emptyset) = \emptyset \cup B = B$$

Donc $\emptyset$ est l'élément neutre.
On a besoin de rappeler un résultat avant de montrer l'associativité basé sur le fait que $A \setminus B = A \cap \overline{B}$

$$\begin{aligned} A * B &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(B \cap \overline{A}\right) = (A \cup B) \cap \left(A \cup \overline{A}\right) \cap \left(\overline{B} \cup B\right) \cap \left(\overline{B} \cup \overline{A}\right) \\ &= (A \cup B) \cap E \cap E \cap \left(\overline{B} \cup \overline{A}\right) = (A \cup B) \cap \left(\overline{B} \cup \overline{A}\right) = (A \cup B) \cap \left(\overline{B \cap A}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A * B) * C &= \left((A \cup B) \cap \left(\overline{A \cap B}\right)\right) * C = \left(\left((A \cup B) \cap \left(\overline{A \cap B}\right)\right) \cup C\right) \cap \left(\overline{\left((A \cup B) \cap \left(\overline{A \cap B}\right)\right) \cap C}\right) \\ &= \left(\left((A \cup B) \cup C\right) \cap \left(\left(\overline{A \cap B}\right) \cup C\right)\right) \cap \left(\overline{(A \cup B) \cap \left(\overline{A \cap B}\right)} \cup \overline{C}\right) \\ &= (A \cup B \cup C) \cap \left(\overline{A} \cup \overline{B} \cup C\right) \cap \left(\left(\overline{A \cup B}\right) \cup \left(\overline{\overline{A \cap B}}\right) \cup \overline{C}\right) \\ &= (A \cup B \cup C) \cap \left(\overline{A} \cup \overline{B} \cup C\right) \cap \left(\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) \cup (A \cap B) \cup \overline{C}\right) \end{aligned}$$

Faisons un petit calcul intermédiaire

$$\begin{aligned} \left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) \cup (A \cap B) &= \left(\overline{A} \cup A\right) \cap \left(\overline{A} \cup B\right) \cap \left(\overline{B} \cup A\right) \cap \left(\overline{B} \cup B\right) = E \cap \left(\overline{A} \cup B\right) \cap \left(\overline{B} \cup A\right) \cap E \\ &= \left(\overline{A} \cup B\right) \cap \left(\overline{B} \cup A\right) \end{aligned}$$

Reprenons le calcul de $(A * B) * C$.

$$\begin{aligned} (A * B) * C &= (A \cup B \cup C) \cap \left(\overline{A} \cup \overline{B} \cup C\right) \cap \left(\left(\left(\overline{A} \cup B\right) \cap \left(\overline{B} \cup A\right)\right) \cup \overline{C}\right) \\ &= (A \cup B \cup C) \cap \left(\overline{A} \cup \overline{B} \cup C\right) \cap \left(\left(\overline{A} \cup B\right) \cup \overline{C}\right) \cap \left(\left(\overline{B} \cup A\right) \cup \overline{C}\right) \\ &= (A \cup B \cup C) \cap \left(\overline{A} \cup \overline{B} \cup C\right) \cap \left(\overline{A} \cup B \cup \overline{C}\right) \cap \left(A \cup \overline{B} \cup \overline{C}\right) \end{aligned}$$

Ce calcul est assez compliqué c'est pourquoi on va éviter d'en refaire un aussi compliqué pour calculer $A * (B * C)$, la loi est clairement commutative, on va utiliser ce résultat dans la suite. Avec un peu

d'expérience, dès que dans $(A * B) * C$, on peut intervertir A, B et C on est sûr de l'associativité de la loi.
Calcul de $C * (B * A)$, on reprend le calcul de $A * (B * C)$ en changeant A et C, on constate que cela ne change rien donc $C * (B * A) = A * (B * C)$, d'autre part $B * A = A * B$ donc $C * (B * A) = C * (A * B)$, la loi étant commutative $C * (A * B) = (A * B) * C$, on a bien

$$A * (B * C) = (A * B) * C$$

La différence symétrique est associative.
On n'en a pas parlé mais la loi est évidemment une loi interne.
Il reste à montrer que tous les ensembles admettent un symétrique.
Soit A un ensemble, on cherche B tel que :

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \cap \left(\overline{B \cap A}\right) = \emptyset$$

Comme $U \setminus V = U \cap \overline{V}$, $(A \cup B) \cap \left(\overline{B \cap A}\right) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
Donc B vérifie $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = \emptyset$, autrement dit $A \cup B \subset A \cap B$, or $A \cap B \subset A \cup B$, d'où l'on déduit que : $A \cap B = A \cup B$, je crois que là c'est clair, $B = A$.
Remarque : si on s'aperçoit que $B = A$ est solution, par unicité du symétrique c'est la seule solution possible.
Finalement E muni de la différence symétrique est un groupe commutatif.

Allez à : Exercice 25

4.

a)

$\overline{A} \cup \overline{B}$	$\emptyset$	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{0,1\}$
$\emptyset$	$\{0,1\}$	$\{0,1\}$	$\{0,1\}$	$\{0,1\}$
$\{0\}$	$\{0,1\}$	$\{1\}$	$\{0,1\}$	$\{1\}$
$\{1\}$	$\{0,1\}$	$\{0,1\}$	$\{0\}$	$\{0\}$
$\{0,1\}$	$\{0,1\}$	$\{1\}$	$\{0\}$	$\emptyset$

b) Il est clair (enfin j'espère) qu'il n'y a pas d'élément neutre.
c) La réunion est toujours associative.
d) La réunion est toujours commutative.
e) Comme il n'y a pas d'élément neutre, il ne peut pas y avoir de symétrique.
f) Il n'y a pas d'élément neutre, la loi est associative et commutative et bien sur il n'y a pas de symétrique.

Allez à : Exercice 25

5.

a)

$\overline{A} \cap \overline{B}$	$\emptyset$	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{0,1\}$
$\emptyset$	$\{0,1\}$	$\{1\}$	$\{0\}$	$\emptyset$
$\{0\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{1\}$	$\{0\}$	$\emptyset$	$\{0\}$	$\emptyset$
$\{0,1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

b) Il est clair (enfin j'espère) qu'il n'y a pas d'élément neutre.
c) L'intersection est toujours associative.
d) L'intersection est toujours commutative.
e) Comme il n'y a pas d'élément neutre, il ne peut pas y avoir de symétrique.
f) Il n'y a pas d'élément neutre, la loi est associative et commutative et bien sur il n'y a pas de symétrique.

Allez à : Exercice 25

Correction exercice 26.
Tous les groupes possèdent un élément neutre, notons le e. Et notons $*$ la loi.

1.

$*$	e

e	e

Car $e * e = e$

Allez à : Exercice 26

2. Dans un groupe à deux éléments, il y a e l'élément neutre, notons a l'autre élément, donc $G = \{e, a\}$.
On a $a * e = e * a = a$.
Que vaut $a * a = a^2$? a^2 vaut soit e soit a car la loi est interne. Considérons a^{-1} le symétrique de a, celui-ci appartient à $G = \{e, a\}$, il n'est pas possible que $a^{-1} = e$ sinon $a = e$, par conséquent $a^{-1} = a$, en multipliant à gauche (ou à droite) par a : $a * a^{-1} = a * a \Leftrightarrow e = a * a$. On en déduit que :

$*$	e	a
e	e	a
a	a	e

Montrons que $(G,*)$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$.
Soit $\varphi : (G,*) \to (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$ définit par $\varphi(e) = \overline{0}$ et $\varphi(a) = \overline{1}$, φ est une bijection (c'est évident).
$$\varphi(e * a) = \varphi(a) = \overline{1} = \overline{0} + \overline{1} = \varphi(e) + \varphi(a)$$
De même
$$\varphi(a * e) = \varphi(a) = \overline{1} = \overline{1} + \overline{0} = \varphi(a) + \varphi(e)$$
Et enfin
$$\varphi(a * a) = \varphi(e) = \overline{0} = \overline{1} + \overline{1} = \varphi(a) + \varphi(a)$$
Cela montre que φ est un morphisme. Finalement φ est un isomorphisme et $(G,*)$ et $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$ sont isomorphes. Une autre façon de faire est d'écrire la table du groupe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$.

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$

Et de constater que le e et le a sont aux mêmes endroits que le $\overline{0}$ et le $\overline{1}$.
Montrons que $(G;*)$ et $(\{-1,1\},\times)$ sont isomorphes.
Soit $\varphi: (G,*) \to (\{-1,1\},\times)$ définit par $\varphi(e) = 1$ et $\varphi(a) = -1$
$$\varphi(e * a) = \varphi(a) = -1 = 1 \times 1 = \varphi(e) \times \varphi(a)$$
De même
$$\varphi(a * e) = \varphi(a) = -1 = -1 \times 1 = \varphi(a) \times \varphi(e)$$
Et enfin
$$\varphi(a * a) = \varphi(e) = 1 = 1 \times 1 = \varphi(a) \times \varphi(a)$$
Cela montre que φ est un morphisme. Finalement φ est un isomorphisme et $(G,*)$ et $(\{-1,1\},\times)$ sont isomorphes. Une autre façon de faire est d'écrire la table du groupe $(\{-1,1\},\times)$

$\times$	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

Et de constater que le e et le a sont aux mêmes endroits que le 1 et le -1.
Montrons que $(G,*)$ et $\left(\left\{x \mapsto x, x \mapsto \frac{1}{x}\right\}, \circ\right)$ sont isomorphes. C'est formellement un peu plus compliqué, notons $id(x) = x$ et $f(x) = \frac{1}{x}$, pour tout $x \neq 0$
$$f \circ f(x) = f\big(f(x)\big) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x = id(x)$$
Posons $\varphi: (G,*) \to \left(\left\{x \mapsto x, x \mapsto \frac{1}{x}\right\}, \circ\right)$ définit par $\varphi(e) = id$ et $\varphi(a) = f$
$$\varphi(e * a) = \varphi(a) = f = Id \circ f = \varphi(e) \circ \varphi(a)$$
De même
$$\varphi(a * e) = \varphi(a) = f = f \circ id = \varphi(a) \circ \varphi(e)$$
Et enfin
$$\varphi(a * a) = \varphi(e) = id = f \circ f = \varphi(a) \circ \varphi(a)$$

Cela montre que φ est un morphisme. Finalement φ est un isomorphisme et $(G,*)$ et $\left(\left\{x \mapsto x, x \mapsto \frac{1}{x}\right\}, \circ\right)$ sont isomorphes. Une autre façon de faire est d'écrire la table du groupe $\left(\left\{x \mapsto x, x \mapsto \frac{1}{x}\right\}, \circ\right)$

$+$	id	f
id	id	f
f	f	id

Et de constater que le e et le a sont aux mêmes endroits que le id et le f.

Allez à : Exercice 26

3. On note $*$ la loi du groupe, e l'élément neutre, a et b les autres éléments du groupe donc $G = \{e, a, b\}$
Il faut calculer $a * b$, $b * a$, $a * a = a^2$ et $b * b = b^2$. Pour les autres produits c'est évident

$$e * e = e, \quad a * e = e * a = a \quad \text{et} \quad b * e = e * b = b$$

On va chercher ce que vaut le produit $a * b$, celui appartient à G par conséquent

$$a * b = e \quad \text{ou} \quad a * b = a \quad \text{ou} \quad a * b = b$$

Si $a * b = a$, en multipliant à gauche par a^{-1}, on a

$$a^{-1} * (a * b) = a^{-1} * a \Leftrightarrow (a^{-1} * a) * b = e \Leftrightarrow e * b = e \Leftrightarrow b = e$$

En utilisant d'abord l'associativité de la multiplication, puis que $a^{-1} * a = e$.
Ce n'est pas possible puisque $b \neq e$.
De même $a * b \neq b$ car en multipliant à droite par b^{-1} on trouve que $a = e$ ce qui n'est pas possible.
Par conséquent $a * b = e$.
On ne peut pas en déduire immédiatement que $b * a = e$, mais avec un raisonnement analogue, c'est-à-dire que l'on suppose que $b * a$ égal à a, puis à b, on en déduit que $b * a = e$.
Table intermédiaire

$*$	e	a	b
e	e	a	b
a	a		e
b	b	e	

Première méthode :

Sur chaque ligne et sur chaque colonne il y a une et une seule fois chaque élément du groupe donc $a * a = a^2 = b$ et $b * b = b^2 = a$.

Deuxième méthode :

$a^2 \in \{e, a, b\}$,
Si $a^2 = e$ alors $a^{-1} = a$ (en multipliant à gauche ou à droite par a^{-1}) mais $a * b = e$ entraine que $a^{-1} = b$ et par conséquent $a = b$ ce qui est impossible d'après ce que l'on a vu ci-dessus.
Si $a^2 = a$ alors $a^{-1} * a^2 = a^{-1} * a$ et donc $a = e$ ce qui est faux puisque $a \neq e$.
La seule solution est $a^2 = b$.
Le même raisonnement entraine que $b^2 = a$.
On peut compléter la table :

$*$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

Montrons que $(G,*)$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +)$.
Soit $\varphi : (G,*) \to (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +)$ définit par $\varphi(e) = \overline{0}$, $\varphi(a) = \overline{1}$ et $\varphi(b) = \overline{2}$ (on aurait pu prendre $\varphi(a) = \overline{2}$ et $\varphi(b) = \overline{1}$, cela ne change rien, sauf que dans ce cas il est préférable d'écrire la table de $(G,*)$ en intervertissant a et b). φ est une bijection.

Première méthode :

Il faut montrer que :

$$\varphi(e * a) = \varphi(e) + \varphi(a);\ \varphi(a * e) = \varphi(a) + \varphi(e);\ \varphi(e * b) = \varphi(e) + \varphi(b);$$
$$\varphi(b * e) = \varphi(b) + \varphi(e);\ \varphi(a * b) = \varphi(a) + \varphi(b);\ \varphi(b * a) = \varphi(b) + \varphi(a);$$
$$\varphi(a * a) = \varphi(a) + \varphi(a);\ \varphi(b * b) = \varphi(b) + \varphi(b)$$

Cela va être long, on passe à la deuxième méthode.

Deuxième méthode :

On va comparer les tables des deux groupes $(G,*)$ et $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z},+)$.

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$

On constate que le e, le a et le b sont aux mêmes endroits que le $\overline{0}$, le $\overline{1}$ et le $\overline{2}$. Ces deux groupes sont isomorphes.

Montrons que $(G,*)$ est isomorphe à $\left(\left\{1, e^{\frac{2i\pi}{3}}, e^{\frac{4i\pi}{3}}\right\},\times\right)$, on va écrire la table de ce groupe.

On remarque que :

$$e^{\frac{2i\pi}{3}} \times e^{\frac{2i\pi}{3}} = e^{\frac{4i\pi}{3}};\ e^{\frac{2i\pi}{3}} \times e^{\frac{4i\pi}{3}} = 1 \quad et \quad e^{\frac{4i\pi}{3}} \times e^{\frac{4i\pi}{3}} = e^{\frac{8i\pi}{3}} = e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

La commutativité de la multiplication fait le reste.

$\times$	1	$e^{\frac{2i\pi}{3}}$	$e^{\frac{4i\pi}{3}}$
1	1	$e^{\frac{2i\pi}{3}}$	$e^{\frac{4i\pi}{3}}$
$e^{\frac{2i\pi}{3}}$	$e^{\frac{2i\pi}{3}}$	$e^{\frac{4i\pi}{3}}$	1
$e^{\frac{4i\pi}{3}}$	$e^{\frac{4i\pi}{3}}$	1	$e^{\frac{2i\pi}{3}}$

On constate que le e, le a et le b sont aux mêmes endroits que le 1, le $e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et le $e^{\frac{4i\pi}{3}}$. Ces deux groupes sont isomorphes.

Remarque : $e^{\frac{2i\pi}{3}} = j$ et $e^{\frac{4i\pi}{3}} = j^2$.

Montrons que $(G,*)$ est isomorphe à $(\{(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2)\},\circ)$, on va écrire la table de ce groupe.

On pose

$$id = (1,2,3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix};\ c_1 = (2,3,1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix};\ c_2 = (3,1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

On remarque :

$$c_1 \circ c_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = id$$

$$c_2 \circ c_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = id$$

$$c_2 \circ c_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = c_1$$

$$c_1 \circ c_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = c_2$$

$\circ$	id	c_1	c_2
id	id	c_1	c_2
c_1	c_1	c_2	id
c_2	c_2	id	c_1

On constate que le e, le a et le b sont aux mêmes endroits que le id, le c_1 et le c_2. Ces deux groupes sont isomorphes.

Allez à : Exercice 26

4.

a) Si $a^2 = a$ alors $a = e$ (on a déjà vu cela dans les exercices précédents), ce qui est impossible car $a \neq e$, donc $a^2 \neq a$ de même $b^2 \neq b$ et $c^2 \neq c$.
Supposons que $a^2 \neq e$, $b^2 \neq e$ et $c^2 \neq e$.
Que vaut a^2 ? $a^2 \in \{e, a, b, c\}$ par conséquent , soit $a^2 = b$ soit $a^2 = c$.

Si $a^2 = b$
L'ordre d'un élément divise l'ordre du groupe, si on appelle k l'ordre de a^2, comme l'ordre (=le cardinal) de G est 4, il existe $l \in \mathbb{N}$ tel que $4 = lk$ donc

$$b^2 = (a^2)^2 = a^4 = a^{kl} = (a^k)^l = e^l = e$$

Ce qui entraine que $b^2 = e$ ce qui est impossible.
Si $a^2 = c$
On montre de même que $c^2 = e$ ce qui est impossible aussi.
Par conséquent $a^2 \neq e$, $b^2 \neq e$ et $c^2 \neq e$ est faux, il y en a un des trois qui vaut e, l'énoncé impose que $b^2 = e$.

b) On suppose que $a * c = c * a = e$, on écrit la table intermédiaire.

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a			e
b	b		e	
c	c	e		

En regardant la

a	a			e

ligne

$a^2 = b$ ou $a^2 = c$

Si $a^2 = c$ alors $a^3 = a * c = e$ (en multipliant à gauche par a), ce qui n'est pas possible d'après théorème de Lagrange car 3 ne divise pas 4.
On en déduit que $a^2 = b$.
En regardant la

c	a	e		

ligne

$c^2 = a$ ou $c^2 = b$

Si $c^2 = a$ alors $c^3 = c * a = e$ (en multipliant à droite par a), ce qui n'est pas possible car l'ordre de c : 3 ne divise pas 4.
On en déduit que $c^2 = a$.
Table intermédiaire

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b		e
b	b		e	
c	c	e		a

En regardant la

a	a	b		e

ligne
On en déduit que $a * b = c$. Les valeurs e, a et b sont déjà prises.
En regardant la

c	c	e		a

ligne

On en déduit que $c * b = b$. Les valeurs e, a et c sont déjà prises.
En regardant la deuxième colonne (celle de a), $b * a = c$. Les valeurs e, a et b sont déjà prises.
En regardant la quatrième colonne (celle de c), $b * c = b$. Les valeurs e, a et c sont déjà prises.
Table complète

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	b
c	c	e	b	a

Remarque :
Ce n'est pas la seule méthode possible, on aurait pu raisonner sur les colonnes ou simultanément sur les lignes et les colonnes …

Montrons que $(G,*)$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$, pour cela on va écrire la table de $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$.
On pose $\varphi: G \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ définit par $\varphi(e) = \overline{0}$, $\varphi(a) = \overline{1}$, $\varphi(b) = \overline{2}$ et $\varphi(c) = \overline{3}$, il s'agit d'une bijection.
Pour que cela soit un morphisme il faut vérifier que pour tout x et y dans G, $\varphi(x * y) = \varphi(x) + \varphi(y)$,

en particulier $\varphi(b*b)=\varphi(b)+\varphi(b)\Leftrightarrow\varphi(e)=\varphi(b)+\varphi(b)\Leftrightarrow\overline{0}=\varphi(b)+\varphi(b)$, il faut donc faire attention à l'ordre dans lequel on place les quatre éléments de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ car le seul élément qui vérifie $\overline{0}=\overline{\alpha}+\overline{\alpha}$ est $\overline{\alpha}=\overline{2}$ (ceci dit si on ne fait pas attention le $\overline{2}$ tombe naturellement à la bonne place).

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

On constate que le e, le a, le b et le c sont aux mêmes endroits que le $\overline{0}$, le $\overline{1}$, le $\overline{2}$ et le $\overline{3}$. Ces deux groupes sont isomorphes.

Montrons que $(G,*)$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z},+)$, pour cela on va écrire la table de $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z},+)$.

On pose $\varphi: G\to(\{1,i,-1,-i\},\times)$ définit par $\varphi(e)=1$, $\varphi(a)=i$, $\varphi(b)=-1$ et $\varphi(c)=-i$, il s'agit d'une bijection. Pour que cela soit un morphisme il faut vérifier que pour tout x et y dans G,
$\varphi(x*y)=\varphi(x)\times\varphi(y)$, en particulier
$\varphi(b*b)=\varphi(b)\times\varphi(b)\Leftrightarrow\varphi(e)=\varphi(b)\times\varphi(b)\Leftrightarrow 1=\varphi(b)\times\varphi(b)$, il faut donc faire attention à l'ordre dans lequel on place les quatre éléments de $\{1,i,-1,-i\}$ car le seul élément qui vérifie $1=\alpha\times\alpha$ est $\alpha=-1$. Ici c'est moins évident parce que si on écrit $\{1,-1,i,-i\}$ on se complique sérieusement la vie car les deux tables ne vont pas se ressembler au premier coup d'œil.

$\times$	1	i	-1	$-i$
1	1	i	-1	$-i$
i	i	-1	$-i$	1
-1	-1	$-i$	1	-1
$-i$	$-i$	1	-1	i

On constate que le e, le a, le b et le c sont aux mêmes endroits que le 1 le i, le -1 et le $-i$. Ces deux groupes sont isomorphes.

Montrons que $(G,*)$ est isomorphe à $(\{(1,2,3,4),(2,3,4,1),(3,4,1,2),(4,1,2,3)\},\circ)$, pour cela on va écrire la table de $(\{(1,2,3,4),(2,3,4,1),(3,4,1,2),(4,1,2,3)\},\circ)$.

On pose

$$id=(1,2,3,4)=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$$
$$c_1=(2,3,4,1)=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}$$
$$\alpha=(3,4,1,2)=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}$$
$$c_2=(4,1,2,3)=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}$$

Pour définir l'isomorphisme φ il faut « repérer » lequel de ces éléments, différent de l'identité, vérifie $\beta\circ\beta=id$ avec $\beta\in\{c_1,\alpha,c_2\}$

Pour remplir la table il faut calculer, $c_1\circ c_2$, $c_2\circ c_1$, $c_1\circ c_1$, $c_2\circ c_2$, $c_1\circ\alpha$, $\alpha\circ c_1$, $c_2\circ\alpha$, $\alpha\circ c_2$ et $\alpha\circ\alpha$.

$$c_1\circ c_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\\1&2&3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}=id$$
$$c_2\circ c_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\1&2&3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}=id$$
$$c_1\circ c_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}=\alpha$$
$$c_2\circ c_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\\3&4&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}=\alpha$$

$$c_1\circ\alpha=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}=c_2$$

$$\alpha\circ c_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\4&1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}=c_2$$

$$c_2\circ\alpha=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\\2&3&4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}=c_1$$

$$\alpha\circ c_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\\2&3&4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}=c_1$$

$$\alpha\circ\alpha=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\\1&2&3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}=id$$

Maintenant on va écrire la table de $\{id,c_1,\alpha,c_2\}$ dans cet ordre là, en tout les cas il faut mettre α à cette place parce que c'est le seul qui vérifie $\alpha^2=id$, par contre rien n'empêche d'intervertir c_1 et c_2.

$\circ$	id	c_1	α	c_2
id	id	c_1	α	c_2
c_1	c_1	α	c_2	id
α	α	c_2	id	c_1
c_2	c_2	id	c_1	α

$\varphi: G\to\{(1,2,3,4),(2,3,4,1),(3,4,1,2),(4,1,2,3)\}$ définit par :
$\varphi(e)=id$, $\varphi(a)=c_1$, $\varphi(b)=\alpha$ et $\varphi(c)=c_2$, c'est une bijection et la table montre que c'est un morphisme de groupe parce que e, a, b et c sont aux mêmes places que id, c_1, α et c_2.

c) Si $a*a=c*c=e$, on rappelle que $b*b=e$.

Table intermédiaire

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e		
b	b		e	
c	c			

Si on regarde la ligne

a	a	e		

$a*b=b$ ou $a*$ $b=c$

Si $a*b=b$ alors $a=e$ (en multipliant par b^{-1} à gauche ou à droite) ce qui est impossible car $a\neq e$.
Par conséquent $a*b=c$, puis en complétant cette ligne $a*c=b$.

On regarde la ligne

b	b		e	

$b*a=a$ *ou* $b*$ $a=c$

Si $b*a=a$ alors $b=e$ (en multipliant par a^{-1} à gauche ou à droite) ce qui est impossible car $b\neq e$.
Par conséquent $b*a=c$, puis en complétant cette ligne $b*c=a$.

Table intermédiaire

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c			

On regarde les trois dernières colonnes et on complète par l'élément qui manque.

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Remarque :

Ce n’est pas la seule méthode.

Montrons que $(G,*)$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$, pour cela on va écrire la table de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$.

$+$	$(\overline{0},\overline{0})$	$(\overline{1},\overline{0})$	$(\overline{1},\overline{1})$	$(\overline{0},\overline{1})$
$(\overline{0},\overline{0})$	$(\overline{0},\overline{0})$	$(\overline{1},\overline{0})$	$(\overline{1},\overline{1})$	$(\overline{0},\overline{1})$
$(\overline{1},\overline{0})$	$(\overline{1},\overline{0})$	$(\overline{0},\overline{0})$	$(\overline{0},\overline{1})$	$(\overline{1},\overline{1})$
$(\overline{1},\overline{1})$	$(\overline{1},\overline{1})$	$(\overline{0},\overline{1})$	$(\overline{0},\overline{0})$	$(\overline{1},\overline{0})$
$(\overline{0},\overline{1})$	$(\overline{0},\overline{1})$	$(\overline{1},\overline{1})$	$(\overline{1},\overline{0})$	$(\overline{0},\overline{0})$

On pose $\varphi: G \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, définit par :
$\varphi(e) = (\overline{0},\overline{0})$, $\varphi(a) = (\overline{1},\overline{0})$, $\varphi(b) = (\overline{1},\overline{1})$ et $\varphi(c) = (\overline{0},\overline{1})$, c’est une bijection et la table montre que c’est un morphisme de groupe parce que e, a, b et c sont aux mêmes places que $(\overline{0},\overline{0})$, $(\overline{1},\overline{0})$, $(\overline{1},\overline{1})$ et $(\overline{0},\overline{1})$.
Cela montre que pour tout $x, y \in \{e, a, b, c\}$, $\varphi(x * y) = \varphi(x) + \varphi(y)$.

Remarque :
Ce n’est pas le seul isomorphisme possible, si par exemple, on prend
$\varphi(e) = (\overline{0},\overline{0})$, $\varphi(a) = (\overline{1},\overline{1})$, $\varphi(b) = (\overline{1},\overline{0})$ et $\varphi(c) = (\overline{0},\overline{1})$, pour « visualiser » le morphisme sur la table, il faut écrire la table de $\left((\overline{0},\overline{0}), (\overline{1},\overline{1}), (\overline{1},\overline{0}), (\overline{0},\overline{1})\right)$ de façon à respecter les places.

Montrons que $(G,*)$ est isomorphe à $(\{(1,2,3,4), (1,2,4,3), (2,1,3,4), (2,1,4,3)\}, \circ)$, pour cela on va écrire la table de $(\{(1,2,3,4), (1,2,4,3), (2,1,3,4), (2,1,4,3)\}, \circ)$.
On pose

$$id = (1,2,3,4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$
$$\tau_1 = (1,2,4,3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\tau_2 = (2,1,3,4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$
$$\beta = (2,1,4,3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Il faut calculer $\tau_1 \circ \tau_2$, $\tau_2 \circ \tau_1$, $\tau_1 \circ \beta$, $\beta \circ \tau_1$, $\tau_2 \circ \beta$, $\beta \circ \tau_2$, $\tau_1 \circ \tau_1$, $\tau_2 \circ \tau_2$ et $\beta \circ \beta$.

$$\tau_1 \circ \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \beta$$

$$\tau_2 \circ \tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \beta$$

$$\tau_1 \circ \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \tau_2$$

$$\beta \circ \tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \tau_2$$

$$\tau_2 \circ \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \tau_1$$

$$\beta \circ \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \tau_1$$

$$\tau_1 \circ \tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = id$$

$$\tau_2 \circ \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = id$$

$$\beta \circ \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = id$$

Maintenant on va écrire la table de $\{id, \tau_1, \tau_2, \beta\}$, dans cet exercice l'ordre de τ_1, τ_2 et β n'a pas d'importance.

$*$	id	τ_1	τ_2	β
id	id	τ_1	τ_2	β
τ_1	τ_1	id	β	τ_2
τ_2	τ_2	β	id	τ_1
β	β	τ_2	τ_1	id

On pose $\varphi: G \to \{(1,2,3,4), (1,2,4,3), (2,1,3,4), (2,1,4,3)\}$ définit par :
$\varphi(e) = id$, $\varphi(a) = \tau_1$, $\varphi(b) = \tau_2$ et $\varphi(c) = \beta$, c'est une bijection et la table montre que c'est un morphisme de groupe parce que e, a, b et c sont aux mêmes places que id, τ_1, τ_2 et β.

d) Le symétrique de $a \in \{e, a, b, c\}$, ce ne peut pas être e sinon $a = e$, ce ne peut pas être b car b est son propre symétrique (car $b^2 = b * b = e$) donc soit $a^{-1} = a$ soit $a^{-1} = c$.
Si $a^{-1} = a$ alors $a * a = e$, d'autre part le symétrique de $c \in \{e, a, b, c\}$, ce ne peut-être e, ni b et ni a car dans ce cas le symétrique de a est a, par conséquent le symétrique de c est c et donc $c * c = e$.
Si $a^{-1} = c$ alors $a * c = c * a = e$ par définition d'un symétrique.
On a deux solution soit $a * c = c * a = e$ soit $a * a = c * c = e$.

Allez à : Exercice 26

5. Il suffit de regarder la table de chacun de ces groupes, elles sont toutes symétriques suivant la diagonale (en haut à gauche, en bas à droite).

Allez à : Exercice 26

Correction exercice 27.

$$\sigma^2 = \sigma \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^3 = \sigma^2 \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^4 = \sigma^3 \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^5 = \sigma^4 \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$
$$= id$$

L'ordre de σ est 5.

$$\rho^2 = \rho \circ \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho^3 = \rho^2 \circ \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\rho^4 = \rho^3 \circ \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\rho^5 = \rho^4 \circ \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho^6 = \rho^5 \circ \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = id$$

L'ordre de ρ est 6.

Remarque :

Le cardinal de $\mathcal{S}_5$ est $5! = 120$ et l'ordre de σ divise bien 120 et l'ordre de ρ divise bien 120.

$$\sigma\rho = \sigma \circ \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(\sigma\rho)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

L'ordre de $\sigma\rho$ est 2.

$$\rho\sigma = \rho \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(\rho\sigma)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

L'ordre de $\rho\sigma$ est 2.

Autre méthode :

$$(\sigma\rho)^2 = id \Leftrightarrow \sigma\rho\sigma\rho = id \Leftrightarrow \sigma\rho\sigma = \rho^{-1}$$

En multipliant à droite par ρ^{-1}.

$$(\sigma\rho)^2 = id \Leftrightarrow \rho\sigma\rho\sigma = id$$

En multipliant à gauche par ρ.

$$(\sigma\rho)^2 = id \Leftrightarrow (\rho\sigma)^2 = id$$

Remarque :

$\sigma\rho$ intervertit 2 et 5, c'est une transposition, donc son carré rechange 2 et 5, il était donc clair que le carré de $\sigma\rho$ était égal à l'identité. Même remarque pour $\rho\sigma$, c'est la transposition qui intervertit 3 et 4.

$$\rho^6 = id \Leftrightarrow \rho \circ \rho^5 = \rho^5 \circ \rho = id$$

Cela montre que $\rho^{-1} = \rho^5$, l'égalité $\rho^5 \circ \rho = id$ est une évidence parce qu'il est clair que ρ^5 et ρ commutent, en fait, dans ce cas on peut se contenter d'écrire que $\rho \circ \rho^5 = id$ pour en déduire que $\rho^{-1} = \rho^5$.

$$\sigma\rho^{-1} = \sigma \circ \rho^{-1} = \sigma \circ \rho^5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(\sigma\rho^{-1})^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Ici, si on est malin, on peut s'apercevoir que le carré de cette permutation est l'identité car cela revient à intervertir, à la fois 2 et 3 et puis 1 et 5.

$$(\sigma\rho^{-1})^3 = (\sigma\rho^{-1})^2 \circ \sigma\rho^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(\sigma\rho^{-1})^4 = (\sigma\rho^{-1})^3 \circ \sigma\rho^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = id$$

L'ordre de $\sigma\rho^{-1}$ est 4.
Comme

$$\sigma^5 = \sigma^4 \circ \sigma = id \Leftrightarrow \sigma^{-1} = \sigma^4$$

$$\rho\sigma^{-1} = \rho \circ \sigma^{-1} = \rho \circ \sigma^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(\rho\sigma^{-1})^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\rho\sigma^{-1})^3 = (\rho\sigma^{-1})^2 \circ \rho\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(\rho\sigma^{-1})^4 = (\rho\sigma^{-1})^3 \circ \rho\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = id$$

L'ordre de $\rho\sigma^{-1}$ est 4.
Autre méthode :

$$(\rho\sigma^{-1})^{-1} = (\sigma^{-1})^{-1}\rho^{-1} = \sigma\rho^{-1}$$

L'ordre de $\sigma\rho^{-1}$ est 4 donc l'ordre de $(\rho\sigma^{-1})^{-1}$ est 4, par conséquent l'ordre de $\rho\sigma^{-1}$ est 4.
Allez à : Exercice 27

Correction exercice 28.
Remarque :
Dans cet exercice on confondra le complexe z et le point d'affixe z. En particulier lorsque l'on parlera d'une rotation ou d'une symétrie, en général ce genre d'application transforme un point en un autre point, ici ces applications transforment un complexe en un autre complexe.

1. $\forall k \in \{0,1,2,3,4\}$

$$\sigma\left(e^{\frac{2ik\pi}{5}}\right) = \overline{e^{\frac{2ik\pi}{5}}} = e^{-\frac{2ik\pi}{5}} = e^{\frac{2i(-k)\pi}{5}}$$

On fait la division euclidienne de $-k$ par 5, il existe un unique couple $(q,r) \in \mathbb{Z} \times \{0,1,2,3,4\}$ tel que :

$$-k = 5q + r$$

Donc

$$\sigma\left(e^{\frac{2ik\pi}{5}}\right) = e^{\frac{2i(5q+r)\pi}{5}} = e^{\frac{2i\times 5q\pi}{5}} e^{\frac{2ir\pi}{5}} = e^{2iq\pi} e^{\frac{2ir\pi}{5}} = e^{\frac{2ir\pi}{5}} \in P$$

On vient de montrer que pour tout $z \in P$, $\sigma(z) \in P$, autrement dit P est invariant par σ.

$$\rho\left(e^{\frac{2ik\pi}{5}}\right) = e^{\frac{2ik\pi}{5}} e^{\frac{2i\pi}{5}} = e^{\frac{2i(k+1)\pi}{5}}$$

On fait la division euclidienne de $k+1$ par 5, il existe un unique couple $(q,r) \in \mathbb{Z} \times \{0,1,2,3,4\}$ tel que :

$$k + 1 = 5q + r$$

Donc

$$\rho\left(e^{\frac{2ik\pi}{5}}\right) = e^{\frac{2i(5q+r)\pi}{5}} = e^{\frac{2i\times 5q\pi}{5}} e^{\frac{2ir\pi}{5}} = e^{2iq\pi} e^{\frac{2ir\pi}{5}} = e^{\frac{2ir\pi}{5}} \in P$$

On vient de montrer que pour tout $z \in P$, $\rho(z) \in P$, autrement dit P est invariant par ρ.
Allez à : Exercice 28

2. Pour tout $z = Re^{i\theta} \in \mathbb{C}$

$$\rho(z) = Re^{i\theta} e^{\frac{2i\pi}{5}} = Re^{i\theta + \frac{2i\pi}{5}} = Re^{i\left(\theta + \frac{2\pi}{5}\right)}$$

$\rho(z)$ est le nombre complexe de module $R = |z|$ et d'argument $\theta + \frac{2\pi}{5}$, le point d'affixe $\rho(z)$ est l'image de z par la rotation d'angle $\theta + \frac{2\pi}{5} - \theta = \frac{2\pi}{5}$.

$$\rho^2(z) = \rho(\rho(z)) = \rho\left(Re^{i\left(\theta+\frac{2\pi}{5}\right)}\right) = Re^{i\left(\theta+\frac{2\pi}{5}\right)}e^{\frac{2i\pi}{5}} = Re^{i\left(\theta+\frac{4\pi}{5}\right)}$$

$\rho^2(z)$ est le nombre complexe de module $R = |z|$ et d'argument $\theta + \frac{4\pi}{5}$, le point d'affixe $\rho^2(z)$ est l'image de z par la rotation d'angle $\theta + \frac{4\pi}{5} - \theta = \frac{4\pi}{5}$.

$$\rho^3(z) = \rho^2(\rho(z)) = \rho^2\left(Re^{i\left(\theta+\frac{2\pi}{5}\right)}\right) = Re^{i\left(\theta+\frac{4\pi}{5}\right)}e^{\frac{2i\pi}{5}} = Re^{i\left(\theta+\frac{6\pi}{5}\right)}$$

$\rho^3(z)$ est le nombre complexe de module $R = |z|$ et d'argument $\theta + \frac{6\pi}{5}$, le point d'affixe $\rho^3(z)$ est l'image de z par la rotation d'angle $\theta + \frac{6\pi}{5} - \theta = \frac{6\pi}{5}$.

$$\rho^4(z) = \rho^3(\rho(z)) = \rho^3\left(Re^{i\left(\theta+\frac{2\pi}{5}\right)}\right) = Re^{i\left(\theta+\frac{6\pi}{5}\right)}e^{\frac{2i\pi}{5}} = Re^{i\left(\theta+\frac{8\pi}{5}\right)}$$

$\rho^4(z)$ est le nombre complexe de module $R = |z|$ et d'argument $\theta + \frac{8\pi}{5}$, le point d'affixe $\rho^4(z)$ est l'image de z par la rotation d'angle $\theta + \frac{8\pi}{5} - \theta = \frac{8\pi}{5}$.

$$\rho^5(z) = \rho^4(\rho(z)) = \rho^4\left(Re^{i\left(\theta+\frac{2\pi}{5}\right)}\right) = Re^{i\left(\theta+\frac{8\pi}{5}\right)}e^{\frac{2i\pi}{5}} = Re^{i\left(\theta+\frac{10\pi}{5}\right)} = Re^{i(\theta+2\pi)}$$

$\rho^4(z)$ est le nombre complexe de module $R = |z|$ et d'argument $\theta + 2\pi$, le point d'affixe $\rho^4(z)$ est l'image de z par la rotation d'angle $\theta + 2\pi - \theta = 2\pi$, autrement dit $\rho^5 = id$.
Par une récurrence assez immédiate, on en déduit que pour tout $q \in \mathbb{Z}$, $\rho^{5q} = id$.
Remarque : les puissances négatives sont les bijections réciproques des puissances positives, par exemple ρ^{-5} est la bijection réciproque de $\rho^5 = id$, par conséquent $\rho^{-5} = id$.
Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, effectuons la division euclidienne de k par 5 :
Il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \{0,1,2,3,4\}$ tel que : $k = 5q + r$

$$\rho^k(z) = \rho^{5q+r}(z) = \rho^r(\rho^{5q}(z)) = \rho^r(z)$$

Or pour tout $r \in \{0,1,2,3,4\}$, ρ^r est une rotation d'angle $\frac{2r\pi}{5}$ comme on l'a vu plus haut, donc pour tout $k \in \mathbb{Z}$ ρ^k est une rotation d'angle $\frac{2r\pi}{5}$ où r est le reste de la division euclidienne de k par 5.
Au passage on a montré que $\rho^5 = id$ et que pour tout $\in \{0,1,2,3,4\}$ $\rho^k \neq id$, l'ordre de ρ est 5.

Allez à : Exercice 28

3. Rappel : $s: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est une symétrie si et seulement si la somme des arguments de z et $s(z)$ est constant modulo 2π et si les modules de z et $s(z)$ sont égaux, s est alors la symétrie par rapport à la droite passant par l'origine et d'angle $\frac{\arg(\sigma\rho(z))+\arg(z)}{2}$.
Pour tout $z = Re^{i\theta} \in \mathbb{C}$,

$$\sigma\rho(z) = \sigma(\rho(z)) = \sigma\left(Re^{i\left(\theta+\frac{2\pi}{5}\right)}\right) = \overline{Re^{i\left(\theta+\frac{2\pi}{5}\right)}} = Re^{-i\left(\theta+\frac{2\pi}{5}\right)}$$

On a $|\sigma\rho(z)| = R = |z|$ et $\arg(\sigma\rho(z)) + \arg(z) = -\left(\theta + \frac{2\pi}{5}\right) + \theta + 2k\pi = -\frac{2\pi}{5} + 2k\pi$

$\sigma\rho$ est la symétrie par rapport à la droite passant par l'origine et d'angle $\frac{-\frac{2\pi}{5}}{2} = -\frac{\pi}{5}$.

$$\sigma\rho^2(z) = \sigma(\rho^2(z)) = \sigma\left(Re^{i\left(\theta+\frac{4\pi}{5}\right)}\right) = \overline{Re^{i\left(\theta+\frac{4\pi}{5}\right)}} = Re^{-i\left(\theta+\frac{4\pi}{5}\right)}$$

On a $|\sigma\rho^2(z)| = R = |z|$ et $\arg(\sigma\rho^2(z)) + \arg(z) = -\left(\theta + \frac{4\pi}{5}\right) + \theta + 2k\pi = -\frac{4\pi}{5} + 2k\pi$

$\sigma\rho^2$ est la symétrie par rapport à la droite passant par l'origine et d'angle $\frac{-\frac{4\pi}{5}}{2} = -\frac{2\pi}{5}$.

$$\sigma\rho^3(z) = \sigma(\rho^3(z)) = \sigma\left(Re^{i\left(\theta+\frac{6\pi}{5}\right)}\right) = \overline{Re^{i\left(\theta+\frac{6\pi}{5}\right)}} = Re^{-i\left(\theta+\frac{6\pi}{5}\right)}$$

On a $|\sigma\rho^3(z)| = R = |z|$ et $\arg(\sigma\rho^3(z)) + \arg(z) = -\left(\theta + \frac{6\pi}{5}\right) + \theta + 2k\pi = -\frac{6\pi}{5} + 2k\pi$

$\sigma\rho^3$ est la symétrie par rapport à la droite passant par l'origine et d'angle $\frac{-\frac{6\pi}{5}}{2} = -\frac{3\pi}{5}$.

$$\sigma\rho^4(z) = \sigma(\rho^4(z)) = \sigma\left(Re^{i\left(\theta+\frac{8\pi}{5}\right)}\right) = \overline{Re^{i\left(\theta+\frac{8\pi}{5}\right)}} = Re^{-i\left(\theta+\frac{8\pi}{5}\right)}$$

On a $|\sigma\rho^4(z)| = R = |z|$ et $\arg(\sigma\rho^4(z)) + \arg(z) = -\left(\theta + \frac{8\pi}{5}\right) + \theta + 2k\pi = -\frac{8\pi}{5} + 2k\pi$

$\sigma\rho^4$ est la symétrie par rapport à la droite passant par l'origine et d'angle $\frac{-\frac{8\pi}{5}}{2} = -\frac{4\pi}{5}$.

Remarque :

On aurait pu traiter tous ces cas en une seule fois de la façon suivante :

Pour tout $n \in \{0,1,2,3,4\}$

$$\sigma\rho^n(z) = \sigma(\rho^n(z)) = \sigma\left(Re^{i\left(\theta+\frac{2n\pi}{5}\right)}\right) = \overline{Re^{i\left(\theta+\frac{2n\pi}{5}\right)}} = Re^{-i\left(\theta+\frac{2n\pi}{5}\right)}$$

On a $|\sigma\rho^n(z)| = R = |z|$ et $\arg(\sigma\rho^n(z)) + \arg(z) = -\left(\theta + \frac{2n\pi}{5}\right) + \theta + 2k\pi = -\frac{2n\pi}{5} + 2k\pi$

$\sigma\rho^n$ est la symétrie par rapport à la droite passant par l'origine et d'angle $\frac{-\frac{2n\pi}{5}}{2} = -\frac{n\pi}{5}$.

Pour les transformations $\rho^n\sigma$, on va tout traiter en une seule fois.

Pour tout $z = Re^{i\theta} \in \mathbb{C}$

$$\rho^n\sigma(z) = \rho^n(\sigma(z)) = \rho^n(\overline{z}) = \rho^n(Re^{-i\theta}) = Re^{i\left(-\theta+\frac{2n\pi}{5}\right)}$$

On a $|\rho^n\sigma(z)| = R = |z|$ et $\arg(\rho^n\sigma(z)) + \arg(z) = -\theta + \frac{2n\pi}{5} + \theta + 2k\pi = \frac{2n\pi}{5} + 2k\pi$

$\rho^n\sigma$ est la symétrie par rapport à la droite passant par l'origine et d'angle $\frac{\frac{2n\pi}{5}}{2} = \frac{n\pi}{5}$.

Allez à : Exercice 28

4. Si s est une symétrique différente de l'identité (l'identité est une symétrie par rapport à n'importe qu'elle droite et d'angle 0) alors $s^2 = id$, l'ordre d'une symétrie est 2.

Remarque :

Si $s = id$ son ordre est 1.

Allez à : Exercice 28

5. Pour tout $z = Re^{i\theta} \in \mathbb{C}$, on pose r le reste de la division euclidienne de $n + m$ par 5.

$$(\sigma\rho^n)(\rho^m\sigma)(z) = \sigma\rho^{n+m}\sigma(z) = \sigma\rho^r\sigma(z) = \sigma\rho^r(\sigma(z)) = \sigma\rho^r(Re^{-i\theta}) = \sigma\left(\rho^r(Re^{-i\theta})\right)$$
$$= \sigma\left(Re^{i\left(-\theta+\frac{r\pi}{5}\right)}\right) = Re^{-i\left(-\theta+\frac{r\pi}{5}\right)} = Re^{i\left(\theta-\frac{r\pi}{5}\right)} = \rho^{-r}(z)$$

Donc $(\sigma\rho^n)(\rho^n\sigma) = \rho^{-r}$

$$(\rho^n\sigma)(\sigma\rho^n)(z) = \rho^n\sigma\sigma\rho^n = \rho^n\sigma^2\rho^n = \rho^n\rho^n = \rho^{2n} = \rho^r$$

Donc $(\rho^n\sigma)(\sigma\rho^n) = \rho^r$

Remarque :

On est obligé de faire deux cas car la composée des fonctions n'est pas commutative.

Allez à : Exercice 28

6. Si un groupe contient σ et ρ alors il contient toutes les transformations de la forme $\sigma^n\rho^m$ avec $n \in \{0,1\}$ et $m \in \{0,1,2,3,4\}$ ce qui en fait $2 \times 5 = 10$ mais pour l'instant rien ne dit qu'il n'y en a pas plus en particulier $\rho\sigma$ doit être dans le groupe mais à première vue il n'est pas de la forme $\sigma^n\rho^m$ alors il va falloir réfléchir.

On pose $G = \{\sigma^n\rho^m, n \in \{0,1\}, m \in \{0,1,2,3,4\}\}$. On va montrer que G muni de la composée des applications est un sous-groupe du groupe des bijections de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$.

$id = \sigma^0\rho^0 \in G$

Soit $\alpha_1 = \sigma^{n_1}\rho^{m_1}$ et $\alpha_2 = \sigma^{n_2}\rho^{m_2}$ deux éléments de G.

$$\alpha_1\alpha_2^{-1} = \sigma^{n_1}\rho^{m_1}(\sigma^{n_2}\rho^{m_2})^{-1} = \sigma^{n_1}\rho^{m_1}\rho^{-m_2}\sigma^{-n_2}$$

Le but est de montrer que $\alpha_1\alpha_2^{-1} \in G$, c'est-à-dire qu'il existe $n \in \{0,1\}$ et $m \in \{0,1,2,3,4\}$ $\alpha_1\alpha_2^{-1} = \sigma^n\rho^m$.

Premier cas : $n_2 = 0$

$$\alpha_1\alpha_2^{-1} = \sigma^{n_1}\rho^{m_1}\rho^{-m_2}\sigma^0 = \sigma^{n_1}\rho^{m_1-m_2} \in G$$

Deuxième cas : $n_2 = 1$ et $n_1 = 1$

$\sigma^{-1} = \sigma$ car $\sigma^2 = id$ donc

$$\alpha_1\alpha_2^{-1} = \sigma^{n_1}\rho^{m_1}\rho^{-m_2}\sigma^{-n_2} = \sigma\rho^{m_1-m_2}\sigma = \rho^r = \sigma^0\rho^r \in G$$

où r est le reste de la division euclidienne de $m_1 - m_2$ par 5 d'après la question 5°).

Troisième cas : $n_2 = 1$ et $n_1 = 0$,

$$\alpha_1\alpha_2^{-1} = \sigma^{n_1}\rho^{m_1}\rho^{-m_2}\sigma^{-n_2} = \rho^{m_1-m_2}\sigma = \rho^r\sigma$$

On a vu à la question 3°) que

$\sigma\rho^n$ est la symétrie par rapport à la droite passant par l'origine et d'angle $-\frac{n\pi}{5}$ et que $\rho^r\sigma$ est la symétrie par rapport à la droite passant par l'origine et d'angle $\frac{r\pi}{5}$.

$\sigma\rho$ est la symétrie par rapport à la droite passant par l'origine et d'angle $-\frac{\pi}{5}$ et que $\rho^4\sigma$ est la symétrie par rapport à la droite passant par l'origine et d'angle $\frac{4\pi}{5}$. Or l'angle définissant une droite passant par l'origine est définie à π près (quand on fait faire un demi-tour à une droite on retombe sur la même droite) on en déduit que : $\rho^4\sigma$ est la symétrie par rapport à la droite passant par l'origine et d'angle $\frac{4\pi}{5} - \pi = -\frac{\pi}{5}$. Par conséquent

$$\sigma\rho = \rho^4\sigma$$

De même $\sigma\rho^2 = \rho^3\sigma$, $\sigma\rho^3 = \rho^2\sigma$ et $\sigma\rho^4 = \rho\sigma$, bref pour tout $r \in \{1,2,3,4\}$ $\rho^r\sigma = \sigma\rho^{5-r}$ d'où

$$\alpha_1\alpha_2^{-1} = \rho^r\sigma = \sigma\rho^{5-r}$$

Comme $r \in \{1,2,3,4\}$ entraine que $5 - r \in \{1,2,3,4\}$ on a bien montré que $\alpha_1\alpha_2^{-1} \in G$

Le cas $r = 0$ est trivial car $\alpha_1\alpha_2^{-1} = \rho^r\sigma = \sigma = \sigma\rho^0 \in G$.

Dans tous les cas $\alpha_1\alpha_2^{-1} \in G$, cela montre bien que G est un sous-groupe du groupe des bijections de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$.

Remarque :

(a) Si dans le 3. l'énoncé avait demandé de montrer que « pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\sigma\rho^n$ et $\rho^n\sigma$ sont des symétries par rapport à un axe passant par l'origine, dont on donnera l'angle par rapport à l'axe réel » la rédaction de ce troisième cas aurait été plus simple (mais il aurait fallu travailler davantage au 3.).

(b) σ est d'ordre 2, 2 divise le cardinal de G et ρ est d'ordre 5 donc 5 divise le cardinal de G, on en déduit que $2 \times 5 = 10$ divise l'ordre de G (car 2 et 5 sont premiers entre eux), mais rien ne dit qu'il n'y a pas de groupe contenant σ et ρ d'ordre $10k$, d'ailleurs c'est le cas.

Allez à : Exercice 28

Correction exercice 29.

1. Rappel : l'ordre d'un élément g d'un groupe $(G,*)$ est le plus petit entier strictement positif p tel que

$$\underbrace{g * g * \dots * g}_{p\times} = e$$

e étant l'élément neutre.

Souvent on note multiplicativement les lois abstraites et la condition ci-dessus s'écrit : $g^n = e$

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un groupe pour l'addition (et certainement pas pour la multiplication) donc l'ordre d'un élément $a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est le plus petit entier strictement positif p tel que :

$$\underbrace{a + a + \dots + a}_{p\times} = \overline{0}$$

Car $\overline{0}$ est l'élément neutre de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.

Cette condition s'écrit $pa = \overline{0}$.

Il faut montrer que le plus petit entier p tel que $p\overline{1} = \overline{0}$ est n.

Il existe $l \in \mathbb{Z}$ tel que $p \times 1 = ln$, manifestement $l < 0$ et $l = 0$ sont impossible donc $l \geq 1$ alors $ln \geq n$ donc $p \geq n$, comme $n \times 1 = 1 \times n$ on a $p = n$ (avec $l = 1$).

Allez à : Exercice 29

2. Par contraposition pour montrer que :

« Si l'ordre de $\overline{k}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ vaut n alors k est premier avec n »

On va montrer que :

« Si k n'est pas premier avec n alors l'ordre de $\overline{k}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ne vaut pas n »

$n = ud \quad et \quad k = vd$ avec $u > 0$ et $v > 0$ premiers entre eux, on en déduit que : $nv = ku$

$d > 1$ car n et k ne sont pas premiers entre eux, comme $ud = n$ on a $u < n$.

$nv = ku \Rightarrow \overline{uk} = \overline{0} \Rightarrow u\overline{k} = \overline{0}$, l'ordre de $\overline{k}$ est inférieur ou égal à u avec $0 < u < n$ ce qui montre bien que l'ordre de $\overline{k}$ n'est pas n.

Réciproque :

On appelle p l'ordre de $\overline{k}$. Comme $n\overline{k} = \overline{0}$ l'ordre de $\overline{k}$ est inférieur à n. On a $p\overline{k} = \overline{0}$. Ce qui implique qu'il existe $l \in \mathbb{N}$ tel que $pk = ln$. Comme k divise n et que k est premier avec n, d'après le théorème de Gauss k divise l, il existe donc $a \in \mathbb{N}^*$ tel que $l = ka$, ce que l'on remplace dans $pk = ln$, $pk = kan \Leftrightarrow p = an$ ce qui entraine que $p \geq n$, on rappelle que $0 < p \leq n$ pour en déduire que $p = n$.

Allez à : Exercice 29

3. Il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = pk$, il faut montrer que p est l'ordre de $\overline{k}$. On appelle q l'ordre de $\overline{k}$. $p\overline{k} = \overline{n} = \overline{0}$ donc $q \leq p$. Comme q est l'ordre de $\overline{k}$, $q\overline{k} = \overline{0}$ donc il existe $l \in \mathbb{N}$ tel que $qk = ln$, or $n = pk$ ce que l'on remplace dans $qk = ln$, cela donne $qk = lpk \Leftrightarrow q = lp$ ce qui entraine que $q \geq p$ (l ne peut être nul car un ordre n'est pas nul), on en déduit que $q = p$.

L'ordre de $\overline{k}$ est p où $n = pk$.

Allez à : Exercice 29

4. Par définition de f, pour tout $\overline{k} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$$f(\overline{k}) = a^k$$

Est-ce que f est bien définie ? on peut avoir $\overline{k} = \overline{k'}$ sans que $k = k'$ mais a-t-on $f(\overline{k}) = f(\overline{k'})$?

Si $\overline{k'} = \overline{k}$, il existe $l \in \mathbb{Z}$ tel que $k' = k + ln$ donc

$$f(\overline{k'}) = a^{k+ln} = a^k a^{ln} = a^k (a^n)^l = a^k e^l = a^k e = a^k = f(\overline{k})$$

Car pour tout élément g dans G de cardinal n, $g^n = e$.

L'application f est bien définie.

Montrons que $e, a, a^2, \dots, a^{n-1}$ sont tous distincts.

S'il existe $k, l \in \{0,1,\dots,n-1\}$, $k \neq l$ tels que $a^k = a^l$ alors $a^k a^{-l} = e$ ce qui implique que $a^{k-l} = e$,

On fait la division euclidienne de $k - l$ par n, il existe un unique $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \{0,1,\dots,n-1\}$ tel que :

$$k - l = qn + r$$

$$a^{k-l} = e \Leftrightarrow a^{qn+r} = e \Leftrightarrow (a^n)^q a^r = e \Leftrightarrow a^r = e$$

r est strictement inférieur à l'ordre de a, c'est-à-dire n donc $r = 0$. On en déduit que $k - l$ est un multiple de l'ordre de a c'est-à-dire de n, $k - l = qn$.

$$\begin{cases} 0 \leq k \leq n-1 \\ 0 \leq l \leq n-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq k \leq n-1 \\ -(n-1) \leq -l \leq 0 \end{cases} \Rightarrow -(n-1) \leq k - l \leq n-1$$

Le seul multiple de n dans $\{-(n-1), \dots, -1,0,1, \dots, n-1\}$ est 0, ce qui entraine que $k = l$, effectivement les $e, a, a^2, \dots, a^{n-1}$ sont tous distincts. Cette démonstration fait partie du cours mais c'est ce que demande cet exercice.

Les n éléments de $\{0,1,\dots,n-1\}$ ont tous une image distincte dans l'ensemble à n éléments de $\{e, a, \dots, a^{n-1}\}$, f est une bijection. Il reste à montrer qu'il s'agit d'un morphisme de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ dans $(G,*)$

$$f(\overline{k+l}) = a^{k+l} = a^k a^l = f(\overline{k}) f(\overline{l})$$

f est un isomorphisme de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ dans $(G,*)$.

Allez à : Exercice 29

Correction exercice 30.

1.

a) 2 est un nombre premier donc $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +, \times)$ est un corps.

b)

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$

2.

a)

$$(\bar{a},\bar{b})\oplus(\bar{c},\bar{d})=(\bar{a}+\bar{c},\bar{b}+\bar{d})=(\overline{a+c},\overline{b+d})=(\overline{c+a},\overline{d+c})=(\bar{c}+\bar{a},\bar{d}+\bar{b})$$
$$=(\bar{c},\bar{d})\oplus(\bar{a},\bar{b})$$

La loi $\oplus$ est commutative.

$$(\bar{a},\bar{b})\oplus(\bar{c},\bar{d})=(\overline{a+c},\overline{b+d})\in\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

b) La loi $\oplus$ est interne.

$$(\bar{a},\bar{b})\oplus\left((\bar{c},\bar{d})\oplus(\bar{e},\bar{f})\right)=(\bar{a},\bar{b})\oplus(\bar{c}+\bar{e},\bar{d}+\bar{f})=(\bar{a},\bar{b})\oplus(\overline{c+e},\overline{d+f})$$
$$=(\bar{a}+\overline{c+e},\bar{b}+\overline{d+f})=(\overline{a+c+e},\overline{b+d+f})=(\overline{a+c}+\bar{e},\overline{b+d}+\bar{f})$$
$$=(\overline{a+c},\overline{b+d})\oplus(\bar{e},\bar{f})=(\bar{a}+\bar{c},\bar{b}+\bar{d})\oplus(\bar{e},\bar{f})=\left((\bar{a},\bar{b})\oplus(\bar{c},\bar{d})\right)\oplus(\bar{e},\bar{f})$$

Donc la loi $\oplus$ est associative.

$$(\bar{a},\bar{b})\oplus(\bar{0},\bar{0})=(\bar{a}+\bar{0},\bar{b}+\bar{0})=(\overline{a+0},\overline{b+0})=(\bar{a},\bar{b})$$

Donc $(\bar{0},\bar{0})$ est l’élément neutre pour la loi $\oplus$.

Et enfin $(\overline{-a},\overline{-b})\in A$ est le symétrique de $(\bar{a},\bar{b})$, car

$$(\bar{a},\bar{b})\oplus(\overline{-a},\overline{-b})=(\bar{a}+\overline{-a},\bar{b}+\overline{-b})=(\overline{a-a},\overline{b-b})=(\bar{0},\bar{0})$$

c)

$$(\bar{a},\bar{b})\otimes(\bar{c},\bar{d})=(\bar{a}\times\bar{c},\bar{b}\times\bar{d})=(\overline{ac},\overline{bd})=(\overline{ca},\overline{da})=(\bar{c}\times\bar{a},\bar{d}\times\bar{b})=(\bar{c},\bar{d})\otimes(\bar{a},\bar{b})$$

donc la loi $\otimes$ est commutative.

c) $(\bar{a},\bar{b})\otimes(\bar{c},\bar{d})=(\bar{a}\times\bar{c},\bar{b}\times\bar{d})=(\overline{ac},\overline{bd})\in A$

Donc la loi $\otimes$ est une loi interne.

d)

$$(\bar{a},\bar{b})\otimes\left((\bar{c},\bar{d})\oplus(\bar{e},\bar{f})\right)=(\bar{a},\bar{b})\otimes(\bar{c}+\bar{e},\bar{d}+\bar{f})=(\bar{a},\bar{b})\otimes(\overline{c+e},\overline{d+f})$$
$$=(\bar{a}\times\overline{c+e},\bar{b}\times\overline{d+f})=(\overline{a(c+e)},\overline{b(d+f)})=(\overline{ac+ae},\overline{bd+bf})$$
$$=(\overline{ac}+\overline{ae},\overline{bd}+\overline{bf})=(\overline{ac},\overline{bd})\oplus(\overline{ae},\overline{bf})=(\bar{a}\times\bar{c},\bar{b}\times\bar{d})\oplus(\bar{a}\times\bar{e},\bar{b}\times\bar{f})$$
$$=(\bar{a},\bar{b})\otimes(\bar{c},\bar{d})\oplus(\bar{a},\bar{b})\otimes(\bar{e},\bar{f})$$

Donc la multiplication est distributive sur l’addition.

e)

$$(\bar{a},\bar{b})\otimes(\bar{1},\bar{1})=(\bar{a}\times\bar{1},\bar{b}\times\bar{1})=(\bar{a},\bar{b})$$

Donc $(\bar{1},\bar{1})$ est l’élément neutre pour la multiplication.

f) Toutes les propriétés ci-dessus montre que $(A,\oplus,\otimes)$ est un anneau commutatif unitaire.

Pour montrer que c’est un corps il reste à montrer que chaque $(\bar{a},\bar{b})$ différent de $(\bar{0},\bar{0})$ admet un symétrique $(\overline{a'},\overline{b'})\in A$ pour la multiplication.

Allez à : Exercice 30

Correction exercice 31.

1.

Remarque préliminaire :

Pour tout $f\in E$:

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{si} \quad f(x)\neq 0\\ 0 & \text{si} \quad f(x)=0\end{cases}=\begin{cases}1 & \text{si} \quad f(x)=1\\ 0 & \text{si} \quad f(x)=0\end{cases}$$

En effet $f(x)=1 \Leftrightarrow f(x)\neq 0$ et évidemment $f(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=0$.

Montrons que $(E,\oplus)$ est un groupe abélien (commutatif).

$(f\oplus g)(x)=\begin{cases}1 & \text{si } f(x)\neq g(x)\\ 0 & \text{si } f(x)=g(x)\end{cases}$ donc $f\oplus g\in E$, $\oplus$ est une loi interne.

Soit $\theta_S: S\to\{0,1\}$ définie par pour $x\in S$, $\theta_S(x)=0$, $\theta_S\in E$ donc E est non vide.

Pour tout $f\in E$ et pour tout $x\in S$:

$$(f\oplus\theta_S)(x)=\begin{cases}1 & \text{si } f(x)\neq\theta_S(x)=0\\ 0 & \text{si } f(x)=\theta_S(x)=0\end{cases}=f(x)$$

$$(\theta_S\oplus f)(x)=\begin{cases}1 & \text{si } \theta_S(x)\neq f(x)=0\\ 0 & \text{si } \theta_S(x)=f(x)=0\end{cases}=f(x)$$

$$f\oplus\theta_S=\theta_S\oplus f=f$$

θ_S est l'élément neutre.

Pour tout $f\in E$ et pour tout $x\in S$:

$$(f\oplus f)(x)=\begin{cases}1 & \text{si } f(x)\neq f(x)\\ 0 & \text{si } f(x)=g(x)\end{cases}=0=\theta_S$$

Donc le symétrique de f est f. (Et donc tous les éléments de E admettent un symétrique).

Commutativité :

Pour tout $f,g\in E$ et pour tout $x\in S$:

$$(f\oplus g)(x)=\begin{cases}1 & \text{si } f(x)\neq g(x)\\ 0 & \text{si } f(x)=g(x)\end{cases}=\begin{cases}1 & \text{si } g(x)\neq f(x)\\ 0 & \text{si } g(x)=f(x)\end{cases}=(g\oplus f)(x)$$

Donc

$$f\oplus g=g\oplus f$$

$\oplus$ est commutative.

Associativité :

Pour tout $f,g,h\in E$ et pour tout $x\in S$:

$$\big((f\oplus g)\oplus h\big)(x)=\begin{cases}1 & \text{si } (f\oplus g)(x)\neq h(x)\\ 0 & \text{si } (f\oplus g)(x)=h(x)\end{cases}$$

$$\big(f\oplus (g\oplus h)\big)(x)=\begin{cases}1 & \text{si } f(x)\neq (g\oplus h)(x)\\ 0 & \text{si } f(x)=(g\oplus h)(x)\end{cases}$$

$$(f\oplus g)(x)=\begin{cases}1 & \text{si } f(x)\neq g(x)\\ 0 & \text{si } f(x)=g(x)\end{cases}$$

$$(g\oplus h)(x)=\begin{cases}1 & \text{si } g(x)\neq h(x)\\ 0 & \text{si } g(x)=h(x)\end{cases}$$

Si $f(x)=0, g(x)=0$ et $h(x)=0$

$\forall x\in S, (f\oplus g)(x)=0$ et $h(x)=0$ donc $\big((f\oplus g)\oplus h\big)(x)=0$

$\forall x\in S, (g\oplus h)(x)=0$ et $f(x)=0$ donc $\big(f\oplus (g\oplus h)\big)(x)=0$

$$\big((f\oplus g)\oplus h\big)(x)=\big(f\oplus (g\oplus h)\big)(x)$$

Si $f(x)=0, g(x)=0$ et $h(x)=1$

$\forall x\in S, (f\oplus g)(x)=0$ et $h(x)=1$ donc $\big((f\oplus g)\oplus h\big)(x)=1$

$\forall x\in S, (g\oplus h)(x)=1$ et $f(x)=0$ donc $\big(f\oplus (g\oplus h)\big)(x)=1$

$$\big((f\oplus g)\oplus h\big)(x)=\big(f\oplus (g\oplus h)\big)(x)$$

Si $f(x)=0, g(x)=1$ et $h(x)=0$

$\forall x\in S, (f\oplus g)(x)=1$ et $h(x)=0$ donc $\big((f\oplus g)\oplus h\big)(x)=1$

$\forall x\in S, (g\oplus h)(x)=1$ et $f(x)=0$ donc $\big(f\oplus (g\oplus h)\big)(x)=1$

$$\big((f\oplus g)\oplus h\big)(x)=\big(f\oplus (g\oplus h)\big)(x)$$

Si $f(x)=0, g(x)=1$ et $h(x)=1$

$\forall x\in S, (f\oplus g)(x)=1$ et $h(x)=1$ donc $\big((f\oplus g)\oplus h\big)(x)=0$

$\forall x\in S, (g\oplus h)(x)=0$ et $f(x)=0$ donc $\big(f\oplus (g\oplus h)\big)(x)=0$

$$\big((f\oplus g)\oplus h\big)(x)=\big(f\oplus (g\oplus h)\big)(x)$$

Si $f(x)=1, g(x)=0$ et $h(x)=0$

$\forall x \in S, (f \oplus g)(x) = 1$ et $h(x) = 0$ donc $\big((f \oplus g) \oplus h\big)(x) = 1$
$\forall x \in S, (g \oplus h)(x) = 0$ et $f(x) = 1$ donc $\big(f \oplus (g \oplus h)\big)(x) = 1$

$$\big((f \oplus g) \oplus h\big)(x) = \big(f \oplus (g \oplus h)\big)(x)$$

Si $f(x) = 1, g(x) = 0$ et $h(x) = 1$
$\forall x \in S, (f \oplus g)(x) = 1$ et $h(x) = 1$ donc $\big((f \oplus g) \oplus h\big)(x) = 0$
$\forall x \in S, (g \oplus h)(x) = 1$ et $f(x) = 1$ donc $\big(f \oplus (g \oplus h)\big)(x) = 0$

$$\big((f \oplus g) \oplus h\big)(x) = \big(f \oplus (g \oplus h)\big)(x)$$

Si $f(x) = 1, g(x) = 1$ et $h(x) = 0$
$\forall x \in S, (f \oplus g)(x) = 0$ et $h(x) = 0$ donc $\big((f \oplus g) \oplus h\big)(x) = 0$
$\forall x \in S, (g \oplus h)(x) = 1$ et $f(x) = 1$ donc $\big(f \oplus (g \oplus h)\big)(x) = 0$

$$\big((f \oplus g) \oplus h\big)(x) = \big(f \oplus (g \oplus h)\big)(x)$$

Si $f(x) = 1, g(x) = 1$ et $h(x) = 1$
$\forall x \in S, (f \oplus g)(x) = 0$ et $h(x) = 1$ donc $\big((f \oplus g) \oplus h\big)(x) = 1$
$\forall x \in S, (g \oplus h)(x) = 0$ et $f(x) = 1$ donc $\big(f \oplus (g \oplus h)\big)(x) = 1$

$$\big((f \oplus g) \oplus h\big)(x) = \big(f \oplus (g \oplus h)\big)(x)$$

Dans tous les cas, c'est-à-dire pour tout $x \in S$, pour tout $f, g, h \in E$

$$\big((f \oplus g) \oplus h\big)(x) = \big(f \oplus (g \oplus h)\big)(x)$$

Donc

$$(f \oplus g) \oplus h = f \oplus (g \oplus h)$$

La loi $\oplus$ est associative.
Autre méthode pour montrer l'associativité
On pose $F_0 = \{x \in S, f(x) = 0\}$, $F_1 = \{x \in S, f(x) = 1\}$, $G_0 = \{x \in S, g(x) = 0\}$, $G_1 = \{x \in S, f(x) = 1\}$,
$H_0 = \{x \in S, h(x) = 0\}$ et $H_1 = \{x \in S, h(x) = 1\}$.
On remarque que l'ensemble des $x \in S$ tels que $f(x) \neq g(x)$ est $(F_0 \cap G_1) \cup (F_1 \cap G_0)$ et que l'ensemble des $x \in S$ tels que $f(x) = g(x)$ est $(F_0 \cap G_0) \cup (F_1 \cap G_1)$.
De même l'ensemble des $x \in S$ tels que $g(x) \neq h(x)$ est $(G_0 \cup H_0) \cap (H_1 \cup G_1)$.

$$\big((f \oplus g) \oplus h\big)(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } \begin{cases} 1 & \text{si } f(x) \neq g(x) \\ 0 & \text{si } f(x) = g(x) \end{cases} \neq \begin{cases} 1 & \text{si } h(x) = 1 \\ 0 & \text{si } h(x) = 0 \end{cases} \\ 0 \text{ si } \begin{cases} 1 & \text{si } f(x) \neq g(x) \\ 0 & \text{si } f(x) = g(x) \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } h(x) = 1 \\ 0 & \text{si } h(x) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

L'ensemble des $x \in S$ tels que $\big((f \oplus g) \oplus h\big)(x) = 0$ est l'ensemble des $x \in S$ tels que :
$(f(x) \neq g(x)$ et $h(x) = 1)$ ou $(f(x) = g(x)$ et $h(x) = 0)$.
Le première ensemble est :

$$\big((F_0 \cap G_1) \cup (F_1 \cap G_0)\big) \cap H_1 = \big((F_0 \cap G_1) \cap H_1\big) \cup \big((F_1 \cap G_0) \cap H_1\big)$$
$$= (F_0 \cap G_1 \cap H_1) \cup (F_1 \cap G_0 \cap H_1)$$

Le deuxième ensemble est :

$$\big((F_0 \cap G_0) \cup (F_1 \cap G_1)\big) \cap H_0 = \big((F_0 \cap G_0) \cap H_0\big) \cup \big((F_1 \cap G_1) \cap H_0\big)$$
$$= (F_0 \cap G_0 \cap H_0) \cup (F_1 \cap G_1 \cap H_0)$$

Autrement dit si $\big(f(x), g(x), h(x)\big) \in \{(0,1,1), (1,0,1), (0,0,0), (1,1,0)\}$ alors

$$\big((f \oplus g) \oplus h\big)(x) = 0$$

Dans tous les autres cas, c'est-à-dire si $\big(f(x), g(x), h(x)\big) \in \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,1)\}$ alors

$$\big((f \oplus g) \oplus h\big)(x) = 1$$

$$\big(f \oplus (g \oplus h)\big)(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } \begin{cases} 1 & \text{si } f(x) = 1 \\ 0 & \text{si } f(x) = 0 \end{cases} \neq \begin{cases} 1 & \text{si } g(x) \neq h(x) \\ 0 & \text{si } g(x) = h(x) \end{cases} \\ 0 \text{ si } \begin{cases} 1 & \text{si } f(x) = 1 \\ 0 & \text{si } f(x) = 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } g(x) \neq h(x) \\ 0 & \text{si } g(x) = h(x) \end{cases} \end{cases}$$

L'ensemble des $x \in S$ tels que $\big(f \oplus (g \oplus h)\big)(x) = 0$ est l'ensemble des $x \in S$ tels que :
$(f(x) = 1$ et $g(x) \neq h(x))$ ou $(f(x) = 0$ et $g(x) = h(x))$.
Le premier ensemble est :

$$F_1 \cap \big((G_0 \cap H_1) \cup (G_1 \cap H_0)\big) = \big(F_1 \cap (G_0 \cap H_1)\big) \cup \big(F_1 \cap (G_1 \cap H_0)\big)$$
$$= (F_1 \cap G_0 \cap H_1) \cup (F_1 \cap G_1 \cap H_0)$$

Le deuxième ensemble :

$$F_0 \cap \big((G_0 \cap H_0) \cup (G_1 \cap H_1)\big) = \big(F_0 \cap (G_0 \cap H_0)\big) \cup \big(F_0 \cap (G_1 \cap H_1)\big)$$
$$= (F_0 \cap G_0 \cap H_0) \cup (F_0 \cap G_1 \cap H_1)$$

Autrement dit si $\big(f(x), g(x), h(x)\big) \in \{(1,0,1), (1,1,0), (0,0,0), (0,1,1)\}$ alors

$$\big(f \oplus (g \oplus h)\big)(x) = 0$$

Dans tous les autres cas, c'est-à-dire si $\big(f(x), g(x), h(x)\big) \in \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,1)\}$ alors

$$\big(f \oplus (g \oplus h)\big)(x) = 1$$

Finalement pour tout $x \in S$, $\big((f \oplus g) \oplus h\big)(x) = \big(f \oplus (g \oplus h)\big)(x)$ et donc

$$(f \oplus g) \oplus h = \big(f \oplus (g \oplus h)\big)$$

La loi $\oplus$ est associative.

$(E,\oplus)$ est un groupe abélien.

Allez à : Exercice 31

2. Montrons que ϕ est une bijection de F sur E.

Pour toute partie $f \in E$, on pose $A = f^{-1}(1) = \{x \in S, f(x) = 1\}$

$\phi(A) = \mathbb{I}_A$ définie par :

Si $x \in A$, $\phi(A)(x) = \mathbb{I}_A(x) = 1$ et si $x \notin A$, $\phi(A)(x) = \mathbb{I}_A(x) = 0$. Or si $x \in A$, $f(x) = 1$ et si $x \notin A$ $f(x) = 0$, on a $\mathbb{I}_A = f$, autrement dit pour tout $f \in E$, il existe $A \in F$ ($A = f^{-1}(1) = \{x \in S, f(x) = 1\}$) tel que :

$$f = \phi(A)$$

Cela montre que ϕ est surjective et même bijective parce qu'il est assez peu vraisemblable qu'il puisse exister un autre ensemble A' qui vérifie $f = \phi(A')$ mais on va quand même faire l'effort de montrer l'injectivité.

Pour montrer que $\phi(A) = \phi(A') \Rightarrow A = A'$ on va montrer que $A \neq A' \Rightarrow \phi(A) \neq \phi(A')$

Il existe, soit $x \in A$ et $x \notin A'$ soit $x \notin A$ et $x \in A'$. Prenons le premier cas (le second se traite exactement de la même façon).

$$\phi(A)(x) = \mathbb{I}_A(x) = 1 \quad \text{et} \quad \phi(A')(x) = \mathbb{I}_{A'}(x) = 0$$

Donc $\phi(A) \neq \phi(A')$, ϕ est injective et donc bijective.

Il reste à montrer que ϕ est un morphisme de (F, Δ) vers $(E,\oplus)$.

Pour tout $A, B \in F$. Pour tout $x \in S$

$$\phi(A\Delta B)(x) = \mathbb{I}_{A\Delta B}(x)$$

On rappelle que $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ et que donc $\{A \setminus B, B \setminus A, A \cap B, \overline{A \cup B}\}$ forme une partition de S.

Si $x \in A \setminus B$ alors $\mathbb{I}_{A\Delta B}(x) = 1$

Si $x \in B \setminus A$ alors $\mathbb{I}_{A\Delta B}(x) = 1$

Si $x \in A \cap B$ alors $\mathbb{I}_{A\Delta B}(x) = 0$

Si $x \in \overline{A \cup B}$ alors $\mathbb{I}_{A\Delta B}(x) = 0$

$$\big(\phi(A) \oplus \phi(A')\big)(x) = (\mathbb{I}_A \oplus \mathbb{I}_B)(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \mathbb{I}_A(x) \neq \mathbb{I}_B(x) \\ 0 & \text{si} \quad \mathbb{I}_A(x) = \mathbb{I}_B(x) \end{cases}$$

Si $x \in A \setminus B$ alors $\mathbb{I}_A(x) = 1$ et $\mathbb{I}_B(x) = 0$ donc $(\mathbb{I}_A \oplus \mathbb{I}_B)(x) = 1$

Si $x \in B \setminus A$ alors $\mathbb{I}_A(x) = 0$ et $\mathbb{I}_B(x) = 1$ donc $(\mathbb{I}_A \oplus \mathbb{I}_B)(x) = 1$

Si $x \in A \cap B$ alors $\mathbb{I}_A(x) = 1$ et $\mathbb{I}_B(x) = 1$ donc $(\mathbb{I}_A \oplus \mathbb{I}_B)(x) = 0$

Si $x \in \overline{A \cup B}$ alors $\mathbb{I}_A(x) = 0$ et $\mathbb{I}_B(x) = 0$ donc $(\mathbb{I}_A \oplus \mathbb{I}_B)(x) = 0$

Par conséquent pour tout $x \in S$:

$$\phi(A\Delta B)(x) = \big(\phi(A) \oplus \phi(A')\big)(x)$$

Et que donc

$$\phi(A\Delta B) = \phi(A) \oplus \phi(A')$$

ϕ est un morphisme, comme ϕ est bijective c'est un isomorphisme, donc ϕ^{-1} est un isomorphisme de $(E,\oplus)$ sur (F, Δ) or $(E,\oplus)$ est un groupe abélien, on en déduit que (F, Δ) est un groupe. Que tout élément soit son propre symétrique provient du fait que dans $(E,\oplus)$ tout élément est son propre

symétrique, redémontrons le. Il est à peu près clair que $\phi(\emptyset)=\theta_S$ ce qui montre que l'élément neutre de (F,Δ) est $\emptyset$.
Pour tout $A\in F$, il existe (un unique) $f\in E$ tel que $A=\phi^{-1}(f)$ or pour tout $f\in E$, $f\oplus f=\theta_S$ d'où
$$A\Delta A=\phi^{-1}(f)\Delta\phi^{-1}(f)=\phi^{-1}(f\oplus f)=\phi^{-1}(\theta_S)=\emptyset$$
$$A\Delta A=\emptyset$$
Chaque élément de F est son propre symétrique.

Allez à : Exercice 31

3. Pour tous $x,y\in G$,
$$x^2=e\Leftrightarrow x*x=e\Leftrightarrow x^{-1}=x$$
$$y^2=e\Leftrightarrow y*y=e\Leftrightarrow y^{-1}=y$$
$$(x*y)^2=e\Leftrightarrow x*y=(x*y)^{-1}=y^{-1}*x^{-1}=y*x$$
Cela montre bien que $x*y=y*x$, G est abélien.

Allez à : Exercice 31

4. $\forall x\in G,\ (x=x\ \text{ ou }\ x=ax)\Leftrightarrow x\sim x$ donc $\sim$ est réflexive.
$$\forall x,y\in G,\qquad x\sim y\Leftrightarrow(x=y\ \text{ ou }\ x=ay)\Leftrightarrow(y=x\ \text{ ou }\ y=a^{-1}x)$$
Dans G tous les éléments sont leur propre symétrique donc $a^2=e\Leftrightarrow a*a=e$, ce qui signifie que $a^{-1}=a$.
Par conséquent
$$\forall x,y\in G,\qquad x\sim y\Leftrightarrow(y=x\ \text{ ou }\ y=ax)\Leftrightarrow y\sim x$$
La relation est symétrique.
$\forall x,y,z\in G$,
$$\begin{cases}x\sim y\\ y\sim z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=y\ \text{ ou }\ x=ay\\ y=z\ \text{ ou }\ y=az\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=y\\ y=z\end{cases}\text{ ou }\begin{cases}x=y\\ y=az\end{cases}\text{ ou }\begin{cases}x=ay\\ y=z\end{cases}\text{ ou }\begin{cases}x=ay\\ y=az\end{cases}$$
$$\Rightarrow x=z\text{ ou }x=az\ \text{ ou }\ x=az\ \text{ ou }x=a^2z=z$$
$$\Rightarrow\begin{cases}x=z\\ x=az\end{cases}\Rightarrow x\sim z$$
La relation est transitive.
Finalement la relation est une relation d'équivalence.
Soit $b\in G$ et $x\in \text{cl}(b)$, $x=b$ ou $x=ab$, la classe de b à au plus deux éléments b et ab, ces deux éléments peuvent-ils être égaux, $b=ab\Leftrightarrow e=a$ ce qui est impossible puisque $a\neq e$.
$$\text{cl}(b)=\{b,ab\}$$

Allez à : Exercice 31

5. Prenons deux éléments de $G/\sim$, $\text{cl}(x)$ et $\text{cl}(y)$. Or
$$\forall x,y\in G,\quad \text{cl}(x)*\text{cl}(y)=\text{cl}(xy)\in G/\sim$$
Car $xy\in G$. $*$ est une loi interne.
$\text{cl}(e)=\{e,a\}\in G/\sim$ donc $G/\sim$ n'est pas vide.
Il reste à chercher le symétrique d'un élément de $G/\sim$.
Pour cela il faut chercher l'élément neutre :
$$\forall x\in G,\text{cl}(x)*\text{cl}(e)=\text{cl}(xe)=\text{cl}(x)=\text{cl}(ex)=\text{cl}(e)*\text{cl}(x)$$
$\text{cl}(e)=\{e,a\}$ est l'élément neutre.
$$\forall x\in G,\text{cl}(x)*\text{cl}(x^{-1})=\text{cl}(xx^{-1})=\text{cl}(e)=\text{cl}(x^{-1}x)=\text{cl}(x^{-1})*\text{cl}(x)$$
Donc $\text{cl}(x^{-1})\in G/\sim$ (car $x^{-1}\in G$) est le symétrique de $\text{cl}(x)$.
$$\forall x,y,z\in G,\text{cl}(x)*\big(\text{cl}(y)*\text{cl}(z)\big)=\big(\text{cl}(x)*\text{cl}(y)\big)*\text{cl}(z)$$
La loi est associative.
$(G/\sim,*)$ est un groupe.
$$\forall x\in G,\text{cl}(x)*\text{cl}(x)=\text{cl}(x^2)=\text{cl}(e)\Leftrightarrow \text{cl}(x)^{-1}=\text{cl}(x)$$
Chaque élément est son propre symétrique.

Allez à : Exercice 31

6. On pose $n=card(G)$.

$G_1 = G/\sim$ est un groupe de cardinal $\frac{n}{2}$, puisqu'il y a deux éléments dans chaque classe et que l'ensemble des classes forment une partition de G.
G_1 est un groupe dont chaque élément est son propre symétrique donc on peut définir une relation d'équivalence $\sim_1$ (comme sur G) telle que $G_1/\sim_1$ soit un groupe dont tous les éléments sont leur propre symétrique. Comme précédemment le cardinal de $G_1/\sim_1$ est la moitié du cardinal de G_1, soit $\frac{n}{4}$.
On définit ainsi une suite de groupes quotients jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'un élément dans le dernier groupe quotient, on en déduit qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{n}{2^p} = 1$, autrement dit $n = 2^p$.
Cette démonstration est un peu « vaseuse » mais j'espère que cela donne une idée de ce qu'il se passe. La mise en forme d'une démonstration « parfaite » avec une démonstration par récurrence rigoureuse ne me paraît pas utile.

Allez à : Exercice 31

Correction exercice 32.

1. Pour tout $i \in \{2,3,4,5,6\}$, $f_1 \circ f_i = f_i \circ f_1$ car $f_1 = id$.
Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$

$$f_2 \circ f_2(x) = f_2(f_2(x)) = f_2(1-x) = 1-(1-x) = x = f_1(x) \Rightarrow f_2 \circ f_2 = f_1$$

$$f_2 \circ f_3(x) = f_2(f_3(x)) = f_2\left(\frac{1}{1-x}\right) = 1 - \frac{1}{1-x} = \frac{1-x-1}{1-x} = -\frac{x}{1-x} = \frac{x}{x-1} = f_5(x) \Rightarrow f_2 \circ f_3 = f_5$$

$$f_2 \circ f_4(x) = f_2(f_4(x)) = f_2\left(\frac{1}{x}\right) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} = f_6(x) \Rightarrow f_2 \circ f_4 = f_6$$

$$f_2 \circ f_5(x) = f_2(f_5(x)) = f_2\left(\frac{x}{x-1}\right) = 1 - \frac{x}{x-1} = \frac{x-1-x}{x-1} = \frac{-1}{x-1} = \frac{1}{1-x} = f_3(x) \Rightarrow f_2 \circ f_5 = f_3$$

On ne peut pas en déduire que $f_2 \circ f_6 = f_4$ car on ne sait pas que $(E,\circ)$ est un groupe, mais si l'énoncé est correct c'est le résultat que l'on va trouvé.

$$f_2 \circ f_6(x) = f_2(f_6(x)) = f_2\left(\frac{x-1}{x}\right) = 1 - \frac{x-1}{x} = \frac{x-(x-1)}{x} = \frac{1}{x} = f_4(x) \Rightarrow f_2 \circ f_6 = f_4$$

$$f_3 \circ f_2(x) = f_3(f_2(x)) = f_2(1-x) = \frac{1}{1-(1-x)} = \frac{1}{x} = f_4(x) \Rightarrow f_3 \circ f_2 = f_4$$

$$f_3 \circ f_3(x) = f_3(f_3(x)) = f_2\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = \frac{1-x}{1-x-1} = \frac{1-x}{-x} = \frac{x-1}{x} = f_6(x) \Rightarrow f_3 \circ f_3 = f_6$$

$$f_3 \circ f_4(x) = f_3(f_4(x)) = f_2\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = \frac{x}{x-1} = f_5(x) \Rightarrow f_3 \circ f_4 = f_5$$

$$f_3 \circ f_5(x) = f_3(f_5(x)) = f_2\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{1}{1-\frac{x}{x-1}} = \frac{x-1}{x-1-x} = \frac{x-1}{-1} = 1-x = f_2(x) \Rightarrow f_3 \circ f_5 = f_2$$

$$f_3 \circ f_6(x) = f_3(f_6(x)) = f_2\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{1}{1-\frac{x-1}{x}} = \frac{x}{x-(x-1)} = x = f_1(x) \Rightarrow f_3 \circ f_6 = f_1$$

$$f_4 \circ f_2(x) = f_4(f_2(x)) = f_4(1-x) = \frac{1}{1-x} = f_3(x) \Rightarrow f_4 \circ f_2 = f_3$$

$$f_4 \circ f_3(x) = f_4(f_3(x)) = f_4\left(\frac{1}{1-x}\right) = 1-x = f_2(x) \Rightarrow f_4 \circ f_3 = f_2$$

$$f_4 \circ f_4(x) = f_4(f_4(x)) = f_4\left(\frac{1}{x}\right) = x = f_1(x) \Rightarrow f_4 \circ f_4 = f_1$$

$$f_4 \circ f_5(x) = f_4(f_5(x)) = f_4\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{x-1}{x} = f_6(x) \Rightarrow f_4 \circ f_5 = f_6$$

$$f_4 \circ f_6(x) = f_4(f_6(x)) = f_4\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{x}{x-1} = f_5(x) \Rightarrow f_4 \circ f_6 = f_5$$

$$f_5\circ f_2(x)=f_5\big(f_2(x)\big)=f_5(1-x)=\frac{1-x}{1-x-1}=\frac{1-x}{-x}=\frac{x-1}{x}=f_6(x)\Rightarrow f_5\circ f_2=f_6$$

$$f_5\circ f_3(x)=f_5\big(f_3(x)\big)=f_5\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{\frac{1}{1-x}}{\frac{1}{1-x}-1}=\frac{1}{1-(1-x)}=\frac{1}{x}=f_4(x)\Rightarrow f_5\circ f_3=f_4$$

$$f_5\circ f_4(x)=f_5\big(f_4(x)\big)=f_5\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}-1}=\frac{1}{1-x}=f_3(x)\Rightarrow f_5\circ f_4=f_3$$

$$f_5\circ f_5(x)=f_5\big(f_5(x)\big)=f_5\left(\frac{x}{x-1}\right)=\frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1}-1}=\frac{x}{x-(x-1)}=x=f_1(x)\Rightarrow f_5\circ f_5=f_1$$

$$f_5\circ f_6(x)=f_5\big(f_6(x)\big)=f_5\left(\frac{x-1}{x}\right)=\frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x-1}{x}-1}=\frac{x-1}{x-1-x}=\frac{x-1}{-1}=1-x=f_2(x)\Rightarrow f_5\circ f_6=f_2$$

$$f_6\circ f_2(x)=f_6\big(f_2(x)\big)=f_6(1-x)=\frac{1-x-1}{1-x}=\frac{-x}{1-x}=\frac{x}{x-1}=f_5(x)\Rightarrow f_6\circ f_2=f_5$$

$$f_6\circ f_3(x)=f_6\big(f_3(x)\big)=f_5\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{\frac{1}{1-x}-1}{\frac{1}{1-x}}=1-(1-x)=x=f_1(x)\Rightarrow f_6\circ f_3=f_1$$

$$f_6\circ f_4(x)=f_6\big(f_4(x)\big)=f_6\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}}=1-x=f_2(x)\Rightarrow f_6\circ f_4=f_2$$

$$f_6\circ f_5(x)=f_6\big(f_5(x)\big)=f_6\left(\frac{x}{x-1}\right)=\frac{\frac{x}{x-1}-1}{\frac{x}{x-1}}=\frac{x-(x-1)}{x}=\frac{1}{x}=f_4(x)\Rightarrow f_6\circ f_5=f_4$$

$$f_6\circ f_6(x)=f_6\big(f_6(x)\big)=f_6\left(\frac{x-1}{x}\right)=\frac{\frac{x-1}{x}-1}{\frac{x-1}{x}}=\frac{x-1-x}{x-1}=\frac{-1}{x-1}=\frac{1}{1-x}=f_3(x)\Rightarrow f_6\circ f_6=f_3$$

Ouf !!!!

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_2	f_2	f_1	f_5	f_6	f_3	f_4
f_3	f_3	f_4	f_6	f_5	f_2	f_1
f_4	f_4	f_3	f_2	f_1	f_6	f_5
f_5	f_5	f_6	f_4	f_3	f_1	f_2
f_6	f_6	f_5	f_1	f_2	f_4	f_3

Allez à : Exercice 32

2. $\circ$ est une loi interne, on le voit sur la table, pour tout $i,j\in\{1,2,3,4,5,6\}$, il existe $k\in\{1,2,3,4,5,6\}$ tel que : $f_i\circ f_j=f_k$
   f_1 est l'élément neutre.
   Chaque f_i admet un unique symétrique f_j car sur chaque ligne et chaque colonne il y a une et une seule fois f_1 qui est l'élément neutre.
   G est un sous-groupe de l'ensemble des bijections de $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$.

Allez à : Exercice 32

3. par exemple : $f_2\circ f_5=f_3$ et $f_5\circ f_2=f_6$ donc le groupe n'est pas abélien.

Allez à : Exercice 32

4. D'après le théorème de Lagrange, l'ordre des sous-groupes H de G divise l'ordre de G donc l'ordre des sous-groupes de G divise 6, leur ordre sont 1, 2, 3 et 6.
Si l'ordre est 1, $H = \{f_1\}$
Si l'ordre est 6, $H = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$.
Si l'ordre est 2, il y a f_1 et l'autre élément vérifie $f_i \circ f_i = f_1$ donc
$$H = \{f_1, f_2\} \quad \text{ou} \quad H = \{f_1, f_4\} \quad \text{ou} \quad H = \{f_1, f_5\}$$
Si l'ordre est 3, il y a f_1 et l'ordre des deux autres éléments n'est pas 2 puisque leur ordre doit diviser 3 autrement dit leur ordre est 3, donc il n'y a pas f_2, ni f_4, ni f_5. Il reste éventuellement f_3 et f_6, on écrit la table de $\{f_1, f_3, f_6\}$

$\circ$	f_1	f_3	f_6
f_1	f_1	f_3	f_6
f_3	f_3	f_6	f_1
f_6	f_6	f_1	f_3

La loi est interne, chaque élément admet un symétrique, c'est un sous-groupe de G et c'est le seul d'ordre 3.
Allez à : Exercice 32

5. Il sont d'ordre 1 pour $\{f_1\}$, d'ordre 2 pour $\{f_1, f_2\}$, $\{f_1, f_4\}$ et $\{f_1, f_4\}$, d'ordre 3 pour $\{f_1, f_3, f_6\}$ et d'ordre 6 pour $\{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$.
Allez à : Exercice 32
6. $< f_2 >= \{f_1, f_2\}$.
Allez à : Exercice 32
7. $< f_3 >= \{f_1, f_3, f_6\}$.
Allez à : Exercice 32

Correction exercice 33.
1.
$$\forall (x,y),(x',y') \in E \times F \qquad (x,y) \odot (x',y') = (x * x', y.y') \in E \times F$$
Car E étant un groupe, la loi est interne donc $x * x' \in E$, de même F est un groupe donc $y.y' \in F$
On note e_E l'élément neutre de E et e_F celui de F
$$\forall (x,y) \in E \times F \quad (x,y) \odot (e_E, e_F) = (x * e_E, y.e_F) = (x,y) = (e_E * x, e_F.y) = (e_E, e_F) \odot (x,y)$$
$$(x,y) \odot (e_E, e_F) = (x,y) = (e_E, e_F) \odot (x,y)$$
Montre que (e_E, e_F) est l'élément neutre pour la loi $\odot$.
On appelle x^{-1} le symétrique de x pour la loi $*$ et y^{-1} le symétrique de y pour la loi .
$$(x,y) \odot (x^{-1}, y^{-1}) = (x * x^{-1}, y.y^{-1}) = (e_E, e_F) = (x^{-1} * x, y^{-1}.y) = (x^{-1}, y^{-1}) \odot (x,y)$$
$$(x,y) \odot (x^{-1}, y^{-1}) = (e_E, e_F) = (x^{-1}, y^{-1}) \odot (x,y)$$
Montre que le symétrique de (x,y) pour la loi $\odot$ est $(x^{-1}, y^{-1}) \in E \times F$ en effet $x^{-1} \in E$ et $y^{-1} \in F$ car E et F sont des groupes.
Il reste l'associativité
$$\forall (x,y),(x',y'),(x'',y'') \in E \times F \quad (x,y) \odot \big((x',y') \odot (x'',y'')\big) = (x,y) \odot (x' * x'', y'.y'')$$
$$= \big(x * (x' * x''), y.(y'.y'')\big) = \big((x * x') * x'', (y.y').y''\big) = (x * x', y.y') \odot (x'', y'')$$
$$= ((x,y) \odot x', y')) \odot (x'', y'')$$
$$(x,y) \odot \big((x',y') \odot (x'',y'')\big) = ((x,y) \odot x', y')) \odot (x'', y'')$$
Montre que la loi $\odot$ est associative car $*$ et . sont deux lois associatives.
Finalement $(E \times F, \odot)$ est un groupe.
2. E' est un sous-groupe de E donc $e_E \in E'$, F' est un sous-groupe de F donc $e_F \in F'$, par conséquent $(e_E, e_F) \in E' \times F'$.
$\forall (x,y),(x',y') \in E' \times F'$, $(x,y) \odot (x',y')^{-1} = (x,y) \odot \big(x'^{-1}, y'^{-1}\big) = (x * x'^{-1}, y.y'^{-1})$
Comme E' est un sous-groupe de E, pour tout $x, x' \in E'$, $x * x'^{-1} \in E'$, de même comme F' est un sous-groupe de F, pour tout $y, y' \in F'$, $y.y'^{-1} \in F'$, par conséquent
$(x,y) \odot (x',y')^{-1} = \big(x * x'^{-1}, y.y'^{-1}\big) \in E' \times F'$

Cela montre que $E' \times F'$ est un sous-groupe de $E \times F$.
Allez à : Exercice 33

Correction exercice 34.
Rappel :

L'ensemble des applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, munis de la loi de composition des applications n'est pas un groupe, pour que cela soit un groupe il faut que ces applications admettent un symétrique, c'est-à-dire une bijection réciproque. C'est pour cela que l'on va montrer que les ensembles suivants sont des sous-groupes de l'ensemble des bijections de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, noté $\mathcal{S}(\mathbb{C})$.

1. On appelle f_t l'application définie pour tout $z \in \mathbb{C}$ par $f_t(z) = z + t$.
$f_0(z) = z + 0 = z \Rightarrow f_0 = id$, id est l'élément neutre de $(\mathcal{S}(\mathbb{C}),\circ)$, il appartient à E_1.
Pour tout $t, t' \in \mathbb{Z}$, $f_t \circ f_{t'}(z) = f_t\big(f_{t'}(z)\big) = f_t(z + t') = z + t + t'$, $t + t' \in \mathbb{Z}$ donc $f_t \circ f_{t'} \in E_1$.
Pour tout $t \in \mathbb{Z}$, $f_t \circ f_{-t}(z) = f_t\big(f_{-t}(z)\big) = f_t(z - t) = z - t + t = z$, donc f_{-t} est le symétrique de f_t et $f_{-t} \in E_1$ car $-t \in \mathbb{Z}$.
$(E_1,\circ)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{S}(\mathbb{C}),\circ)$.
2. Même démonstration.
3. On pose f_θ l'application définie pour tout $z \in \mathbb{C}$ par $f_\theta(z) = e^{i\theta}z$
$f_0(z) = e^0 z = z \Rightarrow f_0 = id$, id est l'élément neutre de $(\mathcal{S}(\mathbb{C}),\circ)$, il appartient à E_3.
Pour tout $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, $f_\theta \circ f_{\theta'}(z) = f_\theta\big(f_{\theta'}(z)\big) = f_\theta\big(e^{i\theta'}z\big) = e^{i\theta}e^{i\theta'}z = e^{i\theta + i\theta'}z = e^{i(\theta+\theta')}z$
$\theta + \theta' \in \mathbb{R}$ donc $f_\theta \circ f_{\theta'} \in E_3$.
Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $f_\theta \circ f_{-\theta}(z) = f_\theta\big(f_{-\theta}(z)\big) = f_\theta\big(e^{-i\theta}z\big) = e^{i\theta}e^{-i\theta}z = e^{i\theta - i\theta}z = e^0 z = z$
Donc $(f_\theta)^{-1} = f_{-\theta} \in E_3$ car $-\theta \in \mathbb{R}$.
$(E_3,\circ)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{S}(\mathbb{C}),\circ)$.
4. On pose $f_{s,t}$ l'application définie pour tout $z \in \mathbb{C}$ par $f_{s,t}(z) = sz + t$
$f_{1,0}(z) = z \Rightarrow f_{1,0} = id$, id est l'élément neutre de $(\mathcal{S}(\mathbb{C}),\circ)$, il appartient à E_4.
Pour tout $(s,t), (s',t') \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$,
$$f_{s,t} \circ f_{s',t'}(z) = f_{s,t}\left(f_{s',t'}(z)\right) = f_{s,t}(s'z + t') = s(s'z + t') + t = ss'z + st' + t$$
$(ss', st' + t) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ donc $f_{s,t} \circ f_{s',t'} \in E_4$.
Pour tout $(s,t) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$,
$$f_{s,t} \circ f_{\frac{1}{s},-\frac{t}{s}}(z) = f_{s,t}\left(f_{\frac{1}{s},-\frac{t}{s}}(z)\right) = f_{s,t}\left(\frac{1}{s}z - \frac{t}{s}\right) = s\left(\frac{1}{s}z - \frac{t}{s}\right) + t = z$$
$\left(\frac{1}{s}, -\frac{t}{s}\right) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$, donc $\left(f_{s,t}\right)^{-1} = f_{\frac{1}{s},-\frac{t}{s}} \in E_4$
$(E_4,\circ)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{S}(\mathbb{C}),\circ)$.

Allez à : Exercice 34

Correction exercice 35.

1. $G \cap \mathbb{R}^{+*}$ est un ensemble minoré par 0 donc il admet une borne inférieure $b \geq 0$.
2. Supposons que $b \notin G$, il existe $g \in G \cap \mathbb{R}^{+*}$ tel que $b < g < 2b$ et il existe $g' \in G$ tel que $b < g' < g$.
On pose $h = g - g'$, $h > 0$ car $g > g'$ et $h \in G$ car g et g' sont dans G qui est un groupe additif.
De plus
$$\begin{cases} b < g < 2b \\ b < g' < g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b < g < 2b \\ -g < -g' < -b \end{cases} \Rightarrow b - g < g - g' < 2b - b = b \Rightarrow h < b$$
On a construit un élément de $G \cap \mathbb{R}^{+*}$ qui est inférieur à b, il y a une contradiction puisque $b = \inf(G \cap \mathbb{R}^{+*})$, par conséquent $b \in G$.
3. Il est évident que $b\mathbb{Z} \subset G$. Montrons l'inclusion dans l'autre sens.
Soit $g \in G$, on pose $m = E\left(\frac{g}{b}\right) \in \mathbb{Z}$ où $E\left(\frac{g}{b}\right)$ est la partie entière de $\frac{g}{b}$. Par définition de la partie entière, puisque $b > 0$:
$$\frac{g}{b} \leq m < \frac{g}{b} + 1 \Leftrightarrow g \leq mb < g + b \Leftrightarrow 0 \leq mb - g < b$$

Si $0 < mb - g$, comme $b \in G$, $mh \in G$ et $g \in G$, G étant un groupe $mb - g \in G$, comme $mb - g < b$, il y a une contradiction puisque $b = \inf(G \cap \mathbb{R}^{+*})$ donc $mb - g = 0 \Leftrightarrow g = mb \in b\mathbb{Z}$.
Cela montre l'inclusion dans l'autre sens. Finalement $G = b\mathbb{Z}$.

4. Il existe un élément g de $G \cap \mathbb{R}^{+*}$ tel que $0 < g < y - x$. On pose $n = E\left(\frac{x}{g}\right) \in \mathbb{Z}$. On a alors, puisque $g > 0$,
$$n \le \frac{x}{g} < n + 1 \Leftrightarrow ng \le x < ng + g \Leftrightarrow x - g < ng \le x$$
$$\begin{cases} 0 < g < y - x \\ x - g < ng \le x \end{cases} \Rightarrow x < x - g \le ng + g < y - x + x = y \Rightarrow x < (n+1)g < y$$
On pose $h = (n+1)g$, $n + 1 \in \mathbb{Z}$ donc $h \in G$ avec $h \in]x, y[$.

5. On pose $G = \{m + n\sqrt{2}, (n, m) \in \mathbb{Z}^2\}$
$0 = 0 + 0 \times \sqrt{2} \in G$,
Soient $m + n\sqrt{2} \in G$ et $m' + n'\sqrt{2} \in G$, $m + n\sqrt{2} - \left(m' + n'\sqrt{2}\right) = (m - m') + (n - n')\sqrt{2} \in G$ car $m - m' \in \mathbb{Z}$ et $n - n' \in \mathbb{Z}$.
Cela montre que $(G, +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.
D'après 2. $\inf(G) \in G$ donc il existe $m_0, n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $m_0 + n_0\sqrt{2} = \inf(G)$, supposons que $m_0 + n_0\sqrt{2} \neq 0$ alors $G = \left(m_0 + n_0\sqrt{2}\right)\mathbb{Z}$, autrement dit pour tout élément $m + n\sqrt{2} \in G$ il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que :
$$m + n\sqrt{2} = \left(m_0 + n_0\sqrt{2}\right)p = m_0p + n_0p\sqrt{2}$$
Donc
$$m - m_0p = (n_0p - n)\sqrt{2}$$
Si $n_0p - n \neq 0$ alors $\sqrt{2} = \frac{m - m_0p}{n_0p - n} \in \mathbb{Q}$ ce qui est faux, donc $n_0p - n = 0$ et par conséquent
$$m - m_0p = 0$$
On a montré que pour tout $m, n \in \mathbb{Z}$ il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que :
$$\begin{cases} n = pn_0 \\ m = pm_0 \end{cases} \Rightarrow m_0n = mn_0$$
Si $n_0 \neq 0$, pour tout $m \in \mathbb{Z}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, $\frac{m}{n} = \frac{m_0}{n_0}$ ce qui veut dire que le quotient de deux entiers est constant, ce qui est faux.
Si $n_0 = 0$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $n = 0$ ce qui est faux.
L'hypothèse $m_0 + n_0\sqrt{2} \neq 0$ est fausse par conséquent $m_0 + n_0\sqrt{2} = 0$ et G est dense dans $\mathbb{R}$ d'après 4.

Allez à : Exercice 35

Correction exercice 36.

1. $0 = 0 + i.0 \in \mathbb{K}$ car $0 \in \mathbb{Q}$ et $0 \in \mathbb{Q}$.
Soient $z_1 = r_1 + is_1 \in \mathbb{K}$ et $z_2 = r_2 + is_2 \in \mathbb{K}$, $z_1 = r_1 + is_1 - (r_2 + is_2) = r_1 - r_2 + i(s_1 - s_2) \in \mathbb{K}$ car $r_1 - r_2 \in \mathbb{Q}$ et $s_1 - s_2 \in \mathbb{Q}$.
L'addition étant commutative dans $\mathbb{C}$, $(\mathbb{K}, +)$ est un sous-groupe commutatif de $(\mathbb{C}, +)$.
2. $1 = 1 + i.0 \in \mathbb{K}$ car $1 \in \mathbb{Q}$ et $0 \in \mathbb{Q}$.
Soient $z_1 = r_1 + is_1 \in \mathbb{K}$ et $z_2 = r_2 + is_2 \in \mathbb{K}$,
$$z_1z_2^{-1} = \frac{r_1 + is_1}{r_2 + is_2} = \frac{(r_1 + is_1)(r_2 - is_2)}{r_2^2 + s_2^2} = \frac{r_1r_2 + s_1s_2 + i(r_2s_1 - r_1s_2)}{r_2^2 + s_2^2} = \frac{r_1r_2 + s_1s_2}{r_2^2 + s_2^2} + i\frac{r_2s_1 - r_1s_2}{r_2^2 + s_2^2}$$
$z_1z_2^{-1} \in \mathbb{K}$ car $\frac{r_1r_2 + s_1s_2}{r_2^2 + s_2^2} \in \mathbb{Q}$ et $\frac{r_2s_1 - r_1s_2}{r_2^2 + s_2^2} \in \mathbb{Q}$
La multiplication étant commutative dans $\mathbb{C}$, $(\mathbb{K}^*, .)$ est un sous-groupe commutatif de $(\mathbb{C}^*, .)$.
3. Il ne reste plus qu'à rappeler que la multiplication est distributive par rapport à l'addition dans $\mathbb{C}$ pour conclure que $(\mathbb{K}, +, .)$ est un corps commutatif, car la multiplication est commutative.

Allez à : Exercice 36

Correction exercice 37.

1. $0 = 0 + 0 \times \sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}\,]$,

   Soient $m + n\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}\,]$ et $m' + n'\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}\,]$,
$$m + n\sqrt{2} - (m' + n'\sqrt{2}) = (m - m') + (n - n')\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}\,]$$
   car $m - m' \in \mathbb{Z}$ et $n - n' \in \mathbb{Z}$.

   Cela montre que $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}\,], +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

   Soient $m + n\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}\,]$ et $m' + n'\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}\,]$,
$$(m + n\sqrt{2})(m' + n'\sqrt{2}) = mm' + 2nn' + (mn' + m'n)\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}\,]$$
   La multiplication est une loi interne sur $\mathbb{Z}[\sqrt{2}\,]$.

   $1 = 1 + 0 \times \sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}\,]$,

   $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}\,], +, \times)$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$.

Remarque :

Les propriétés de distributivité et l'associativité de la multiplication sont évidentes dans $\mathbb{R}$.

2. Pour tout $a + b\sqrt{2}$ il existe un unique $a - b\sqrt{2}$ tel que $\phi(a - b\sqrt{2}) = a + b\sqrt{2}$, ϕ est une bijection de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}\,]$ sur $\mathbb{Z}[\sqrt{2}\,]$.

   Soient $m + n\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}\,]$ et $m' + n'\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}\,]$,
$$\phi(m + n\sqrt{2} + m' + n'\sqrt{2}) = \phi\left((m + m') + (n + n')\sqrt{2}\right) = (m + m') - (n + n')\sqrt{2}$$
$$= m - n\sqrt{2} + m' - n'\sqrt{2} = \phi(m + n\sqrt{2}) + \phi(m' + n'\sqrt{2})$$
   ϕ est un morphisme pour la loi $+$.
$$\phi\left((m + n\sqrt{2})(m' + n'\sqrt{2})\right) = \phi(mm' + 2nn' + (mn' + m'n)\sqrt{2})$$
$$= mm' + 2nn' - (mn' + m'n)\sqrt{2}$$
   Et d'autre part
$$\phi(m + n\sqrt{2})\phi(m' + n'\sqrt{2}) = (m - n\sqrt{2})(m' - n'\sqrt{2}) = mm' + 2nn' - (mn' + m'n)\sqrt{2}$$
   On a bien $\phi\left((m + n\sqrt{2})(m' + n'\sqrt{2})\right) = \phi(m + n\sqrt{2})\phi(m' + n'\sqrt{2})$

   ϕ est un morphisme pour la loi $\times$.

3. Pour tout $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}\,]$, on pose $N(x) = x\phi(x)$. Montrer que N est une application de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}\,]$ dans $\mathbb{Z}$, qui est un morphisme pour la multiplication.

   Pour tout $x = m + n\sqrt{2}$
$$N(m + n\sqrt{2}) = (m + n\sqrt{2})(m - n\sqrt{2}) = m^2 - 2n^2 \in \mathbb{Z}$$
   Soient $m + n\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}\,]$ et $m' + n'\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}\,]$,
$$N\left((m + n\sqrt{2})(m' + n'\sqrt{2})\right) = N(mm' + 2nn' + (mn' + m'n)\sqrt{2})$$
$$= (mm' + 2nn' + (mn' + m'n)\sqrt{2})(mm' + 2nn' - (mn' + m'n)\sqrt{2})$$
$$= (mm' + 2nn')^2 - 2(mn' + m'n)^2$$
$$= mm'^2 + 4mm'nn' + 4n^2n'^2 - 2(m^2n'^2 + 2mn'm'n + m'^2n^2)$$
$$= mm'^2 + 4n^2n'^2 - 2m^2n'^2 - 2m'^2n^2$$
$$N(m + n\sqrt{2})N(m' + n'\sqrt{2}) = (m^2 - 2n^2)(m'^2 - 2n'^2) = m^2m'^2 - 2m^2n'^2 - 2n^2m'^2 + 4n^2n'^2$$
   On a bien
$$N\left((m + n\sqrt{2})(m' + n'\sqrt{2})\right) = N(m + n\sqrt{2})N(m' + n'\sqrt{2})$$
   N est un morphisme d'anneau pour la loi $\times$.

4. Soit $x = m + n\sqrt{2}$ un élément inversible de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}\,]$, $\frac{1}{x} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}\,]$
$$N(x)N\left(\frac{1}{x}\right) = N\left(x \times \frac{1}{x}\right) = N(1) = 1$$
   Comme pour tout $y \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}\,]$, $N(y) \in \mathbb{Z}$,

$$N(x)N\left(\frac{1}{x}\right)=1\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}N(x)=N\left(\frac{1}{x}\right)=1\\ N(x)=N\left(\frac{1}{x}\right)=-1\end{array}\right.$$

Cela montre que si x est inversible alors $N(x)=\pm 1$.
Réciproque : si $N(x)=\pm 1$.

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{m+n\sqrt{2}}=\frac{m-n\sqrt{2}}{(m+n\sqrt{2})(m-n\sqrt{2})}=\frac{m-n\sqrt{2}}{m^2-2n^2}=\frac{m-n\sqrt{2}}{N(x)}=\pm(m-n\sqrt{2})\in\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$$

Cela montre que x est inversible dans $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

5. $3+2\sqrt{2}$ et $-3+2\sqrt{2}$
$N(3+2\sqrt{2})=3^2-2\times 2^2=1$ donc $3+2\sqrt{2}$ est inversible.
$N(-3+2\sqrt{2})=(-3)^2-2\times 2^2=1$ donc $-3+2\sqrt{2}$ est inversible.

Allez à : Exercice 37

Correction exercice 38.

1. Soit O l'origine du plan complexe.
r est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
r^2 est la rotation de centre O et d'angle π.
r^3 est la rotation de centre O et d'angle $\frac{3\pi}{2}$ (ou $-\frac{\pi}{2}$).
s est la symétrie par rapport à l'axe horizontal.
$s\circ r$ est la symétrie par rapport à la droite d'équation $y=-x$ (seconde bissectrice).
$s\circ r^2$ est la symétrie par rapport à l'axe vertical.
$s\circ r^3$ est la symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$ (première bissectrice).

Allez à : Exercice 38

2. Pour montrer que G est un groupe, il suffit de vérifier que c'est un sous-groupe de l'ensemble $S(\mathbb{C})$ des bijections du plan complexe dans lui-même. L'ensemble proposé est non vide. Observons ensuite que r et r^3 sont inverses l'un de l'autre, et que chacun des autres éléments de G est son propre inverse. La table de composition ci-dessous montre que le produit de deux éléments quelconques de G est encore dans G. Donc G est un sous-groupe de $S(\mathbb{C})$. Dans cette table, nous omettons les signes $\circ$ par souci de clarté.

$\circ$	e	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2	sr^3
e	e	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2	sr^3
r	r	r^2	r^3	e	sr^3	s	sr	sr^2
r^2	r^2	r^3	e	r	sr^2	sr^3	s	sr
r^3	r^3	e	r	r^2	sr	sr^2	sr^3	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	e	r	r^2	r^3
sr	sr	sr^2	sr^3	s	r^3	e	r	r^2
sr^2	sr^2	sr^3	s	sr	r^2	r^3	e	r
sr^3	sr^3	s	sr	sr^2	r	r^2	r^3	e

Allez à : Exercice 38

3. Nous le montrons pour $\{e,r^2\}$, le raisonnement est identique pour les 4 autres. Dans la mesure où r^2 est son propre inverse, $\{e,r^2\}$ est bien un sous-groupe de G. L'application φ qui à e associe 0 et à r^2 associe 1 est une bijection, et c'est un morphisme pour la loi $\circ$ au départ, et pour l'addition modulo 2 à l'arrivée. Il suffit pour cela de s'assurer que les tables de composition correspondent.

$\circ$	e	r^2
e	e	r^2
r^2	r^2	e

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

Détaillons un peu

$$\varphi(e) = 0;\ \varphi(r^2) = 1$$
$$\varphi(r^2 \circ e) = \varphi(e \circ r^2) = \varphi(r^2) = 1$$

Par conséquent

$$\varphi(r^2 \circ e) = 1 + 0 = \varphi(r^2) + \varphi(e)$$

Et

$$\varphi(e \circ r^2) = 0 + 1 = \varphi(e) + \varphi(r^2)$$

D'autre part

$$\varphi(e \circ e) = \varphi(e) = 0 = 0 + 0 = \varphi(e) + \varphi(e)$$

Et

$$\varphi(r^2 \circ r^2) = \varphi(r^4) = \varphi(e) = 0 = 1 + 1 = \varphi(r^2) + \varphi(r^2)$$

Cela montre que pour tout $f, g \in \{e, r^2\}$, $\varphi(f \circ g) = \varphi(f) + \varphi(g)$, c'est bien la définition d'un morphisme de groupe. Dans la suite on se contentera de constater que les tables correspondent.

Allez à : Exercice 38

4. Ici encore, le plus simple est de définir la bijection, puis de vérifier que c'est un morphisme pour les deux lois en comparant les tables de composition. Remarquons que l'existence d'un isomorphisme entre un sous-ensemble de G et un groupe connu, nous dispense de montrer que ce sous-ensemble est effectivement
un sous-groupe. Comme bijection nous choisissons l'application , définie par :
$$\varphi(e) = (0,0), \varphi(s) = (0,1), \varphi(r^2) = (1,0), \varphi(s \circ r^2) = (1,1).$$

$\circ$	e	s	r^2	sr^2
e	e	s	r^2	sr^2
s	s	e	sr^2	r^2
r^2	r^2	sr^2	e	s
sr^2	sr^2	r^2	s	e

$+$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
$(0,1)$	$(0,1)$	$(0,0)$	$(1,1)$	$(1,0)$
$(1,0)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(0,0)$	$(0,1)$
$(1,1)$	$(1,1)$	$(1,0)$	$(0,1)$	$(0,0)$

Allez à : Exercice 38

5. Même technique ; la bijection est définie par :
$$\varphi(e) = 0, \varphi(r) = 1, \varphi(r^2) = 2, \varphi(r^3) = 3$$

$\circ$	e	r	r^2	r^3
e	e	r	r^2	r^3
r	r	r^2	r^3	e
r^2	r^2	r^3	e	r
r^3	r^3	e	r	r^2

$+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Allez à : Exercice 38

6. Vérifions-le pour r et pour s.
$$r(A_1) = A_2\,, r(A_2) = A_3\,, r(A_3) = A_4\,, r(A_4) = A_1$$
$$s(A_1) = A_4\,, s(A_2) = A_3\,, s(A_3) = A_2\,, s(A_4) = A_1$$
C'est évident, il suffit de faire un dessin dans $\mathbb{R}^2$ et de placer les points A_i.
Puisque r et s laissent invariant l'ensemble $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, c'est aussi le cas pour toute transformation du plan composée de r et s, donc pour tous les éléments du groupe G.

Allez à : Exercice 38

7. Soient f et g deux éléments du groupe G. Soient σ et τ les deux permutations de $\mathcal{S}_4$ telles que pour tout $i = 1, 2, 3, 4$:
$$f(A_i) = A_{\sigma(i)} \quad \text{et} \quad g(A_i) = A_{\tau(i)}$$
Autrement dit
$$\sigma = (2,3,4,1) \quad \text{et} \quad \tau = (4,3,2,1)$$
Alors, pour tout $i = 1, 2, 3, 4$,
$$f \circ g(A_i) = f\big(g(A_i)\big) = f\big(A_{\tau(i)}\big) = A_{\sigma(\tau(i))} = A_{\sigma\circ\tau(i)}$$

Donc $\varphi(f\circ g)=\sigma\circ\tau=\varphi(f)\circ\varphi(g)$. Donc φ est un morphisme pour la composition des applications dans G au départ, et pour la composition des permutations à l'arrivée.

Allez à : Exercice 38

8. Voici le tableau donnant l'image par φ des éléments de G.

f	e	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2	sr^3
$\varphi(f)$	(1,2,3,4)	(2,3,4,1)	(3,4,1,2)	(4,1,2,3)	(4,3,2,1)	(3,2,1,4)	(2,1,4,3)	(1,4,3,2)

C'est évident pour $\varphi(e)$, $\varphi(r)$ et $\varphi(s)$

On va plutôt utiliser la notation

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}\quad et\quad \tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}$$

$$\varphi(r^2)=\sigma\circ\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}$$

$$\varphi(r^3)=\sigma\circ\sigma^2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}$$

$$\varphi(sr)=\varphi(s)\circ\varphi(r)=\tau\circ\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&2&1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}$$

$$\varphi(sr^2)=\varphi(s)\circ\varphi(r^2)=\tau\circ\sigma^2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\\2&1&4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}$$

$$\varphi(sr^3)=\varphi(s)\circ\varphi(r^3)=\tau\circ\sigma^3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\\1&4&3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}$$

Allez à : Exercice 38

9. Puisque φ est un morphisme, H est un sous-groupe de G. Le tableau de la question précédente liste tous les éléments de H, qui sont tous distincts. Donc la restriction de φ à H à l'arrivée est une bijection : φ est donc un isomorphisme de G sur H.

Allez à : Exercice 38

Correction exercice 39.

1. L'ensemble A est non vide. Il suffit de vérifier que A est un sous-groupe pour l'addition, et que la multiplication est stable. Soient m,n,m',n' quatre éléments de $\mathbb{Z}$.
$$\left(m+n\sqrt{6}\right)-\left(m'+n'\sqrt{6}\right)=(m-m')+(n-n')\sqrt{6}$$
Donc
$$\left(m+n\sqrt{6}\right)-\left(m'+n'\sqrt{6}\right)\in A$$
$$\left(m+n\sqrt{6}\right)\times\left(m'+n'\sqrt{6}\right)=(mm'+6nn')+(mn'+m'n)\sqrt{6}$$
Donc
$$\left(m+n\sqrt{6}\right)\times\left(m'+n'\sqrt{6}\right)\in A$$
2. Observons d'abord que pour tout élément a de A, $\varphi\big(\varphi(a)\big)=\ a$. Donc φ est une bijection, puisque tout élément de A a pour antécédent $\varphi(a)$.
Montrons maintenant que φ est un morphisme pour l'addition.
$$\varphi\left(\left(m+n\sqrt{6}\right)+\left(m'+n'\sqrt{6}\right)\right)=\varphi\left((m+m')+(n+n')\sqrt{6}\right)=(m+m')-(n+n')\sqrt{6}$$
$$=\left(m-n\sqrt{6}\right)+\left(m'-n'\sqrt{6}\right)=\varphi\left(m+n\sqrt{6}\right)+\varphi\left(m'+n'\sqrt{6}\right)$$
Montrons enfin que φ est un morphisme pour la multiplication.

$$\varphi\left(\left(m+n\sqrt{6}\right)\times\left(m'+n'\sqrt{6}\right)\right)=\varphi\left((mm'+6nn')+(mn'+m'n)\sqrt{6}\right)$$
$$=(mm'+6nn')-(mn'+m'n)\sqrt{6}=\left(m-n\sqrt{6}\right)\times\left(m'-n'\sqrt{6}\right)$$
$$=\varphi\left(m+n\sqrt{6}\right)\times\varphi\left(m'+n'\sqrt{6}\right)$$

3. Soit $a=m+n\sqrt{6}$ un élément quelconque de A.
$$N(a)=a\varphi(a)=\left(m+n\sqrt{6}\right)\times\left(m-n\sqrt{6}\right)=m^2-6n^2$$
Donc N est bien une application de A dans $\mathbb{Z}$. Montrons que c'est un morphisme pour la multiplication. Soient a et a' deux éléments de A.
$$N(aa')=aa'\varphi(aa')=aa'\varphi(a)\varphi(a')=\big(a\varphi(a)\big)\big(a'\varphi(a')\big)=N(a)N(a')$$
En utilisant le fait que φ est un morphisme pour la multiplication.
4. Si $N(x)=x\varphi(x)=1$, alors $\varphi(x)$ est inverse de x, et si $N(x)=x\varphi(x)=-1$, alors $-\varphi(x)$ est inverse de x : la condition est suffisante. Montrons qu'elle est nécessaire. Soit x un élément inversible de A : il existe y tel que $xy=1$. Mais comme N est un morphisme pour la multiplication, $N(x)N(y)=1$. Or $N(x)$ et $N(y)$ sont des entiers. Les seuls éléments de $\mathbb{Z}$ inversibles pour la multiplication sont 1 et -1. D'où le résultat.
5. Il suffit de calculer l'image par N, et d'appliquer le résultat de la question précédente.
$$N\left(5+2\sqrt{6}\right)=25-24=1$$
L'inverse de $5+2\sqrt{6}$ est $5-2\sqrt{6}$.

Allez à : Exercice 39

Espaces vectoriels

Exercice 1.

Soient dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (4,1,4)$ et $v_3 = (2,-1,4)$.
La famille (v_1, v_2, v_3) est-elle libre ?

Allez à : Correction exercice 1

Exercice 2.

Les familles suivantes sont-elles libres ?

1. $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (0,2,2)$ et $v_3 = (3,7,1)$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (0,1,1)$ et $v_3 = (1,1,1)$ dans $\mathbb{R}^3$.
3. $v_1 = (1,2,1,2,1)$, $v_2 = (2,1,2,1,2)$, $v_3 = (1,0,1,1,0)$ et $v_4 = (0,1,0,0,1)$ dans $\mathbb{R}^5$.
4. $v_1 = (2,4,3,-1,-2,1)$, $v_2 = (1,1,2,1,3,1)$ et $v_3 = (0,-1,0,3,6,2)$ dans $\mathbb{R}^6$.
5. $v_1 = (2,1,3,-1,-4,-1)$, $v_2 = (-1,1,-2,2,-3,3)$ et $v_3 = (1,5,0,4,-1,7)$ dans $\mathbb{R}^6$.

Allez à : Correction exercice 2

Exercice 3.

On considère dans $\mathbb{R}^n$ une famille de 4 vecteurs linéairement indépendants (e_1, e_2, e_3, e_4)
Les familles suivantes sont-elles libres ?

1. $(e_1, 2e_2, e_3)$.
2. (e_1, e_3).
3. $(e_1, 2e_1 + e_4, e_4)$.
4. $(3e_1 + e_3, e_3, e_2 + e_3)$.
5. $(2e_1 + e_2, e_1 - 3e_2, e_4, e_2 - e_1)$.

Allez à : Correction exercice 3

Exercice 4.

Soient dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs $u_1 = (1,2,3,4)$ et $u_2 = (1,-2,3,-4)$. Peut-on déterminer x et y pour que $(x, 1, y, 1) \in Vect(u_1, u_2)$? Et pour que $(x, 1,1, y) \in Vect(u_1, u_2)$?

Allez à : Correction exercice 4

Exercice 5.

Dans $\mathbb{R}^4$ on considère l'ensemble E des vecteurs (x_1, x_2, x_3, x_4) vérifiant $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$.
L'ensemble E est-il un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$? Si oui, en donner une base.

Allez à : Correction exercice 5

Exercice 6.

Dans l'espace $\mathbb{R}^4$, on se donne cinq vecteurs : $v_1 = (1,1,1,1)$, $v_2 = (1,2,3,4)$, $v_3 = (3,1,4,2)$,
$v_4 = (10,4,13,7)$ et $v_5 = (1,7,8,14)$
Chercher les relations de dépendance linéaires entre ces vecteurs. Si ces vecteurs sont dépendants, en extraire au moins une famille libre engendrant le même sous-espace.

Allez à : Correction exercice 6

Exercice 7.

Dans l'espace $\mathbb{R}^4$, on se donne cinq vecteurs : $v_1 = (1,1,1,1)$, $v_2 = (1,2,3,4)$, $v_3 = (3,1,4,2)$,
$v_4 = (10,4,13,7)$ et $v_5 = (1,7,8,14)$
À quelle(s) condition(s) un vecteur $b = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ appartient-il au sous-espace engendré par les vecteurs v_1, v_2, v_3, v_4 et v_5 ? Définir ce sous-espace par une ou des équations.

Allez à : Correction exercice 7

Exercice 8.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et v_1, v_2, v_3 et v_4 une famille libre d'éléments de E, les familles suivantes sont-elles libres?

1. $(v_1 ,2v_2, v_3)$

2. (v_1, v_3)
3. $(v_1, v_1 + 2, v_4)$
4. $(3v_1 + v_3, v_3, v_2 + v_3)$.
5. $(2v_1 + v_2, v_1 - 3v_2, v_4, v_2 - v_1)$

Allez à : Correction exercice 8

Exercice 9.

Dans $\mathbb{R}^4$, comparer les sous-espaces F et G suivants :

$$F = Vect((1,0,1,1), (-1,-2,3,-1), (-5,-3,1,5))$$
$$G = Vect\big((-1,-1,1,-1), (4,1,2,4)\big)$$

Allez à : Correction exercice 9

Exercice 10.

On suppose que v_1, v_2,…,v_n sont des vecteurs indépendants de $\mathbb{R}^n$.

1. Les vecteurs $v_1 - v_2$, $v_2 - v_3$, $v_3 - v_4$,…, $v_{n-1} - v_n$, $v_n - v_1$ sont-ils linéairement indépendants ?
2. Les vecteurs $v_1 + v_2$, $v_2 + v_3$, $v_3 + v_4$,…, $v_{n-1} + v_n$, $v_n + v_1$sont-ils linéairement indépendants?
3. Les vecteurs v_1, $v_1 + v_2$, $v_1 + v_2 + v_3$, $v_1 + v_2 + v_3 + v_4$,…, $v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-1} + v_n$, $v_n + v_1$ sont-ils linéairement indépendants?

Allez à : Correction exercice 10

Exercice 11.

Soient $a = (2,3,-1)$, $b = (1,-1,-2)$, $c = (3,7,0)$ et $d = (5,0,-7)$.

Soient $E = Vect(a, b)$ et $F = Vect(c, d)$ les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $E = F$

Allez à : Correction exercice 11

Exercice 12.

Peut-on déterminer des réels x, y pour que le vecteur $v = (-2, x, y, 3)$ appartienne au sous-espace-vectoriel engendré par le système (u_1, u_2), où $u_1 = (1,-1,1,2)$ et $u_2 = (-1,2,3,1)$

Allez à : Correction exercice 12

Exercice 13.

Soient $u_1 = (0,1,-2,1)$, $u_2 = (1,0,2,-1)$, $u_3 = (3,2,2,-1)$, $u_4 = (0,0,1,0)$ et $u_5 = (0,0,0,1)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses? Justifier votre réponse.

1. $Vect(u_1, u_2, u_3) = Vect\big((1,1,0,0), (-1,1,-4,2)\big)$
2. $(1,1,0,0) \in Vect(u_1, u_2) \cap Vect(u_2, u_3, u_4)$.
3. $\dim\big(Vect(u_1, u_2) \cap Vect(u_2, u_3, u_4)\big) = 1$.
4. $Vect(u_1, u_2) + Vect(u_2, u_3, u_4) = \mathbb{R}^4$.
5. $Vect(u_4, u_5)$ est un sous-espace vectoriel de supplémentaire $Vect(u_1, u_2, u_3)$ dans $\mathbb{R}^4$.

Allez à : Correction exercice 13

Exercice 14.

On considère les vecteurs $v_1 = (1,0,0,1)$, $v_2 = (0,0,1,0)$, $v_3 = (0,1,0,0)$, $v_4 = (0,0,0,1)$ et $v_5 = (0,1,0,1)$ dans $\mathbb{R}^4$.

1. $Vect(v_1, v_2)$ et $Vect(v_3)$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?
2. Même question pour $Vect(v_1, v_3, v_4)$ et $Vect(v_2, v_5)$.
3. Même question pour $Vect(v_1, v_2)$ et $Vect(v_3, v_4, v_5)$

Allez à : Correction exercice 14

Exercice 15.

1. Est-ce que le sous-ensemble $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = 2x\}$ de $\mathbb{R}^2$, muni des lois habituelles de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?
2. Est-ce que le sous-ensemble $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, y^2 = 2x, z = 0\}$ de $\mathbb{R}^3$, muni des lois habituelles de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

Allez à : Correction exercice 15

Exercice 16.

Soient $u_1 = (1,-1,2)$, $u_2 = (1,1,-1)$ et $u_3 = (-1,-5,-7)$

Soit $E = Vect(u_1, u_2, u_3)$

Soit $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\}$

1. Donner une base de E.
2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
3. Donner une base de F.
4. Donner une base de $E \cap F$.

Allez à : Correction exercice 16

Exercice 17.

Soient $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (2,-2,-1)$ et $u_3 = (1,1,-1)$

Soient $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, y + z = 0\}$ et $F = Vect(u_1, u_2)$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Déterminer une base de E.
2. La famille (u_1, u_2, u_3) est-elle libre ? Est-ce que $u_3 \in F$?
3. Est-ce que $u_3 \in E$?
4. Donner une base de $E \cap F$.
5. Soit $u_4 = (-1,7,5)$, est-ce que $u_4 \in E$? est-ce que $u_4 \in F$?

Allez à : Correction exercice 17

Exercice 18.

Soit $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\}$

Soient $a = (1,-2,3)$ et $b = (2,1,-1)$ deux vecteurs. On pose $F = Vect(a,b)$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer $E \cap F$.
3. A-t-on $E \oplus F$?

Allez à : Correction exercice 18

Exercice 19.

Soient $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x + y - 2z = 0 \text{ et } 2x - y - z = 0\}$ et $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x + y - z = 0\}$ deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$.

On admettra que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Soient $a = (1,1,1)$, $b = (1,0,1)$ et $c = (0,1,1)$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une famille génératrice de E et montrer que cette famille est une base.
3. Montrer que $\{b,c\}$ est une base de F.
4. Montrer que $\{a,b,c\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.
5. A-t-on $E \oplus F = \mathbb{R}^3$.
6. Soit $u = (x,y,z)$, exprimer u dans la base $\{a,b,c\}$.

Allez à : Correction exercice 19

Exercice 20.

Soient $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R} | 2x + y - z = 0 \text{ et } x + 2y + z = 0\}$ et $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 2x - 3y + z = 0\}$ deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$.

On admettra que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Soient $a = (1,-1,1)$, $b = (-2,-1,1)$ et $c = (-1,0,2)$

1°) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2°) Déterminer une famille génératrice de E et montrer que cette famille est une base.

3°) Montrer que $\{b,c\}$ est une base de F.

4°) Montrer que $\{a, b, c\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.
5°) A-t-on $E \oplus F = \mathbb{R}^3$.
6°) Soit $u = (x, y, z)$, exprimer u dans la base $\{a, b, c\}$.

Allez à : Correction exercice 20

Exercice 21.

Soient $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y - z = 0 \text{ et } x - y - z = 0\}$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y - 2z = 0\}$ deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$.

On admettra que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Soient $a = (1,0,1)$, $b = (1,1,1)$ et $c = (0,2,1)$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une famille génératrice de E et montrer que cette famille est une base.
3. Montrer que $\{b, c\}$ est une base de F.
4. Montrer que $\{a, b, c\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.
5. A-t-on $E \oplus F = \mathbb{R}^3$.
6. Soit $u = (x, y, z)$, exprimer u dans la base $\{a, b, c\}$.

Allez à : Correction exercice 21

Exercice 22.

Soient $E = Vect(a, b, c, d)$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

$$a = (2, -1, -1); \quad b = (-1,2,3); \quad c = (1,4,7); \quad d = (1,1,2)$$

1. Est-ce que (a, b, c, d) est une base de $\mathbb{R}^3$?
2. Montrer que (a, b) est une base de E.
3. Déterminer une ou plusieurs équations caractérisant E.
4. Compléter une base de E en une base de $\mathbb{R}^3$.

Allez à : Correction exercice 22

Exercice 23.

Soient $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y + z - t = 0 \text{ et } x - 2y + 2z + t = 0 \text{ et } x - y + z = 0\}$

On admettra que E est un espace vectoriel.

Et $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, 2x + 6y + 7z - t = 0\}$

Soient $a = (2,1,-1,2)$, $b = (1,1,-1,1)$, $c = (-1,-2,3,7)$ et $d = (4,4,-5,-3)$ quatre vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

Première partie

1. Déterminer une base de E et en déduire la dimension de E.
2. Compléter cette base en une base de $\mathbb{R}^4$.

Deuxième partie

3. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
4. Déterminer une base de F.
5. A-t-on $E \oplus F = \mathbb{R}^4$?

Troisième partie

6. Montrer que $F = Vect(b, c, d)$.
7. Soit $u = (x, y, z, t) \in F$, exprimer u comme une combinaison linéaire de b, c et d.

Allez à : Correction exercice 23

Exercice 24.

Soit $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y + z + t = 0, x + 2y - z + t = 0, -x - y + 2z + 2t = 0\}$ et

$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + 3y + 4t = 0\}$

1. Donner une base de ces deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.
2. A-t-on $E \oplus F = \mathbb{R}^4$?

3. Soit $a = (1,3,0,4) \in \mathbb{R}^4$ et on pose $G = Vect(a)$, a-t-on $G \oplus F = \mathbb{R}^4$?

Allez à : Correction exercice 24

Exercice 25.

Soit $E = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0\}$

Soit $a = (1,2,-3)$, et $F = Vect(a)$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, et déterminer une base de cet espace-vectoriel.
2. A-t-on $E \oplus F = \mathbb{R}^3$?

   On justifiera la réponse.

Allez à : Correction exercice 25

Exercice 26.

Soit $E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4,\ x_1 + x_3 = 0 \ \text{ et } \ x_2 + x_4 = 0\}$

Soient $u_1 = (1,1,1,1)$, $u_2 = (1,-1,1,-1)$ et $u_3 = (1,0,1,0)$

Soit $F = Vect(u_1, u_2, u_3)$

On admettra que E est un espace vectoriel.

1. Donner une base de E et en déduire sa dimension.
2. Déterminer une base de F.
3. Donner une (ou plusieurs) équation(s) qui caractérise(nt) F.
4. Donner une famille génératrice de $E + F$.
5. Montrer que : $E \oplus F = \mathbb{R}^4$.

Allez à : Correction exercice 26

Exercice 27.

Soient $a = (1,1,1,1)$ et $b = (1,-1,1,-1)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Soit $E = Vect(a, b)$.

Soient

$$F_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \quad \text{et} \quad 2x_1 + x_2 = 0\}$$
$$F_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4, x_2 + x_4 = 0 \ \text{ et } \ x_1 + x_3 = 0\}$$

On admettra que E, F_1 et F_2 sont trois sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.

1. Déterminer une base (c, d) de F_1.
2. Déterminer une base (e, f) de F_2
3. A-t-on $F_1 \oplus F_2 = \mathbb{R}^4$?
4. Montrer que (a, b, c, d) est une base de $\mathbb{R}^4$.
5. A-t-on $E \oplus F_1 = \mathbb{R}^4$?

Allez à : Correction exercice 27

Exercice 28.

Soient $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x - y + z - t = 0\}$, $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y + z + t = 0\}$ et $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, y = 2x, z = 3x, t = 4x\}$

1. Montrer que E, F et H sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$, donner une base de chacun de ces sous-espaces vectoriels.
2. Déterminer $E + F$.
3. Montrer que $E \oplus H = \mathbb{R}^4$

Allez à : Correction exercice 28

Exercice 29.

Soient $u_1 = (2,1,1)$, $u_2 = (1,2,-1)$, $u_3 = (1,1,0)$ et $u_4 = (1,-1,-2)$ quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

Déterminer une sous famille de (u_1, u_2, u_3, u_4) libre qui engendre $E = Vect(u_1, u_2, u_3, u_4)$, en déduire la dimension de E.

Allez à : Correction exercice 29

Exercice 30.

Soit $E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_1 - x_2 = 0 \text{ et } x_3 - x_4 = 0\}$

On admettra que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

1. Déterminer une base de E.
2. Compléter cette base de E en une base de $\mathbb{R}^4$.

Allez à : Correction exercice 30

Exercice 31.

Soient $a = (2, -1,1,2)$, $b = (2, -1,6,1)$ et $c = (6, -3,8,5)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

Soient $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, -7x + z + 5t = 0 \text{ et } x + y = 0\}$ et $F = Vect(a, b, c)$

1. Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.
2. Donner une base de E et une base de F.
3. A-t-on $E \oplus F = \mathbb{R}^4$?

Allez à : Correction exercice 31

Exercice 32.

Soit $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients dans $\mathbb{R}$ à 3 lignes et 3 colonnes.

Soit $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. C'est-à-dire les matrices qui vérifient ${}^tA = A$.

1. Montrer que $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Déterminer $\dim\left(\mathcal{S}_3(\mathbb{R})\right)$.

Allez à : Correction exercice 32

Exercice 33.

Soient $P_0 = \frac{1}{2}(X-1)(X-2)$, $P_1 = -X(X-2)$ et $P_2 = \frac{1}{2}X(X-1)$ trois polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$.

1. Montrer que (P_0, P_1, P_2) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$, exprimer P dans la base (P_0, P_1, P_2).
3. Soit $Q = \alpha P_0 + \beta P_1 + \gamma P_2 \in \mathbb{R}_2[X]$, exprimer Q dans la base $(1, X, X^2)$.
4. Pour tout A, B et C réels montrer qu'il existe un unique polynôme de $R \in \mathbb{R}_2[X]$, tel que : $R(0) = A$, $R(1) = B$ et $R(2) = C$.

Allez à : Correction exercice 33

Exercice 34.

Soient $P_1 = X^3 + X^2 + X + 1$, $P_2 = X^3 + 2X^2 + 3X + 4$, $P_3 = 3X^3 + X^2 + 4X + 2$ et $P_4 = 10X^3 + 4X^2 + 13X + 7$ quatre polynômes de $\mathbb{R}_3[X]$

1. La famille (P_1, P_2, P_3, P_4) est-elle libre ?
2. Donner une base de $Vect(P_1, P_2, P_3, P_4)$

Allez à : Correction exercice 34

Exercice 35.

Soit $E = \{P \in \mathbb{R}_2[X], P(1) = 0\}$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Donner une base de E et en déduire sa dimension.

Allez à : Correction exercice 35

Exercice 36.

Soit $E = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(-1) = 0 \text{ et } P(1) = 0\}$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer une base et la dimension de E.

Allez à : Correction exercice 36

Exercice 37.

Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, les trois fonctions $x \mapsto \sin(x)$, $x \mapsto \sin(2x)$ et $x \mapsto \sin(3x)$, sont-elles linéairement indépendantes?

Allez à : Correction exercice 37

Exercice 38.

Soient $f(x) = \cos(x)$, $g(x) = \cos(x)\cos(2x)$ et $h(x) = \sin(x)\sin(2x)$. Déterminer $Vect(f,g,h)$.

Allez à : Correction exercice 38

Exercice 39.

Soit E l'ensemble des fonctions vérifiant l'équation différentielle

$$y'' + xy' - x^2y = 0$$

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions.

Allez à : Correction exercice 39

Exercice 40. (Hors programme)

1. Montrer que les systèmes : $S_1 = (1, \sqrt{2})$ et $S_2 = (1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ sont libre dans $\mathbb{R}$ considéré comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.
2. Soient, dans $\mathbb{R}^2$, les vecteurs $u_1 = (3 + \sqrt{5}, 2 + 3\sqrt{5})$ et $u_2 = (4, 7\sqrt{5} - 9)$. Montrer que le système (u_1, u_2) est $\mathbb{Q}$-libre et $\mathbb{R}$-lié.
3. Soient les vecteurs $v_1 = (1 - i, i)$ et $v_2 = (2, -1 + i)$ dans $\mathbb{C}^2$.
   a. Montrer que le système (v_1, v_2) est $\mathbb{R}$-libre et $\mathbb{C}$-lié.
   b. Vérifier que le système $S = \{(1,0), (i, 0), (0,1), (0, i)\}$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et donner les composantes des vecteurs v_1 et v_2 par rapport à cette base.

Allez à : Correction exercice 40

CORRECTIONS

Correction exercice 1.

On peut éventuellement s'apercevoir que $v_2 - v_3 = 2v_1$ donc la famille est liée.

Sinon

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \alpha(1,1,0) + \beta(4,1,4) + \gamma(2,-1,4) = (0,0,0) \Rightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \left\{ \begin{array}{r} \alpha + 4\beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha + \beta - \gamma = 0 \\ 4\beta + 4\gamma = 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - L_1 \\ L_3 \end{matrix} \left\{ \begin{array}{r} \alpha + 4\beta + 2\gamma = 0 \\ -3\beta - 3\gamma = 0 \\ 4\beta + 4\gamma = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{r} \alpha + 4\beta + 2\gamma = 0 \\ \beta = -\gamma \\ \beta = -\gamma \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 2\gamma \\ \beta = -\gamma \end{array} \right.$$

Il n'y a pas que $(0,0,0)$ comme solution donc la famille est liée, en prenant $\gamma = 1$, on trouve que $\alpha = 2$ et que $\beta = -1$, par conséquent $2v_1 - v_2 + v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$, ce qui est la même relation que l'on avait « deviné » ci-dessus.

Allez à : Exercice 1

Correction exercice 2.

1.

$$\alpha v_1+\beta v_2+\gamma v_3=0_{\mathbb{R}^3}\Rightarrow \alpha(1,0,1)+\beta(0,2,2)+\gamma(3,7,1)=(0,0,0)\Rightarrow\begin{cases}\alpha+3\gamma=0\\2\beta+7\gamma=0\\\alpha+2\beta+\gamma=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha=-3\gamma\\\beta=-\frac{7}{2}\gamma\\-3\gamma-7\beta+\gamma=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=-3\gamma\\\beta=-\frac{7}{2}\gamma\\-9\gamma=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=0\\\beta=0\\\gamma=0\end{cases}$$

Donc la famille est libre

2. Là, il est clair que $v_1+v_2=v_3$ donc la famille est liée
3. On peut raisonnablement s'apercevoir que :

$$v_1+v_2=(3,3,3,3,3)=3(1,1,1,1,1)=3(v_3+v_4)$$

Donc la famille est liée.
Sinon on se lance dans un gros calcul

$$\alpha v_1+\beta v_2+\gamma v_3+\delta v_4+\epsilon v_5=0_{\mathbb{R}^5}$$

$$\Rightarrow \alpha(1,2,1,2,1)+\beta(2,1,2,1,2)+\gamma(1,0,1,1,0)+\delta(0,1,0,0,1)=(0,0,0,0,0)\Rightarrow\begin{cases}\alpha+2\beta+\gamma=0\\2\alpha+\beta+\delta=0\\\alpha+2\beta+\gamma=0\\2\alpha+\beta+\gamma=0\\\alpha+2\beta+\delta=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\end{matrix}\begin{cases}\alpha+2\beta+\gamma=0\\2\alpha+\beta+\delta=0\\2\alpha+\beta+\gamma=0\\\alpha+2\beta+\delta=0\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2-2L_1\\L_3-L_2\\L_4-L_1\end{matrix}\begin{cases}\alpha+2\beta+\gamma=0\\-3\beta+\delta-2\gamma=0\\\gamma-\delta=0\\-\gamma+\delta=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha+2\beta+\gamma=0\\-3\beta+\delta-2\gamma=0\\\gamma=\delta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha+2\beta+\delta=0\\-3\beta-\delta=0\\\gamma=\delta\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha+2\beta+\delta=0\\\beta=-\frac{1}{3}\delta\\\gamma=\delta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha+2\left(-\frac{1}{3}\delta\right)+\delta=0\\\beta=-\frac{1}{3}\delta\\\gamma=\delta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=-\frac{1}{3}\delta\\\beta=-\frac{1}{3}\delta\\\gamma=\delta\end{cases}$$

Il n'y a pas que $(0,0,0,0)$ comme solution donc la famille est liée. En prenant $\delta=3$, on trouve la relation :

$$-v_1-v_2+3v_3+3v_4=0_{\mathbb{R}^5}$$

4.

$$\alpha v_1+\beta v_2+\gamma v_3=0_{\mathbb{R}^6}\Rightarrow \alpha(2,4,3,-1,-2,1)+\beta(1,1,2,1,3,1)+\gamma(0,-1,0,3,6,2)=(0,0,0,0,0,0)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2\alpha+\beta=0\\4\alpha+\beta-\gamma=0\\3\alpha+2\beta=0\\-\alpha+\beta+3\gamma=0\\-2\alpha+3\beta+6\gamma=0\\\alpha+\beta+2\gamma=0\end{cases}$$

On peut s'amuser à faire méthodiquement la méthode de Gauss, mais avec la première et la seconde ligne, on s'aperçoit que $\alpha=\beta=0$, puis on remplace dans n'importe quelle ligne pour trouver que $\gamma=0$.
La famille est libre.

5. C'est trop fatigant, $2v_1+3v_2=v_3$, la famille est liée.

Allez à : Exercice 2

Correction exercice 3.

1. Oui évidemment, sinon

$$\alpha e_1+2\beta e_2+\gamma e_3=0_{\mathbb{R}^n}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=0\\2\beta=0\\\gamma=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=0\\\beta=0\\\gamma=0\end{cases}$$

2. Une sous famille d'une famille libre est libre.
3.

$$2\times e_1-1\times(2e_1+e_4)+1\times e_4=0_{\mathbb{R}^n}$$

Il existe une combinaison linéaire non identiquement nulle de ces trois vecteurs, la famille est liée.

4.
$$\alpha(3e_1+e_3)+\beta e_3+\gamma(e_2+e_3)=0_{\mathbb{R}^n}\Rightarrow 3\alpha e_1+\gamma e_2+(\alpha+\beta+\gamma)e_3=0_{\mathbb{R}^n}\Rightarrow\begin{cases}3\alpha=0\\ \gamma=0\\ \alpha+\beta+\gamma=0\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha=0\\ \beta=0\\ \gamma=0\end{cases}$$
La famille est libre.

5. Il y a trois vecteurs $2e_1+e_2, e_1-3e_2, e_2-e_1$ dans le plan $Vect(e_1,e_2)$ donc ces trois vecteurs forment une famille liée, en rajoutant e_4 cela ne change rien, la famille est liée.

Allez à : Exercice 3

Correction exercice 4.

Le problème est de déterminer x et y tels qu'il existe α et β vérifiant $(x,1,y,1)=\alpha u_1+\beta u_2$
$$\begin{cases}x=\alpha+\beta & L_1\\ 1=2\alpha-2\beta & L_2\\ y=3\alpha+3\beta & L_3\\ 1=4\alpha-4\beta & L_4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=x & L_1\\ 2\alpha-2\beta=1 & L_2-2L_1\\ 3\alpha+3\beta=y & L_3-3L_1\\ 4\alpha-4\beta=1 & L_4-4L_1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=x & L_1\\ -4\beta=1-2x & L_2\\ 0=y-3x & L_3\\ -8\beta=1-4x & L_4-2L_1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=x\\ -4\beta=1-2x\\ 0=y-3x\\ 0=-1\end{cases}$$
La dernière ligne entraine qu'il n'y a pas de solution.

Le problème est de déterminer x et y tels qu'il existe α et β vérifiant $(x,1,1,y)=\alpha u_1+\beta u_2$
$$\begin{cases}x=\alpha+\beta & L_1\\ 1=2\alpha-2\beta & L_2\\ 1=3\alpha+3\beta & L_3\\ y=4\alpha-4\beta & L_4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=x & L_1\\ 2\alpha-2\beta=1 & L_2-2L_1\\ 3\alpha+3\beta=1 & L_3-3L_1\\ 4\alpha-4\beta=y & L_4-4L_1\end{cases}\begin{cases}\alpha+\beta=x\\ -4\beta=1-2x\\ 0=1-3x\\ -8\beta=y-4x\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\ L_2\\ L_3\\ L_4-2L_1\end{matrix}\begin{cases}\alpha+\beta=x\\ -4\beta=1-2x\\ x=\frac{1}{3}\\ 0=y-4x-2(1-2x)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=x\\ -4\beta=1-2x\\ x=\frac{1}{3}\\ y=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=\frac{1}{3}\\ \beta=-\frac{1}{12}\\ x=\frac{1}{3}\\ y=2\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=\frac{5}{12}\\ \beta=-\frac{1}{12}\\ x=\frac{1}{3}\\ y=2\end{cases}$$
$$\left(\frac{1}{3},1,1,2\right)=\frac{5}{12}u_1-\frac{1}{12}u_2$$
Allez à : Exercice 4

Correction exercice 5.

Première méthode

$0+0+0+0=0$ donc $0_{\mathbb{R}^4}\in E$

Soit $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in E$ et $y=(y_1,y_2,y_3,y_4)\in E$, on a $x_1+x_2+x_3+x_4=0$ et $y_1+y_2+y_3+y_4=0$
$$\alpha x+\beta y=(\alpha x_1+\beta y_1,\alpha x_2+\beta y_2,\alpha x_3+\beta y_3,\alpha x_4+\beta y_4)$$
Et pour tout α et β réels
$$\alpha x_1+\beta y_1+\alpha x_2+\beta y_2+\alpha x_3+\beta y_3+\alpha x_4+\beta y_4=\alpha(x_1+x_2+x_3+x_4)+\beta(y_1+y_2+y_3+y_4)$$
$$=\alpha\times 0+\beta\times 0=0$$
Ce qui signifie que $\alpha x+\beta y\in E$, E est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Deuxième méthode

Un vecteur de E s'écrit $x=(-x_2-x_3-x_4,x_2,x_3,x_4)=x_2(-1,1,0,0)+x_3(-1,0,1,0)+x_4(-1,0,0,1)$

Donc $E=Vect\big((-1,1,0,0),(-1,0,1,0),(-1,0,0,1)\big)$, E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Pour trouver une base, il reste à montrer que $\big((-1,1,0,0),(-1,0,1,0),(-1,0,0,1)\big)$ est libre (Puisque cette famille est déjà génératrice).

$$\alpha(-1,1,0,0)+\beta(-1,0,1,0)+\gamma(-1,0,0,1)=(0,0,0,0)\Rightarrow\begin{cases}-\alpha-\beta-\gamma=0\\ \alpha=0\\ \beta=0\\ \gamma=0\end{cases}$$

Cette famille est bien libre, c'est une base de E.

Allez à : Exercice 5

Correction exercice 6.

Déjà, une famille de 5 vecteurs dans un espace de dimension 4 est liée, mais cela ne donne pas la (ou les) relation(s) reliant ces vecteurs.

$$\alpha(1,1,1,1)+\beta(1,2,3,4)+\gamma(3,1,4,2)+\delta(10,4,13,7)+\epsilon(1,7,8,14)=(0,0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\end{matrix}\begin{cases}\alpha+\beta+3\gamma+10\delta+\epsilon=0\\ \alpha+2\beta+\gamma+4\delta+7\epsilon=0\\ \alpha+3\beta+4\gamma+13\delta+8\epsilon=0\\ \alpha+4\beta+2\gamma+7\delta+14\epsilon=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2-L_1\\L_3-L_1\\L_4-L_1\end{matrix}\begin{cases}\alpha+\beta+3\gamma+10\delta+\epsilon=0\\ \beta-2\gamma-6\delta+6\epsilon=0\\ 2\beta+\gamma+3\delta+7\epsilon=0\\ 3\beta-\gamma-3\delta+13\epsilon=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3-2L_2\\L_4-3L_2\end{matrix}\begin{cases}\alpha+\beta+3\gamma+10\delta+\epsilon=0\\ \beta-2\gamma-6\delta+6\epsilon=0\\ 5\gamma+15\delta-5\epsilon=0\\ 5\gamma+15\delta-5\epsilon=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta+3\gamma+10\delta+\epsilon=0\\ \beta-2\gamma-6\delta+6\epsilon=0\\ \gamma+3\delta-\epsilon=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta+3\gamma+10\delta+\epsilon=0\\ \beta-2\gamma-6\delta+6\epsilon=0\\ \gamma=-3\delta+\epsilon\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-\beta-3(-3\delta+\epsilon)-10\delta-\epsilon\\ \beta=2(-3\delta+\epsilon)+6\delta-6\epsilon\\ \gamma=-3\delta+\epsilon\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=4\epsilon-3(-3\delta+\epsilon)-10\delta-\epsilon\\ \beta=-4\epsilon\\ \gamma=-3\delta+\epsilon\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-\delta\\ \beta=-4\epsilon\\ \gamma=-3\delta+\epsilon\end{cases}$$

Si on prends $\delta=1$ et $\epsilon=0$, alors $\alpha=-1$, $\beta=0$ et $\gamma=-3$, ce qui donne

$$-v_1-3v_3+v_4=0_{\mathbb{R}^4}$$

Si on prends $\delta=0$ et $\epsilon=1$, alors $\alpha=0$, $\beta=-4$ et $\gamma=1$, ce qui donne

$$-4v_2+v_3+v_5=0_{\mathbb{R}^4}$$

Autre façon de voir les choses :

$\alpha(1,1,1,1)+\beta(1,2,3,4)+\gamma(3,1,4,2)+\delta(10,4,13,7)+\epsilon(1,7,8,14)=(0,0,0,0)$

$$\Leftrightarrow\alpha v_1+\beta v_2+\gamma v_3+\delta v_4+\epsilon v_5=0_{\mathbb{R}^4}\Leftrightarrow-\delta v_1-4\epsilon v_2+(-3\delta+\epsilon)v_3+\delta v_4+\epsilon v_5=0_{\mathbb{R}^4}\Leftrightarrow\delta(-v_1-3v_3+v_4)+\epsilon(-4v_2+v_3+v_5)v_2=0_{\mathbb{R}^4}$$

Cette dernière relation étant vraie pour tout δ et pour tout ϵ, on retrouve les deux relations.

Ce ne sont pas les seules relations entre ces vecteurs, si on fait la somme ou la différence, on trouve d'autres relations

$v_4=v_1+3v_3$ et $v_5=4v_2-v_3$

$$Vect(v_1,v_2,v_3,v_4,v_5)=Vect(v_1,v_2,v_3,v_1+3v_3,4v_2-v_3)=Vect(v_1,v_2,v_3)$$

Il reste à montrer que (v_1,v_2,v_3)est libre, ce qui est quasi évident puisqu'il suffit de refaire le calcul ci-dessus avec $\delta=\epsilon=0$ et alors $\begin{cases}\alpha=-\delta\\ \beta=-4\epsilon\\ \gamma=-3\delta+\epsilon\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=0\\ \beta=0\\ \gamma=0\end{cases}$, cela montre que (v_1,v_2,v_3) est libre.

Allez à : Exercice 6

Correction exercice 7.

$$b\in Vect(v_1,v_2,v_3,v_4,v_5)=Vect(v_1,v_2,v_3)$$

D'après l'exercice précédent.

$b\in Vect(v_1,v_2,v_3)$ $\Leftrightarrow$il existe α, β et γ tels que $b=\alpha v_1+\beta v_2+\gamma v_3$

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix}\begin{cases} \alpha+\beta+3\gamma=b_1 \\ \alpha+2\beta+\gamma=b_2 \\ \alpha+3\beta+4\gamma=b_3 \\ \alpha+4\beta+2\gamma=b_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2-L_1 \\ L_3-L_1 \\ L_4-L_1 \end{matrix}\begin{cases} \alpha+\beta+3\gamma=b_1 \\ \beta-2\gamma=b_2-b_1 \\ 2\beta+\gamma=b_3-b_1 \\ 3\beta-\gamma=b_4-b_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3-2L_2 \\ L_4-3L_2 \end{matrix}\begin{cases} \alpha+\beta+3\gamma=b_1 \\ \beta-2\gamma=b_2-b_1 \\ 5\gamma=b_3-b_1-2(b_2-b_1) \\ 5\gamma=b_4-b_1-3(b_2-b_1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4-L_3 \end{matrix}\begin{cases} \alpha+\beta+3\gamma=b_1 \\ \beta-2\gamma=b_2-b_1 \\ 5\gamma=b_3-b_1-2(b_2-b_1) \\ 0=b_4-b_1-2(b_2-b_1)-\big(b_3-b_1-2(b_2-b_1)\big) \end{cases}$$

$$0=b_4-b_1-3(b_2-b_1)-\big(b_3-b_1-2(b_2-b_1)\big) \Leftrightarrow b_1-b_2-b_3+b_4=0$$

$$b\in Vect(v_1,v_2,v_3,v_4,v_5) \Leftrightarrow b_1-b_2-b_3+b_4=0$$

On peut constater que les composantes de v_1, v_2 et v_3 vérifient $b_1-b_2-b_3+b_4=0$

Allez à : Exercice 7

Correction exercice 8.

1.

$$\alpha v_1+2\beta v_2+\gamma v_3=0_E \Rightarrow \begin{cases} \alpha=0 \\ 2\beta=0 \\ \gamma=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=0 \\ \beta=0 \\ \gamma=0 \end{cases}$$

2. Une sous famille d'une famille libre est libre.

3.

$$2v_1-(2v_1+v_4)+v_4=0_{\mathbb{R}^n}$$

Il existe une combinaison linéaire non identiquement nulle de ces trois vecteurs, la famille est liée.

4.

$$\alpha(3v_1+v_3)+\beta v_3+\gamma(v_2+v_3)=0_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow 3\alpha v_1+\gamma v_2+(\alpha+\beta+\gamma)v_3=0_E \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha=0 \\ \gamma=0 \\ \alpha+\beta+\gamma=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha=0 \\ \beta=0 \\ \gamma=0 \end{cases}$$

La famille est libre.

5. Il y a trois vecteurs $2v_1+v_2, v_1-3v_2, v_2-v_1$ dans le plan $Vect(v_1,v_2)$ donc ces trois vecteurs forment une famille liée, en rajoutant v_4 cela ne change rien, la famille est liée.

Allez à : Exercice 8

Correction exercice 9.

Comparer deux ensembles signifie que l'on doit trouver si l'un est inclus dans l'autre (ou réciproquement) ou si les ensemble sont égaux.

On va d'abord caractériser F à l'aide d'une (ou plusieurs) équation cartésienne, ensuite il sera simple de savoir si les vecteurs qui engendrent G sont dans F.

$u=(x,y,z,t)\in F \Leftrightarrow$ il existe α,β,γ réels tels que $u=\alpha(1,0,1,1)+\beta(-1,-2,3,-1)+\gamma(-5,-3,1,5)$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix}\begin{cases} \alpha-\beta-5\gamma=x \\ -2\beta-3\gamma=y \\ \alpha+3\beta+\gamma=z \\ \alpha-\beta+5\gamma=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3-L_1 \\ L_4-L_1 \end{matrix}\begin{cases} \alpha-\beta-5\gamma=x \\ -2\beta-3\gamma=y \\ 4\beta+6\gamma=-x+z \\ 10\gamma=-x+t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3+2L_1 \\ L_4 \end{matrix}\begin{cases} \alpha-\beta-5\gamma=x \\ -2\beta-3\gamma=y \\ 0=-x+z+2y \\ 10\gamma=-x+t \end{cases}$$

α,β,γsont donnés par les équations L_1, L_2 et L_4 donc

$$F=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4, -x+2y+z=0\}$$

$$-(-1)+2(-1)+1=0 \Rightarrow (-1,-1,1,-1)\in F$$

$$-4+2\times 1+2=0 \Rightarrow (4,1,2,4)\in F$$

Cela montre que $G\subset F$

Manifestement $\dim(G)=2$ car les deux vecteurs qui engendrent G ne sont pas colinéaires (donc ils forment une base de G).

Si on en savait plus on saurait que $\dim(F)=3$, mais on n'est pas censé le savoir.

Il faut montrer que les trois vecteurs qui engendrent F sont libres, ils formeront une base et la dimension de F sera 3.
On reprend calcul de $u=\alpha(1,0,1,1)+\beta(-1,-2,3,-1)+\gamma(-5,-3,1,5)$ avec $u=(0,0,0,0)$
On trouve

$$\begin{cases}\alpha-\beta-5\gamma=x\\ -2\beta-3\gamma=y\\ 0=-x+z+2y\\ 10\gamma=-x+t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha-\beta-5\gamma=0\\ -2\beta-3\gamma=0\\ 0=-0+0+2\times 0\\ 10\gamma=-0+0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=0\\ \beta=0\\ \gamma=0\end{cases}$$

C'est bon, $\dim(F)=3$.

$$\begin{cases}G\subset F\\ \dim(G)<\dim(F)\end{cases}\Rightarrow G\subsetneq F$$

Autrement dit G est inclus dans F mais G n'est pas égal à F
Allez à : Exercice 9

Correction exercice 10.

1.

$$(v_1-v_2)+(v_2-v_3)+(v_3-v_4)+\cdots+(v_{n-1}-v_n)+(v_n-v_1)=0_{\mathbb{R}^n}$$

Cette famille est liée.

2. Si $n=2p+1$

$$\alpha_1(v_1+v_2)+\alpha_2(v_2+v_3)+\alpha_3(v_3+v_4)+\cdots+\alpha_{2p}\left(v_{2p}+v_{2p+1}\right)+\alpha_{2p+1}\left(v_{2p+1}+v_1\right)=0_{\mathbb{R}^{2p+1}}$$
$$\Leftrightarrow\left(\alpha_1+\alpha_{2p+1}\right)v_1+(\alpha_1+\alpha_2)v_2+(\alpha_2+\alpha_3)v_3+\cdots+\left(\alpha_{2p-1}+\alpha_{2p}\right)v_{2p}+\left(\alpha_{2p}+\alpha_{2p+1}\right)v_{2p+1}$$
$$=0_{\mathbb{R}^{2p+1}}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_1+\alpha_{2p+1}=0\\ \alpha_1+\alpha_2=0\\ \alpha_2+\alpha_3=0\\ \vdots\\ \alpha_{2p-1}+\alpha_{2p}=0\\ \alpha_{2p}+\alpha_{2p+1}=0\end{cases}\Rightarrow\alpha_{2p+1}=-\alpha_1=\alpha_2=-\alpha_3=\cdots=\alpha_{2p}=-\alpha_{2p+1}$$

Donc $\alpha_{2p+1}=0$ et on en déduit que pour tout $i\in\{1,2,\dots,2p\}$, $\alpha_i=0$.
La famille est libre.
Si $n=2p$

$$1\times(v_1+v_2)-1\times(v_2+v_3)+1\times(v_3+v_4)-\cdots+1\times\left(v_{2p-1}+v_{2p}\right)-1\times\left(v_{2p}+v_1\right)$$
$$=(1-1)v_1+(1-1)v_2+(-1+1)v_3+(1-1)v_4+\cdots(-1+1)v_{2p-1}+(1-1)v_{2p}=0_{\mathbb{R}^n}$$

La famille est liée
Pour s'en convaincre, on pourra regarder plus précisément les cas $n=3$ et $n=4$.

3.

$$\alpha_1v_1+\alpha_2(v_1+v_2)+\alpha_3(v_1+v_2+v_3)+\cdots+\alpha_{n-1}(v_1+v_2+\cdots+v_{n-1})+\alpha_n(v_1+\cdots+v_n)$$
$$=0_{\mathbb{R}^n}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_n=0\\ \alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_n=0\\ \alpha_3+\cdots+\alpha_n=0\\ \vdots\\ \alpha_{n-1}+\alpha_n=0\\ \alpha_n=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_1=0\\ \alpha_2=0\\ \alpha_3=0\\ \vdots\\ \alpha_{n-1}=0\\ \alpha_n=0\end{cases}$$

La famille est libre.
Allez à : Exercice 10

Correction exercice 11.

$$c=2a-b\in Vect(a,b)=E$$
$$d=a+3b\in Vect(a,b)=E$$

Donc $F\subset E$, or a et b ne sont pas proportionnels donc (a,b) est une base de E et $\dim(E)=2$, de même c et d ne sont pas proportionnels donc (c,d) est une base de F et $\dim(F)=2$.
J'ai passé sous silence que (a,b) est une famille génératrice de E et que (c,d) est une famille génératrice de F.

$$\begin{cases} E \subset F \\ \dim(E) = \dim(F) \end{cases} \Rightarrow E = F$$

Il y a d'autre façon de faire, par exemple en trouvant pour E et F une équation cartésienne caractérisant ces espaces.

Allez à : Exercice 11

Correction exercice 12.

On cherche x, y, α et β tel que :

$$(-2,x,y,3) = \alpha(1,-1,1,2) + \beta(-1,2,3,1) \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \begin{cases} \alpha - \beta = -2 \\ -\alpha + 2\beta = x \\ \alpha + 3\beta = y \\ 2\alpha + \beta = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 + L_1 \\ L_3 - L_1 \\ L_4 - 2L_1 \end{matrix} \begin{cases} \alpha - \beta = -2 \\ \beta = x - 2 \\ 4\beta = y + 2 \\ 3\beta = 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = -2 \\ \beta = x - 2 \\ 4\beta = y + 2 \\ \beta = \frac{7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{3} \\ x = \frac{13}{3} \\ y = \frac{22}{3} \\ \beta = \frac{7}{3} \end{cases}$$

La réponse est oui.

Allez à : Exercice 12

Correction exercice 13.

1.

Première méthode

D'abord on remarque que $(1,1,0,0) = u_1 + u_2$ que $(-1,1,-4,2) = u_1 - u_2$ et que $u_3 = 2u_1 + 3u_2$

Donc

$$\begin{aligned} Vect\big((1,1,0,0),(-1,1,-4,2)\big) &= Vect(u_1 - u_2, u_1 + u_2) = Vect(u_1 - u_2 + u_1 + u_2, u_1 + u_2) \\ &= Vect(2u_1, u_1 + u_2) = Vect(u_1, u_1 + u_2) = Vect(u_1, u_2) \end{aligned}$$

Et

$$Vect(u_1,u_2,u_3) = Vect(u_1,u_2,2u_1 + 3u_3) = Vect(u_1,u_2)$$

On a bien

$$Vect(u_1,u_2,u_3) = Vect\big((1,1,0,0),(-1,1,-4,2)\big)$$

Deuxième méthode

On cherche une (ou plusieurs) équation cartésien caractérisant $E = Vect\big((1,1,0,0),(-1,1,-4,2)\big)$

$u = (x,y,z,t) \in E \Leftrightarrow$ il existe α et β tels que $(x,y,z,t) = \alpha(1,1,0,0) + \beta(-1,1,-4,2)$

$$(x,y,z,t) = \alpha(1,1,0,0) + \beta(-1,1,-4,2) \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \begin{cases} \alpha - \beta = x \\ \alpha + \beta = y \\ -4\beta = z \\ 2\beta = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - L_1 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \begin{cases} \alpha - \beta = x \\ 2\beta = -x + y \\ -4\beta = z \\ 2\beta = t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 + 2L_2 \\ L_4 - L_2 \end{matrix} \begin{cases} \alpha - \beta = x \\ 2\beta = -x + y \\ 0 = z - 2x + 2y \\ 0 = t + x - y \end{cases}$$

Donc $E = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, -2x + 2y + z = 0 \ \ et \ \ x - y + t = 0\}$

$$-2 \times 0 + 2 \times 1 - 2 = 0 \ \ et \ \ 0 - 1 - 1 = 0 \Rightarrow u_1 \in E$$
$$-2 \times 1 + 2 \times 0 + 2 = 0 \ \ et \ \ 1 - 0 - 1 = 0 \Rightarrow u_2 \in E$$
$$-2 \times 3 + 2 \times 2 + 2 = 0 \ \ et \ \ 3 - 2 - 1 = 0 \Rightarrow u_3 \in E$$

Donc $Vect(u_1,u_2,u_3) \subset E$,

$(1,1,0,0)$ et $(-1,1,-4,2)$ ne sont pas colinéaires, ils forment une famille libre et génératrice de E, c'est une base et donc $\dim(E) = 2$, u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires, ils forment une famille libre de $Vect(u_1,u_2,u_3)$, donc $\dim\big(Vect(u_1,u_2,u_3)\big) \geq 2$, mais $Vect(u_1,u_2,u_3) \subset E$ donc $\dim\big(Vect(u_1,u_2,u_3)\big) \leq \dim(E) = 2$

On a par conséquent $\dim\big(Vect(u_1,u_2,u_3)\big)=2=\dim(E)$ et comme $Vect(u_1,u_2,u_3)\subset E$, on a alors
$$Vect(u_1,u_2,u_3)=E$$

2.
$$(1,1,0,0)=u_1+u_2\in Vect(u_1,u_2)$$
$$u_2-u_3=(2,2,0,0)=2(1,1,0,0)$$
$$(1,1,0,0)=\frac{1}{2}u_2-\frac{1}{2}u_3\in Vect(u_2,u_3,u_4)$$
$$(1,1,0,0)\in Vect(u_1,u_2)\cap Vect(u_2,u_3,u_4)$$

3. $u_2\in Vect(u_1,u_2)\cap Vect(u_2,u_3,u_4)$ donc $\dim\big(Vect(u_1,u_2)\cap Vect(u_2,u_3,u_4)\big)\geq 1$
Le tout est de savoir si $u_1\in Vect(u_2,u_3,u_4)$?
Or au 2. on a vu que $(1,1,0,0)\notin Vect(u_2,u_3,u_4)$
Si $u_1\in Vect(u_2,u_3,u_4)$ alors $(1,1,0,0)=u_1+u_2\in Vect(u_2,u_3,u_4)$ ce qui est faux, donc
$$u_1\notin Vect(u_2,u_3,u_4)$$
Par conséquent
$$\dim\big(Vect(u_1,u_2)\cap Vect(u_2,u_3,u_4)\big)=1$$

4.
Première méthode
$$\begin{aligned}Vect(u_1,u_2)+Vect(u_2,u_3,u_4)&=Vect(u_1,u_2,u_2,u_3,u_4)=Vect(u_1,u_2,u_3,u_4)\\&=Vect(u_1,u_2,2u_1+3u_2,u_4)=Vect(u_1,u_2,u_4)\subsetneq\mathbb{R}^4\end{aligned}$$
En effet $\dim\big(Vect(u_1,u_2,u_4)\big)\leq 3$
Deuxième méthode si on n'a pas vu que $u_3=2u_1+3u_2$
$$\begin{aligned}Vect(u_1,u_2)+Vect(u_2,u_3,u_4)&=Vect(u_1,u_2,u_2,u_3,u_4)=Vect(u_1,u_2,u_3,u_4)\\&=Vect(u_1,u_2,u_3)+Vect(u_4)=Vect\big((1,1,0,0),(-1,1,-4,2)\big)+Vect(u_4)\end{aligned}$$
D'après la première question.
Donc
$$\begin{aligned}Vect(u_1,u_2)+Vect(u_2,u_3,u_4)&=Vect\big((1,1,0,0),(-1,1,-4,2)\big)+Vect(u_4)\\&=Vect\big((1,1,0,0),(-1,1,-4,2),u_4\big)\subsetneq\mathbb{R}^4\end{aligned}$$
Pour les mêmes raisons que dans la première méthode.

5.
$$Vect(u_1,u_2,u_3)=Vect\big((1,1,0,0),(-1,1,-4,2)\big)$$
$$\Rightarrow\dim\big(Vect(u_1,u_2,u_3)\big)=\dim\Big(Vect\big((1,1,0,0),(-1,1,-4,2)\big)\Big)=2$$
Comme u_4 et u_5 ne sont pas colinéaires, ils forment une base de $Vect(u_4,u_5)$ et $\dim\big(Vect(u_4,u_5)\big)=2$
Il reste à vérifier que l'intersection de ces sous-espaces vectoriels est réduite au vecteur nul, ce qui revient au même que de montrer que $\big((1,1,0,0),(-1,1,-4,2),u_4,u_5\big)$ est libre (mais alors comme le nombre de vecteurs est 4 on pourrait en déduire cette famille est une base de $\mathbb{R}^4$ ce qui suffit à prouver que la somme de ces deux sous-espaces vectoriels est directe et qu'elle vaut $\mathbb{R}^4$).
$$\alpha(1,1,0,0)+\beta(-1,1,-4,2)+\gamma u_4+\delta u_5=0_{\mathbb{R}^4}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha-\beta=0\\\alpha+\beta=0\\-4\beta+\gamma=0\\2\beta+\delta=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=0\\\beta=0\\\gamma=0\\\delta=0\end{cases}$$
C'est quasiment évident.
La famille est libre, elle a 4 vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 4, c'est une base de $\mathbb{R}^4$, donc
$$Vect(u_1,u_2,u_3)\oplus Vect(u_4,u_5)=\mathbb{R}^4$$
Autre méthode
$$Vect(u_1,u_2,u_3)=Vect\big((1,1,0,0),(-1,1,-4,2)\big)$$
$$\Rightarrow\dim\big(Vect(u_1,u_2,u_3)\big)=\dim\Big(Vect\big((1,1,0,0),(-1,1,-4,2)\big)\Big)=2$$
Comme u_4 et u_5 ne sont pas colinéaires, ils forment une base de $Vect(u_4,u_5)$ et $\dim\big(Vect(u_4,u_5)\big)=2$
(Çà, c'est pareil)
A la question 1°) on a montré que

$$Vect(u_1, u_2, u_3) = E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, -2x + 2y + z = 0 \ \ et \ \ x - y + t = 0\}$$

Il n'y a qu'à montrer que les composantes de u_4 et de u_5 ne vérifient pas ces équations (c'est évident) pour en déduire que $u_4 \notin E$ et que $u_5 \notin E$ et que par conséquent $E \cap Vect(u_4, u_5) = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$

La somme des dimensions valant 4 (voir ci-dessus) la somme est directe et vaut $\mathbb{R}^4$

$$Vect(u_1, u_2, u_3) \oplus Vect(u_4, u_5) = \mathbb{R}^4$$

Allez à : Exercice 13

Correction exercice 14.

1. $\dim\big(Vect(v_1, v_2)\big) \leq 2$ et $\dim\big(Vect(v_3)\big) = 1$ donc la somme des dimensions n'est pas 4, ces espaces sont peut-être en somme directe mais cette somme n'est pas $\mathbb{R}^4$, ils ne sont donc pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

Remarque : en fait $\dim\big(Vect(v_1, v_2)\big) = 2$ car v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires.

2.
D'abord on va regarder si la famille (v_1, v_3, v_4) est libre, si c'est le cas la réponse sera non car la dimension de cet espace sera 3 et celle de $Vect(v_2, v_5)$ est manifestement 2, donc la somme des dimensions sera 5.

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_4 = 0_{\mathbb{R}^4} \Rightarrow \alpha(1,0,0,1), +\beta(0,0,1,0) + \gamma(0,0,0,1) = (0,0,0,0) \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ 0 = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

(v_1, v_3, v_4) est une famille libre qui engendre $Vect(v_1, v_3, v_4)$, c'est donc une base de cet espace donc $\dim\big(Vect(v_1, v_3, v_4)\big) = 3$, comme v_2 et v_5 ne sont pas proportionnels, (v_2, v_5) est une famille libre qui engendre $Vect(v_2, v_5)$, c'est donc une base de cet espace et $\dim\big(Vect(v_2, v_5)\big) = 2$.

$$\dim\big(Vect(v_1, v_3, v_4)\big) + \dim\big(Vect(v_2, v_5)\big) = 5 \neq \dim(\mathbb{R}^4)$$

Donc ces espace ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

3. v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires donc (v_1, v_2) est une famille libre qui engendre $Vect(v_1, v_2)$, c'est une base de cet espace et $\dim\big(\mathrm{Vect}(v_1, v_2)\big) = 2$.
Manifestement $v_5 = v_3 + v_4$, $Vect(v_3, v_4, v_5) = Vect(v_3, v_4, v_3 + v_4) = Vect(v_3, v_4)$, v_3 et v_4 ne sont pas colinéaires donc (v_3, v_4) est une famille libre qui engendre $Vect(v_3, v_4, v_5) = Vect(v_3, v_4)$ c'est donc une base de cet ensemble et $\dim\big(Vect(v_3, v_4, v_5)\big) = 2$.

$$\dim\big(Vect(v_1, v_2)\big) + \dim\big(Vect(v_3, v_4, v_5)\big) = 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$$

Il reste à montrer que l'intersection de ces espaces est réduite au vecteur nul.
Ce coup-ci je vais détailler un peu plus. Soit $u \in Vect(v_1, v_2) \cap Vect(v_3, v_4)$, il existe α, β, γ et δ réels tels que :

$$u = \alpha v_1 + \beta v_2 \ et \ u = \gamma v_3 + \delta v_4$$

Ce qui entraine que

$$\alpha v_1 + \beta v_2 = \gamma v_3 + \delta v_4 \Leftrightarrow \alpha v_1 + \beta v_2 - \gamma v_3 - \delta v_4 = 0_{\mathbb{R}^4}$$

Cela montre que
$u = 0_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow (\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (0,0,0,0) \Leftrightarrow (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est libre. Résultat que l'on utilise sans avoir à le montrer.
Mais ici, si on montre que la famille est libre, comme elle a 4 vecteurs, cela montrera que c'est une base de $\mathbb{R}^4$ et que

$$Vect(v_1, v_2) \oplus Vect(v_3, v_4) = \mathbb{R}^4$$

Mais dans cet exercice il fallait quand montrer que

$$Vect(v_3, v_4, v_5) = Vect(v_3, v_4, v_3 + v_4) = Vect(v_3, v_4)$$

On y va :

$$\alpha v_1 + \beta v_2 - \gamma v_3 - \delta v_4 = 0_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow \alpha(1,0,0,1), +\beta(0,0,1,0) - \gamma(0,1,0,0) - \delta(0,0,0,1) = (0,0,0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ -\gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha - \delta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \delta = 0 \end{cases}$$

Donc $u=\alpha v_1+\beta v_2=0_{\mathbb{R}^4}$ et $Vect(v_1,v_2)\cap Vect(v_3,v_4)=\{0_{\mathbb{R}^4}\}$
Comme la somme des dimensions est 4 on a :

$$Vect(v_1,v_2)\oplus Vect(v_3,v_4,v_5)=Vect(v_1,v_2)\oplus Vect(v_3,v_4)=\mathbb{R}^4$$

Allez à : Exercice 14

Correction exercice 15.

1. $0=2\times 0$ donc $0_{\mathbb{R}^2}\in E$.
   Soient $u=(x,y)\in E, y=2x$ et $u'=(x',y')\in E, y'=2x'$
   Pour tout λ et λ' deux réels
   $$\lambda u+\lambda' u'=(\lambda x+\lambda' x',\lambda y+\lambda' y')=(X,Y)$$
   $$Y=\lambda y+\lambda' y'=\lambda 2x+\lambda' 2x'=2(\lambda x+\lambda' x')=2X$$
   Donc $\lambda u+\lambda' u'\in E$. Ce qui montre que E est un sous-espace de $\mathbb{R}^2$.
2. Soit $u=(2,2,0)\in F$ car $y^2=2^2=2\times 2=2x$ et $z=0$
   $2u=(4,4,0)$ $y^2=4^2=16\neq 2\times 4=8$ donc $2u\notin F$ donc F n'est pas un sous-espace vectoriel.

Allez à : Exercice 15

Correction exercice 16.

1. Regardons si la famille (u_1,u_2,u_3) est libre
   $$\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\lambda_3u_3=0_{\mathbb{R}^3}\Leftrightarrow \lambda_1(1,-1,2)+\lambda_2(1,1,-1)+\lambda_3(-1,-5,7)=(0,0,0)$$
   $$\Leftrightarrow \begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3=0\\-\lambda_1+\lambda_2-5\lambda_3=0\\2\lambda_1-\lambda_2+7\lambda_3=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{matrix}L_1\\L_2+L_1\\L_3-2L_1\end{matrix}\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3=0\\2\lambda_2-6\lambda_3=0\\-3\lambda_2+9\lambda_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3=0\\\lambda_2=3\lambda_3\end{cases}$$
   $$\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_1+3\lambda_3-\lambda_3=0\\\lambda_2=3\lambda_3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_1=-2\lambda_3\\\lambda_2=3\lambda_3\end{cases}$$
   Donc la famille n'est pas libre, de plus en prenant $\lambda_3=1$, $\lambda_1=-2$ et $\lambda_2=3$, par conséquent
   $$-2u_1+3u_2+u_3=0_{\mathbb{R}^3}$$
   Autrement dit
   $$u_3=-2u_1+3u_2$$
   $$E=Vect(u_1,u_2,u_3)=Vect(u_1,u_2,-2u_1+3u_2)=Vect(u_1,u_2)$$
   Comme les vecteurs u_1 et u_2 ne sont pas proportionnels, ils forment une famille libre et génératrice de E, c'est une base de E.
2. $0+0+0=0$, par conséquent $0_{\mathbb{R}^3}\in F$
   Soient $u=(x,y,z)\in F$ et $u'(=x',y',z')\in F$, on a donc $x+y+z=0$ et $x'+y'+z'=0$
   Soient λ et λ' deux réels quelconques
   $$\lambda u+\lambda' u'=(\lambda x+\lambda' x',\lambda y+\lambda' y',\lambda z+\lambda' z')=(X,Y,Z)$$
   $$X+Y+Z=(\lambda x+\lambda' x')+(\lambda y+\lambda' y')+(\lambda z+\lambda' z')=\lambda(x+y+z)+\lambda(x'+y'+z')$$
   $$=\lambda\times 0+\lambda'\times 0=0$$
   Ce qui montre que $\lambda u+\lambda' u'\in F$.
   Finalement F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
3. $u=(x,y,z)\in F\Leftrightarrow x+y+z=0\Leftrightarrow z=-x-y$
   Donc $u=(x,y,-x-y)=x(1,0,-1)+y(0,1,-1)$, on pose $a=(1,0,-1)$ et $b=(0,1,-1)$
   (a,b) est une famille génératrice de F et comme ces deux vecteurs ne sont pas proportionnels ils forment une famille libre, c'est une base de F
4. Soit $u\in E\cap F$, il existe α,β,γ et δ tels que
   $$\begin{cases}u=\alpha u_1+\beta u_2\\u=\gamma a+\beta b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=\alpha u_1+\beta u_2\\u=\gamma a+\delta b\\\alpha u_1+\beta u_2=\gamma a+\beta b\end{cases}$$

$$\alpha u_1+\beta u_2=\gamma a+\beta b\Leftrightarrow \alpha(1,-1,2)+\beta(1,1,-1)=\gamma(1,0,-1)+\delta(0,1,-1)$$

$$\Leftrightarrow \alpha(1,-1,2)+\beta(1,1,-1)-\gamma(1,0,-1)-\delta(0,1,-1)\Leftrightarrow \begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}\begin{cases}\alpha+\beta-\gamma=0\\-\alpha+\beta-\delta=0\\2\alpha+\beta+\gamma+\delta=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix}L_1\\L_2+L_1\\L_3-2L_1\end{matrix}\begin{cases}\alpha+\beta-\gamma=0\\2\beta-\gamma-\delta=0\\-\beta+3\gamma+\delta=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{matrix}L_1\\L_2\\2L_3+L_3\end{matrix}\begin{cases}\alpha+\beta-\gamma=0\\2\beta-\gamma-\delta=0\\5\gamma+\delta=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta-\gamma=0\\2\beta-\gamma-\delta=0\\\delta=-5\gamma\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta-\gamma=0\\2\beta-\gamma+5\gamma=0\\\delta=-5\gamma\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta-\gamma=0\\\beta=-2\gamma\\\delta=-5\gamma\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=3\gamma\\\beta=-2\gamma\\\delta=-5\gamma\end{cases}$$

Il reste à remplacer α,β et δ dans $u=\alpha u_1+\beta u_2$ ou dans $u=\gamma a+\delta b$

$$u=\alpha u_1+\beta u_2=3\gamma(1,-1,2)-2\gamma(1,1,-1)=\gamma(1,-5,4)$$

En utilisant $u=\gamma a+\delta b$ on retrouve le même résultat

$$u=\gamma a+\delta b=\gamma(1,0,-1)-5\gamma(0,1,-1)=\gamma(1,-5,4)$$

On pose $c=(1,-5,4)$ et $E\cap F=Vect(c)$

Allez à : Exercice 16

Correction exercice 17.

1. $0+0=0\Rightarrow 0_{\mathbb{R}^3}\in E$

   Soit $u=(x,y,z)\in E$, $y+z=0$ et soit $u'\in E$, $y'+z'=0$, pour tout $\lambda,\lambda'\in\mathbb{R}$

   $$\lambda u+\lambda' u'=(\lambda x+\lambda' x',\lambda y+\lambda' y',\lambda z+\lambda' z')$$

   Comme

   $$(\lambda y+\lambda' y')+(\lambda z+\lambda' z')=\lambda(y+z)+\lambda'(y'+z')=\lambda\times 0=\lambda'\times 0=0$$
   $$\lambda u+\lambda' u'\in E$$

   E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

   Soit $u=(x,y,z)\in E$, $y+z=0\Leftrightarrow z=-y$, donc

   $$u\in E\Leftrightarrow u=(x,y,-y)=x(1,0,0)+y(0,1,-1)$$
   $$E=vect(e_1,e_2-e_3)$$

   e_1 et e_2-e_3 ne sont pas proportionnels, ils forment une famille libre et génératrice de E, c'est une base de E.

2.
   $$\alpha u_1+\beta u_2+\gamma u_3=0_{\mathbb{R}^3}\Leftrightarrow \alpha(1,1,1)+\beta(2,-2,-1)+\gamma(1,1,-1)=(0,0,0)\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+2\beta+\gamma=0\\\alpha-2\beta+\gamma=0\\\alpha-\beta-\gamma=0\end{cases}$$

   $$\Leftrightarrow \begin{matrix}L_1\\L_2-L_1\\L_3-L_1\end{matrix}\begin{cases}\alpha+2\beta+\gamma=0\\-4\beta=0\\-3\beta-2\gamma=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=0\\\beta=0\\\gamma=0\end{cases}$$

   La famille (u_1,u_2,u_3) est libre.

Première méthode

Si $u_3\in F$ alors ils existent α et β réels tels que $u_3=\alpha u_1+\beta u_2$, ce qui signifie que (u_1,u_2,u_3) est liée, ce qui est faux, donc $u_3\notin F$

Deuxième méthode

$$u_3\in F\Leftrightarrow \exists\alpha,\beta\in\mathbb{R},u_3=\alpha u_1+\beta u_2\Leftrightarrow\exists\alpha,\beta\in\mathbb{R},(1,1,-1)=\alpha(1,1,1)+\beta(2,-2,-1)$$

$$\Leftrightarrow\exists\alpha,\beta\in\mathbb{R},\begin{cases}1=\alpha+2\beta\\1=\alpha-2\beta\\-1=\alpha-\beta\end{cases}\Leftrightarrow\exists\alpha,\beta\in\mathbb{R},\begin{matrix}L_1\\L_2-L_1\\L_3-L_1\end{matrix}\begin{cases}1=\alpha+2\beta\\0=-4\beta\\-2=-3\beta\end{cases}$$

Les deux dernières lignes montrent que ce n'est pas possible, par conséquent $u_3\notin F$

3. $u_3=(1,1,-1)$, $1+(-1)=0\Leftrightarrow u_3\in E$.
4.

$$u=(x,y,z)\in E\cap F\Leftrightarrow\begin{cases}u\in E\\u\in F\end{cases}\Leftrightarrow\exists\alpha,\beta\in\mathbb{R},\begin{cases}y+z=0\\u=\alpha u_1+\beta u_2\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\exists\alpha,\beta\in\mathbb{R},\quad\begin{cases}y+z=0\\(x,y,z)=\alpha(1,1,1)+\beta(2,-2,-1)\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\exists\alpha,\beta\in\mathbb{R},\begin{cases}y+z=0\\x=\alpha+2\beta,y=\alpha-2\beta,z=\alpha-\beta\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\exists\alpha,\beta\in\mathbb{R},\begin{cases}(\alpha-2\beta)+(\alpha-\beta)=0\\x=\alpha+2\beta,y=\alpha-2\beta,z=\alpha-\beta\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\exists\alpha,\beta\in\mathbb{R},\begin{cases}\alpha=\frac{3}{2}\beta\\x=\alpha+2\beta,y=\alpha-2\beta,z=\alpha-\beta\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\exists\alpha,\beta\in\mathbb{R},\quad\begin{cases}\alpha=\frac{3}{2}\beta\\x=\frac{7}{2}\alpha,y=-\frac{1}{2}\alpha,z=\frac{1}{2}\alpha\end{cases}$$

Donc si on pose $a=(7,-1,1)$

$$E\cap F=Vect(a)$$

5. $u_4=(-1,7,5)$, $7+5\neq 0$ donc $u_4\notin E$

   $u_4\in F\Leftrightarrow(u_1,u_2,u_4)$ est liée

$$\alpha u_1+\beta u_2+\gamma u_4=0_{\mathbb{R}^3}\Leftrightarrow\alpha(1,1,1)+\beta(2,-2,-1)+\gamma(-1,7,5)=(0,0,0)\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+2\beta-\gamma=0\\\alpha-2\beta+7\gamma=0\\\alpha-\beta+5\gamma=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2-L_1\\L_3-L_1\end{matrix}\begin{cases}\alpha+2\beta+\gamma=0\\-4\beta+8\gamma=0\\-3\beta-6\gamma=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+2\beta+\gamma=0\\\beta-2\gamma=0\\\beta-2\gamma=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+4\gamma-\gamma=0\\\beta=2\gamma\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-3\gamma\\\beta=2\gamma\end{cases}$$

   La famille est liée par la relation

$$-3u_1+2u_2+u_4=0_{\mathbb{R}^3}\Leftrightarrow u_4=3u_1-2u_2$$

   Ce qui montre bien que $u_4\in F$

Allez à : Exercice 17

Correction exercice 18.

1. Première méthode

$$0+0+0=0\Rightarrow 0_{\mathbb{R}^3}\in E$$

   Soient $u=(x,y,z)\in E$ et $u'=(x',y',z')\in E$, on a $x+y+z=0$ et $x'+y'+z'=0$. Pour tout λ et λ' réels, $\lambda u+\lambda' u'=(\lambda x+\lambda' x',\lambda y+\lambda' y',\lambda z+\lambda' z')$, ce qui entraine que

$$(\lambda x+\lambda' x')+(\lambda y+\lambda' y')+(\lambda z+\lambda' z')=\lambda(x+y+z)+\lambda'(x'+y'+z')=0$$

   D'où, $\lambda u+\lambda' u'\in E$, ce qui achève de montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

   Deuxième méthode

   Comme $z=-x-y$, $u=(x,y,z)\in E\Leftrightarrow u=(x,y,-x-y)=x(1,-1,0)+y(0,1,-1)$ ce qui montre que

$$E=Vect\big((1,-1,0),(0,1,-1)\big)$$

   Et que par conséquent E est un espace vectoriel.

2. Première méthode.

   Soit $u=(x,y,z)\in E\cap F$, d'une part $x+y+z=0$ car $u\in E$ et il existe α et β, réels tels que $u=\alpha a+\beta b$ car $u\in F$. Cette dernière égalité s'écrit aussi

$$(x,y,z)=\alpha(1,-2,3)+\beta(2,1,-1)\Leftrightarrow\begin{cases}x=\alpha+2\beta\\y=-2\alpha+\beta\\z=3\alpha-\beta\end{cases}$$

   Par conséquent

$$u\in E\cap F \Leftrightarrow \begin{cases} x=\alpha+2\beta \\ y=-2\alpha+\beta \\ z=3\alpha-\beta \\ x+y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\alpha+2\beta \\ y=-2\alpha+\beta \\ z=3\alpha-\beta \\ (\alpha+2\beta)+(-2\alpha+\beta)+(3\alpha-\beta)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\alpha+2\beta \\ y=-2\alpha+\beta \\ z=3\alpha-\beta \\ 2\alpha+2\beta=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\alpha+2\beta \\ y=-2\alpha+\beta \\ z=3\alpha-\beta \\ \beta=-\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\alpha \\ y=-3\alpha \\ z=4\alpha \\ \beta=-\alpha \end{cases}$$

Cela montre qu'il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $u=\alpha(-1,-3,4)$

Autrement dit si on pose $c=(-1,-3,4)$, $E\cap F=Vect(c)$

Deuxième méthode

On cherche une ou plusieurs équations caractérisant F

$$u=(x,y,z)\in F \Leftrightarrow \exists\alpha\in\mathbb{R},\exists\beta\in\mathbb{R}, u=\alpha a+\beta b \Leftrightarrow \exists\alpha\in\mathbb{R},\exists\beta\in\mathbb{R},(x,y,z)$$
$$= \alpha(1,-2,3)+\beta(2,1,-1) \Leftrightarrow \exists\alpha\in\mathbb{R},\exists\beta\in\mathbb{R}, \begin{cases} \alpha+2\beta=x \\ -2\alpha+\beta=y \\ 3\alpha-\beta=z \end{cases} \Leftrightarrow \exists\alpha\in\mathbb{R},\exists\beta$$
$$\in\mathbb{R}, \begin{matrix} \\ L_2+2L_1 \\ L_3-3L_1 \end{matrix} \begin{cases} \alpha+2\beta=x \\ 5\beta=y+2x \\ -7\beta=z-7x \end{cases} \Leftrightarrow \exists\alpha\in\mathbb{R},\exists\beta$$
$$\in\mathbb{R}, \begin{matrix} \\ \\ 5L_3+7L_2 \end{matrix} \begin{cases} \alpha+2\beta=x \\ 5\beta=y+2x \\ 0=5(z-3x)+7(y+2x) \end{cases} \Leftrightarrow \exists\alpha\in\mathbb{R},\exists\beta$$
$$\in\mathbb{R}, \begin{matrix} \\ \\ 4L_3+5L_2 \end{matrix} \begin{cases} \alpha+2\beta=x \\ 5\beta=y+2x \\ -x+7y+5z=0 \end{cases}$$

Donc $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, -x+7y+5z=0\}$

Ensuite on cherche l'intersection

$$u=(x,y,z)\in E\cap F \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ -x+7y+5z=0 \end{cases} \Leftrightarrow L_2+L_1 \begin{cases} x+y+z=0 \\ 8y+6z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ y=-\frac{3}{4}z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-\frac{3}{4}z+z=0 \\ y=-\frac{3}{4}z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{4}z \\ y=-\frac{3}{4}z \end{cases}$$

Par conséquent $u=\left(-\frac{1}{4}z,-\frac{3}{4}z,z\right)=\frac{z}{4}(-1,-3,4)$

On trouve le même résultat.

Troisième méthode

On cherche une équation du plan F (parce que l'on se doute bien que c'est un plan). Un vecteur orthogonal à ce plan est $a\wedge b$ dont les coordonnées sont

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-3 \\ 6+1 \\ 1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Et l'ensemble des vecteurs $u=(x,y,z)$ orthogonaux à ce vecteur vérifient

$$-x+7y+5z=0$$

Puis on finit comme dans la deuxième méthode.

3. $E\cap F\neq\{0_{\mathbb{R}^3}\}$, on n'a pas $E\oplus F=\mathbb{R}^3$.
   Ou alors $\dim(E)+\dim(F)=2+2=4\neq 3=\dim(\mathbb{R}^3)$, si on a montré que E et F étaient des plans.

Allez à : Exercice 18

Correction exercice 19.

1.

$$u=(x,y,z)\in E\Leftrightarrow\begin{cases}u=(x,y,z)\\x+y-2z=0\\2x-y-z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3-2L_2\end{matrix}\begin{cases}u=(x,y,z)\\x+y-2z=0\\-3y+3z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=(x,y,z)\\x=z\\y=z\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}u=(z,z,z)=z(1,1,1)\\x=z\\y=z\end{cases}$$

Donc $E=Vect(a)$ ce qui montre que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

Autre méthode

$$\begin{cases}0+0-2\times 0=0\\2\times 0-0-0=0\end{cases}\Rightarrow 0_{\mathbb{R}^3}\in E$$

Soient $u_1=(x_1,y_1,z_1)\in E$ et $u_2=(x_2,y_2,z_2)\in E$, on a $\begin{cases}x_1+y_1-2z_1=0\\2x_1-y_1-z_1=0\end{cases}$ et $\begin{cases}x_2+y_2-2z_2=0\\2x_2-y_2-z_2=0\end{cases}$

$$\lambda_1u_1+\lambda_2u_2=(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2,\lambda_1y_1+\lambda_2y_2,\lambda_1z_1+\lambda_2z_2)$$

$$\begin{cases}(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)+(\lambda_1y_1+\lambda_2y_2)-2(\lambda_1z_1+\lambda_2z_2)=\lambda_1(x_1+y_1-2z_1)+\lambda_2(x_2+y_2-2z_2)=0\\2(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)-(\lambda_1y_1+\lambda_2y_2)-(\lambda_1z_1+\lambda_2z_2)=\lambda_1(2x_1-y_1-z_1)+\lambda_2(2x_2-y_2-z_2)=0\end{cases}$$

Ce qui montre que $\lambda_1u_1+\lambda_2u_2\in E$

Et finalement E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2. $\{a\}$ est une famille génératrice de E, ce vecteur est non nul, c'est une base de E, bref E est la droite engendrée par le vecteur a.
3.

$$1+0-1=0\Rightarrow b\in F$$
$$0+1-1=0\Rightarrow c\in F$$

b et c ne sont pas proportionnels, ils forment une famille libre de F donc $\dim(F)\geq 2$.

$(1,0,0)\notin F$ donc $F\subsetneq\mathbb{R}^3$ par conséquent $\dim(F)<\dim(\mathbb{R}^3)=3$.

On déduit de cela que $\dim(F)=2$ et que par suite la famille $\{b,c\}$ est libre (dans F) à deux éléments, c'est une base de F.

4.

$1+1-1=1\neq 0\Rightarrow a\notin Vect(b,c)$ et $\{b,c\}$ est libre donc $\{a,b,c\}$ est libre (c'est une base de $\mathbb{R}^3$, puisque cette famille a trois éléments)

5. $\{a\}$ est une base de E, $\{b,c\}$ est une base de F et $\{a,b,c\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ par conséquent

$$E\oplus F=\mathbb{R}^3$$

6. On cherche α,β,γ tels que $u=\alpha a+\beta b+\gamma c$

$$u=\alpha a+\beta b+\gamma c\Leftrightarrow(x,y,z)=\alpha(1,1,1)+\beta(1,0,1)+\gamma(0,1,1)\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}\begin{cases}\alpha+\beta=x\\\alpha+\gamma=y\\\alpha+\beta+\gamma=z\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2-L_1\\L_3-L_1\end{matrix}\begin{cases}\alpha+\beta=x\\-\beta+\gamma=-x+y\\\gamma=-x+z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-\beta+x\\\beta=\gamma+x-y\\\gamma=-x+z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=x+y-z\\\beta=-y+z\\\gamma=-x+z\end{cases}$$

$$u=(x+y-z)a+(-y+z)b+(-x+z)c$$

Allez à : Exercice 19

Correction exercice 20.

1°)

$$u=(x,y,z)\in E\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}u=(x,y,z)\\2x+y-z=0\\x+2y+z=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\begin{array}{c}L_1\\L_2\\2L_3-L_2\end{array}\left\{\begin{array}{l}u=(x,y,z)\\x+2y+z=0\\3y+3z=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}u=(x,y,z)\\x=-z\\y=-z\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}u=(z,z,z)=-z(1,-1,1)\\x=-z\\y=-z\end{array}\right.$$

Donc $E=Vect(a)$ avec $a=(1,-1,1)$ ce qui montre que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

Autre méthode

$$\left\{\begin{array}{l}2\times 0+0-0=0\\0+2\times 0+0=0\end{array}\right.\Rightarrow 0_{\mathbb{R}^3}\in E$$

Soient $u_1=(x_1,y_1,z_1)\in E$ et $u_2=(x_2,y_2,z_2)\in E$, on a $\left\{\begin{array}{l}2x_1+y_1-z_1=0\\x_1+2y_1+z_1=0\end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{l}2x_2+y_2-z_2=0\\x_2+2y_2+z_2=0\end{array}\right.$

$$\lambda_1u_1+\lambda_2u_2=(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2,\lambda_1y_1+\lambda_2y_2,\lambda_1z_1+\lambda_2z_2)$$

$$\left\{\begin{array}{l}2(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)+(\lambda_1y_1+\lambda_2y_2)+(\lambda_1z_1+\lambda_2z_2)=\lambda_1(2x_1+y_1-z_1)+\lambda_2(2x_2+y_2-z_2)=0\\(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)+2(\lambda_1y_1+\lambda_2y_2)+(\lambda_1z_1+\lambda_2z_2)=\lambda_1(x_1+2y_1+z_1)+\lambda_2(x_2+2y_2+z_2)=0\end{array}\right.$$

Ce qui montre que $\lambda_1u_1+\lambda_2u_2\in E$

Et finalement E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2°) $\{a\}$ est une famille génératrice de E, ce vecteur est non nul, c'est une base de E, bref E est la droite engendrée par le vecteur a.

3°)

$$2\times(-2)-3\times(-1)+1=0\Rightarrow b\in F$$
$$2\times(-1)-3\times 0+2=0\Rightarrow c\in F$$

b et c ne sont pas proportionnels, ils forment une famille libre de F donc $\dim(F)\geq 2$.

$(1,0,0)\notin F$ donc $F\subsetneq\mathbb{R}^3$ par conséquent $\dim(F)<\dim(\mathbb{R}^3)=3$.

On déduit de cela que $\dim(F)=2$ et que par suite la famille $\{b,c\}$ est libre (dans F) à deux éléments, c'est une base de F.

4°)

$2\times 1-3\times(-1)+1=6\neq 0\Rightarrow a\notin Vect(b,c)$ et $\{b,c\}$ est libre donc $\{a,b,c\}$ est libre (c'est une base de $\mathbb{R}^3$, puisque cette famille a trois éléments)

5°) $\{a\}$ est une base de E, $\{b,c\}$ est une base de F et $\{a,b,c\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ par conséquent

$$E\oplus F=\mathbb{R}^3$$

6°) On cherche α,β,γ tels que $u=\alpha a+\beta b+\gamma c$

$$u=\alpha a+\beta b+\gamma c\Leftrightarrow(x,y,z)=\alpha(1,-1,1)+\beta(-2,-1,1)+\gamma(-1,0,2)\Leftrightarrow\begin{array}{c}L_1\\L_2\\L_3\end{array}\left\{\begin{array}{l}\alpha-2\beta-\gamma=x\\-\alpha-\beta\qquad=y\\\alpha+\beta+2\gamma=z\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\begin{array}{c}L_1\\L_2+L_1\\L_3-L_1\end{array}\left\{\begin{array}{l}\alpha-2\beta-\gamma=x\\-3\beta-\gamma=x+y\\3\beta+3\gamma=-x+z\end{array}\right.\Leftrightarrow\begin{array}{c}\\ \\L_3+L_2\end{array}\left\{\begin{array}{l}\alpha=2\beta+\gamma+x\\-3\beta=\gamma+x+y\\2\gamma=y+z\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\alpha=2\beta+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z+x\\-3\beta=\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z+x+y=x+\frac{3}{2}y+\frac{1}{2}z\\\gamma=\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\alpha=2\left(-\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}y-\frac{1}{6}z\right)+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z+x\\\beta=-\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}y-\frac{1}{6}z\\\gamma=\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\alpha=\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}y+\frac{1}{6}z\\\beta=-\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}y-\frac{1}{6}z\\\gamma=\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z\end{array}\right.$$

$$u=\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}y+\frac{1}{6}z\right)a+\left(-\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}y-\frac{1}{6}z\right)b+\left(\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z\right)c$$

Allez à : Exercice 20

Correction exercice 21.

1.

$$u=(x,y,z)\in E\Leftrightarrow\begin{cases}u=(x,y,z)\\x+y-z=0\\x-y-z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3-L_2\end{matrix}\begin{cases}u=(x,y,z)\\x+y-z=0\\y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=(x,y,z)\\x=z\\y=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}u=(z,0,z)=z(1,0,1)\\x=z\\y=0\end{cases}$$

Donc $E=Vect(a)$ ce qui montre que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

Autre méthode

$$\begin{cases}0+0-0=0\\0-0-0=0\end{cases}\Rightarrow 0_{\mathbb{R}^3}\in E$$

Soient $u_1=(x_1,y_1,z_1)\in E$ et $u_2=(x_2,y_2,z_2)\in E$, on a $\begin{cases}x_1+y_1-z_1=0\\x_1-y_1-z_1=0\end{cases}$ et $\begin{cases}x_2+y_2-z_2=0\\x_2-y_2-z_2=0\end{cases}$

$$\lambda_1u_1+\lambda_2u_2=(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2,\lambda_1y_1+\lambda_2y_2,\lambda_1z_1+\lambda_2z_2)$$

$$\begin{cases}(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)+(\lambda_1y_1+\lambda_2y_2)-(\lambda_1z_1+\lambda_2z_2)=\lambda_1(x_1+y_1-z_1)+\lambda_2(x_2+y_2-z_2)=0\\(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)-(\lambda_1y_1+\lambda_2y_2)-(\lambda_1z_1+\lambda_2z_2)=\lambda_1(x_1-y_1-z_1)+\lambda_2(x_2-y_2-z_2)=0\end{cases}$$

Ce qui montre que $\lambda_1u_1+\lambda_2u_2\in E$

Et finalement E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2. $\{a\}$ est une famille génératrice de E, ce vecteur est non nul, c'est une base de E, bref E est la droite engendrée par le vecteur a.
3.

$$1+1-2\times 1=0\Rightarrow b\in F$$
$$0+2-2\times 1=0\Rightarrow c\in F$$

b et c ne sont pas proportionnels, ils forment une famille libre de F donc $\dim(F)\geq 2$.

$(1,0,0)\notin F$ donc $F\subsetneq\mathbb{R}^3$ par conséquent $\dim(F)<\dim(\mathbb{R}^3)=3$.

On déduit de cela que $\dim(F)=2$ et que par suite la famille $\{b,c\}$ est libre (dans F) à deux éléments, c'est une base de F.

4.

$1+0-2\times 1=-1\neq 0\Rightarrow a\notin Vect(b,c)$ et $\{b,c\}$ est libre donc $\{a,b,c\}$ est libre (c'est une base de $\mathbb{R}^3$, puisque cette famille a trois éléments)

5. $\{a\}$ est une base de E, $\{b,c\}$ est une base de F et $\{a,b,c\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ par conséquent

$$E\oplus F=\mathbb{R}^3$$

6. On cherche α,β,γ tels que $u=\alpha a+\beta b+\gamma c$
7. $u=\alpha a+\beta b+\gamma c\Leftrightarrow(x,y,z)=\alpha(1,0,1)+\beta(1,1,1)+\gamma(0,2,1)\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}\begin{cases}\alpha+\beta=x\\\beta+2\gamma=y\\\alpha+\beta+\gamma=z\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\begin{matrix}L_1\\L_2-L_1\\L_3-L_1\end{matrix}\begin{cases}\alpha+\beta=x\\\beta+2\gamma=y\\\gamma=-x+z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-\beta+x\\\beta=-2\gamma+y\\\gamma=-x+z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-\beta+x\\\beta=-2(-x+z)+y\\\gamma=-x+z\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\alpha=-2x-y+2z+x=-x-y+2z\\\beta=2x+y-2z\\\gamma=-x+z\end{cases}$$

8. $u=(2x+y-2z)a+(-x-y+2z)b+(-x+z)c$

$$u=(-x-y+2z)a+(2x+y-2z)b+(-x+z)c$$

Allez à : Exercice 21

Correction exercice 22.

1. Une famille de 4 vecteurs dans un espace de dimension 3 est liée, ce n'est pas une base.
2. Pour tout α, β, γ et δ réels

$$\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \alpha(2,-1,-1) + \beta(-1,2,3) + \gamma(1,4,7) + \delta(1,1,2) = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\begin{cases} 2\alpha - \beta + \gamma + \delta = 0 \\ -\alpha + 2\beta + 4\gamma + \delta = 0 \\ -\alpha + 3\beta + 7\gamma + 2\delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ 2L_2 + L_1 \\ L_3 - L_2 \end{matrix}\begin{cases} 2\alpha - \beta + \gamma + \delta = 0 \\ 3\beta + 9\gamma + 3\delta = 0 \\ \beta + 3\gamma + \delta = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha - \beta + \gamma + \delta = 0 \\ \beta + 3\gamma + \delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha - \beta + \gamma + \delta = 0 \\ \beta = -3\gamma - \delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha - (-3\gamma - \delta) + \gamma + \delta = 0 \\ \beta = -3\gamma - \delta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + 4\gamma + 2\delta = 0 \\ \beta = -3\gamma - \delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -2\gamma - \delta \\ \beta = -3\gamma - \delta \end{cases}$$

Donc pour tout α, β, γ et δ réels

$$\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow (-2\gamma - \delta)a + (-3\gamma - \delta)b + \gamma c + \delta d = 0_{\mathbb{R}^3}$$
$$\Leftrightarrow \gamma(-2a - 3b + c) + \delta(-a - b + d) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

Ce qui montre que $-2a - 3b + c = 0_{\mathbb{R}^3}$ et que $-a - b + d = 0_{\mathbb{R}^3}$, autrement dit

$$c = 2a + 3d \quad \text{et} \quad d = a + b$$

Par conséquent

$$E = Vect(a,b,c,d) = Vect(a,b,2a + 3d, a + b) = Vect(a,b)$$

(a,b) est une famille génératrice de E, les vecteurs a et b ne sont pas proportionnels donc (a,b) est libre, c'est une base de E.

3.

$$x = (x_1,x_2,x_3) \in E \Leftrightarrow \exists \alpha,\beta \in \mathbb{R}, x = \alpha a + \beta b \Leftrightarrow \exists \alpha,\beta \in \mathbb{R}, \alpha(2,-1,-1) + \beta(-1,2,3)$$

$$= (x_1,x_2,x_3) \Leftrightarrow \exists \alpha,\beta \in \mathbb{R}, \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\begin{cases} 2\alpha - \beta = x_1 \\ -\alpha + 2\beta = x_2 \\ -\alpha + 3\beta = x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \exists \alpha,\beta \in \mathbb{R}, \begin{matrix} L_1 \\ 2L_2 + L_1 \\ L_3 - L_2 \end{matrix}\begin{cases} 2\alpha - \beta = x_1 \\ 3\beta = 2x_2 + x_1 \\ \beta = x_3 - x_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists \alpha,\beta \in \mathbb{R}, \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ 3L_3 - L_2 \end{matrix}\begin{cases} 2\alpha - \beta = x_1 \\ 3\beta = 2x_2 + x_1 \\ 0 = 3(x_3 - x_2) - (2x_2 + x_1) = -x_1 - 5x_2 + 3x_3 \end{cases}$$

Une équation caractérisant E est $-x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0$

4. $e_1 = (1,0,0)$ ne vérifie pas l'équation caractérisant E donc $e_1 \notin E$ et (a,b) est libre donc (a,b,e_1) est une famille libre à 3 élément dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, de dimension 3, c'est une base.

Allez à : Exercice 22

Correction exercice 23.

Première partie

1.

$$u = (x,y,z,t) \in E \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\begin{cases} x + y + z - t = 0 \\ x - 2y + 2z + t = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1 \end{matrix}\begin{cases} x + y + z - t = 0 \\ -3y + z + 2t = 0 \\ -2y + t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ z = -y \\ t = 2y \end{cases}$$

Donc $u = (2y, y, -y, 2y) = y(2,1,-1,2) = ya$

2. a n'est pas le vecteur nul et engendre E, c'est une base de E et $\dim(E) = 1$Soit $e_1 = (1,0,0,0)$, $e_1 \notin E$ car les composantes de e_1 ne vérifient pas les équations caractérisant E. Donc (a, e_1) est libre.

$u = (x,y,z,t) \in Vect(a, e_1)$ si et seulement s'ils existent α et β réels tels que :

$$u=\alpha a+\beta e_1\Leftrightarrow \begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\end{matrix}\begin{cases}2\alpha+\beta=x\\ \alpha=y\\ -\alpha=z\\ 2\alpha=t\end{cases}\Leftrightarrow \begin{matrix}L_1\\2L_2-L_1\\2L_3+L_1\\L_4-L_1\end{matrix}\begin{cases}2\alpha+\beta=x\\ -\beta=2y-x\\ \beta=2z+x\\ -\beta=t-x\end{cases}\Leftrightarrow \begin{matrix}\\ \\ L_3+L_2\\L_4-L_2\end{matrix}\begin{cases}2\alpha+\beta=x\\ -\beta=2y-x\\ 2z+x+2y-x=0\\ t-x-(2y-x)=0\end{cases}$$

Donc $Vect(a,e_1)=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4, y+z=0 \text{ et } -2y+t=0\}$

Soit $e_2=(0,1,0,0)$, $e_2\notin Vect(a,e_1)$ car les composantes de e_2 ne vérifient pas les équations caractérisant $Vect(a,e_1)$ et (a,e_1) est libre donc (a,e_1,e_2) est libre.

$u=(x,y,z,t)\in Vect(a,e_1,e_2)$ si et seulement s'ils existent α, β et γ réels tels que :

$$u=\alpha a+\beta e_1+\gamma e_2\Leftrightarrow \begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\end{matrix}\begin{cases}2\alpha+\beta=x\\ \alpha+\gamma=y\\ -\alpha=z\\ 2\alpha=t\end{cases}\Leftrightarrow \begin{matrix}L_1\\2L_2-L_1\\2L_3+L_1\\L_4-L_1\end{matrix}\begin{cases}2\alpha+\beta=x\\ -\beta+2\gamma=2y-x\\ \beta=2z+x\\ -\beta=t-x\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix}\\ \\ L_3+L_2\\L_4-L_2\end{matrix}\begin{cases}2\alpha+\beta=x\\ -\beta+2\gamma=2y-x\\ 2\gamma=2z+2y\\ -2\gamma=t-2y\end{cases}\Leftrightarrow \begin{matrix}\\ \\ \\ L_4+L_3\end{matrix}\begin{cases}2\alpha+\beta=x\\ -\beta+2\gamma=2y-x\\ 2\gamma=2z+x+2y-x\\ 0=t+2z\end{cases}$$

Donc $Vect(a,e_1,e_2)=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4, 2z+t=0\}$

Soit $e_3=(0,0,1,0)$, $e_3\notin Vect(a,e_1,e_2)$ car les composantes de e_3 ne vérifient pas l' équation caractérisant $Vect(a,e_1,e_2)$ et (a,e_1,e_2) est libre donc (a,e_1,e_2,e_3) est libre, comme cette famille a quatre vecteurs, c'est une base de $\mathbb{R}^4$.

Allez à : Exercice 23

Deuxième partie

3. $2\times 0+6\times 0+7\times 0-0=0$ donc $0_{\mathbb{R}^4}\in F$.

   Soient $u=(x,y,z,t)\in F$ et $u'=(x',y',z',t')\in F$, on a alors

   $2x+6y+7z-t=0$ et $2x'+6y'+7z'-t'=0$. Soient λ et λ' deux réels.

   $$\lambda u+\lambda' u'=\lambda(x,y,z,t)+\lambda(x',y',z',t')=(\lambda x+\lambda' x',\lambda y+\lambda' y',\lambda z+\lambda' z',\lambda t+\lambda' t')$$

   $$2(\lambda x+\lambda' x')+6(\lambda y+\lambda' y')+7(\lambda z+\lambda' z')-(\lambda t+\lambda' t')$$
   $$=\lambda(2x+6y+7z-t)+\lambda(2x'+6y'+7z'-t')=0$$

   Donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

4. $u=(x,y,z,t)\in F\Leftrightarrow u=(x,y,z,t)\ et\ t=2x+6y+7z\Leftrightarrow u=(x,y,z,2x+6y+7z)$

   Donc $u=(x,y,z,2x+6y+7z)=x(1,0,0,2)+y(0,1,0,6)+z(0,0,1,7)$

   $u_0=(1,0,0,2)$, $u_1=(0,1,0,6)$ et $u_2=(0,0,1,7)$, (u_0,u_1,u_3) est une famille génératrice de F.

   Il reste à montrer que cette famille est libre :

   $$\alpha(1,0,0,2)+\beta(0,1,0,6)+\gamma(0,0,1,7)=(0,0,0,0)\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=0\\ \beta=0\\ \gamma=0\\ 2\alpha+6\beta+7\gamma=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=0\\ \beta=0,\\ \gamma=0\end{cases}$$

   Cette famille est bien libre, c'est une base de F.

5. $\dim(E)=1$ et $\dim(F)=3$ donc $\dim(E)+\dim(F)=4=\dim(\mathbb{R}^4)$

   Comme $2\times 2+6\times 1+7\times(-1)-2=1\neq 0$, $a=(2,1,-1,2)\notin F$, $E\cap F=\{0_{\mathbb{R}^4}\}$

   On a alors $E\oplus F=\mathbb{R}^4$.

Allez à : Exercice 23

Troisième partie

6. Comme $2\times 1+6\times 1+7\times(-1)-1=0$, $b\in F$.

   Comme $2\times(-1)+6\times(-2)+7\times 3-7=0$, $c\in F$.

   Comme $2\times 4+6\times 4+7\times(-5)-(-3)=0$, $d\in F$.

$$\alpha b+\beta c+\gamma d=0_{\mathbb{R}^4}\Leftrightarrow \begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\end{matrix}\begin{cases}\alpha-\beta+4\gamma=0\\ \alpha-2\beta+4\gamma=0\\ -\alpha+3\beta-5\gamma=0\\ \alpha+7\beta-3\gamma=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{matrix}L_1\\L_2-L_1\\L_3+L_1\\L_4+L_1\end{matrix}\begin{cases}\alpha-\beta+4\gamma=0\\ -\beta=0\\ 2\beta-\gamma=0\\ 8\beta-7\gamma=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=0\\ \beta=0\\ \gamma=0\end{cases}$$

Donc (b,c,d) est une famille libre dans un espace de dimension 3 ($\dim(F)=3$), c'est une base de F.

7. Soit $u=(x,y,z,t)$ avec $2x+6y+7z-t=0$

$$\alpha b+\beta c+\gamma d=u\Leftrightarrow \begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\end{matrix}\begin{cases}\alpha-\beta+4\gamma=x\\ \alpha-2\beta+4\gamma=y\\ -\alpha+3\beta-5\gamma=z\\ \alpha+7\beta-3\gamma=t\end{cases}\Leftrightarrow \begin{matrix}L_1\\L_2-L_1\\L_3+L_1\\L_4+L_1\end{matrix}\begin{cases}\alpha-\beta+4\gamma=x\\ -\beta=-x+y\\ 2\beta-\gamma=x+z\\ 8\beta-7\gamma=-x+t\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix}\\ \\ L_3+2L_2\\L_4+8L_2\end{matrix}\begin{cases}\alpha-\beta+4\gamma=x\\ \beta=x-y\\ -\gamma=-x+2y+z\\ -7\gamma=-9x+8y+t\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix}\\ \\ \\ L_4-7L_3\end{matrix}\begin{cases}\alpha=\beta-4\gamma+x\\ \beta=x-y\\ \gamma=x-2y-z\\ 0=-9x+8y+t-7(-x+2y+z)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=x-y-4(x-2y-z)+x\\ \beta=x-y\\ \gamma=x-2y-z\\ 0=-2x-6y-7z+t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-2x+7y+4z\\ \beta=x-y\\ \gamma=x-2y-z\\ 0=0\end{cases}$$

Donc pour tout $u=(x,y,z,t)\in F$ avec $2x+6y+7z-t=0$

$u=(-2x+7y+4z)b+(x-y)c+(x-2y-z)d$

Allez à : Exercice 23

Correction exercice 24.

1.

$$u=(x,y,z,t)\in E\Leftrightarrow \begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}\begin{cases}x+y+z+t=0\\ x+2y-z+t=0\\ -x-y+2z+2t=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{matrix}L_1\\L_2-L_1\\L_3+L_1\end{matrix}\begin{cases}x+y+z+t=0\\ y-2z=0\\ 3z+3t=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+z+t=0\\ y=2z\\ t=-z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+2z+z-z=0\\ y=2z\\ t=-z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2z\\ y=2z\\ t=-z\end{cases}$$

Donc $u=(-2z,2z,z,-z)=z(-2,2,1,-1)$

On pose $u_0=(-2,2,1,-1)$ et $E=vect\,(u_0)$, E est la droite engendrée par le vecteur u_0.

$$u=(x,y,z,t)\in F\Leftrightarrow x+3y+4t=0\Leftrightarrow x=-3y-4t$$

Donc $u=(-3y-4t,y,z,t)=y(-3,1,0,0)+z(0,0,1,0)+t(-4,0,0,1)$

On appelle $u_1=(-3,1,0,0)$, $u_2=(0,0,1,0)$ et $u_3=(-4,0,0,1)$ et $F=Vect(u_1,u_2,u_3)$

(u_1,u_2,u_3) est une famille génératrice de F, il reste à montrer qu'elle est libre.

$$\alpha u_1+\beta u_2+\gamma u_3=0_{\mathbb{R}^4}\Leftrightarrow \alpha(-3,1,0,0),+\beta(0,0,1,0)+\gamma(-4,0,0,1)=(0,0,0,0)\Leftrightarrow\begin{cases}-3\alpha-4\gamma=0\\ \alpha=0\\ \beta=0\\ \gamma=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=0\\ \beta=0\\ \gamma=0\end{cases}$$

(u_1,u_2,u_3) est libre (et génératrice de F) c'est donc une base de F.

2. $u_0=(-2,2,1,-1)$ vérifie

$$-2+3\times 2+4\times 1=0$$

Ce qui montre que $u_0 \in F$, par conséquent $E \subset F$, et donc $E \cap F = E \neq \{0_{\mathbb{R}^4}\}$, E et F ne sont pas en somme directe.

3. $a = (1,3,0,4)$

$$1 + 3 \times 3 + 4 \times 4 = 26 \neq 0$$

Donc $a \notin F$, par conséquent $G \cap F = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$, d'autre part

$$\dim(G) + \dim(F) = 1 + 3 = 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$$

On a $G \oplus F = \mathbb{R}^4$

Allez à : Exercice 24

Correction exercice 25.

1. $0 + 2 \times 0 - 3 \times 0 = 0$ donc $0_{\mathbb{R}^3} \in E$.

Soient $u = (x_1, x_2, x_3) \in E$ et $u' = (x'_1, x'_2, x'_3) \in E$ alors

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \quad et \quad x'_1 + 2x'_2 - 3x'_3 = 0$$

Pour tout λ et λ' réels :

$$\lambda u + \lambda' u' = (\lambda x_1 + \lambda' x'_1, \lambda x_2 + \lambda x'_2, \lambda x_3 + \lambda' x'_3)$$

$$\lambda x_1 + \lambda' x'_1 + 2(\lambda x_2 + \lambda x'_2) - 3(\lambda x_3 + \lambda' x'_3) = \lambda(x_1 + 2x_2 - 3x_3) + \lambda'(x'_1 + 2x'_2 - 3x'_3) = 0$$

Donc

$$\lambda u + \lambda' u' \in E$$

E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

$$u = (x_1, x_2, x_3) \in E \Leftrightarrow \begin{cases} u = (x_1, x_2, x_3) \\ x_1 = -2x_2 + 3x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = (-2x_2 + 3x_3, x_2, x_3) \\ x_1 = -2x_2 + 3x_3 \end{cases}$$

$$u = (-2x_2 + 3x_3, x_2, x_3) = x_2(-2,1,0) + x_3(3,0,1)$$

$b = (-2,1,0)$ et $c = (3,1,0)$ sont deux vecteurs non colinéaires, ils forment une famille libre qui engendre E, c'est une base de E, donc $\dim(E) = 2$.

2. $1 + 2 \times 2 - (-3) \times 3 = 14 \neq 0$ donc $a \notin E$, par conséquent $F \cap E = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, comme

$$\dim(E) + \dim(F) = 2 + 1 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$$

On a $E \oplus F = \mathbb{R}^3$

Allez à : Exercice 25

Correction exercice 26.

1.

$$u = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in E \Leftrightarrow \begin{cases} u = (x_1, x_2, x_3, x_4) \\ x_1 = -x_3 \\ x_2 = -x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = (-x_3, -x_4, x_3, x_4) \\ x_1 = -x_3 \\ x_2 = -x_4 \end{cases}$$

$$u = (-x_3, -x_4, x_3, x_4) = x_3(-1,0,1,0) + x_4(0,-1,0,1)$$

$u_4 = (-1,0,1,0)$ et $u_5 = (0,-1,0,1)$ sont deux vecteurs non proportionnels, ils forment une famille libre qui engendre E, c'est une base de E, par conséquent $\dim(E) = 2$.

2. Il est clair que $u_1 + u_2 = 2u_3$ donc la famille (u_1, u_2, u_3) est liée.

$$F = Vect(u_1, u_2, u_3) = Vect\left(u_1, u_2, \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2\right) = Vect(u_1, u_2)$$

u_1 et u_2 sont deux vecteurs non colinéaires, ils forment une famille libre qui engendre F, c'est une base de F, donc $\dim(F) = 2$.

Attention certain d'entre vous on écrit (u_1, u_2, u_3) ne sont pas proportionnels donc (u_1, u_2, u_3) est une famille libre, c'est complètement faux, ce résultat est vrai pour deux vecteurs.

3. $u = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in F \Leftrightarrow$il existe α et β réels tels que $u = \alpha u_1 + \beta u_2$

$$u=\alpha u_1+\beta u_2 \Leftrightarrow \{\alpha(1,1,1,1)+\beta(1,-1,1,-1)=(x_1,x_2,x_3,x_4) \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix}\begin{cases} \alpha+\beta=x_1 \\ \alpha-\beta=x_2 \\ \alpha+\beta=x_3 \\ \alpha-\beta=x_4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2-L_1 \\ L_3-L_1 \\ L_4-L_2 \end{matrix}\begin{cases} \alpha+\beta=x_1 \\ -2\beta=-x_1+x_2 \\ 0=-x_1+x_3 \\ 0=-x_2+x_4 \end{cases}$$

Donc

$$F=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4, -x_1+x_3=0 \ \ et\ -x_2+x_4=0\}$$

4. $E+F=Vect(u_4,u_5,u_1,u_2)$

Donc la famille (u_4,u_5,u_1,u_2) est une famille génératrice de $E+F$.

Remarques :

a. La réponse $E+F=Vect(u_4,u_5,u_1,u_2,u_3)$ est bonne aussi.
b. On pouvait penser à montrer que (u_4,u_5,u_1,u_2) était libre (c'est le cas) mais c'est totalement inutile (si on avait demandé de trouver une base alors là, oui, il fallait montrer que cette famille était libre). Toutefois de montrer que cette (u_4,u_5,u_1,u_2) est libre permettait de montrer que $E\oplus F=\mathbb{R}^4$, parce que si une base de E, « collée » à une base de F donne une famille libre, on a $E+F=E\oplus F$, et comme (u_4,u_5,u_1,u_2) est une famille libre de $\mathbb{R}^4$ à 4 vecteurs, c'est aussi une base de $\mathbb{R}^4$, autrement dit $E\oplus F=\mathbb{R}^4$. Ce n'est pas là peine d'en écrire autant, il suffit de dire que puisque (u_4,u_5,u_1,u_2) est une base de $\mathbb{R}^4$ (libre plus 4 vecteurs) alors $E\oplus F=\mathbb{R}^4$.
Mais il y avait beaucoup plus simple pour montrer que $E\oplus F=\mathbb{R}^4$ (voir question 5°)).
c. Attention si on écrit (u_4,u_5,u_1,u_2) ne sont pas proportionnels donc (u_4,u_5,u_1,u_2) est une famille libre, c'est complètement faux, ce résultat n'est vrai que pour deux vecteurs.
d. Regardons ce que l'on peut faire et ne pas faire
$$E+F=Vect(u_4,u_5,u_1,u_2)=Vect(-e_1+e_3,-e_2+e_4,e_1+e_2+e_3+e_4,e_1-e_2+e_3-e_4)$$
Çà c'est bon. Mais ensuite il faut simplifier correctement
$$\begin{aligned} E+F&=Vect(-e_1+e_3,-e_2+e_4,e_1+e_2+e_3+e_4+(e_1-e_2+e_3-e_4),e_1-e_2+e_3-e_4) \\ &=Vect(-e_1+e_3,-e_2+e_4,2e_1+2e_3,e_1-e_2+e_3-e_4) \\ &=Vect(-e_1+e_3,-e_2+e_4,e_1+e_3,e_1-e_2+e_3-e_4) \\ &=Vect(-e_1+e_3+(e_1+e_3),-e_2+e_4,e_1+e_3,e_1-e_2+e_3-e_4) \\ &=Vect(2e_3,-e_2+e_4,e_1+e_3,e_1-e_2+e_3-e_4) \\ &=Vect(e_3,-e_2+e_4,e_1+e_3,e_1-e_2+e_3-e_4) \end{aligned}$$
Et là on retombe sur une situation habituelle, comme e_3 est tout seul, on peut le simplifier partout :
$$\begin{aligned} E+F&=Vect(e_3,-e_2+e_4,e_1,e_1-e_2-e_4)=Vect(e_3,-e_2+e_4,e_1,-e_2-e_4) \\ &=Vect(e_3,-e_2+e_4+(-e_2-e_4),e_1,-e_2-e_4)=Vect(e_3,-2e_2,e_1,-e_2-e_4) \\ &=Vect(e_3,e_2,e_1,-e_2-e_4)=Vect(e_3,e_2,e_1,-e_4)=Vect(e_3,e_2,e_1,e_4)=\mathbb{R}^4 \end{aligned}$$
On peut éventuellement se servir de cela pour montrer que $E\oplus F=\mathbb{R}^4$ (il reste à dire que la somme des dimension de E et de F est 4) mais ce n'est pas ce qui est demandé.

5. $\dim(E)+\dim(F)=2+2=4=\dim(\mathbb{R}^4)$

$$u\in E\cap F \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_3=0 \\ x_2+x_4=0 \\ -x_1+x_3=0 \\ -x_2+x_4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=0 \\ x_3=0 \\ x_4=0 \end{cases} \Leftrightarrow u=0_{\mathbb{R}^4}$$

Donc $E\cap F=\{0_{\mathbb{R}^4}\}$

Par conséquent $E\oplus F=\mathbb{R}^4$

Autre méthode :

On aurait pu montrer que (u_1,u_2,u_3,u_4) était une famille libre.

Allez à : Exercice 26

Correction exercice 27.

1.
$$x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in F_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ 2x_1+x_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_2=-2x_1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x_1+x_3+x_4=0 \\ x_2=-2x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3=x_1-x_4 \\ x_2=-2x_1 \end{cases}$$

Donc
$$x=(x_1,-2x_1,x_1-x_4,x_4)=x_1(1,-2,1,0)+x_4(0,0,-1,1)$$
On pose $c=(1,-2,1,0)$ et $d=(0,0,-1,1)$

Ces deux vecteurs engendrent F_1, ils ne sont pas proportionnels, donc ils forment une famille libre, par conséquent (c,d) est une base de F_1.

2.
$$x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in F_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_2+x_4=0 \\ x_1+x_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_4=-x_2 \\ x_3=-x_1 \end{cases}$$

Donc
$$x=(x_1,x_2,-x_1,-x_2)=x_1(1,0,-1,0)+x_2(0,1,0,-1)$$
On pose $e=(1,0,-1,0)$ et $f=(0,1,0,-1)$

Ces deux vecteurs engendrent F_2, ils ne sont pas proportionnels, donc ils forment une famille libre, par conséquent (e,f) est une base de F_2.

3. Première méthode
$$x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in F_1\cap F_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ 2x_1+x_2=0 \\ x_2+x_4=0 \\ x_1+x_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ 2x_1+x_2=0 \\ x_4=-x_2 \\ x_3=-x_1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2+x_1+x_2=0 \\ 2x_1+x_2=0 \\ x_4=-x_2 \\ x_3=-x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0=0 \\ 2x_1+x_2=0 \\ x_4=-x_2 \\ x_3=-x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2=-2x_1 \\ x_3=-x_1 \\ x_4=2x_1 \end{cases}$$

Donc $x=(x_1,-2x_1,-x_1,2x_1)=x_1(1,-2,-1,2)$

Cela montre que $F_1\cap F_2=Vect\big((1,-2,-1,2)\big)$

On n'a pas $F_1\oplus F_2=\mathbb{R}^4$

Deuxième méthode

On rappelle que $F_1\oplus F_2=\mathbb{R}^4 \Leftrightarrow (c,d,e,f)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
$$\alpha c+\beta d+\gamma e+\delta f=0_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\gamma=0 \\ -2\alpha+\delta=0 \\ \alpha+\beta-\gamma=0 \\ -\beta-\delta=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma=-\alpha \\ \delta=2\alpha \\ \alpha+\beta+\alpha=0 \\ \beta+\delta=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma=-\alpha \\ \delta=2\alpha \\ \beta=-2\alpha \\ 0=0 \end{cases}$$

Cela n'entraine pas que $\alpha=\beta=\gamma=\delta=0$.

(c,d,e,f) est une famille liée ce n'est pas une base de $\mathbb{R}^4$.

4.
$$\alpha a+\beta b+\gamma c+\delta d=0_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=0 \\ \alpha-\beta-2\gamma=0 \\ \alpha+\beta+\gamma-\delta=0 \\ \alpha-\beta+\delta=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ L_2-L_1 \\ L_3-L_1 \\ L_4-L_1 \end{matrix} \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=0 \\ -2\beta-3\gamma=0 \\ -\delta=0 \\ -2\beta-\gamma-\delta=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\gamma=0 \\ -2\beta-3\gamma=0 \\ \delta=0 \\ -2\beta-\gamma=0 \end{cases}$$

En faisant la différence des lignes L_2 et L_4, on a $\gamma=0$, le reste s'en déduit $\alpha=\beta=\delta=0$.

(a,b,c,d) est une famille libre dans un espace vectoriel de dimension 4, c'est une base de $\mathbb{R}^4$.

5. Une base de E « collée » à une base de F_1 est une base de $\mathbb{R}^4$ donc on a $E \oplus F_1 = \mathbb{R}^4$.

Allez à : Exercice 27

Correction exercice 28.

1. Soit $u = (x,y,z,t) \in E$, $x = y - z + t$ donc
$$u = (y - z + t, y, z, t) = y(1,1,0,0) + z(-1,0,1,0) + t(1,0,0,1)$$
Autrement dit
$$E = vect(e_1 + e_2, -e_1 + e_3, e_1 + e_4)$$
Ce qui montre que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
$(e_1 + e_2, -e_1 + e_3, e_1 + e_4)$ est une famille génératrice de E, il reste à montrer que c'est une famille libre. Soient α, β et γ trois réels
$$\alpha(e_1 + e_2) + \beta(-e_1 + e_3) + \gamma(e_1 + e_4) = 0_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow \alpha(1,1,0,0) + \beta(-1,0,1,0) + \gamma(1,0,0,1) = (0,0,0,0)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta + \gamma = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$
Par conséquent $(e_1 + e_2, -e_1 + e_3, e_1 + e_4)$ est libre, c'est donc une base de E.
Soit $u = (x,y,z,t) \in F$, $x = -y - z - t$ donc
$$u = (-y - z - t, y, z, t) = y(-1,1,0,0) + z(-1,0,1,0) + t(-1,0,0,1)$$
Autrement dit
$$E = vect(-e_1 + e_2, -e_1 + e_3, -e_1 + e_4)$$
Ce qui montre que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
$(-e_1 + e_2, -e_1 + e_3, -e_1 + e_4)$ est une famille génératrice de F, il reste à montrer que c'est une famille libre. Soient α, β et γ trois réels
$$\alpha(-e_1 + e_2) + \beta(-e_1 + e_3) + \gamma(-e_1 + e_4) = 0_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow \alpha(-1,1,0,0) + \beta(-1,0,1,0) + \gamma(-1,0,0,1)$$
$$= (0,0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha - \beta - \gamma = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$
Par conséquent $(-e_1 + e_2, -e_1 + e_3, -e_1 + e_4)$ est libre, c'est donc une base de F.
Soit $u = (x,y,z,t) \in H$, $u = (x, 2x, 3x, 4x) = x(1,2,3,4)$
Donc
$$H = vect(e_1 + 2e_2 + 3e_3 + 4e_4)$$
Il s'agit donc d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, c'est la droite engendrée par $e_1 + 2e_2 + 3e_3 + 4e_4$.

2.
$$E + F = vect(e_1 + e_2, -e_1 + e_3, e_1 + e_4, -e_1 + e_2, -e_1 + e_3, -e_1 + e_4)$$
On peut « simplifier » par $-e_1 + e_3$
$$= vect(e_1 + e_2, -e_1 + e_3, e_1 + e_4, -e_1 + e_2, -e_1 + e_4)$$
$$= vect(e_1 + e_2, -e_1 + e_3, e_1 + e_4, -e_1 + e_2, -e_1 + e_4 + e_1 + e_4)$$
$$= vect(e_1 + e_2, -e_1 + e_3, e_1 + e_4, -e_1 + e_2, 2e_4)$$
$$= vect(e_1 + e_2, -e_1 + e_3, e_1 + e_4, -e_1 + e_2, e_4)$$
$$= vect(e_1 + e_2, -e_1 + e_3, e_1, -e_1 + e_2, e_4) = vect(e_2, -e_1 + e_3, e_1, -e_1, e_4)$$
$$= vect(e_2, e_3, e_1, e_4) = \mathbb{R}^4$$

3. $(1,2,3,4)$ ne vérifie pas l'équation caractérisant E car $1 - 2 + 3 - 4 = -2 \neq 0$ donc $E \cap H = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$
$$E + H = vect(-e_1 + e_2, -e_1 + e_3, -e_1 + e_4, e_1 + 2e_2 + 3e_3 + 4e_4)$$

Allez à : Exercice 28

Correction exercice 29.

$$u_1 + u_2 = 3u_3 \Leftrightarrow u_3 = \frac{1}{3}u_1 + \frac{1}{3}u_2$$

Donc

$$E = Vect(u_1, u_2, u_3, u_4) = Vect\left(u_1, u_2, \frac{1}{3}u_1 + \frac{1}{3}u_2, u_4\right) = Vect(u_1, u_2, u_4)$$

Est-ce que la famille (u_1, u_2, u_4) est libre, il n'y a pas moyen d'en être sur sauf en faisant le calcul suivant :

$$\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{cases} 2\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta - \gamma = 0 \\ \alpha - \beta - 2\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ 2L_2 - L_1 \\ L_3 - L_2 \end{matrix} \begin{cases} 2\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 3\beta - 3\gamma = 0 \\ -3\beta - \gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 + L_2 \end{matrix} \begin{cases} 2\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 3\beta - 3\gamma = 0 \\ -4\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Cette famille est libre, c'est une sous-famille libre de (u_1, u_2, u_3, u_4) qui engendre E.

Allez à : Exercice 29

Correction exercice 30.

1.

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in E \Leftrightarrow \begin{cases} x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (x_2, x_2, x_4, x_4) \\ x_1 = x_2 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$$

$$x = (x_2, x_2, x_4, x_4) = x_2(1,1,0,0) + x_4(0,0,1,1)$$

On pose $a = (1,1,0,0)$ et $b = (0,0,1,1)$

$E = Vect(a, b)$ ce qui entraine que $\{a, b\}$ est une famille génératrice de E, et d'autre part $\{a, b\}$ est une famille libre car ces vecteurs ne sont pas proportionnels, donc $\{a, b\}$ est une base de E.

2. Soit $c = (1,0,0,0) \notin E$ car les composantes de c ne vérifient pas les équations caractérisant E.

$\{a, b\}$ est libre dans E et $c \notin E$ donc $\{a, b, c\}$ est libre.

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in Vect(a, b, c) \Leftrightarrow \exists(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, x = \alpha a + \beta b + \gamma c$$

$$x = \alpha a + \beta b + \gamma c \Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha(1,1,0,0) + \beta(0,0,1,1) + \gamma(1,0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha + \gamma \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \beta \\ x_4 = \beta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha + \gamma \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \beta \\ x_4 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Donc $Vect(a, b, c) = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4, x_4 - x_3 = 0\}$

Soit $d = (0,0,0,1)$, $d \notin Vect(a, b, c)$ car les composantes de d ne vérifient pas $x_3 - x_4 = 0$.

$\{a, b, c\}$ est libre et $d \notin Vect(a, b, c)$ donc $\{a, b, c, d\}$ est une famille libre, elle a 4 éléments, c'est une base de $\mathbb{R}^4$.

Allez à : Exercice 30

Correction exercice 31.

1.

$$u = (x, y, z, t) \in E \Leftrightarrow \begin{cases} -7x + z + 5t = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7x + z + 5t = 0 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 7x - 5t \\ y = -x \end{cases}$$

Donc il existe z et t réels tels que :

$$u = (x, -x, 7x - 5t, t) = x(1, -1, 7, 0) + t(0, 0, -5, 1)$$

On pose $d = (1, -1, 7, 0)$ et $e = (0, 0, -5, 1)$,

Alors $E = Vect(d, e)$ c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

$F = Vect(a,b,c)$ est par nature un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$

2. la famille (d,e) est libre car d et e ne sont pas proportionnels, d'autre par la famille (d,e) engendre E il s'agit donc d'une base de E.

   La famille (a,b,c) engendre F, le problème est de savoir si elle est libre.

   Pour tout α, β et γ réels

$$\alpha a + \beta b + \gamma c = 0_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow \alpha(2,-1,1,2) + \beta(2,-1,6,1) + \gamma(6,-3,8,5) = (0,0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \begin{cases} 2\alpha + 2\beta + 6\gamma = 0 \\ -\alpha - \beta - 3\gamma = 0 \\ \alpha + 6\beta + 8\gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta + 5\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ 2L_2 + L_1 \\ 2L_3 - L_1 \\ L_4 - L_1 \end{matrix} \begin{cases} 2\alpha + 2\beta + 6\gamma = 0 \\ 0 = 0 \\ 10\beta + 10\gamma = 0 \\ -\beta - \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + 2\beta + 6\gamma = 0 \\ -\beta - \gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + 3\gamma = 0 \\ \beta = -\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -2\gamma \\ \beta = -\gamma \end{cases}$$

   La famille est donc liée, si on prend $\gamma = -1$ alors $\alpha = 2$ et $\beta = 1$ et on a :

$$2a + b - c = 0_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow c = 2a + b$$

$$F = Vect(a,b,c) = Vect(a,b,2a+b) = Vect(a,b)$$

   la famille (a,b) est libre car a et b ne sont pas proportionnels, d'autre par la famille (a,b) engendre F il s'agit donc d'une base de F.

3. On a $\dim(E) + \dim(F) = 2 + 2 = 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$ donc le tout est de savoir si $E \cap F = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$?

   On a une base de E (d,e) et une base de F (a,b) et on se pose la question de savoir si (d,e,a,b) est une base de $\mathbb{R}^4$. Pour tout α, β, γ et δ réels

$$\alpha d + \beta e + \gamma a + \delta b = 0_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow \alpha(1,-1,7,0) + \beta(0,0,-5,1) + \gamma(2,-1,1,2) + \delta(2,-1,6,1) = (0,0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \begin{cases} \alpha + 2\gamma + 2\delta = 0 \\ -\alpha - \gamma - \delta = 0 \\ 7\alpha - 5\beta + \gamma + 6\delta = 0 \\ \beta + 2\gamma + \delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 + L_1 \\ L_3 - 7L_1 \\ L_4 \end{matrix} \begin{cases} \alpha + 2\gamma + 2\delta = 0 \\ \gamma + \delta = 0 \\ -5\beta - 13\gamma - 8\delta = 0 \\ \beta + 2\gamma + \delta = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_4 \\ L_3 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} \alpha + 2\gamma + 2\delta = 0 \\ \beta + 2\gamma + \delta = 0 \\ -5\beta - 13\gamma - 8\delta = 0 \\ \gamma + \delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_4 \\ L_3 + 5L_2 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} \alpha + 2\gamma + 2\delta = 0 \\ \beta + 2\gamma + \delta = 0 \\ -3\gamma - 3\delta = 0 \\ \gamma + \delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2\gamma + 2\delta = 0 \\ \beta + 2\gamma + \delta = 0 \\ \gamma + \delta = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -2\gamma - 2\delta \\ \beta = -2\gamma - \delta \\ \gamma = -\delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \delta \\ \gamma = -\delta \end{cases}$$

   Donc la famille est liée, par exemple si on prend $\delta = 1$ alors $\beta = 1$ et $\gamma = -1$ ce qui montre que

$$e - a + b = 0_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow e = a - b \in E \cap F$$

   Ce qui pouvait éventuellement se voir directement.

   On n'a pas $E \oplus F = \mathbb{R}^4$.

Allez à : Exercice 31

Correction exercice 32.

1. Première méthode

   Soient $A \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$et $B \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$et soient λ et μ deux réels.

   La matrice nulle O vérifie ${}^tO = O$

   ${}^t(\lambda A + \mu B) = \lambda {}^tA + \mu {}^tB = \lambda A + \mu B = \lambda A + \mu B$

   Donc $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

   Deuxième méthode

   Soit

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

$$A \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & a_{3,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{3,2} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{1,2} = a_{2,1} \\ a_{1,3} = a_{3,1} \\ a_{2,3} = a_{3,2} \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & a_{3,1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{3,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \\ &= a_{1,1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{2,2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{3,3}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + a_{2,1}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &+ a_{3,1}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{3,2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= a_{1,1}E_{1,1} + a_{2,2}E_{2,2} + a_{3,3}E_{3,3} + a_{2,1}(E_{2,1} + E_{1,2}) + a_{3,1}(E_{3,1} + E_{1,3}) \\ &+ a_{3,2}(E_{3,2} + E_{2,3}) \end{aligned}$$

Ce qui montre que

$$\mathcal{S}_3(\mathbb{R}) = Vect(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{3,3}, E_{2,1} + E_{1,2}, E_{3,1} + E_{1,3}, E_{3,2} + E_{2,3})$$

Donc $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2. Il reste à montrer que cette famille est libre, pour tout α_i, $i \in \{1,2,3,4,5,6\}$

$$\alpha_1 E_{1,1} + \alpha_2 E_{2,2} + \alpha_3 E_{3,3} + \alpha_4(E_{2,1} + E_{1,2}) + \alpha_5(E_{3,1} + E_{1,3}) + \alpha_6(E_{3,2} + E_{2,3}) = O$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_4 & \alpha_5 \\ \alpha_4 & \alpha_2 & \alpha_6 \\ \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \forall i \in \{1,2,3,4,5,6\}, \alpha_i = 0$$

La famille $(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{3,3}, E_{2,1} + E_{1,2}, E_{3,1} + E_{1,3}, E_{3,2} + E_{2,3})$ est libre, de plus elle engendre $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ par conséquent c'est une base de $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ et $\dim(\mathcal{S}_3(\mathbb{R})) = 6$

Allez à : Exercice 32

Correction exercice 33.

1.

$$\alpha P_0 + \beta P_1 + \gamma P_2 = 0 \Leftrightarrow \alpha \frac{1}{2}(X-1)(X-2) - \beta X(X-2) + \gamma \frac{1}{2} X(X-1) = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{\alpha}{2}(X^2 - 3X + 2) - \beta(X^2 - 2X) + \frac{\gamma}{2}(X^2 - X) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\alpha}{2} - \beta + \frac{\gamma}{2}\right)X^2 + \left(-\frac{3\alpha}{2} + 2\beta - \frac{\gamma}{2}\right)X + \alpha$$
$$= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\alpha}{2} - \beta + \frac{\gamma}{2} = 0 \\ -\frac{3\alpha}{2} + 2\beta - \frac{\gamma}{2} = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\beta + \frac{\gamma}{2} = 0 \\ +2\beta - \frac{\gamma}{2} = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 2\beta \\ \gamma = 4\beta \\ \alpha = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$$

La famille (P_0, P_1, P_2) est une famille libre de trois éléments dans un espace de dimension 3, c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. On cherche α, β et γ (en fonction de a, b et c) tels que : $aX^2 + bX + c = \alpha P_0 + \beta P_1 + \gamma P_2$

En reprenant le calcul ci-dessus, il faut résoudre le système :

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{2} - \beta + \frac{\gamma}{2} = a \\ -\frac{3\alpha}{2} + 2\beta - \frac{\gamma}{2} = b \\ \alpha = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = c \\ \frac{c}{2} - \beta + \frac{\gamma}{2} = a \\ -\frac{3c}{2} + 2\beta - \frac{\gamma}{2} = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = c \\ -\beta + \frac{\gamma}{2} = a - \frac{c}{2} \\ 2\beta - \frac{\gamma}{2} = b + \frac{3c}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ L_3 + L_2 \end{matrix} \begin{cases} \alpha = c \\ -\beta + \frac{\gamma}{2} = a - \frac{c}{2} \\ \beta = a + b + c \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = c \\ \frac{\gamma}{2} = a - \frac{c}{2} + a + b + c \\ \beta = a + b + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = c \\ \gamma = 4a + 2b + c \\ \beta = a + b + c \end{cases}$$

3. On cherche a, b et c (en fonction de α, β et γ) tels que : $aX^2 + bX + c = \alpha P_0 + \beta P_1 + \gamma P_2$

$$\begin{cases} a = \frac{\alpha}{2} - \beta + \frac{\gamma}{2} \\ b = -\frac{3\alpha}{2} + 2\beta - \frac{\gamma}{2} \\ c = \alpha \end{cases}$$

C'était déjà fait.

4. Il est préférable d'exprimer un tel polynôme dans la base (P_0, P_1, P_2), autrement dit on cherche α, β et γ tels que $R = \alpha P_0 + \beta P_1 + \gamma P_2$ vérifie $R(0) = A$, $R(1) = B$ et $R(2) = C$.
$P_0(0) = 1$, $P_1(0) = 0$ et $P_2(0) = 0$ donc $\alpha = A$
$P_0(1) = 0$, $P_1(1) = 1$ et $P_2(1) = 0$ donc $\beta = B$
$P_0(2) = 0$, $P_1(2) = 0$ et $P_2(2) = 1$ donc $\gamma = C$
Il n'y a qu'un polynôme $R = AP_0 + BP_1 + CP_2$
Ensuite, si on veut on peut exprimer R dans la base canonique (mais ce n'est pas demandé dans l'énoncé)

$$R = aX^2 + bX + c = \left(\frac{A}{2} - B + \frac{C}{2}\right)X^2 + \left(-\frac{3A}{2} + 2B - \frac{C}{2}\right)X + C$$

Allez à : Exercice 33

Correction exercice 34.

1. Soient α, β, γ et δ quatre réels.

$$\alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3 + \delta P_4 = 0$$
$$\Leftrightarrow \alpha(X^3 + X^2 + X + 1) + \beta(X^3 + 2X^2 + 3X + 4) + \gamma(3X^3 + X^2 + 4X + 2) + \delta(10X^3 + 4X^2 + 13X + 7) = 0$$
$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta + 3\gamma + 10\delta)X^3 + (\alpha + 2\beta + \gamma + 4\delta)X^2 + (\alpha + 3\beta + 4\gamma + 13\delta)X + \alpha + 4\beta + 2\gamma + 7\delta = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \begin{cases} \alpha + \beta + 3\gamma + 10\delta = 0 \\ \alpha + 2\beta + \gamma + 4\delta = 0 \\ \alpha + 3\beta + 4\gamma + 13\delta = 0 \\ \alpha + 4\beta + 2\gamma + 7\delta = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1 \\ L_4 - L_1 \end{matrix} \begin{cases} \alpha + \beta + 3\gamma + 10\delta = 0 \\ \beta - 2\gamma - 6\delta = 0 \\ 2\beta + \gamma + 3\delta = 0 \\ 3\beta - \gamma - 3\delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 - 2L_2 \\ L_4 - 3L_2 \end{matrix} \begin{cases} \alpha + \beta + 3\gamma + 10\delta = 0 \\ \beta - 2\gamma - 6\delta = 0 \\ 5\gamma + 15\delta = 0 \\ 5\gamma + 15\delta = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + 3\gamma + 10\delta = 0 \\ \beta - 2\gamma - 6\delta = 0 \\ \gamma = -3\delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + 3\gamma + 10\delta = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = -3\delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\delta \\ \beta = 0 \\ \gamma = -3\delta \end{cases}$$

Donc la famille (P_1, P_2, P_3, P_4) est liée. De plus si on prend $\delta = -1$, $\alpha = 1$ et $\gamma = 3$, donc

$$P_1 + 3P_3 - P_4 = 0$$

2.

$$Vect(P_1, P_2, P_3, P_4) = Vect(P_1, P_2, P_3, P_1 + 3P_3) = Vect(P_1, P_2, P_3)$$

Il reste à vérifier que (P_1, P_2, P_3) est libre, soit on voit qu'il s'agit du même calcul que ci-dessus avec $\delta = 0$, et par conséquent $\alpha = \beta = \gamma = 0$, soit on le refait

$$\alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3 = 0 \Leftrightarrow \alpha(X^3 + X^2 + X + 1) + \beta(X^3 + 2X^2 + 3X + 4) + \gamma(3X^3 + X^2 + 4X + 2) = 0 \Leftrightarrow (\alpha + \beta + 3\gamma)X^3 + (\alpha + 2\beta + \gamma)X^2 + (\alpha + 3\beta + 4\gamma)X + \alpha + 4\beta + 2\gamma = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \begin{cases} \alpha + \beta + 3\gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ \alpha + 3\beta + 4\gamma = 0 \\ \alpha + 4\beta + 2\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1 \\ L_4 - L_1 \end{matrix} \begin{cases} \alpha + \beta + 3\gamma = 0 \\ \beta - 2\gamma = 0 \\ 2\beta + \gamma = 0 \\ 3\beta - \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 - 2L_2 \\ L_4 - 3L_2 \end{matrix} \begin{cases} \alpha + \beta + 3\gamma = 0 \\ \beta - 2\gamma = 0 \\ 5\gamma = 0 \\ 5\gamma = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + 3\gamma = 0 \\ \beta - 2\gamma = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

(P_1, P_2, P_3) est une famille libre et génératrice de $Vect(P_1, P_2, P_3, P_4)$

Une base de $Vect(P_1, P_2, P_3, P_4)$ est (P_1, P_2, P_3)

Allez à : Exercice 34

Correction exercice 35.

1. Le vecteur nul de $\mathbb{R}_2[X]$ est le polynôme nul, en 1 ce polynôme vaut 0, le vecteur nul de $\mathbb{R}_2[X]$ est dans E.
   Soit $P_1 \in E$ et $P_2 \in E$, donc $P_1(1) = 0$ et $P_2(1) = 0$.
   Pour tout λ_1 et λ_2 deux réels,
   $$(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(1) = \lambda_1 P_1(1) + \lambda_2 P_2(1) = \lambda_1 \times 0 + \lambda_2 \times 0 = 0$$
   Donc $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 \in E$
   E est un sous-espace vectoriel de E.
2. Soit $P = aX^2 + bX + c \in E$,
   $$P(1) = 0 \Leftrightarrow a \times 1^2 + b \times 1 + c = 0 \Leftrightarrow c = -a - b$$
   Donc
   $$P = aX^2 + bX - a - b = a(X^2 - 1) + b(X - 1)$$
   $X^2 - 1$ et $X - 1$ sont deux polynômes non proportionnels, ils forment une famille libre qui engendre E, c'est une base de E. $\dim(E) = 2$.

Allez à : Exercice 35

Correction exercice 36.

1. Le polynôme nul Θ vérifie $\Theta(-1) = \Theta(1) = 0$, donc $\Theta \in E$.
   Soient P_1 et P_2 deux polynômes de E et soient λ_1 et λ_2 deux réels
   $$(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(-1) = \lambda_1 P_1(-1) + \lambda_2 P_2(-1) = 0$$
   Car $P_1(-1) = 0$ et $P_2(-1) = 0$,
   $$(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(1) = \lambda_1 P_1(1) + \lambda_2 P_2(1) = 0$$
   Car $P_1(1) = 0$ et $P_2(1) = 0$,
   Donc $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 \in E$, ce qui montre que E est un sous-espace-vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$
2. -1 et 1 sont racines de P donc il existe Q tel que $P = (X - 1)(X + 1)Q = (X^2 - 1)Q$
   Le degré de Q est 1, donc il existe deux réels a et b tels que
   $$P = (X^2 - 1)(aX + b) = aX(X^2 - 1) + b(X^2 - 1)$$
   $(X(X^2 - 1), X^2 - 1)$ est une famille génératrice de E, ces polynômes ne sont pas proportionnels, ils forment dond une famille libre et donc une base de E.

Allez à : Exercice 36

Correction exercice 37.
$$\forall x \in \mathbb{R}, \alpha \sin(x) + \beta \sin(2x) + \gamma \sin(3x) = 0$$
Pour $x = \frac{\pi}{3}$,
$$\alpha \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \beta \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \gamma \sin(\pi) = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 0 \Leftrightarrow \beta = -\alpha$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \alpha \sin(x) - \alpha \sin(2x) + \gamma \sin(3x) = 0$$
Pour $x = \frac{\pi}{2}$,
$$\alpha \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \alpha \sin(\pi) + \gamma \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \gamma = \alpha$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \alpha \sin(x) - \alpha \sin(2x) + \alpha \sin(3x) = 0$$
Pour $x = \frac{2\pi}{3}$
$$\alpha \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \alpha \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \alpha \sin(2\pi) = 0 \Leftrightarrow \alpha\left(\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$$
Donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$

Cette famille est libre.

Allez à : Exercice 37

Correction exercice 38.
Première méthode

$F\in Vect(f,g,h)\Leftrightarrow$ il existe α, β et γ tels que $\forall x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}F(x)&=\alpha\cos(x)+\beta\cos(x)\cos(2x)+\gamma\sin(x)\sin(2x)\\&=\alpha\cos(x)+\beta\cos(x)\left(1-2\cos^2(x)\right)+2\gamma\sin^2(x)\cos(x)\\&=\alpha\cos(x)+\beta\cos(x)-2\beta\cos^3(x)+2\gamma\left(1-\cos^2(x)\right)\cos(x)\\&=(\alpha+\beta+2\gamma)\cos(x)+(-2\beta-2\gamma)\cos^3(x)\end{aligned}$$

Donc $F\in Vect(\cos\ ,\cos^3\ )$

Ce qui signifie que $Vect(f,g,h)\subset Vect(\cos\ ,\cos^3\ )$, l'inclusion dans l'autre sens l'inclusion est évidente donc

$$Vect(f,g,h)=Vect(\cos\ ,\cos^3\ )$$

Qui est évidemment un espace vectoriel de dimension 2.

Deuxième méthode

On cherche à savoir si la famille (f,g,h) est libre, si c'est le cas, il n'y a pas grand-chose à dire sur $Vect(f,g,h)$ sinon que c'est un espace de dimension 3.

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad \alpha\cos(x)+\beta\cos(x)\cos(2x)+\gamma\sin(x)\sin(2x)=0$$

Pour $x=\frac{\pi}{4}$

$$\alpha\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\beta\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\gamma\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=0\Leftrightarrow\alpha+\gamma=0$$

Pour $x=0$

$$\alpha\cos(0)+\beta\cos(0)\cos(0)+\gamma\sin(0)\sin(0)=0\Leftrightarrow\alpha+\beta=0$$

Donc $\gamma=-\alpha$ et $\beta=-\alpha$

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad \alpha\cos(x)-\alpha\cos(x)\cos(2x)+\alpha\sin(x)\sin(2x)=0$$

Ensuite, on a beau chercher, pour toutes les valeurs de x particulière, on trouve $0=0$.

$$\begin{aligned}&\forall x\in\mathbb{R},\qquad \alpha\cos(x)-\alpha\cos(x)\cos(2x)+\alpha\sin(x)\sin(2x)=0\\\Leftrightarrow&\forall x\in\mathbb{R},\qquad \alpha\left(\cos(x)-\cos(x)\cos(2x)+\sin(x)\sin(2x)\right)=0\\\Leftrightarrow&\forall x\in\mathbb{R},\qquad \alpha\left(\cos(x)\left(1-\cos(2x)\right)+\sin(x)\,2\cos(\mathrm{x})\sin(\mathrm{x})\right)=0\\\Leftrightarrow&\forall x\in\mathbb{R},\qquad \alpha\cos(x)\left(1-\cos(2x)+2\sin^2(x)\right)=0\\\Leftrightarrow&\forall x\in\mathbb{R},\qquad 0=0\end{aligned}$$

Car $\cos(2x)=1-2\sin^2(x)$

La famille est donc liée, f et g ne sont pas proportionnelles donc la famille est libre et

$$Vect(f,g,h)=Vect(f,g)$$

Et $\dim\big(Vect(f,g,h)\big)=2$.

Remarque la famille (f,g) ne ressemble pas trop à la famille $(\cos\ ,\cos^3\ )$ mais dans un plan, je rappelle qu'il y a une infinité de base.

Allez à : Exercice 38

Correction exercice 39.

Soit $\theta_{\mathbb{R}}$ la fonction nulle

$$\theta_{\mathbb{R}}''(x)+x\theta_{\mathbb{R}}'(x)-x^2\theta_{\mathbb{R}}(x)=0+x\times 0-x^2\times 0=0$$

Donc $\theta_{\mathbb{R}}\in E$

Soient f et $g$deux fonctions de E. On a pour tout $x\in\mathbb{R}$

$$f''(x)+xf'(x)-x^2f(x)=0\quad\text{ et }\quad g''(x)+xg'(x)-x^2g(x)=0$$

Pour tout réels λ et μ

$$\begin{aligned}(\lambda f+\mu g)''(x)&+x(\lambda f+\mu g)'(x)-x^2(\lambda f+\mu g)(x)\\&=\lambda f''(x)+\mu g''(x)+x\big(\lambda f'(x)+\mu g'(x)\big)-x^2\big(\lambda f(x)+\mu g(x)\big)\\&=\lambda\big(f''(x)+xf'(x)-x^2f(x)\big)+\mu\big(g''(x)+xg'(x)-x^2g(x)\big)=0\end{aligned}$$

Ce qui montre que $\lambda f+\mu g\in E$.

Par conséquent E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions.

Allez à : Exercice 39

Correction exercice 40. (Hors programme)

1. Pour S_1

Démontrons d'abord que si $p' \in \mathbb{Z}$, $q' \in \mathbb{N}^*$ et p' et q' tels que $p' + q'\sqrt{2} = 0$ alors $p' = q' = 0$

On pose $d = PGCD(p', q')$, $p' = dp$ et $q' = dq$

$$p + q\sqrt{2} = 0 \Rightarrow 2q^2 = p^2 \Leftrightarrow \begin{cases} p = 0 \\ q = 0 \end{cases}$$

$$p + q\sqrt{2} = 0 \Rightarrow p = -q\sqrt{2} \Rightarrow 2q^2 = p^2$$

D'après le théorème de Gauss, (si p et q sont non nuls) p divise $2q^2$ et p est premier avec q^2 donc p divise 2. $p \in \{-2, -1, 1, 2\}$

Si $p = \pm 1$ alors $p^2 = 1$ et $2q^2 = 1$ ce qui n'est pas possible.

Si $p = \pm 2$ alors $p^2 = 4$ et $2q^2 = 4 \Leftrightarrow q^2 = 2$, ce qui n'est pas possible.

Donc $p = 0$ et $q = 0$, par conséquent $p' = q' = 0$.

La seule solution de $2q^2 = p^2$ est $(p, q) = (0,0)$

Soient $r_1 = \frac{p_1}{q_1}$ et $r_2 = \frac{p_2}{q_2}$ deux rationnels non nuls. Donc $p_1 \neq 0$, $p_2 \neq 0$ (et bien sur $q_1 \neq 0$ et $q_2 \neq 0$) et rien n'empêche de prendre $p_1 < 0$ et $p_2 > 0$ (avec $q_1 > 0$ et $q_2 > 0$)

Montrons que $r_1 \times 1 + r_2 \times \sqrt{2} = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 0$

$r_1 \times 1 + r_2 \times \sqrt{2} = 0 \Rightarrow p_1 q_2 + p_2 q_1 \sqrt{2} = 0$

On pose $p' = p_1 q_2 < 0$ et $q' = p_2 q_1 > 0$,

Donc $p' + q'\sqrt{2} = 0$ et d'après la première partie $p' = q' = 0$, ce qui est impossible si $r_1 \neq 0$ et $r_2 \neq 0$.

Donc $r_1 = r_2 = 0$ et la famille est libre.

Pour S_2

$$r_1 \times 1 + r_2 \times \sqrt{2} + r_3\sqrt{3} = 0$$

Avec $r_1 = \frac{p_1}{q_1}$, $r_2 = \frac{p_2}{q_2}$ et $r_3 = \frac{p_3}{q_3}$

$$r_1 \times 1 + r_2 \times \sqrt{2} + r_3\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow p_1 q_2 q_3 + p_2 q_1 q_3 \sqrt{2} + p_3 q_1 q_2 \sqrt{3} = 0$$

On pose $a' = p_1 q_2 q_3$, $b' = p_2 q_1 q_3$ et $c' = p_3 q_1 q_2$

$$a' + b'\sqrt{2} + c'\sqrt{3} = 0$$

Soit $d = PGCD(a, b, c)$, $a' = da$, $b' = db$ et $c' = dc$

$$a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} = 0$$

Où a, b et c sont trois entiers premiers entre eux.

$$a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow a + b\sqrt{2} = -c\sqrt{3} \Rightarrow \left(a + b\sqrt{2}\right)^2 = 3c^2 \Rightarrow a^2 + 2b^2 + 2ab\sqrt{2} = 3c^2$$
$$\Rightarrow a^2 + 2b^2 - 3c^2 + 2ab\sqrt{2} = 0$$

On pose $p = a^2 + 2b^2 - 3c^2$ et $q = 2ab$, d'après la question précédente : $p = 0$ et $q = 0$

Donc $ab = 0$ et $a^2 + 2b^2 - 3c^3 = 0$

Si $a = 0$, $2b^2 - 3c^3 = 0 \Leftrightarrow 2b^2 = 3c^2$, d'après le théorème de Gauss, c divise $2b^2$ et c est premier avec b^2 (car 0, b et c sont trois entiers premiers entre eux entraine b et c sont premiers entre eux) donc c divise 2, par conséquent $c \in \{-2, -1, 1, 2\}$, soit $c^2 = 1$ alors $2b^2 = 3$ ce qui est impossible (le premier terme est paire et le second est impair). Le seul cas possible est $b = c = 0$, soit $c^2 = 4$alors $2b^2 = 3 \times 4 \Leftrightarrow b^2 = 6$ ce qui est impossible aussi puisque 6 n'est pas un carré, dans ce cas aussi la seule solution est $b = c = 0$.

Si $b = 0$, $a^2 - 3c^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 = 3c^2$, on raccourcit la démonstration, toujours avec Gauss, a divise 3 donc si $a^2 = 1$, $3c^2 = 1$ est impossible et si $a^2 = 9$ alors $c^2 = 3$ ce qui est aussi impossible, bref, la seule solution est là encore $a = c = 0$

Tout cela pour dire que $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} = 0$ entraine $a = b = c = 0$. Par conséquent $a' = b' = c' = 0$, comme $a' = p_1 q_2 q_3$, $b' = p_2 q_1 q_3$ et $c' = p_3 q_1 q_2$ et que les q_i sont non nuls, alors $p_1 = p_2 = p_3 = 0$ et $r_1 = r_2 = r_3 = 0$, ce qui montre bien que S_2 est une famille $\mathbb{Q}$-libre.

2.

$$r_1u_1+r_2u_2=0\Leftrightarrow \frac{p_1}{q_1}\left(3+\sqrt{5},2+3\sqrt{5}\right)+\frac{p_2}{q_2}\left(4,7\sqrt{5}-9\right)=(0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p_1q_2\left(3+\sqrt{5}\right)+p_2q_1\left(2+3\sqrt{5}\right)=0\\ p_1q_2\left(2+3\sqrt{5}\right)+p_2q_1\left(\sqrt{5}-9\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a\left(3+\sqrt{5}\right)+b\left(2+3\sqrt{5}\right)=0\\ a\left(2+3\sqrt{5}\right)+b\left(\sqrt{5}-9\right)=0\end{cases}$$

Si on pose $a=p_1q_2$ et $b=p_2q_1$

$$r_1u_1+r_2u_2=0\Leftrightarrow\begin{cases}3a+2b+(a+3b)\sqrt{5}=0\\ 2a-9b+(3a+b)\sqrt{5}=0\end{cases}$$

Comme dans l'exercice précédent on montre que $(1,\sqrt{5})$ est une famille $\mathbb{Q}$-libre (c'est trop long, je suis très fatigué).

Donc $3a+2b+(a+3b)\sqrt{5}=0\Leftrightarrow\begin{cases}3a+2b=0\\ a+3b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3a+2b=0\\ a=-3b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-9b+2b=0\\ a=-3b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=0\\ a=0\end{cases}$

$a\left(2+3\sqrt{5}\right)+b\left(\sqrt{5}-9\right)=0$ est vérifié pour $a=b=0$

Donc $p_1q_2=0$ et $p_2q_1=0$, comme $q_1\neq 0$ et $q_2\neq 0$, on a $p_1=p_2=0$ et donc $r_1=r_2=0$.

La famille (u_1,u_2) est $\mathbb{Q}$-libre.

$$\begin{aligned}4u_1-\left(3+\sqrt{5}\right)u_2&=4\left(3+\sqrt{5},2+3\sqrt{5}\right)-\left(3+\sqrt{5}\right)\left(4,7\sqrt{5}-9\right)\\ &=\left(0,4\left(2+3\sqrt{5}\right)-\left(3+\sqrt{5}\right)\left(7\sqrt{5}-9\right)\right)\\ &=\left(0,8+12\sqrt{5}-\left(21\sqrt{5}-27+35-9\sqrt{5}\right)\right)=\left(0,8+27-35+(12-21-9)\sqrt{5}\right)\\ &=(0,0)\end{aligned}$$

Il existe une relation entre ces deux vecteurs donc la famille est $\mathbb{R}$-liée.

3.

a. Pour tout α et β réels

$$\alpha v_1+\beta v_2=0\Rightarrow \alpha(1-i,i)+\beta(2,-1+i)=(0,0)\Rightarrow\begin{cases}\alpha(1-i)+2\beta=0\\ \alpha i+\beta(-1+i)=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha+2\beta-\alpha i=0\\ -\beta+(\alpha+\beta)i=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha+2\beta=0\ \ et\ \ -\alpha=0\\ -\beta=0\ \ et\ \ (\alpha+\beta)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=0\\ \beta=0\end{cases}$$

(v_1,v_2) est $\mathbb{R}$-libre

$$\begin{aligned}2v_1-(1-i)v_2&=2(1-i,i)-(1-i)(2,-1+i)\\ &=\left(2(1-i)-(1-i)\times 2,2i-(1-i)(-1+i)\right)=(0,2i-2i)=(0,0)\end{aligned}$$

Il existe une relation entre ces deux vecteurs donc la famille est $\mathbb{C}$-liée.

b. Pour tout α, β, γ et δ réels

$$\alpha(1,0)+\beta(i,0)+\gamma(0,1)+\delta(0,i)=(0,0)\Rightarrow(\alpha+i\beta,\gamma+i\delta)=(0,0)\Rightarrow\begin{cases}\alpha+i\beta=0\\ \gamma+i\delta=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\beta=0\\ \gamma=\delta=0\end{cases}$$

La famille S est libre. Si on sait que la dimension de $\mathbb{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ est 4, c'est fini, parce qu'une famille libre à 4 vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 4 est une base. Sinon il est clair que pour tout vecteur $(\alpha+i\beta,\gamma+i\delta)$ de $\mathbb{C}^2$,

$$(\alpha+i\beta,\gamma+i\delta)=\alpha(1,0)+\beta(i,0)+\gamma(0,1)+\delta(0,i)$$

La famille S est génératrice, donc c'est une base.

$$v_1=(1-i,i)=(1,0)-(i,0)+(0,i)$$
$$v_2=(2,-1+i)=(2,0)-(0,1)+(0,i)$$

Allez à : Exercice 40

Applications linéaires, matrices, déterminants

Exercice 1.

Soit $u: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie pour tout $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ par

$$u(x) = (x_1 + x_2 + x_3, 2x_1 + x_2 - x_3)$$

1. Montrer que u est linéaire.
2. Déterminer $\ker(u)$.

Allez à : Correction exercice 1

Exercice 2.

Soit $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y, z) = (x + y + z, -x + 2y + 2z)$$

On appelle $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\beta' = (f_1, f_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Donner une base et la dimension de $\ker(f)$ et une base et la dimension de $Im(f)$.

Allez à : Correction exercice 2

Exercice 3.

Soit $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie pour tout vecteur $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par :

$$f(u) = (-2x + y + z, x - 2y + z)$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Donner une base de $\ker(f)$, en déduire $\dim\big(Im(f)\big)$.
3. Donner une base de $Im(f)$.

Allez à : Correction exercice 3

Exercice 4.

On considère l'application $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par :

$$h(x, y) = (x - y, -3x + 3y)$$

1. Montrer que h est une application linéaire.
2. Montrer que h est ni injective ni surjective.
3. Donner une base de son noyau et une base de son image.

Allez à : Correction exercice 4

Exercice 5.

Soit f l'application linéaire $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_3, 2x_1 + x_2 - 3x_3, -x_2 + 2x_3)$$

Et soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Calculer $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$.
2. Déterminer les coordonnées de $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$ dans la base canonique.
3. Calculer une base de $\ker(f)$ et une base de $Im(f)$.

Allez à : Correction exercice 5

Exercice 6.

Soit $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie pour tout vecteur $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par :

$$f(u) = (-2x + y + z, x - 2y + z, x + y - 2z)$$

1. Montrer que f est une application linéaire.

2. Donner une base de $\ker(f)$, en déduire $\dim(Im(f))$.
3. Donner une base de $Im(f)$.

Allez à : Correction exercice 6

Exercice 7.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$

Soit $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie pour tout $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par :

$$f(u) = (6x - 4y - 4z, 5x - 3y - 4z, x - y)$$

1. Montrer qu'il existe un vecteur $a \in \mathbb{R}^3$, non nul, tel que $\ker(f) = Vect(a)$, déterminer un vecteur qui convient.
2. Soit $b = e_1 + e_2$ et $c = e_2 - e_3$
   a. Calculer $f(b)$ et $f(c)$
   b. En déduire que $\{b, c\}$ est une base de $Im(f)$.

On pourra utiliser une autre méthode.

3. Déterminer une ou plusieurs équations caractérisant $Im(f)$.
4. A-t-on $\ker(f) \oplus Im(f) = \mathbb{R}^3$?

Allez à : Correction exercice 7

Exercice 8.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Soit $u: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire définie par

$$u(e_1) = f_1 - f_2 + 2f_3;\ \ u(e_2) = 2f_1 + f_2 - 3f_3; u(e_3) = 3f_1 - f_3\ \ et\ \ u(e_4) = -f_1 - 2f_2 + 5f_3$$

1. Déterminer l'image par u dans vecteurs $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$
2. Déterminer une base de $\ker(u)$ et sa dimension de $\ker(u)$.
3. Déterminer une base de $Im(u)$ et sa dimension.

Allez à : Correction exercice 8

Exercice 9.

Soit $u: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'application définie pour tout $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ par :

$$u(x) = (x_1 - x_2 + x_3, 0, x_1 + x_2 - x_3 + x_4, x_4)$$

Soit $E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4, x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$

1. Donner une base de $\ker(u)$ et sa dimension.
2. Donner une base (La plus simple possible) de $Im(u)$ et sa dimension.
3. A-t-on $\ker(u) \oplus Im(u) = \mathbb{R}^4$?
4. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, en donner une base et sa dimension.
5. A-t-on $\ker(u) \oplus E = \mathbb{R}^4$?

Allez à : Correction exercice 9

Exercice 10.

On appelle $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Soit $u: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ qui, à un vecteur $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ associe le vecteur $u(x) \in \mathbb{R}^4$ définit par :

$$u(x) = (x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4, x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4, -x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4, -x_1 + x_2 - x_3 - x_4)$$

On admettra que u est une application linéaire.

1. Déterminer une base du noyau de u.
2. Déterminer une base de l'image de u.
3. Déterminer une ou plusieurs équations caractérisant $Im(u)$.

Allez à : Correction exercice 10

Exercice 11.

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont l'image de la base canonique $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ est :

$$f(e_1) = -7e_1 - 6e_2$$
$$f(e_2) = 8e_1 + 7e_2$$
$$f(e_3) = 6e_1 + 6e_2 - e_3$$

1. Pour tout vecteur $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ déterminer $f \circ f(x)$.
2. En déduire que f est inversible (c'est-à-dire bijective) et déterminer f^{-1}.

Allez à : Correction exercice 11

Exercice 12.

Soit $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ définie pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ par

$$f(x, y, z, t) = (x - 2y, x - 2y, 0, x - y - z - t)$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer le noyau et l'image de f.
3. A-t-on $\ker(f) \oplus Im(f) = \mathbb{R}^4$?

Allez à : Correction exercice 12

Exercice 13.

Soit l'application $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ définie pour tout $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ par :

$$f(x, y, z, t) = (x + y, z + t, x + y + z + t)$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer une base de $\ker(f)$.
3. Déterminer une base de $Im(f)$.

Allez à : Correction exercice 13

Exercice 14.

Soit $u: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par :

$$u(x_1, x_2, x_3) = (-2x_1 + 4x_2 + 4x_3, -x_1 + x_3, -2x_1 + 4x_2 + 4x_3)$$

1. Montrer que u est linéaire.
2. Déterminer une base de $\ker(u)$ et une base de $Im(u)$.
3. A-t-on $\ker(u) \oplus Im(u) = \mathbb{R}^3$?

Allez à : Correction exercice 14

Exercice 15.

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$

Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$u(e_1) = 2e_1 + e_2 + 3e_3; \quad u(e_2) = e_2 - 3e_3; \quad u(e_3) = -2e_2 + 2e_3$$

1. Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ un vecteur.
   Déterminer l'image par u du vecteur x. (Calculer $u(x)$).
2. Soient $E = \{x \in \mathbb{R}^3, u(x) = 2x\}$ et $F = \{x \in \mathbb{R}^3, u(x) = -x\}$
   Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base de E et une base de F.
4. Y a-t-il $E \oplus F = \mathbb{R}^3$?

Allez à : Correction exercice 15

Exercice 16.

Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$

Soit $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire telle que :

$f(e_1) = -\frac{1}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3 = \frac{1}{3}(-e_1 + 2e_2 + 2e_3)$, $f(e_2) = \frac{2}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3 = \frac{1}{3}(2e_1 - e_2 + 2e_3)$ et $f(e_3) = \frac{2}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 - \frac{1}{3}e_3 = \frac{1}{3}(2e_1 + 2e_2 - e_3)$

Soient $E_{-1} = \{u \in \mathbb{R}^3 \,|\, f(u) = -u\}$ et $E_1 = \{u \in \mathbb{R}^3 \,|\, f(u) = u\}$

1. Montrer que E_{-1} et E_1 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que $e_1 - e_2$ et $e_1 - e_3$ appartiennent à E_{-1} et que $e_1 + e_2 + e_3$ appartient à E_1.
3. Que peut-on en déduire sur les dimensions de E_{-1} et de E_1 ?
4. Déterminer $E_{-1} \cap E_1$.
5. A-t-on $E_{-1} \oplus E_1 = \mathbb{R}^3$?
6. Calculer $f^2 = f \circ f$ et en déduire que f est bijective et déterminer f^{-1}.

Allez à : Correction exercice 16

Exercice 17.

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$

Soient

$$a = \frac{1}{3}(2,-2,1); b = \frac{1}{3}(2,1,-2); c = \frac{1}{3}(1,2,2)$$

Soit $\beta' = (a, b, c)$

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$u(e_1) = 3e_1 + e_2 - e_3$$
$$u(e_2) = e_1 + 7e_2$$
$$u(e_3) = -e_1 - e_3$$

1. Montrer que β' est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, calculer $u(x)$.
3. Montrer que :

$$u(a) = 3a - 3c$$
$$u(b) = 3b + 3c$$
$$u(c) = -3a + 3b + 3c$$

Allez à : Correction exercice 17

Exercice 18.

Soit p l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ qui a tout vecteur $u = (x, y, z)$ associe le vecteur

$$p(u) = (2x + y + 2z, y, -x - y - z)$$

Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On note $p^2 = p \circ p$.

1. Montrer que p est une application linéaire.
2. Calculer $p(e_1)$, $p(e_2)$ et $p(e_3)$, puis $p^2(e_1)$, $p^2(e_2)$ et $p^2(e_3)$, que peut-on en déduire sur $p^2(u)$ pour tout $u \in \mathbb{R}^3$?
3. Donner une base de $Im(p)$ et une base de $\ker(p - Id)$, montrer que ces deux espaces vectoriels sont égaux.
4. Montrer que $\ker(p) \oplus Im(p) = \mathbb{R}^3$

Allez à : Correction exercice 18

Exercice 19.

Soit E un espace vectoriel. Soit f un endomorphisme de E tel que $f^2 = f \circ f = Id_E$.

On pose $E_1 = \ker(f - Id_E)$ et $E_2 = \ker(f + Id_E)$

1. Soit $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$. Calculer $f(x_1)$ et $f(x_2)$.
2. Pour tout $x \in E$ écrire $x = \frac{f(x)+x}{2} - \frac{f(x)-x}{2}$ et montrer que $E_1 \oplus E_2 = E$
3. On suppose que E est de dimension finie et que $f \neq \pm Id_E$. Soit $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ une base de E telle que : $E_1 = Vect(v_1, \dots, v_r)$ et $E_2 = Vect(v_{r+1}, \dots, v_n)$ calculer $f(v_i)$ dans la base $(v_1, v_2, \dots, v_n)$.

Allez à : Correction exercice 19

Exercice 20.

Soit $\beta=(e_1,e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ tel que $u(e_1)=e_1+e_2$ et tel que $\dim(\ker(u))=1$

1. Déterminer $u(e_2)$ en fonction d'un paramètre $a\in\mathbb{R}$.
2. Déterminer l'image d'un vecteur $x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}$ en fonction de a.
3. Déterminer une base du noyau de $\ker(u)$.

Allez à : Correction exercice 20

Exercice 21.

Soit $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$ l'application définie pour tout $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4$ par

$$f(x)=x_1+x_2+x_3+x_4$$

On appelle $\beta=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

1. Calculer les images des vecteurs de la base canonique par f. En déduire la dimension de $\mathrm{im}(f)$.
2. Déterminer la dimension de $\ker(f)$ et en donner une base.

Allez à : Correction exercice 21

Exercice 22.

Soit u l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ par :

$$u(x)=x_1+x_2+\dots+x_n$$

1. Montrer que u est une application linéaire.
2. Déterminer les dimensions de $\mathcal{Im}(u)$ et de $\ker(u)$.

Allez à : Correction exercice 22

Exercice 23.

Soit u une application linéaire de E dans E, E étant un espace vectoriel de dimension n avec n pair.

Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes

(a) $u^2=O_E$ (où O_E est l'application linéaire nulle) et $n=2\dim\big(Im(u)\big)$

(b) $Im(u)=\ker(u)$

Allez à : Correction exercice 23

Exercice 24.

Question de cours

Soit u une application linéaire de E vers E.

Montrer que : u est injective si et seulement si $\ker(u)=\{0_E\}$.

Allez à : Correction exercice 24

Exercice 25.

Soit $u:E\to E$ une application linéaire et λ un réel.

1. Soit $E_\lambda=\ker(u-\lambda id_E)$. Calculer $u(x)$ pour $x\in E_\lambda$
   Montrer que est un sous-espace vectoriel de E.
2. Soit $F\subset E$ un sous-espace vectoriel de E, montrer que $u(F)$ est un sous-espace vectoriel de E.
3. Si $\lambda\neq 0$, montrer que $u(E_\lambda)=E_\lambda$

Allez à : Correction exercice 25

Exercice 26.

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension respectives n et p

Soit $u: E \to F$ une application linéaire

1. Montrer que si $n < p$ alors u n'est pas surjective.
2. Montrer que si $n > p$ alors u n'est pas injective.

Allez à : Correction exercice 26

Exercice 27.

Soit $f: E \to F$ une application linéaire

Montrer que :

$$\ker(f) \cap \operatorname{im}(f) = f(\ker(f^2))$$

Allez à : Correction exercice 27

Exercice 28.

Soient f et g deux endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. Montrer que

$$f(\ker(g \circ f)) = \ker(g) \cap Im(f)$$

Allez à : Correction exercice 28

Exercice 29.

Soit u un endomorphisme de E un espace vectoriel.

1. Montrer que $\ker(u) \subset \ker(u^2)$.
2. Montrer que $Im(u^2) \subset Im(u)$.

Allez à : Correction exercice 29

Exercice 30.

Soit u un endomorphisme de E, un espace vectoriel.

Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes

(i) $\ker(u) \cap im(u) = \{0_E\}$

(ii) $\ker(u) = \ker(u \circ u)$

Allez à : Correction exercice 30

Exercice 31.

Soit $u: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, une application linéaire, $\underline{e} = (e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$ et $\underline{f} = (f_1, \dots, f_q)$ la base canonique de $\mathbb{R}^q$.

1. $p = 3, q = 2$

   $u(e_1) = f_1 + 2f_2, u(e_2) = 2f_1 - f_2$ et $u(e_3) = -f_1 + f_2$

   a) Déterminer l'image d'un vecteur $x = (x_1, x_2, x_3)$ par u.

   b) Déterminer la matrice de u de la base $\underline{e}$ dans la base $\underline{f}$.

   c) Déterminer le noyau et l'image de u.

2. $p = 3$ et $q = 3$, dans cette question $\underline{e} = \underline{f}$

   $u(e_1) = 3e_1 + 2e_2 + 2e_3, u(e_2) = 2e_1 + 3e_2 + 2e_3$ et $u(e_3) = 2e_1 + 2e_2 + 3e_3$

   a) Déterminer l'image d'un vecteur $x = (x_1, x_2, x_3)$ par u.

   b) Déterminer la matrice de u de la base $\underline{e}$ dans la base $\underline{e}$.

   c) Déterminer le noyau et l'image de u.

Allez à : Correction exercice 31

Exercice 32.

Soit $u: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, une application linéaire, $\underline{e} = (e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$ et $\underline{f} = (f_1, \dots, f_q)$ la base canonique de $\mathbb{R}^q$.

1. $p = 2, q = 3$

$$A = Mat_{\underline{e},\underline{f}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer l'image d'un vecteur $x = (x_1, x_2)$ par u.

b) Déterminer l'image de la base $\underline{e}$ (c'est-à-dire $u(e_1)$ et $u(e_2)$).

c) Déterminer le noyau et l'image de u.

2. $p = 4$, $q = 4$, dans cette question $\underline{e} = \underline{f}$

$$A = Mat_{\underline{e},\underline{f}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & -5 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer l'image d'un vecteur $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ par u.

b) Déterminer l'image de la base $\underline{e}$ (c'est-à-dire $u(e_1)$, $u(e_2)$, $u(e_3)$ et $u(e_4)$).

c) Déterminer le noyau et l'image de u.

Allez à : Correction exercice 32

Exercice 33.

Soit $u: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, une application linéaire, $\underline{e} = (e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$ et $\underline{f} = (f_1, \dots, f_q)$ la base canonique de $\mathbb{R}^q$.

1. $p = 3$ et $q = 3$ dans cette question $\underline{e} = \underline{f}$. Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

$$u(x) = (x_1 + x_2, 2x_1 - x_3, 3x_1 + x_2 - x_3)$$

(On admet que u est une application linéaire).

a) Déterminer l'image de la base $\underline{e}$ (c'est-à-dire $u(e_1)$, $u(e_2)$, et $u(e_3)$).

b) Déterminer la matrice de u de la base $\underline{e}$ dans la base $\underline{e}$.

c) Déterminer le noyau et l'image de u.

2. $p = 3$ et $q = 3$ dans cette question $\underline{e} = \underline{f}$. Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

$$u(x) = (x_1 + x_2, x_1 + x_2, x_1 + x_2)$$

(On admet que u est une application linéaire).

a) Déterminer l'image de la base $\underline{e}$ (c'est-à-dire $u(e_1)$, $u(e_2)$, et $u(e_3)$).

b) Déterminer la matrice de u de la base $\underline{e}$ dans la base $\underline{e}$.

c) Déterminer le noyau et l'image de u.

Allez à : Correction exercice 33

Exercice 34.

Soit $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans les base canonique de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 5 & -11 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer une base du noyau de f.
2. Déterminer une base de l'image de f. Quel est le rang de A ?

Allez à : Correction exercice 34

Exercice 35.

Déterminer le rang de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Allez à : Correction exercice 35

Exercice 36.

Soit la matrice A de définie par : $A=\begin{pmatrix}13 & -8 & -12\\ 12 & -7 & -12\\ 6 & -4 & -5\end{pmatrix}$

1. Montrer que A est inversible et calculer son inverse A^{-1}.
2. En déduire A^n, pour tout n entier.

Allez à : Correction exercice 36

Exercice 37.

Soit A la matrice de définie par : $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$

1. Calculer A^2.
2. Trouver un polynôme P de degré 2 tel que $P(A)=O$.
3. En déduire A^{-1}.
4. Retrouver A^{-1} par une autre méthode.

Allez à : Correction exercice 37

Exercice 38.

Soit $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$

1. Calculer A^2 et A^3. Calculer A^3-A^2+A-I.
2. Exprimer A^{-1} en fonction de A^2, A et I.
3. Exprimer A^4 en fonction de A^2, A et I.

Allez à : Correction exercice 38

Exercice 39.

Soit A la matrice

$$A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ -1 & 3 & -2\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Calculer $(A-2I)^3$, puis en déduire que A est inversible et déterminer A^{-1} en fonction de I, A et de A^2.

Allez à : Correction exercice 39

Exercice 40.

A tout nombre réel t on associe la matrice : $M(t)=\begin{pmatrix}\mathrm{ch}(t) & \mathrm{sh}(t)\\ \mathrm{sh}(t) & \mathrm{ch}(t)\end{pmatrix}$

1. Calculer le produit des matrices $M(t_1)$ et (t_2), où t_1 et t_2 sont deux réels quelconques.
2. Montrer que $M(t)$ est inversible, et déterminer $M^{-1}(t)$.

Allez à : Correction exercice 40

Exercice 41.

Soit $\beta=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$

Soit $u:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & 2 & -3\end{pmatrix}$$

1. Montrer que $E_1=\{x\in\mathbb{R}^3, u(x)=x\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ dont on donnera une base a.
2. Soient $b=(0,1,1)$ et $c=(1,1,2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Calculer $u(b)$ et $u(c)$.

3. Montrer que $\beta' = (a, b, c)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Déterminer la matrice de passage P de β à β'.
5. Calculer P^{-1}.
6. Déterminer la matrice D de u dans la base β'.
7. Donner la relation entre A, P et D.

Allez à : Correction exercice 41

Exercice 42.

Soit f une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par : $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2)$ et $\beta = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer la matrice A de f dans la base β.
3.
   a) Déterminer le noyau et l'image de f.
   b) En déduire que f est inversible.
   c) Déterminer f^{-1} dans la base β, en déduire A^{-1}.
4. Montrer que $A = RH$.
   Où H est la matrice d'une homothétie dont on donnera le rapport et R est la matrice d'une rotation dont on donnera l'angle.

Soient $a = e_1 + e_2$ et $b = e_1 - e_2$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. On pose $\beta' = (a, b)$.

5. Montrer que $\beta' = (a, b)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
6. Calculer $f(a)$ et $f(b)$.
7. Déterminer la matrice de f dans la base β'.

Allez à : Correction exercice 42

Exercice 43.

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Soient $a = e_1 - e_2 + e_3$, $b = 2e_1 - e_2 + e_3$ et $c = 2e_1 - 2e_2 + e_3$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$

1. Montrer que $\beta' = (a, b, c)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice de passage P de β à β'. Calculer P^{-1}.
3. Déterminer la matrice R de u dans la base β'.
4.
   a) Calculer $P^{-1}AP$ en fonction de R
   b) Calculer R^4
   c) En déduire les valeurs de A^{4n}.

Allez à : Correction exercice 43

Exercice 44.

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Soit u une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$u(e_1) = -3e_1 + 2e_2 - 4e_3$

$u(e_2) = e_1 - e_2 + 2e_3$

$u(e_3) = 4e_1 - 2e_2 + 5e_3$

1. Déterminer la matrice de u dans la base canonique.

2. Montrer que $E = \{x \in \mathbb{R}^3, u(x) = x\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Montrer que la dimension de E est 1 et donner un vecteur non nul a de E.
3. Montrer que $F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Donner une base (b, c) de F.
4. Montrer que $\beta' = \big(a, b, u(b)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. Montrer que $E \oplus F = \mathbb{R}^3$.
6. Déterminer la matrice R de u dans la base β'.

Allez à : Correction exercice 44

Exercice 45.

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Soit u l'application linéaire qui a un vecteur $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ associe le vecteur

$$u(x) = (x_2 - 2x_3, 2x_1 - x_2 + 4x_3, x_1 - x_2 + 3x_3)$$

1. Déterminer la matrice A de u dans la base canonique.
2. Déterminer une base (a, b) de $\ker(u - Id)$.
3. Donner un vecteur c tel que $\ker(u) = vect(c)$.
4. Montrer que $\beta' = (a, b, c)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. Déterminer la matrice D de u dans la base β'.
6. Montrer que $Im(u) = \ker(u - Id)$
7. Montrer que $\ker(u) \oplus Im(u) = \mathbb{R}^3$.

Allez à : Correction exercice 45

Exercice 46.

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini pour tout $x = (x_1, x_2, x_3)$ par

$$u(x) = (-10x_1 + 3x_2 + 15x_3, -2x_1 + 3x_3, -6x_1 + 2x_2 + 9x_3)$$

1. Déterminer la matrice A de u dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la dimension du noyau et de l'image de u. On donnera un vecteur directeur a de $\ker(u)$.
3. A-t-on $\ker(u) \oplus Im(u) = \mathbb{R}^3$?
4. Déterminer un vecteur b tel que $a = u(b)$.
5. Montrer que $E_{-1} = \{x \in \mathbb{R}^3, u(x) = -x\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, déterminer un vecteur directeur de E_{-1} que l'on notera c.
6. Montrer que $\beta' = (a, b, c)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
7. Déterminer la matrice A' de u dans la base β' et donner la relation reliant A et A'.

Allez à : Correction exercice 46

Exercice 47.

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice par rapport à la base β est : $A = \begin{pmatrix} -6 & -3 & 0 & 6 \\ 6 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Soit $\beta' = (a, b, c, d)$ une famille de $\mathbb{R}^4$ définie par :

$a = e_1 - e_2$, $b = e_1 - e_2 - e_3$, $c = 2e_1 - 2e_2 + e_3 + e_4$ et $d = -e_1 + 2e_2$

1. Montrer que $\beta' = (a, b, c, d)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
2. Calculer $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ et $f(d)$ et les exprimer dans la base $\beta' = (a, b, c, d)$.
3. Déterminer la matrice de f dans la base β'.

Allez à : Correction exercice 47

Exercice 48.

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

On pose :

$a = (-1,1,0,-1)$, $b = (1,-2,-1,1)$, $c = (-2,3,1,-1)$ et $d = (2,-1,0,1)$

1. Montrer que $\beta' = (a, b, c, d)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
2. Donner la matrice de passage P de β à β'. Calculer P^{-1}.
3. Calculer $u(a)$, $u(b)$, $u(c)$ et $u(d)$ dans la base β'.
4. Déterminer la matrice T de u dans la base β'.
5. Calculer $N = T + I$, puis N^4 et en déduire $(A + I)^4$.

Allez à : Correction exercice 48

Exercice 49.

Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique, $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$, est

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 2 & 3 \\ -6 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Soient a, b, c et d quatre vecteurs

$$a = -2e_1 - e_2 - e_3 - e_4; \quad b = e_2 - e_4; \quad c = 2e_1 + e_3 + e_4; d = 3e_1 + e_3 + 2e_4$$

1. Montrer que $\beta' = (a, b, c, d)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
2. Calculer $u(a), u(b), u(c)$ et $u(d)$ dans la base $\beta' = (a, b, c, d)$
3. En déduire la matrice D de u dans la base β'.
4. Déterminer la matrice P de passage de β à β'.
5. Calculer P^{-1}.
6. Calculer $P^{-1}AP$.

Allez à : Correction exercice 49

Exercice 50.

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On pose $a = e_1 + e_2 + e_3$, $b = e_1$, $c = u(b)$ et $d = u^2(b)$.

1. Montrer que $\beta' = (a, b, c, d)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
2. Donner la matrice de passage P de β à β' . Calculer P^{-1}.
3. Calculer $u(a)$, $u(b)$, $u(c)$ et $u(d)$ dans la base β'.
4. Déterminer la matrice N de u dans la base β'.
5. Calculer N^4 et en déduire A^4.
6. Donner une base de $\ker(u)$
7. Donner une base de $Im(u)$.

Allez à : Correction exercice 50

Exercice 51.

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer un vecteur a non nul tel que $\ker(u) = vect(a)$
2. Déterminer un vecteur b tel que $a = u(b)$
3. Déterminer un vecteur c tel que $u(c) = -c$
4. Soit $d = (-1,0,0,-1)$, montrer que $\beta' = (a, b, c, d)$ est une base de $\mathbb{R}^4$
5. Calculer $u(d)$ dans la base β'.
6. Déterminer la matrice T de u dans β'.
7. Quel est le rang de A.
8. Soit $f = 2e_1 - e_2 - e_3 + e_4 = (2,-1,-1,1)$
   Calculer $u(f)$, $u^2(f)$, $u^3(f)$ et on admettra que $\beta'' = \big(f, u(f), u^2(f), u^3(f)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^4$
9. Calculer $u^4(f)$ et montrer que $u^4(f) = -2u^3(f) - u^2(f)$
   En déduire la matrice C de u dans la base β''.
10. Montrer que C et T sont deux matrices semblables (c'est-à-dire qu'il existe une matrice R, inversible, telle que $T = R^{-1}CR$

Allez à : Correction exercice 51

Exercice 52.

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$

Soit u l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Donner une base (a, b) de $\ker(u)$.
2. Donner un vecteur c qui engendre $E_1 = \{x \in \mathbb{R}^4, u(x) = x\}$
3. Déterminer un vecteur $d \in \ker((u - id)^2)$ et $d \notin \ker(u - id)$, on pourra calculer $(A - I)^2$, en déduire que d vérifie $u(d) = \lambda c + d$, où λ est un réel qui dépendra du vecteur d que vous avez choisit.
4. Montrer que $\beta' = (a, b, c, d)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
5. Déterminer la matrice T de u dans la base β'. (en fonction de λ)

Allez à : Correction exercice 52

Exercice 53.

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$

Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base β est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer un vecteur a qui engendre le noyau de u.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^4, u(x) = \lambda x\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
3. Trouver un vecteur directeur b de E_{-1}. Déterminer une base (c, d) de E_1.
4. Montrer que $\beta' = (a, b, c, d)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
5. Déterminer la matrice de u dans la base β'.

Allez à : Correction exercice 53

Exercice 54.

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrices dans la base canonique est :

$$A = Mat_\beta(u) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On pose $a_1 = e_1 + 2e_2 + 3e_3 - 2e_4$, $a_2 = e_2 + e_3$, $a_3 = e_1 + 3e_2 + 5e_3 - 3e_4$ et $c = -e_1 - e_2 - e_3$

On pose $F = Vect(a_1, a_2, a_3)$.

1. Montrer que $\beta' = (a_1, a_2, a_3, c)$ est une base de $\mathbb{R}^4$ et donner la matrice P de passage de β à β'.
2. Déterminer la matrice D de u dans la base β'.
3. Montrer que pour tout $x \in F$, $u(x) \in F$ en déduire que $v: F \to F$ définie par $v(x) = u(x)$ est un endomorphisme de F, déterminer la matrice de v dans la base $\beta_a = (a_1, a_2, a_3)$.
4. Montrer que $\mathbb{R}^4 = F \oplus Vect(c)$.
5. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^4$ il existe un unique couple de vecteurs $(f, g) \in F \times Vect(c)$ tels que : $x = f + g$, calculer $u(x)$.

Allez à : Correction exercice 54

Exercice 55.

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} -10 & -3 & -12 \\ 5 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A - \lambda I$ ne soit pas inversible. Déterminer alors $\ker(A - \lambda I)$.
2. Soit $a = (-3,1,2)$, calculer $u(a)$.
3. Déterminer $b \in \mathbb{R}^3$ tel que $u(b) = a - b$, puis $c \in \mathbb{R}^3$ tel que $u(c) = b - c$.
4. Montrer que $\beta' = (a, b, c)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. Déterminer $T = mat_{\beta'}(u)$.
6. Montrer que $(T + I)^3 = O$ (la matrice nulle). En déduire $(A + I)^3$.
7. Déterminer A^{-1} en fonction de A^2, A et I.

Allez à : Correction exercice 55

Exercice 56.

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère l'application linéaire f définie par

$$f(e_1) = 2e_2 + 3e_3; f(e_2) = 2e_1 - 5e_2 - 8e_3; f(e_3) = -e_1 + 4e_2 + 6e_3$$

On note $f^2 = f \circ f$.

1. Déterminer la matrice de f dans β.
2. Montrer que $E_1 = \ker(f - id_{\mathbb{R}^3})$ et que $N_{-1} = \ker(f^2 + id_{\mathbb{R}^3})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer a, b deux vecteurs tels que $E_1 = Vect(a)$ et $N_{-1} = Vect\big(b, f(b)\big)$. A-t-on $E_1 \oplus N_{-1} = \mathbb{R}^3$?
4. Montrer que $\beta' = \big(a, b, f(b)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. On appelle $\beta' = \big(a, b, f(b)\big)$, quelle est la matrice de f dans β'.
6. Quelle est la matrice de f^2 dans β'

Allez à : Correction exercice 56

Exercice 57.

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A=\begin{pmatrix}2&-2&1&-2\\0&1&0&0\\-3&0&-2&2\\1&-1&1&-1\end{pmatrix}$$

Soit $\beta=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Partie I

Soit $e_2=(0,1,0,0)\in\mathbb{R}^4$

1. Calculer $u(e_2)$, $u^2(e_2)$ et $u^3(e_2)$ et montrer que $\beta'=\big(e_2,u(e_2),u^2(e_2),u^3(e_2)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
2. Calculer $u^4(e_2)$ dans la base en fonction de $u^2(e_2)$ et e_2. Déterminer la matrice C de u dans la base β'

Partie II

3. Déterminer un vecteur $a\in\mathbb{R}^4$ tel que $u(a)=a$ dont la première composante est 1.
4. Soit $b=(1,-1,0,1)$ et $c=e_1-e_3+e_4$, montrer que $u(b)=a+b$ et que $u(c)=-c$.
5. Déterminer un vecteur $d\in\mathbb{R}^4$ tel que $u(d)=c-d$.
6. Montrer que $\beta''=(a,b,c,d)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
7. Déterminer la matrice T de u dans la base β''.

Partie III

8. Montrer que les matrices T et C sont semblables.

Allez à : Correction exercice 57

Exercice 58.

Soit $\mathbb{R}_2[X]=\{a_0+a_1X+a_2X^2, a_i\in\mathbb{R}\}$ l'espace des polynômes réels de degré au plus 2 et soit $\mathcal{B}=(1,X,X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$? On considère l'application

$$f:\mathbb{R}_2[X]\to\mathbb{R}_2[X]$$
$$P\longmapsto (X+1)P'$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Montrer que la matrice A de f par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}$ est :

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&2\\0&0&2\end{pmatrix}$$

3. Montrer que $\mathcal{B}'=(1,X+1,(X+1)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
4. Trouver la matrice B de f par rapport aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}'$.
5. Calculer A^2, A^3 et B^k pour tout $k\in\mathbb{N}$.
6. Déterminer le rang de f.
7. Trouver une base de l'image de f.
8. Trouver une base de noyau de f.

Allez à : Correction exercice 58

Exercice 59.

Soit $u:\mathbb{R}_2[X]\to\mathbb{R}[X]$ défini par $u(P)=P+(1-X)P'$

Soit $\beta=(1,X,X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer la matrice de u dans β.
3. Déterminer le noyau et l'image de u.

Allez à : Correction exercice 59

Exercice 60.

Soit $u:\mathbb{R}_2[X]\to\mathbb{R}[X]$, l'application définie pour tout polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$ par :

$$u(P)=2P-(X-1)P'$$

Soit $\beta=(1,X,X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. Déterminer la matrice A de u dans β.
3. Déterminer le noyau de u. On notera P_2 un vecteur directeur du noyau.
4. Donner une base de l'image de u.
5. Déterminer un polynôme P_1 tel que $u(P_1) = P_1$
6. Montrer que $\beta' = (1, P_1, P_2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
7. Déterminer la matrice D de u dans la base β'.

Allez à : Correction exercice 60

Exercice 61.

Soit $f: \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie par $f(P) = P - (X-2)P'$

1. Montrer que f est une application linéaire
2. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Déterminer le noyau et l'image de f.
4. Déterminer la matrice de f dans la base $(1, X, X^2)$.
5. Montrer que $\beta' = (1, X-2, (X-2)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
6. Déterminer la matrice de passage P de β à β'. Calculer P^{-1}.
7. Quelle est la matrice de f dans la base β'.

Allez à : Correction exercice 61

Exercice 62.

Soit $\beta = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$

Soit u l'application qui a un polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$ associe le polynôme de $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$u(P) = 2XP - X^2P'$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer la matrice A de u dans la base canonique.
3. Déterminer la dimension de $\ker(u)$.
4. Déterminer une base et la dimension de $Im(u)$

Allez à : Correction exercice 62

Exercice 63.

Soit $u : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}[X]$ une application définie pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$ par

$$u(P) = P + (1-X)P' + 2P''$$

On appelle $P_1 = 1 - X, P_2 = 1$ et $P_3 = 1 + 2X - X^2$

On appelle $\beta = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\beta' = (P_1, P_2, P_3)$

1. Montrer que u est une application linéaire.
2. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Déterminer la matrice A de u dans la base canonique.
4. Montrer que β' est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
5. Déterminer la matrice D de u dans la base β'.

Allez à : Correction exercice 63

Exercice 64.

Soit $u: \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie par

$$u(P) = \frac{1}{2}(1 - X^2)P'' + XP' - P$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$
2. Déterminer une base (P_1, P_2) de $\ker(u)$.
3. Déterminer P_3 tel que $Im(u) = Vect(P_3)$.
4. Montrer que (P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

5. Déterminer la matrice de u dans la base (P_1, P_2, P_3).

Allez à : Correction exercice 64

Exercice 65.

Soit $\mathbb{R}_2[X] = \{a_0 + a_1 X + a_2 X^2, a_i \in \mathbb{R}\}$ l'espace des polynômes réels de degré au plus 2 et soit $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$? On considère l'application

$$f: \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$$
$$P \longmapsto f(P)$$

Où $f(P)(X) = P(X+1) - P(X) = a_0 + a_1(X+1) + a_2(X+1)^2 - (a_0 + a_1 X + a_2 X^2)$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Montrer que la matrice A de f par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Montrer que $\mathcal{B}' = \big(1, X-1, (X-1)(X-2)\big)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
4. Trouver la matrice B de f par rapport aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}'$.

Allez à : Correction exercice 65

Exercice 66.

Partie I

Soit g une application de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$g(P) = \big(P(-1), P(1)\big)$$

1. Montrer que g est une application linéaire.
2. Déterminer une base du noyau et déterminer l'image de g.

Partie II

Soit h une application linéaire de $\mathbb{R}_1[X]$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$h(P) = \big(P(-1), P(1)\big)$$

3. Montrer que h est bijective.

Allez à : Correction exercice 66

Exercice 67.

Soit $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Soient a et b les fonctions définies par :

$$a(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad b(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

On pose $H = Vect(a, b)$ et $F = \{f \in H, f(\ln(2)) = 0\}$

1. Déterminer la dimension de H
2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de H.
3. Quelle est la dimension de F ?
4. Soit $\varphi: H \to \mathbb{R}^2$ définie pour $f \in H$ par

$$\varphi(f) = (f(-\ln(2)), f(\ln(2)))$$

a) Montrer que φ est une application linéaire

b) Montrer que φ est un isomorphisme.

Allez à : Correction exercice 67

Exercice 68.

Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficient dans $\mathbb{R}$ à n lignes et n colonnes.

Soit $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. C'est-à-dire les matrices qui vérifient ${}^tA = -A$.

Soit $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. C'est-à-dire les matrices qui vérifient ${}^tA = A$.

1. Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Pour toutes matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $\frac{A+{}^tA}{2} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et que $\frac{A-{}^tA}{2} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
3. En déduire que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
4. A-t-on $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
5. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, décomposer A en une somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Allez à : Correction exercice 68

Exercice 69.

Soit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à deux lignes et deux colonnes.
Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie pour toute matrice A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par

$$\phi(A) = A - {}^tA$$

1. Rappeler la dimension de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer le noyau de ϕ, quel est sa dimension ?
3. Déterminer l'image de ϕ. En déduire que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et une matrice J, à déterminer tel que $\phi(A) = \lambda J$.

Allez à : Correction exercice 69

Exercice 70.

1. Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}$
2.
   a) Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix}$
   b) Montrer que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix}$, puis calculer $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$

Allez à : Correction exercice 70

Exercice 71.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$

1. Calculer $\Delta = \det(A)$
2. Déterminer les valeurs de a, b, c et d qui annule Δ.

Allez à : Correction exercice 71

Exercice 72.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Première partie

Soit $u: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire.

$\beta = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$

La matrice de u dans la canonique de $\mathbb{R}^3$ est A.

1. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}^3$, un vecteur non nul, tel que $\ker(u) = Vect(a)$.
2. Déterminer un vecteur $b \in \mathbb{R}^3$ tel que $a = u(b)$.
3. Montrer que $E_1 = \{x \in \mathbb{R}^3, u(x) = x\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, donner un vecteur non nul $c \in E$.
4. Montrer que $\beta' = (a, b, c)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. Déterminer la matrice T de u dans la base β'.
6. Donner la relation entre A, T et la matrice de passage, notée Q, de β à β'.

Deuxième partie

Soit $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

Soit $f: \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}[X]$ l'application linéaire définie par :

$$f(P) = (2 + X + X^2)P - (1 + 2X + X^2 + X^3)P' + \frac{1}{2}(-1 + X + X^2 + X^3 + X^4)P''$$

1. Calculer $f(1)$, $f(X)$ et $f(X^2)$ et en déduire que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Donner la matrice B de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. On pose $P_0 = 1 + X + X^2$, $P_1 = 1 + X$ et $P_2 = 2 + X + X^2$
   Montrer que $\mathcal{B}' = (P_0, P_1, P_2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
4. Déterminer la matrice T' de f dans la base $\mathcal{B}'$.
5. Donner la relation entre B, T' et la matrice, notée Q', de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

Troisième partie

Montrer que A et B sont deux matrices semblables.

Allez à : Correction exercice 72

Exercice 73.

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Soit $u: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est A.

1. Montrer que si v est un endomorphisme de E, un espace vectoriel de dimension n alors
$$\ker(v) \subset \ker(v^2) \subset \cdots \subset \ker(v^n)$$
2. Déterminer une base de $\ker(u + id_{\mathbb{R}^4})$, de $\ker((u + id_{\mathbb{R}^4})^2)$, de $\ker((u + id_{\mathbb{R}^4})^3)$ et de $\ker((u + id_{\mathbb{R}^4})^4)$.
   Donner l'entier p tel que $\ker((u + id_{\mathbb{R}^4})^p) = \ker((u + id_{\mathbb{R}^4})^{p+1})$
3.
   a) Donner un vecteur non nul a qui engendre $\ker(u + id_{\mathbb{R}^4})$.
   b) Donner un vecteur b vérifiant $a = (u + id_{\mathbb{R}^4})(b)$.
      Puis montrer que (a, b) est une base de $\ker((u + id_{\mathbb{R}^4})^2)$
   c) Donner un vecteur c vérifiant $b = (u + id_{\mathbb{R}^4})(c)$.
      Puis montrer que (a, b, c) est une base de $\ker((u + id_{\mathbb{R}^4})^3)$
   d) exprimer $u(b)$ et $u(c)$ en fonction de a, b et c.
4. soit $d = (1,1,0,1)$, calculer $u(d)$.
5. Montrer que $\beta' = (a, b, c, d)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
6. Donner la matrice, T, de u dans la base β' et donner la relation entre A, T et la matrice de passage P de β à β'.

7. Calculer $(T+I)^3(T-I)$ et en déduire $(A+I)^3(A-I)$

Allez à : Correction exercice 73

Exercice 74.

Première partie :

Soit g un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$

1. Montrer que $\ker(g) \subset \ker(g^2) \subset \ker(g^3)$
2. On suppose que $g^3 = O_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$ et que $\{0_{\mathbb{R}^3}\} \subsetneq \ker(g) \subsetneq \ker(g^2) \subsetneq \ker(g^3)$
   a) Déterminer $\dim(\ker(g))$ et $\dim(\ker(g^2))$
   b) Montrer que $Im(g) \subset \ker(g^2)$, puis que $Im(g) = \ker(g^2)$.

Deuxième partie :

Soit g un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $g^3 = O_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$ et que $\{0_{\mathbb{R}^3}\} \subsetneq \ker(g) \subsetneq \ker(g^2) \subsetneq \ker(g^3)$

3. Soit $a \in \ker(g)$, un vecteur non nul, montrer qu'il existe $b \in \mathbb{R}^3$ tel que $g(b) = a$. Montrer que $b \in \ker(g^2)$ et en déduire que (a, b) est une famille libre.
4. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}^3$ tel que $g(c) = b$, montrer que alors (a, b, c) est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. Déterminer la matrice de g dans la base (a, b, c).

Troisième partie :

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} -10 & -3 & -12 \\ 5 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

6. Montrer que $f + Id$ vérifie les hypothèses de la seconde partie.
7. Déterminer a, b et c tels que : $a \in \ker(f + Id)$, $(f + Id)(b) = a$ et $(f + Id)(c) = b$.
8. Déterminer la matrice de f dans la base (a, b, c).

Allez à : Correction exercice 74

CORRECTIONS

Correction exercice 1.

1. Soient $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ et $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, et soient λ et μ deux réels.
$$\lambda x + \mu y = (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \lambda x_3 + \mu y_3) = (X_1, X_2, X_3)$$
Donc
$$\begin{aligned} u(\lambda x + \mu y) &= (X_1 + X_2 + X_3, 2X_1 + X_2 - X_3) \\ &= \big((\lambda x_1 + \mu y_1) + (\lambda x_2 + \mu y_2) + (\lambda x_3 + \mu y_3), 2(\lambda x_1 + \mu y_1) + (\lambda x_2 + \mu y_2) \\ &\quad - (\lambda x_3 + \mu y_3)\big) \\ &= \big(\lambda(x_1 + x_2 + x_3) + \mu(y_1 + y_2 + y_3), \lambda(2x_1 + x_2 - x_3) + \mu(2y_1 + y_2 - y_3)\big) \\ &= \lambda(x_1 + x_2 + x_3, 2x_1 + x_2 - x_3) + \mu(y_1 + y_2 + y_3, 2y_1 + y_2 - y_3) = \lambda u(x) + \mu u(y) \end{aligned}$$
Ce qui montre que u est linéaire.
2.
$$x = (x_1, x_2, x_3) \in \ker(u) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow L_2 - 2L_1 \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 = -3x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_3 = 0 \\ x_2 = -3x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = -3x_3 \end{cases}$$
Donc $x = (2x_3, -3x_3, x_3) = x_3(2, -3, 1)$, si on pose $a = (2, -3, 1)$
$$\ker(u) = Vect(a)$$

Allez à : Exercice 1

Correction exercice 2.

1. Soient $u=(x,y,z)$ et $u'=(x',y',z')$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et soient λ et λ' deux réels
$$\lambda u+\lambda' u'=(\lambda x+\lambda' x',\lambda y+\lambda' y',\lambda z+\lambda' z')$$
$$\begin{aligned}f(\lambda u+\lambda' u')&=\big(\lambda x+\lambda' x'+\lambda y+\lambda' y'+\lambda z+\lambda' z',-(\lambda x+\lambda' x')+2(\lambda y+\lambda' y')+2(\lambda z+\lambda' z')\big)\\&=\big(\lambda(x+y+z)+\lambda'(x'+y'+z'),\lambda(-x+2y+2z)+\lambda'(-x'+2y'+2z')\big)\\&=\lambda(x+y+z,-x+2y+2z)+\lambda'(x'+y'+z',-x'+2y'+2z')=\lambda f(u)+\lambda' f(u')\end{aligned}$$
Donc f est linéaire.

2.
$$u=(x,y,z)\in\ker(u)\Leftrightarrow(x+y+z,-x+2y+2z)=(0,0)\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2\end{matrix}\begin{cases}x+y+z=0\\-x+2y+2z=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2+L_1\end{matrix}\begin{cases}x+y+z=0\\3y+3z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=-z\end{cases}$$
$$u=(0,-z,z)=z(0,-1,1)$$
On pose $a=(0,-1,1)$, a est une base de $\ker(f)$.
$$Im(u)=vect\big(f(e_1),f(e_2),f(e_3)\big)$$
$$f(e_1)=(1,-1)=f_1-f_2;f(e_2)=(1,2)=f_1+2f_2\text{ et }f(e_3)=(1,2)=f_1+2f_2$$
$$Im(u)=vect(f_1-f_2,f_1+2f_2,f_1+2f_2)=vect(f_1-f_2,f_1+2f_2)$$
f_1-f_2 et f_1+2f_2 ne sont pas proportionnels ils forment donc une famille libre de $Im(f)$, comme c'est une famille génératrice de $Im(f)$, c'est une base de $Im(f)$et donc $\dim(Im(f)=2$. Remarque $Im(f)=\mathbb{R}^2$.

Allez à : Exercice 2

Correction exercice 3.

1.
$$\lambda u+\lambda' u'=(\lambda x+\lambda' x',\lambda y+\lambda' y',\lambda z+\lambda z')$$
$$\begin{aligned}f(\lambda u+\lambda' u')&=\big(-2(\lambda x+\lambda' x')+(\lambda y+\lambda' y')+(\lambda z+\lambda z'),(\lambda x+\lambda' x')-2(\lambda y+\lambda' y')\\&\quad+(\lambda z+\lambda z'),(\lambda x+\lambda' x')+(\lambda y+\lambda' y')-2(\lambda z+\lambda z')\big)\\&=\big(\lambda(-2x+y+z)+\lambda'(-2x'+y'+z'),\lambda(x-2y+z)+\lambda'(x'-2y'+z')\big)\\&=\lambda(-2x+y+z,x-2y+z)+\lambda'(-2x'+y'+z',x'-2y'+z')=\lambda f(u)+\lambda' f(u)\end{aligned}$$
Donc f est linéaire.

2.
$$u\in\ker(f)\Leftrightarrow f(u)=0_{\mathbb{R}^2}\Leftrightarrow(-2x+y+z,x-2y+z)=(0,0)\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2\end{matrix}\begin{cases}-2x+y+z=0\\x-2y+z=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\2L_2+L_1\end{matrix}\begin{cases}-2x+y+z=0\\-3y+3z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2x+2z=0\\y=z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=z\\y=z\end{cases}$$
$$u=(z,z,z)=z(1,1,1)$$
Donc $\ker(f)=Vect(a)$ avec $a=(1,1,1)$.
D'après le théorème du rang
$$\dim(\ker(f)+\dim(Im(f)=\dim(\mathbb{R}^3)\Leftrightarrow 1+\dim(Im(f)=3\Leftrightarrow\dim(Im(f)=2$$
3. Donc $Im(f)=\mathbb{R}^2$. Une base est $\big((1,0),(0,1)\big)$

Allez à : Exercice 3

Correction exercice 4.

1. Soit $u=(x,y)$ et $u'=(x',y')$, $\lambda u+\lambda' u'=(\lambda x+\lambda' x',\lambda y+\lambda' y')$
$$\begin{aligned}h(\lambda u+\lambda' u')&=\big(\lambda x+\lambda' x'-(\lambda y+\lambda' y'),-3(\lambda x+\lambda' x')+3(\lambda y+\lambda' y')\big)\\&=\big(\lambda(x-y)+\lambda'(x'-y'),\lambda(-3x+3y)+\lambda'(-3x'+3y')\big)\\&=\lambda(x-y,-3x+3y)+\lambda'(x'-y',-3x'+3y')=\lambda h'u)+\lambda' h(u')\end{aligned}$$
Donc h est linéaire.

2. $h(1,1)=(0,0)=h(0,0)$ et pourtant $(1,1)\neq(0,0)$ donc h n'est pas injective.
   On va montrer que $(1,0)$ n'a pas d'antécédent. Supposons qu'il existe $u=(x,y)$ tel que $(1,0)=h(u)\Leftrightarrow(1,0)=(x-y,-3x+3y)\Leftrightarrow\begin{cases}1=x-y\\0=-3x+3y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1=x-y\\x=y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1=0\\x=y\end{cases}$, c'est impossible donc h n'est pas surjective.
   h est un endomorphisme donc h est injectif si et seulement si h est surjectif. Ici, h n'est pas injectif donc h n'est pas surjectif.
3. $u=(x,y)\in\ker(h)\Leftrightarrow(x-y,-3x+3y)=(0,0)\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=0\\-3x+3y=0\end{cases}\Leftrightarrow x=y$
   Donc $u=(x,x)=x(1,1)$, $(1,1)$ est u vecteur non nul qui engendre $\ker(h)$, c'est une base de $\ker(h)$
   $h(e_1)=(1-0,-3\times1+3\times0)=(1,-3)=e_1-3e_2$ et
   $h(e_2)=((0-1,-3\times0+3\times1)=(-1,3)=-e_1+3e_2$
   $$Im(h)=Vect\big(h(e_1),h(e_2)\big)=Vect(e_1-3e_2,-e_1+3e_2)=Vect(e_1-3e_2)$$
   e_1-3e_2 est un vecteur non nul qui engendre $Im(h)$, c'est une base de $Im(h)$.

Allez à : Exercice 4

Correction exercice 5.

1. $f(e_1)=(1,2,0)=1\times e_1+2e_2+0\times e_3$
   $f(e_2)=(0,1,-1)=0\times e_1+1\times e_2-1\times e_3$
   et $f(e_3)=(-1,-3,2)=-1\times e_1-3e_2+2e_3$
2. Les coordonnées de $f(e_1)$ dans la base (e_1,e_2,e_3) sont $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$
   Les coordonnées de $f(e_2)$ dans la base (e_1,e_2,e_3) sont $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$
   Les coordonnées de $f(e_3)$ dans la base (e_1,e_2,e_3) sont $\begin{pmatrix}-1\\-3\\2\end{pmatrix}$
3.
   $$u=(x_1,x_2,x_3)\in\ker(f)\Leftrightarrow\begin{cases}x_1-x_3=0\\2x_1+x_2-3x_3=0\\-x_2+2x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow L_2-2L_1\begin{cases}x_1-x_3=0\\x_2-x_3=0\\-x_2+2x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=0\\x_2=0\\x_3=0\end{cases}$$
   Donc $\ker(f)=\{0_{\mathbb{R}^3}\}$

Première méthode :

$Im(f)=\mathrm{Vect}\big(f(e_1),f(e_2),f(e_3)\big)$

Puis on regarde si la famille $\big(f(e_1),f(e_2),f(e_3)\big)$ est libre.

$$\alpha_1f(e_1)+\alpha_2f(e_2)+\alpha_3f(e_3)=0_{\mathbb{R}^3}\Leftrightarrow\alpha_1\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}-1\\-3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_1-\alpha_3=0\\2\alpha_1+\alpha_2-3\alpha_3=0\\-\alpha_2+2\alpha_3=0\end{cases}$$

Il s'agit du même système que ci-dessus donc $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$. Cette famille est libre et elle engendre $Im(f)$ c'est une base de $Im(f)$, on en conclut que $\dim\big(Im(f)\big)=3$ et que $Im(f)=\mathbb{R}^3$.

Deuxième méthode (plus compliquée) :

$$\begin{aligned}Im(f)=Vect\big(f(e_1),f(e_2),f(e_3)\big)&=Vect(e_1+2e_2,e_2-e_3,-e_1-3e_2+2e_3)\\&=Vect(e_1+2e_2,e_2-e_3,-e_1-3e_2+2e_3+e_1+2e_2)\\&=Vect(e_1+2e_2,e_2-e_3,-e_2+2e_3)\\&=Vect(e_1+2e_2,e_2-e_3-e_2+2e_3,-e_2+2e_3)\\&=Vect(e_1+2e_2,e_3,-e_2+2e_3)\end{aligned}$$

$$= Vect(e_1 + 2e_2, e_3, -e_2 + 2e_3 - 2e_3)$$
$$= Vect(e_1 + 2e_2, e_3, -e_2)$$
$$= Vect(e_1 + 2e_2, e_3, e_2) = Vect(e_1, e_3, e_2) = Vect(e_1, e_2, e_3)$$

Donc une base de $Im(f)$ est (e_1, e_2, e_3) et bien sur $Im(f) = \mathbb{R}^3$.

Troisième méthode :

Avec le théorème du rang, $\dim(\ker(f)) + \dim(Im(f) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$, comme $\dim(\ker(f)) = 0$, $\dim\big(Im(f)\big) = 3$ donc $Im(f) = \mathbb{R}^3$ et une base de $Im(f)$ est (e_1, e_2, e_3).

Allez à : Exercice 5

Correction exercice 6.

1.

$$\lambda u + \lambda' u' = (\lambda x + \lambda' x', \lambda y + \lambda' y', \lambda z + \lambda z')$$

$$\begin{aligned} f(\lambda u + \lambda' u') = \Big(&-2(\lambda x + \lambda' x') + (\lambda y + \lambda' y') + (\lambda z + \lambda z'), (\lambda x + \lambda' x') - 2(\lambda y + \lambda' y') \\ &+ (\lambda z + \lambda z'), (\lambda x + \lambda' x') + (\lambda y + \lambda' y') - 2(\lambda z + \lambda z')\Big) \\ &= (\lambda(-2x + y + z) + \lambda'(-2x' + y' + z'), \lambda(x - 2y + z) \\ &+ \lambda'(x' - 2y' + z'), \lambda(x + y - 2z) + \lambda'(x' + y' - 2z') \\ &= \lambda(-2x + y + z, x - 2y + z, x + y - 2z) \\ &+ \lambda'(-2x' + y' + z', x' - 2y' + z', x' + y' - 2z') = \lambda f(u) + \lambda' f(u) \end{aligned}$$

Donc f est linéaire.

2.

$$u \in \ker(f) \Leftrightarrow f(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow (-2x + y + z, x - 2y + z, x + y - 2z) = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ 2L_2 + L_1 \\ 2L_3 + L_1 \end{matrix} \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 2z = 0 \\ y = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$$

$$u = (z, z, z) = z(1,1,1)$$

Donc $\ker(f) = Vect(a)$ avec $a = (1,1,1)$.

D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(f)) + \dim\big(Im(f)\big) = \dim(\mathbb{R}^3) \Leftrightarrow 1 + \dim(Im(f) = 3 \Leftrightarrow \dim\big(Im(f)\big) = 2$$

3.

Première méthode

$$f(e_1) = (-2,1,1) \quad \text{et} \quad f(e_2) = (1,-2,1)$$

Sont deux vecteurs de l'image de f, ils ne sont pas proportionnels ils forment donc une famille libre de vecteurs dans un espace de dimension 2, c'est une base.

Deuxième méthode

$$f(e_1) = (-2,1,1);\ f(e_2) = (1,-2,1) \text{ et } f(e_3) = (1,1,-2)$$
$$Im(f) = Vect\big(f(e_1), f(e_2), f(e_3)\big)$$

$\big(f(e_1), f(e_2), f(e_3)\big)$ est une famille génératrice de $Im(f)$, le problème est de savoir si cette famille est libre.

Soit on fait « comme d'habitude », c'est-à-dire que l'on écrit qu'une combinaison linéaire de ces trois vecteurs est nulle

$$\lambda_1 f(e_1) + \lambda_2 f(e_2) + \lambda_3 f(e_3) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \lambda_1(-2,1,1) + \lambda_2(1,-2,1) + \lambda_3(1,1,-2) = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{cases} -2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ 2L_2 + L_1 \\ 2L_3 + L_1 \end{matrix} \begin{cases} -2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -3\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_3 \\ \lambda_2 = \lambda_3 \end{cases}$$

Donc pour tout $\lambda_3 \in \mathbb{R}$

$$\lambda_3 f(e_1) + \lambda_3 f(e_2) + \lambda_3 f(e_3) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

Si on prend $\lambda_3 = 1$

$$f(e_1)+f(e_2)+f(e_3)=0_{\mathbb{R}^3}$$

$$Vect\big(f(e_1),f(e_2),f(e_3)\big)=Vect(f(e_1),f(e_2),-f(e_1)-f(e_2))=Vect\big(f(e_1),f(e_2)\big)$$

$f(e_1)$ et $f(e_2)$ ne sont pas proportionnels, ils forment une famille libre, comme cette famille est une famille génératrice de $Im(f)$, c'est une base de $Im(f)$.

Allez à : Exercice 6

Correction exercice 7.

1.

$$u=(x,y,z)\in\ker(f)\Leftrightarrow\begin{cases}6x-4y-4z=0\\5x-3y-4z=0\\x-y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6x-4x-4z=0\\5x-3x-4z=0\\x=y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=\dfrac{x}{2}\\y=x\end{cases}$$

Donc $u=\left(x,x,\frac{x}{2}\right)=\frac{x}{2}(2,2,1)$

On pose alors $a=(2,2,1)$ et $\ker(f)=Vect(a)$

2.

a. $b=(1,1,0)$ donc

$$f(b)=(6\times 1-4\times 1-4\times 0,5\times 1-3\times 1-4\times 0,1-1)=(2,2,0)=2(1,1,0)=2b$$

$c=(0,1,-1)=e_2-e_3$ donc

$$f(c)=(6\times 0-4\times 1-4\times(-1),5\times 0-3\times 1-4\times(-1),0-1)=(0,1,-1)=c$$

b.

Première méthode

$$b=\frac{1}{2}f(b)=f\left(\frac{b}{2}\right)\in Im(f)\quad\text{et}\quad c=f(c)\in Im(f)$$

Comme b et c ne sont pas proportionnels ils forment une famille libre de $Im(f)$.

D'autre part, d'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(f))+\dim\big(Im(f)\big)=\dim(\mathbb{R}^3)$$

Donc $\dim\big(Im(f)\big)=2$, une famille libre à deux éléments dans un espace vectoriel de dimension 2 est une base.

Deuxième méthode

$$Im(f)=Vect\big(f(e_1),f(e_2),f(e_3)\big)$$

D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(f))+\dim\big(Im(f)\big)=\dim(\mathbb{R}^3)$$

Donc $\dim\big(Im(f)\big)=2$ par conséquent les trois vecteurs $f(e_1),f(e_2)$ et $f(e_3)$ sont liés

$$f(e_1)=(6,5,1)=6e_1+5e_2+e_3\quad\text{et}\quad f(e_2)=(-4,-3,-1)=-4e_1-3e_2-e_3$$

Ne sont pas proportionnels donc ils forment une famille libre de $Im(f)$, qui est de dimension 2, il s'agit d'une base de $Im(f)$.

Il reste à montrer que $b\in Vect\big(f(e_1),f(e_2)\big)$ et que $c\in Vect\big(f(e_1),f(e_2)\big)$

On cherche α et β tels que

$$b=\alpha f(e_1)+\beta f(e_2)$$

Cette égalité équivaut à

$$\alpha(6,5,1)+\beta(-4,-3,-1)=(1,1,0)\Leftrightarrow\begin{cases}6\alpha-4\beta=1\\5\alpha-3\beta=1\\\alpha-\beta=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6\beta-4\beta=1\\5\beta-3\beta=1\\\alpha=\beta\end{cases}\Leftrightarrow\alpha=\beta=\frac{1}{2}$$

On cherche α et β tels que

$$c=\alpha f(e_1)+\beta f(e_2)$$

Cette égalité équivaut à

$$\alpha(6,5,1)+\beta(-4,-3,-1)=(0,1,-1)\Leftrightarrow\begin{cases}6\alpha-4\beta=0\\5\alpha-3\beta=1\\\alpha-\beta=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6(\beta-1)-4\beta=0\\5(\beta-1)-3\beta=1\\\alpha=\beta-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\beta=6\\2\beta=6\\\alpha=\beta-1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=\dfrac{1}{3}\\\beta=\dfrac{-2}{3}\end{cases}$$

Comme b et c ne sont pas proportionnels ils forment une famille libre de $Im(f)$, donc une base puisque la dimension de $\dim\big(Im(f)\big)=2$

Troisième méthode (variante de la deuxième méthode)

D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(f))+\dim\big(Im(f)\big)=\dim(\mathbb{R}^3)$$

Donc $\dim\big(Im(f)\big)=2$, par conséquent les trois vecteurs $f(e_1), f(e_2)$ et $f(e_3)$ sont liés

$$f(e_1)=(6,5,1)=6e_1+5e_2+e_3\quad \text{et}\quad f(e_2)=(-4,-3,-1)=-4e_1-3e_2-e_3$$

Ne sont pas proportionnels donc ils forment une famille libre de $Im(f)$, qui est de dimension 2, il s'agit d'une base de $Im(f)$.

On va chercher une ou plusieurs équations caractérisant $Im(f)$

$$u=(x,y,z)\in Vect\big(f(e_1),f(e_2)\big)\Leftrightarrow\exists\alpha,\beta\in\mathbb{R},u=\alpha f(e_1)+\beta f(e_2)\Leftrightarrow\exists\alpha,\beta$$

$$\in\mathbb{R},\alpha(6,5,1)+\beta(-4,-3,-1)=(x,y,z)\Leftrightarrow\exists\alpha,\beta\in\mathbb{R},\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}\begin{cases}6\alpha-4\beta=x\\5\alpha-3\beta=y\\\alpha-\beta=z\end{cases}\Leftrightarrow\exists\alpha,\beta$$

$$\in\mathbb{R},\begin{matrix}L_1\\6L_2-5L_1\\6L_3-L_1\end{matrix}\begin{cases}6\alpha-4\beta=x\\2\beta=6y-5x\\-2\beta=6z-x\end{cases}\Leftrightarrow\exists\alpha,\beta\in\mathbb{R},\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3+L_2\end{matrix}\begin{cases}6\alpha-4\beta=x\\2\beta=6y-5x\\0=-6x+6y+6z\end{cases}$$

Donc une équation caractérisant $Im(f)$ est $x-y-z=0$

Alors évidemment $b\in Im(f)$ et $c\in Im(f)$ car leurs composantes vérifient cette équation et on finit comme dans la seconde méthode.

3. $u=(x,y,z)\in Vect\big(f(e_1),f(e_2)\big)\Leftrightarrow\exists\alpha,\beta\in\mathbb{R},u=\alpha f(e_1)+\beta f(e_2)\Leftrightarrow\exists\alpha,\beta\in\mathbb{R},\alpha(6,5,1)+$
$\beta(-4,-3,-1)=(x,y,z)\Leftrightarrow\exists\alpha,\beta\in\mathbb{R},\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}\begin{cases}6\alpha-4\beta=x\\5\alpha-3\beta=y\\\alpha-\beta=z\end{cases}\Leftrightarrow\exists\alpha,\beta\in$
$\mathbb{R},\begin{matrix}L_1\\6L_2-5L_1\\6L_3-L_1\end{matrix}\begin{cases}6\alpha-4\beta=x\\2\beta=6y-5x\\-2\beta=6z-x\end{cases}\Leftrightarrow\exists\alpha,\beta\in\mathbb{R},\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3+L_2\end{matrix}\begin{cases}6\alpha-4\beta=x\\2\beta=6y-5x\\0=-6x+6y+6z\end{cases}$ Donc une équation caractérisant $Im(f)$ est $x-y-z=0$
4. $2-2-1=-1$ donc $a\notin Im(f)=Vect(b,c)$, $\{b,c\}$ est libre donc $\{a,b,c\}$ est libre et à 3 vecteurs par conséquent c'est une base de $\mathbb{R}^3$ donc $\ker(f)\oplus Im(f)=\mathbb{R}^3$.

Allez à : Exercice 7

Correction exercice 8.

1.

$$\begin{aligned}u(x)=u(x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3+x_4e_4)&=x_1u(e_1)+x_2u(e_2)+x_3u(e_3)+x_4u(e_4)\\&=x_1(f_1-f_2+2f_3)+x_2(2f_1+f_2-3f_3)+x_3(3f_1-f_3)+x_4(-f_1-2f_2+5f_3)\\&=(x_1+2x_2+3x_3-x_4)f_1+(-x_1+x_2-2x_4)f_2+(2x_1-3x_2-x_3+5x_4)f_3\end{aligned}$$

2.

$$x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\ker(u)\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}\left\{\begin{array}{l}x_1+2x_2+3x_3-x_4=0\\-x_1+x_2\qquad\quad-2x_4=0\\2x_1-3x_2-x_3+5x_4=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2+L_1\\L_3-2L_1\end{matrix}\left\{\begin{array}{l}x_1+2x_2+3x_3-x_4=0\\3x_2+3x_3-3x_4=0\\-7x_2-7x_3+7x_4=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x_1+2x_2+3x_3-x_4=0\\x_2+x_3-x_4=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x_1+2(-x_3+x_4)+3x_3-x_4=0\\x_2=-x_3+x_4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x_1=-x_3-x_4\\x_2=-x_3+x_4\end{array}\right.$$

Donc

$$x=(-x_3-x_4,-x_3+x_4,x_3,x_4)=x_3(-1,-1,1,0)+x_4(-1,1,0,1)$$

Si on pose $a=(-1,-1,1,0)$ et $b=(-1,1,0,1)$, ces deux vecteurs n'étant pas colinéaires, et comme il engendre $\ker(u)$ ils forment une base de $\ker(u)$, et $\dim(ker(u))=2$

3. D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(u))+\dim\big(Im(u)\big)=\dim(\mathbb{R}^4)$$

Donc $\dim\big(Im(u)\big)=2$, $u(e_1)$ et $u(e_2)$ ne sont pas colinéaires, ils forment donc une libre libre à deux vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 2, c'est une base.

Allez à : Exercice 8

Correction exercice 9.

1.

$$x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\ker(u)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}x_1-x_2+x_3=0\\0=0\\x_1+x_2-x_3+x_4=0\\x_4=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}x_1-x_2+x_3=0\\x_1+x_2-x_3=0\\x_4=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x_1=0\\x_2=x_3\\x_4=0\end{array}\right.$$

Donc $x=(0,x_3,x_3,0)=x_3(0,1,1,0)$, si on pose $a=e_2+e_3$ alors $\ker(u)=vect(a)$ et donc la dimension de $\ker(u)$ est 1.

2.

$$u(e_1)=(1,0,1,0)=e_1+e_3;\ u(e_2)=(-1,0,1,0)=-e_1+e_3;$$
$$u(e_3)=(1,0,-1,0)=e_1-e_3;\ u(e_4)=(0,0,0,1,1)=e_3+e_4$$
$$Im(u)=Vect(e_1+e_3,-e_1+e_3,e_1-e_3,e_3+e_4)=Vect(e_1+e_3,e_1-e_3,e_3+e_4)$$

Car $u(e_2)=-u(e_3)$

$$Im(u)=Vect(e_1+e_3,e_1-e_3+e_1+e_3,e_3+e_4)=Vect(e_1+e_3,2e_1,e_3+e_4)$$
$$=Vect(e_3,e_1,e_3+e_4)=Vect(e_3,e_1,e_4)$$

Cette famille est une sous-famille d'une famille libre, elle est libre (et génératrice) donc c'est une base de $Im(u)$

Autre méthode, d'après le théorème de rang

$$\dim(\ker(u)+\dim\big(Im(u)\big)=\dim(\mathbb{R}^4)\Rightarrow\dim\big(Im(u)\big)=3$$

Par conséquent $(e_1+e_3,e_1-e_3,e_3+e_4)$ est une famille génératrice à trois vecteurs dans un espace de dimension trois, c'est une base et donc $\dim\big(Im(u)\big)=3$.

3. Comme $\dim(\ker(u)+\dim\big(Im(u)\big)=\dim(\mathbb{R}^4)$

Le tout est de savoir si $a=e_2+e_3$ appartient à $Im(u)$, si c'est le cas $\ker(u)\subset Im(u)$ et il n'y a pas de somme directe et sinon $\ker(u)\cap Im(u)=\{0_{\mathbb{R}^4}\}$ et il y a somme directe.

Soit on montre que $(e_2+e_3,e_1+e_3,e_1-e_3,e_3+e_4)$ est libre et donc une base de $\mathbb{R}^4$ puisqu'il s'agit d'une famille libre à 4 vecteurs dans un espace de dimension 4 et on a

$$\ker(u)\oplus Im(u)=\mathbb{R}^4$$

Soit

$$\ker(u)+Im(u)=vect(e_1,e_3,e_4,e_2+e_3)=Vect(e_1,e_2,e_3,e_4)=\mathbb{R}^4$$

Ce qui montre que $\ker(u)\oplus Im(u)=\mathbb{R}^4$.

4. $0+0-0+0=0$ donc $0_{\mathbb{R}^4}\in E$.

Soient $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in E$ et $y=(y_1,y_2,y_3,y_4)\in E$, on a

$$x_1+x_2-x_3+x_4=0 \quad \text{et} \quad y_1+y_2-y_3+y_4=0$$

Pour tout et μ réels

$$\lambda x+\mu y=(\lambda x_1+\mu y_1,\lambda x_2+\mu y_2,\lambda x_3+\mu y_3,\lambda x_4+\mu y_4)$$

$$(\lambda x_1+\mu y_1)+(\lambda x_2+\mu y_2)-(\lambda x_3+\mu y_3)+(\lambda x_4+\mu y_4)$$
$$=\lambda(x_1+x_2-x_3+x_4)+\mu(y_1+y_2-y_3+y_4)=0$$

Ce qui montre que $\lambda x+\mu y\in E$ donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

$x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in E$, on a $x_1+x_2-x_3+x_4=0$ donc $x_1=-x_2+x_3-x_4$

$$x=(-x_2+x_3-x_4,x_2,x_3,x_4)=x_2(-1,1,0,0)+x_3(1,0,1,0)+x_4(-10,0,1)$$

On pose $b=(-1,1,0,0)$, $c=(1,0,1,0)$ et $d=(-10,0,1)$, la famille (a,b,c) engendre E

$$\alpha b+\beta c+\gamma d=0_{\mathbb{R}^4}\Leftrightarrow \alpha(-1,1,0,0)+\beta(1,0,1,0)+\gamma(-10,0,1)=0_{\mathbb{R}^4}\Leftrightarrow\begin{cases}-\alpha+\beta-\gamma=0\\ \alpha=0\\ \beta=0\\ \gamma=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=0\\ \beta=0\\ \gamma=0\end{cases}$$

Ce que signifie que (b,c,d) est une famille libre. Par conséquent (b,c,d) est une base de E.

5. $\ker(u)=Vect(a)$ avec $a=e_2+e_3=(0,1,1,0)$ donc $0+1-1+0=0$ ce qui montre que $a\in E$, autrement dit $\ker(u)\subset E$, on n'a pas : $\ker(u)\oplus Im(u)=\mathbb{R}^4$

Allez à : Exercice 9

Correction exercice 10.

1.

$$x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\ker(u)\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\end{matrix}\begin{cases}x_1-x_2+2x_3+2x_4=0\\ x_1+2x_2-x_3+2x_4=0\\ -x_1+x_2-2x_3-2x_4=0\\ -x_1+x_2-x_3-x_4=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2-L_1\\L_3+L_1\\L_4+L_1\end{matrix}\begin{cases}x_1-x_2+2x_3+2x_4=0\\ 3x_2-3x_3=0\\ 0=0\\ x_3+x_4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=x_2-2x_3-2x_4\\ x_2=x_3\\ x_4=-x_3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=x_3-2x_3+2x_3\\ x_2=x_3\\ x_4=-x_3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=x_3\\ x_2=x_3\\ x_4=-x_3\end{cases}$$

$$x=(x_3,x_3,x_3,-x_3)=x_3(1,1,1,-1)$$

$\ker(u)$ est la droite engendrée par $e_1+e_2+e_3-e_4$

2.

$$Im(u)=Vect\big(u(e_1),u(e_2),u(e_3),u(e_4)\big)$$
$$u(e_1)=(1,1,-1,-1)$$
$$u(e_2)=(-1,2,1,1)$$
$$u(e_3)=(2,-1,-2,-1)$$
$$u(e_4)=(2,2,-2,-1)$$

D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(u))+\dim\big(Im(u)\big)=\dim(\mathbb{R}^4)$$

Ce qui entraine que

$$\dim\big(Im(u)\big)=3$$

Première méthode

On regarde si la famille $\big(u(e_1),u(e_2),u(e_3),u(e_4)\big)$ est libre

$$\alpha u(e_1)+\beta u(e_2)+\gamma u(e_3)+\delta u(e_4)=0_{\mathbb{R}^4}\Leftrightarrow \begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\end{matrix}\left\{\begin{matrix}\alpha-\beta+2\gamma+2\delta=0\\ \alpha+2\beta-\gamma+2\delta=0\\ -\alpha+\beta-2\gamma-2\delta=0\\ -\alpha+\beta-\gamma-\delta=0\end{matrix}\right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix}L_1\\L_2-L_1\\L_3+L_1\\L_4+L_1\end{matrix}\left\{\begin{matrix}\alpha-\beta+2\gamma+2\delta=0\\ 3\beta-3\gamma=0\\ 0=0\\ \gamma+\delta=0\end{matrix}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}\alpha-\beta+2\gamma+2\delta=0\\ \beta=\gamma\\ \delta=-\gamma\end{matrix}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}\alpha=\gamma\\ \beta=\gamma\\ \delta=-\gamma\end{matrix}\right.$$

La famille n'est pas libre, pour $\gamma=1$, cela donne la relation

$$u(e_1)+u(e_2)+u(e_3)-u(e_4)=0_{\mathbb{R}^4}$$

Soit

$$u(e_1)+u(e_2)+u(e_3)=u(e_4)$$

Alors

$$\begin{aligned}Im(u)&=vect\big(u(e_1),u(e_2),u(e_3),u(e_4)\big)=Vect\big(u(e_1),u(e_2),u(e_3),u(e_1)+u(e_2)+u(e_3)\big)\\&=Vect\big(u(e_1),u(e_2),u(e_3)\big)\end{aligned}$$

Comme $\big(u(e_1),u(e_2),u(e_3)\big)$ est une famille génératrice à trois vecteurs dans un espace de dimension 3, c'est une base.

Deuxième méthode

$$e_1+e_2+e_3-e_4\in\ker(u)$$

Par conséquent

$$u(e_1+e_2+e_3-e_4)=0_{\mathbb{R}^4}$$

Ce qui entraine que

$$u(e_1)+u(e_2)+u(e_3)-u(e_4)=0_{\mathbb{R}^4}$$

Et on conclut de la même façon.

3.

$$\begin{aligned}x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in Im(u)=Vect\big(u(e_1),u(e_2),u(e_3)\big)&\Leftrightarrow \exists(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3,x\\&=\alpha u(e_1)+\beta u(e_2)+\gamma u(e_3)\ \Leftrightarrow \exists(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3,(x_1,x_2,x_3,x_4)\\&=\alpha(1,1,-1,-1)+\beta(-1,2,2,1,1)+\gamma(2,-1,-2,-1)\Leftrightarrow\exists(\alpha,\beta,\gamma)\\&\in\mathbb{R}^3,\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\end{matrix}\left\{\begin{matrix}\alpha-\beta+2\gamma=x_1\\ \alpha+2\beta-\gamma=x_2\\ -\alpha+\beta-2\gamma=x_3\\ -\alpha+\beta-\gamma=x_4\end{matrix}\right.\Leftrightarrow\exists(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3\begin{matrix}L_1\\L_2-L_1\\L_3+L_1\\L_4+L_1\end{matrix}\left\{\begin{matrix}\alpha-\beta+2\gamma+2\delta=x_1\\ 3\beta-3\gamma=-x_1+x_2\\ 0=x_1+x_3\\ \gamma+\delta=x_1+x_4\end{matrix}\right.\\&\Leftrightarrow\exists(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3\begin{matrix}L_1\\L_2-L_1\\L_3+L_1\\L_4+L_1\end{matrix}\left\{\begin{matrix}\alpha-\beta+2\gamma+2\delta=x_1\\ 3\beta-3\gamma=-x_1+x_2\\ \gamma+\delta=x_1+x_4\\ 0=x_1+x_3\end{matrix}\right.\end{aligned}$$

Ce qui montre que $Im(u)=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4,x_1+x_3=0\}$

Allez à : Exercice 10

Correction exercice 11.

1. La matrice de $f\circ f$ dans la base β est $Mat_\beta(f)\times Mat_\beta(f)$

   Or $Mat_\beta(f)=\begin{pmatrix}-7&8&6\\-6&7&6\\0&0&-1\end{pmatrix}$ donc $Mat_\beta(f^2)=\begin{pmatrix}-7&8&6\\-6&7&6\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-7&8&6\\-6&7&6\\0&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I$
2. Il existe g telle que $g\circ f=Id$ donc f est bijective et $f^{-1}=f$.

Allez à : Exercice 11

Correction exercice 12.

1. Soit $u=(x,y,z,t)$, $u'=(x',y',z',t')$ deux vecteurs et λ et λ' deux réels.

$$\begin{aligned}f(\lambda u+\lambda' u)&=f(\lambda x+\lambda' x',\lambda y+\lambda' y',\lambda z+\lambda' z',\lambda t+\lambda' t')\\&=\big(\lambda x+\lambda' x'-2(\lambda y+\lambda' y'),\lambda x+\lambda' x'-2(\lambda y+\lambda' y'),0,\lambda x+\lambda' x'-(\lambda y+\lambda' y')\\&-(\lambda z+\lambda' z')-(\lambda t+\lambda' t')\big)\\&=\big(\lambda(x-2y)+\lambda'(x'-2y'),\lambda(x-2y)+\lambda'(x'-2y'),0,\lambda(x-y-z-t)\\&+\lambda'(x'-y'-z'-t')\big)\\&=\lambda(x-2y,x-2y,0,x-y-z-t)+\lambda'(x'-2y',x'-2y',0,x'-y'-z'-t')\\&=\lambda f(u)+\lambda f(u')\end{aligned}$$

f est bien linéaire.

2. Soit $u=(x,y,z,t)\in\ker(u)$

$$\begin{cases}x-2y=0\\x-2y=0\\0=0\\x-y-z-t=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2y=0\\x-y-z-t=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2y\\y-z-t=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2y\\t=y-z\end{cases}$$

Donc

$$u=(2y,y,z,y-z)=y(2,1,0,1)+z(0,0,1,-1)$$

$a=(2,1,0,1)$ et $b=(0,0,1,-1)$ sont deux vecteurs non colinéaires (qui forment donc une famille libre) qui engendre $\ker(f)$ ils forment une base de $\ker(f)$.

D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(f))+\dim\big(Im(f)\big)=\dim(\mathbb{R}^4)\Leftrightarrow\dim\big(Im(f)\big)=2$$

Si on appelle (e_1,e_2,e_3,e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$, $f(e_1)=(1,1,0,1)$ et $f(e_3)=(0,0,0,-1)$ sont deux vecteurs non proportionnels de $Im(f)$, ils forment donc une famille libre à deux éléments dans un espace de dimension 2, c'est une base de $Im(f)$.

3. On a $\ker(f)\oplus Im(f)=\mathbb{R}^4$ si et seulement si $\big(a,b,f(e_1),f(e_3)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

$$\det\big(a,b,f(e_1),f(e_3)\big)=\begin{vmatrix}2&0&1&0\\1&0&1&0\\0&1&0&0\\1&-1&1&-1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}2&0&1\\1&0&1\\0&1&0\end{vmatrix}=+1\times\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}=1$$

$\big(a,b,f(e_1),f(e_3)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^4$ donc $\ker(f)\oplus Im(f)=\mathbb{R}^4$.

Allez à : Exercice 12

Correction exercice 13.

1. Soient $u=(x,y,z,t)$ et $u'=(x',y',z',t')$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Soient λ et λ' deux réels.

$$\lambda u+\lambda' u'=\lambda(x,y,z,t)+\lambda'(x',y',z',t')=(\lambda x+\lambda' x',\lambda y+\lambda' y',\lambda z+\lambda' z',\lambda t+\lambda' t')$$

$$\begin{aligned}f(\lambda u+\lambda' u')&=f(\lambda x+\lambda' x',\lambda y+\lambda' y',\lambda z+\lambda' z',\lambda t+\lambda' t')\\&=\big((\lambda x+\lambda' x')+(\lambda y+\lambda' y'),(\lambda z+\lambda' z')+(\lambda t+\lambda' t'),(\lambda x+\lambda' x')+(\lambda y+\lambda' y')\\&+(\lambda z+\lambda' z')+(\lambda t+\lambda' t')\big)\\&=\big(\lambda(x+y)+\lambda'(x'+y'),\lambda(z+t)+\lambda'(z'+t'),\lambda(x+y+z+t)\\&+\lambda'(x'+y'+z'+t')\big)\\&=\lambda(x+y,z+t,x+y+z+t)+\lambda^{'}(x'+y',z'+t',x'+y'+z'+t')\\&=\lambda f(u)+\lambda f(u')\end{aligned}$$

f est linéaire.

2.

$$u\in\ker(f)\Leftrightarrow f(u)=0_{\mathbb{R}^3}\Leftrightarrow(x+y,z+t,x+y+z+t)=(0,0,0,0)\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=0\\z+t=0\\x+y+z+t=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=-x\\t=-z\end{cases}\Leftrightarrow u=(x,-x,z,-z)=x(1,-1,0,0)+z(0,0,1,-1)$$

On pose $a=(1,-1,0,0)$ et $b=(0,0,1,-1)$, a et b engendrent $\ker(f)$, d'autre part ces vecteurs ne sont pas proportionnels, ils forment donc une famille libre, finalement (a,b) est une base de $\ker(f)$.

3.

Première méthode

$$Im(f) = Vect\big(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)\big)$$

$$f(e_1) = (1,0,1); f(e_2) = (1,0,1); f(e_3) = (0,1,1); f(e_4) = (0,1,1)$$

Comme $f(e_1) = f(e_2)$ et $f(e_3) = f(e_4)$

$$Im(f) = Vect\big(f(e_1), f(e_3)\big)$$

$f(e_1)$ et $f(e_3)$ ne sont pas proportionnels, ils forment une famille libre, comme cette famille est génératrice de $Im(f)$, c'est une base de $Im(f)$.

Deuxième méthode

D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(f)) + \dim\big(Im(f)\big) = \dim(\mathbb{R}^4) \Leftrightarrow 2 + \dim\big(Im(f)\big) = 4 \Leftrightarrow \dim\big(Im(f)\big) = 2$$

Ensuite on cherche deux vecteurs non proportionnels de $Im(f)$, par exemple $f(e_1)$ et $f(e_3)$, ils forment une famille libre dans un espace de dimension 2, c'est une base.

Allez à : Exercice 13

Correction exercice 14.

1. Soient $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Soient λ et μ deux réels.

$$\lambda x + \mu y = (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \lambda x_3 + \mu y_3)$$

$$\begin{aligned} u(\lambda x + \mu y) = \big(&-2(\lambda x_1 + \mu y_1) + 4(\lambda x_2 + \mu y_2) + 4(\lambda x_3 + \mu y_3), -(\lambda x_1 + \mu y_1) + \lambda x_3 \\ &+ \mu y_3, -2(\lambda x_1 + \mu y_1) + 4(\lambda x_2 + \mu y_2) + 4(\lambda x_3 + \mu y_3)\big) \\ &= (\lambda[-2x_1 + 4x_2 + 4x_3] + \mu[-2y_1 + 4y_2 + y_3], \lambda[-x_1 + x_3] \\ &+ \mu[-y_1 + y_3], \lambda[-2x_1 + 4x_2 + 4x_3] + \mu[-2y_1 + 4y_2 + y_3]) \\ &= \lambda(-2x_1 + 4x_2 + 4x_3, -x_1 + x_3, -2x_1 + 4x_2 + 4x_3) \\ &+ \mu(-2y_1 + 4y_2 + 4y_3, -y_1 + y_3, -2y_1 + 4y_2 + 4y_3) = \lambda u(x) + \mu u(y) \end{aligned}$$

Donc u est linéaire.

2. Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \ker(u)$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ ses coordonnées dans la base canonique.

$$x \in \ker(u) \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 0 \\ -x_1 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 = x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 = x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -\dfrac{1}{2}x_3 \\ x_1 = x_3 \end{cases}$$

$$x = \left(x_3, -\frac{1}{2}x_3, x_3\right) = \frac{x_3}{2}(2, -1, 2)$$

$a = (2, -1, 2) = 2e_1 - e_2 + 2e_3$ est un vecteur non nul qui engendre $\ker(u)$, c'est une base de $\ker(u)$.

$$Im(u) = Vect\big(u(e_1), u(e_2), u(e_3)\big)$$

D'après le théorème du rang,

$$\dim(\ker(u)) + \dim\big(Im(u)\big) = \dim(\mathbb{R}^3) \Leftrightarrow 1 + \dim\big(Im(u)\big) = 3 \Leftrightarrow \dim\big(Im(u)\big) = 2$$

$u(e_1) = -2e_1 - e_2 - 2e_3 = (-2, -1, -2)$ et $u(e_2) = 4e_1 + 4e_3 = (4,0,4)$, ces deux vecteurs ne sont pas proportionnels, ils forment une famille libre de $Im(u)$ qui est de dimension 2, $\big(u(e_1), u(e_2)\big)$ est une base de $Im(u)$.

3. $\ker(u) \oplus Im(u) = \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \big(a, u(e_1), u(e_2)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Il est presque évident que

$$u(e_1) + u(e_3) = a$$

Sinon on calcule $\alpha a + \beta u(e_1) + \gamma u(e_3) = 0_{\mathbb{R}^3}$ et on s'aperçoit que $\alpha = 1$, $\beta = -1$ et $\gamma = -1$ est une solution non nulle.

$\big(a, u(e_1), u(e_2)\big)$ n'est pas une base, donc on n'a pas $\ker(u) \oplus Im(u) = \mathbb{R}^3$

Allez à : Exercice 14

Correction exercice 15.

1.
$$\begin{aligned} u(x) = u(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) &= x_1u(e_1) + x_2u(e_2) + x_3u(e_3) \\ &= x_1(2e_1 + e_2 + 3e_3) + x_2(e_2 - 3e_3) + x_3(-2e_2 + 2e_3) \\ &= 2x_1e_1 + (x_1 + x_2 - 2x_3)e_2 + (3x_1 - 3x_2 + 2x_3)e_3 \\ &= (2x_1, x_1 + x_2 - 2x_3, 3x_1 - 3x_2 + 2x_3) \end{aligned}$$

2. $f(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3} = 2 \times 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow 0_{\mathbb{R}^3} \in E$

   Soient x et y deux vecteurs de E, alors $u(x) = 2x$ et $u(y) = 2y$

   Soient λ et μ deux réels
$$u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y) = \lambda(2x) + \mu(2y) = 2(\lambda x + \mu y)$$
   Donc $\lambda x + \mu y \in E$ et E est un sous-espace-vectoriel de $\mathbb{R}^3$

   $f(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3} = -0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow 0_{\mathbb{R}^3} \in F$

   Soient x et y deux vecteurs de F, alors $u(x) = -x$ et $u(y) = -y$

   Soient λ et μ deux réels
$$u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y) = \lambda(-x) + \mu(-y) = -(\lambda x + \mu y)$$
   Donc $\lambda x + \mu y \in F$ et F est un sous-espace-vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

3.
$$x \in E \Leftrightarrow u(x) = 2x \Leftrightarrow (2x_1, x_1 + x_2 - 2x_3, 3x_1 - 3x_2 + 2x_3) = 2(x_1, x_2, x_3)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 = 2x_1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 2x_2 \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$
   Donc $x = (x_1, x_1, x_3) = x_1(1,1,0) = x_1(e_1 + e_2)$

   $e_1 + e_2 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, il s'agit d'une base de E.
$$x \in F \Leftrightarrow u(x) = -x \Leftrightarrow (2x_1, 3x_1 - x_2, 3x_1 - 3x_2 + 2x_3) = -(x_1, x_2, x_3)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 = -x_1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = -x_2 \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$$
   Donc $x = (0, x_3, x_3) = x_3(0,1,1) = x_3(e_2 + e_3)$

   $e_2 + e_3 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, il s'agit d'une base de F.

4.
$$\dim(E) + \dim(F) = 1 + 1 = 2$$
   Donc il n'y a pas somme directe.

Allez à : Exercice 15

Correction exercice 16.

1. Soient u, u' deux vecteurs de E_{-1}, alors $f(u) = -u$ et $f(u') = -u'$. Soient λ, λ' deux réels.
$$f(\lambda u + \lambda' u') = \lambda f(u) + \lambda' f(u') = \lambda(-u) + \lambda(-u') = -(\lambda u + \lambda' u')$$
   La première égalité car f est linéaire, la seconde car u et u' sont dans E_{-1},

   La troisième montre que $\lambda u + \lambda' u' \in E_{-1}$
$$f(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3} = -0_{\mathbb{R}^3}$$
   La première égalité car l'image du vecteur nul par une application linéaire est toujours le vecteur nul, la seconde égalité montre que $0_{\mathbb{R}^3} \in E_{-1}$.

   E_{-1} est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

   Soient u, u' deux vecteurs de E_1, alors $f(u) = u$ et $f(u') = u'$. Soient λ, λ' deux réels.
$$f(\lambda u + \lambda' u') = \lambda f(u) + \lambda' f(u') = \lambda u + \lambda u'$$
   La première égalité car f est linéaire, la seconde car u et u' sont dans E_1,

   La seconde montre que $\lambda u + \lambda' u' \in E_1$
$$f(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

La première égalité car l'image du vecteur nul par une application linéaire est toujours le vecteur nul, cela montre aussi que $0_{\mathbb{R}^3} \in E_1$.
E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2.
$$f(e_1 - e_2) = f(e_1) - f(e_2) = -\frac{1}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3 - \left(\frac{2}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3\right) = -e_1 + e_2 = -(e_1 - e_2)$$
Donc $e_1 - e_2 \in E_{-1}$
$$f(e_1 - e_3) = f(e_1) - f(e_3) = -\frac{1}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3 - \left(\frac{2}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 - \frac{1}{3}e_3\right) = -e_1 + e_3 = -(e_1 - e_3)$$
Donc $e_1 - e_3 \in E_{-1}$
$$\begin{aligned} f(e_1 + e_2 + e_3) &= f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) \\ &= -\frac{1}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3 + \frac{2}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3 + \frac{2}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 - \frac{1}{3}e_3 = e_1 + e_2 + e_3 \end{aligned}$$
Donc $e_1 + e_2 + e_3 \in E_1$

3. Les vecteurs $e_1 - e_2$ et $e_1 - e_3$ ne sont pas proportionnels, ils forment une famille de E_{-1}, donc la dimension de E_1 est supérieur ou égal à 2.
E_1 a un vecteur non nul, donc sa dimension est supérieur ou égal à 1.
4. Soit $u \in E_{-1} \cap E_1$, $f(u) = -u$ et $f(u) = u$ donc $-u = u$, ce qui signifie que le seul vecteur de $E_{-1} \cap E_1$ est le vecteur nul.
$$E_{-1} \cap E_1 = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$$
5.
$$\dim(E_{-1} + E_1) = \dim(E_{-1}) + \dim(E_1) - \dim(E_{-1} \cap E_1) = \dim(E_{-1}) + \dim(E_1) \geq 2 + 1 = 3$$
Comme
$$E_{-1} + E_1 \subset \mathbb{R}^3$$
On a
$$\dim(E_{-1} + E_1) \leq 3$$
Finalement
$$\dim(E_{-1} + E_1) = 3$$
Remarque : cela entraine que $\dim(E_{-1}) = 2$ et $\dim(E_1) = 1$
L'intersection de ces sous-espaces vectoriels étant réduit au vecteur nul on a
$$E_{-1} \oplus E_1 = \mathbb{R}^3$$
6. On peut calculer $f^2(e_1)$, $f^2(e_2)$ et $f^2(e_3)$ pour s'apercevoir que ces vecteurs valent respectivement e_1, e_2 et e_3. Mais c'est long.

Autre méthode

D'après la question précédente $(e_1 - e_2, e_1 - e_3, e_1 + e_2 + e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
(Une base de E_{-1} collée à une base de E_1 donne une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $E_{-1} \oplus E_1 = \mathbb{R}^3$).
Tous les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ s'écrive de manière unique comme une combinaison linéaire de ces trois vecteurs, il suffit de montrer que $f^2(e_1 - e_2) = e_1 - e_2$, $f^2(e_1 - e_3) = e_1 - e_3$ et que $f^2(e_1 + e_2 + e_3) = e_1 + e_2 + e_3$
Là, j'ai fait long, en fait il suffit de montrer les égalités ci-dessous
$$f^2(e_1 - e_2) = f\big(f(e_1 - e_2)\big) = f\big(-(e_1 - e_2)\big) = -f(e_1 - e_2) = -\big(-(e_1 - e_2)\big) = e_1 - e_2$$
Car $e_1 - e_2 \in E_{-1}$
$$f^2(e_1 - e_3) = f\big(f(e_1 - e_3)\big) = f\big(-(e_1 - e_3)\big) = -f(e_1 - e_3) = -\big(-(e_1 - e_3)\big) = e_1 - e_3$$
Car $e_1 - e_3 \in E_{-1}$
$$f^2(e_1 + e_2 + e_3) = f\big(f(e_1 + e_2 + e_3)\big) = f(e_1 + e_2 + e_3) = e_1 + e_2 + e_3$$
Car $e_1 + e_2 + e_3 \in E_1$
Par conséquent $f^2 = id_{\mathbb{R}^3}$
Cela montre que $f^{-1} = f$ et que f est bijective.

Remarque :

Avec les matrices on retrouve ce résultat plus facilement.

Allez à : Exercice 16

Correction exercice 17.

1.

$$\alpha a+\beta b=\gamma c=0_{\mathbb{R}^3}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\frac{2}{3}\alpha+\frac{2}{3}\beta+\frac{1}{3}\gamma=0\\-\frac{2}{3}\alpha+\frac{1}{3}\beta+\frac{2}{3}\gamma=0\\\frac{1}{3}\alpha-\frac{2}{3}\beta+\frac{2}{3}\gamma=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}2\alpha-2\beta+\gamma=0\\-2\alpha+\beta+2\gamma=0\\\alpha-2\beta+2\gamma=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\begin{array}{r}L_1\\L_2+L_1\\2L_3-L_1\end{array}\left\{\begin{array}{l}2\alpha-2\beta+\gamma=0\\-\beta+3\gamma=0\\\gamma=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\alpha=0\\\beta=0\\\gamma=0\end{array}\right.$$

(a,b,c) est une famille libre à trois vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 3, c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

2.

$$\begin{aligned}u(x)=u(x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3)&=x_1u(e_1)+x_2u(e_2)+x_3u(e_3)\\&=x_1(3e_1+e_2-e_3)+x_2(e_1+7e_2)+x_3(-e_1-e_3)\\&=[3x_1+x_2-x_3]e_1+[x_1+7x_2]e_2+[-x_1-x_3]e_3\\&=(3x_1+x_2-x_3,x_1+7x_2,-x_1-x_3)\end{aligned}$$

3. $a=\frac{1}{3}(2,-2,1)$ donc

$$u(a)=\frac{1}{3}(3\times 2-2-1,2+7\times(-2),-2-1)=\frac{1}{3}(3,-12,-3)=(1,-4,-1)$$

$$3a-3c=3\times\frac{1}{3}(2,-2,1)-3\times\frac{1}{3}(1,2,2)=(2,-2,1)-(1,2,2)=(1,-4,-1)$$

On a bien $u(a)=3a-3c$

$b=\frac{1}{3}(2,1,-2)$ donc

$$u(b)=\frac{1}{3}\big(3\times 2+1-(-2),2+7,-2-(-2)\big)=\frac{1}{3}(9,9,0)=(3,3,0)$$

$$3b+3c=3\times\frac{1}{3}(2,1,-2)+3\times\frac{1}{3}(1,2,2)=(2,1,-2)+(1,2,2)=(3,3,0)$$

On a bien $u(b)=3b+3c$

$c=\frac{1}{3}(1,2,2)$ donc

$$u(c)=\frac{1}{3}(3+2-2,1+7\times 2,-1-2)=\frac{1}{3}(3,15,-3)=(1,5,-1)$$

$$\begin{aligned}-3a+3b+3c&=-3\times\frac{1}{3}(2,-2,1)+3\times\frac{1}{3}(2,1,-2)+3\times\frac{1}{3}(1,2,2)\\&=-(2,-2,1)+(2,1,-2)+(1,2,2)=(1,5,-1)\end{aligned}$$

On a bien $u(c)=-3a+3b+3c$

Allez à : Exercice 17

Correction exercice 18.

1. Soient $u=(x,y,z)$ et $u'=(x',y',z')$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et deux réels λ et λ'

$$\lambda u+\lambda' u'=(\lambda x+\lambda' x',\lambda y+\lambda' y',\lambda z+\lambda' z')=(X,Y,Z)$$

$$\begin{aligned}p(\lambda u+\lambda' u') &= (2X+Y+2Z,Y,-X-Y-Z)\\ &= \big(2(\lambda x+\lambda' x')+(\lambda y+\lambda' y')+2(\lambda z+\lambda' z'),\lambda y+\lambda' y',-(\lambda x+\lambda' x')-(\lambda y+\lambda' y')\\ &\quad -(\lambda z+\lambda' z')\big)\\ &= \big(\lambda(2x+y+2z)+\lambda'(2x'+y'+2z'),\lambda y+\lambda' y',\lambda(-x-y-z)\\ &\quad +\lambda'(-x'-y'-z')\big)\\ &= \lambda(2x+y+2z,y,-x-y-z)+\lambda'(2x'+y'+2z',y',-x'-y'-z')\\ &= \lambda p(u)+\lambda' p(u')\end{aligned}$$

Donc p est linéaire.

2.

$p(e_1)=(2,0,-1)=2e_1-e_3 ; p(e_2)=(1,1,-1)=e_1+e_2-e_3$ et $p(e_3)=(2,0,-1)=2e_1-e_3=p(e_1)$

$$p^2(e_1)=p(2e_1-e_3)=2p(e_1)-p(e_3)=2e_1-e_3=p(e_1)$$
$$p^2(e_2)=p(e_1+e_2-e_3)=p(e_1)+p(e_2)-p(e_3)=p(e_2)$$
$$p^2(e_3)=p(2e_1-e_3)=2p(e_1)-p(e_3)=p(e_3)$$

Donc pour tout $u\in\mathbb{R}^3$, $p^2(u)=p(u)$ et alors $p^2=p$.

3.

$$im(p)=Vect\big(p(e_1),p(e_2),p(e_3)\big)=Vect\big(p(e_1),p(e_2)\big)$$

$\big(p(e_1),p(e_2)\big)$ est une famille de deux vecteurs non colinéaires, elle est libre, de plus elle engendre $im(p)$, c'est une base de $im(p)$

$$u\in\ker(p-Id)\Leftrightarrow (p-Id)(u)=0_{\mathbb{R}^3}\Leftrightarrow p(u)=u\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y+2z=x\\ y=y\\ -x-y-z=z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+2z=0\\ y=y\\ -x-y-2z=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x+y+2z=0\Leftrightarrow x=-y-2z$$
$$\begin{aligned}u=(x,y,z)\in\ker(p-Id)\Leftrightarrow \exists y,z\in\mathbb{R}, u&=(-y-2z,y,z)=y(-1,1,0)+z(-2,0,1)\\ &=y(-e_1+e_2)+z(-2e_1+e_3)\end{aligned}$$

$(-e_1+e_2,-2e_1+e_3)$ est une famille de deux vecteurs non proportionnels, c'est une famille libre qui engendre $\ker(p-Id)$ c'est une base de $\ker(p-Id)$

Les composantes de $p(e_1)=(2,0,-1)$ et de $p(e_2)=(1,1,-1)$ vérifient l'équation $2x+y+z=0$ qui caractérise $Im(p)$ donc $\ker(p-Id)\subset Im(p)$ et comme ces deux espaces vectoriels sont de même dimension, ils sont égaux.

4. D'après le théorème du rang

$$\dim(ker(p))+\dim\big(Im(p)\big)=\dim(\mathbb{R}^3)=3$$

Si $u\in\ker(p)\cap im(p)=\ker(p)\cap\ker(p-Id)$ alors $p(u)=0_{\mathbb{R}^3}$ et $p(u)=u$ donc $u=0_{\mathbb{R}^3}$, ce qui montre que $\ker(p)\cap im(p)=\{0_{\mathbb{R}^3}\}$, finalement on a

$$\ker(p)\oplus Im(p)=\mathbb{R}^3$$

Allez à : Exercice 18

Correction exercice 19.

1. Soit $x_1\in E_1$, $(f-id)(x_1)=0_E\Leftrightarrow f(x_1)-x_1=0_E\Leftrightarrow f(x_1)=x_1$

Soit $x_2\in E_2$, $(f+id)(x_2)=0_E\Leftrightarrow f(x_2)+x_2=0_E\Leftrightarrow f(x_2)=-x_2$

2. On pose $x_1=\frac{f(x)+x}{2}$ et $x_2=-\frac{f(x)-x}{2}$

$$f(x_1)=f\left(\frac{f(x)+x}{2}\right)=\frac{1}{2}\big(f^2(x)+f(x)\big)=\frac{1}{2}\big(x+f(x)\big)=x_1$$

Donc, d'après la première question, $x_1\in E_1$.

De même

$$f(x_2)=f\left(-\frac{f(x)-x}{2}\right)=-\frac{1}{2}\big(f^2(x)-f(x)\big)=-\frac{1}{2}\big(x-f(x)\big)=-x_2$$

Donc, d'après la première question, $x_2\in E_2$.

Comme $x = x_1 + x_2$, on a $E_1 + E_2 = E$
Il reste à montrer que $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$
Si $x \in E_1 \cap E_2$ alors $f(x) = x$ et $f(x) = -x$ donc $x = -x$ ce qui montre que x est le vecteur nul.
On a $E_1 \oplus E_2 = E$.

3. $f(v_i) = v_i$ pour $1 \leq i \leq r$ et $f(v_i) = -v_i$ pour $r + 1 \leq i \leq n$

Remarque :

La matrice de f dans cette base est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & & \cdots & & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \cdots & & 0 \\ & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & -1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Allez à : Exercice 19

Correction exercice 20.

1. D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(u)) + \dim\big(Im(u)\big) = \dim(\mathbb{R}^2) \Leftrightarrow \dim(\mathrm{Im}(u)) = 2 - 1 = 1$$

Par conséquent $u(e_1)$ et $u(e_2)$ sont proportionnels et alors

$$u(e_2) = au(e_1) = ae_1 + ae_2$$

2.

$$u(x) = u(x_1e_1 + x_2e_2) = x_1u(e_1) + x_2u(e_2) = x_1(e_1 + e_2) + a(x_1e_1 + x_2e_2)$$
$$= (x_1 + ax_2)e_1 + (x_2 + ax_2)e_2 = (x_1 + ax_2, x_2 + ax_2)$$

3.

$$u(e_2) = au(e_1) \Leftrightarrow u(e_2) - au(e_1) = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow u(e_2 - ae_1) = 0_{\mathbb{R}^2}$$

$e_2 - ae_1$ est un vecteur non nul de $\ker(u)$ et $\ker(u)$ est une droite, donc il s'agit d'une base de $\ker(u)$.

Allez à : Exercice 20

Correction exercice 21.

1.

$$f(e_1) = 1$$
$$f(e_2) = 1$$
$$f(e_3) = 1$$
$$f(e_4) = 1$$

Donc

$$Im(f) = \{1\} \quad et \quad \dim\big(im(f)\big) = 1$$

2. D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(f)) + \dim\big(Im(f)\big) = \dim(\mathbb{R}^4) \Leftrightarrow \dim(\ker(f)) = 3$$
$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \ker(f) \Leftrightarrow x = (-x_2 - x_3 - x_4, x_2, x_3, x_4)$$
$$= x_2(-1,1,0,0) + x_3(-1,0,1,0) + x_4(-1,0,0,1)$$

On pose $a = (-1,1,0,0), b = (-1,0,1,0)$ et $c = (-1,0,0,1)$
(a, b, c) est une famille génératrice de $\ker(f)$ avec trois vecteurs et $\dim(\ker(f)) = 3$ donc (a, b, c) est une base de $\ker(f)$.

Allez à : Exercice 21

Correction exercice 22.

1. Soit $x, x' \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ et $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$

$$u(\lambda x + \lambda' x') = (\lambda x_1 + \lambda' x'_1) + (\lambda x_2 + \lambda' x'_2) + \cdots + (\lambda x_n + \lambda' x'_n)$$
$$= \lambda(x_1 + x_2 + \cdots . + x_n) + \lambda'(x'_1 + x'_2 + \cdots + x'_n) = \lambda u(x) + \lambda' u(x')$$

Donc u est linéaire

2. $u(e_1) = u(e_2) = \cdots = u(e_n) = 1$ donc $\dim\big(\mathcal{I}m(u)\big) = 1$

D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(u)) + \dim\big(\mathcal{I}m(u)\big) = \dim(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow \dim(\ker(u)) = n - 1$$

Allez à : Exercice 22

Correction exercice 23.

Supposons (a)

Si $y \in Im(u)$ alors il existe $x \in E$ $y = u(x)$ alors $u(y) = u^2(x) = 0_E$ alors $y \in Ker(u)$

Donc $Im(u) \subset \ker(u)$

D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(u)) + \dim\big(Im(u)\big) = \dim(E) \Leftrightarrow \dim(\ker(u)) + \frac{n}{2} = n \Leftrightarrow \dim(\ker(u)) = \frac{n}{2}$$

$Im(u) \subset \ker(u)$ et ces deux espaces ont la même dimension, donc ils sont égaux.

Supposons (b)

D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(u)) + \dim\big(Im(u)\big) = dimE \Leftrightarrow 2\dim\big(Im(u)\big) = n \Leftrightarrow 2\mathrm{rg(u)} = \mathrm{n}$$

Pour tout $x \in E$, $u(x) \in Im(u)$ donc $u(x) \in \ker(u)$ donc $u\big(u(x)\big) = 0_E$ donc $u^2 = O_E$.

Allez à : Exercice 23

Correction exercice 24.

Si u est injective alors si $x \in \ker(u) \Leftrightarrow u(x) = 0_F \Leftrightarrow u(x) = u(0_E) \Rightarrow x = 0_E$ car u est injective, ce qui montre que $\ker(u) = \{0_E\}$.

Si $\ker(u) = \{0_E\}$ alors $u(x) = u(y) \Leftrightarrow u(x) - u(y) = 0_F \Leftrightarrow u(x - y) = 0_F \Rightarrow x - y = 0_E$ car $\ker(u) = \{0_E\}$, et donc $x = y$ ce qui montre que u est injective.

Allez à : Exercice 24

Correction exercice 25.

1. $(u - \lambda id_E)(x) = 0_E \Leftrightarrow u(x) - \lambda x = 0_E \Leftrightarrow u(x) = \lambda x$

$u(0_E) = 0_E = \lambda \times 0_E \Rightarrow 0_E \in E_\lambda$

Soient x_1 et x_2 deux vecteurs de E_λ, on a $\mathrm{u}(x_1) = \lambda x_2$ et $u(x_2) = \lambda x_2$

Soient α_1 et α_2 deux réels.

$$u(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 u(x_1) + \alpha_2 u(x_2) = \alpha_1 \lambda x_1 + \alpha_2 \lambda x_2 = \lambda(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)$$

Donc $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in E_\lambda$

E_λ est un sous-espace vectoriel de E.

2. F est un sous-espace vectoriel de E donc $0_E \in F$ par conséquent $u(0_E) = 0_E \in u(F)$

Pour tout x_1 et x_2 dans F. Pour tout α_1 et α_2 réels. On a $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in F$

Soient y_1 et y_2 dans $u(F)$, il existe x_1 et x_2 dans F tels que $y_1 = u(x_1)$ et $y_2 = u(x_2)$

Alors

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = \alpha_1 u(x_1) + \alpha_2 u(x_2) = u(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)$$

Car u est linéaire, donc

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = u(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \in u(F)$$

Car $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in F$.

Par conséquent $u(F)$ est un sous-espace vectoriel de E.

3. Si $x \in E_\lambda$ alors $x = \frac{1}{\lambda} u(x) = u\left(\frac{1}{\lambda} x\right) \in u(E_\lambda)$ donc $E_\lambda \subset u(E_\lambda)$

Si $y \in u(E_\lambda)$ il existe $x \in E_\lambda$ tel que $y = u(x)$ donc $y = \lambda x \in E_\lambda$, ce qui montre que $u(E_\lambda) \subset E_\lambda$

Finalement

$$u(E_\lambda) = E_\lambda$$

Allez à : Exercice 25

Correction exercice 26.

1. Supposons que u soit surjective, alors $Im(u) = F$ par conséquent $\dim\big(Im(u)\big) = p$ et d'après le théorème du rang
$$\dim(\ker(u)) + \dim\big(Im(u)\big) = \dim(E) \Leftrightarrow \dim(ker(u)) + p = n \Leftrightarrow \dim(\ker(u)) = n - p < 0$$
Ce qui n'est pas possible, donc u n'est pas surjective.
2. Supposons que u soit injective, alors $\ker(u) = \{0_E\}$ par conséquent $\dim(ker(u)) = 0$ et d'après le théorème du rang, comme $Im(u) \subset F$ entraine que $\dim\big(Im(u)\big) < p$
$$\dim(\ker(u)) + \dim\big(Im(u)\big) = \dim(E) \Leftrightarrow \dim\big(Im(u)\big) = n \Leftrightarrow n = \dim\big(Im(u)\big) < p$$
Ce qui n'est pas possible, donc u n'est pas injective.

Allez à : Exercice 26

Correction exercice 27.

Soit $y \in \ker(f) \cap \mathrm{im}(f)$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$, et $f(y) = 0_E$

Donc $f^2(x) = f\big(f(x)\big) = f(y) = 0_E$ donc $x \in \ker(f^2)$, comme $y = f(x)$, $y \in f(\ker(f^2))$

On a montré que
$$\ker(f) \cap \mathrm{im}(f) \subset f(\ker(f^2))$$
Soit $y \in f(\ker(f^2))$, il existe $x \in \ker(f^2)$ tel que $y = f(x)$, ce qui montre que $y \in Im(f)$ et comme $f(y) = f\big(f(x)\big) = f^2(x) = 0_E$ on a $y \in \ker(f)$

On a montré que
$$f(\ker(f^2)) \subset \ker(f) \cap \mathrm{im}(f)$$
Et donc
$$\ker(f) \cap \mathrm{im}(f) = f(\ker(f^2))$$

Allez à : Exercice 27

Correction exercice 28.

Soit $y \in f(\ker(g \circ f))$, il existe $x \in \ker(g \circ f)$ tel que $y = f(x)$

Donc $y \in Im(g)$,

D'autre part $x \in \ker(g \circ f)$ donc $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = 0_{\mathbb{R}^n}$, par conséquent $g(y) = g\big(f(x)\big) = 0_{\mathbb{R}^n}$, ce qui montre que $y \in \ker(g)$.

On a donc $y \in \ker(g) \cap Im(f)$, on a montré que
$$f(\ker(g \circ f)) \subset \ker(g) \cap Im(f)$$
Soit $y \in \ker(g) \cap Im(f)$

$y \in Im(f)$ donc il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = f(x)$

$y \in \ker(g)$ donc $g(y) = 0_{\mathbb{R}^n}$

On en déduit que $0_{\mathbb{R}^n} = g(y) = g\big(f(x)\big)$, ce qui montre que $x \in \ker(g \circ f)$ et comme $y = f(x)$ cela montre que $y \in f(\ker(g \circ f))$.

Allez à : Exercice 28

Correction exercice 29.

1. Soit $x \in \ker(u)$, $u(x) = 0_E$, donc $u^2(x) = u\big(u(x)\big) = u(0_E) = 0_E$ donc $x \in \ker(u^2)$, ce qui montre que
$$\ker(u) \subset \ker(u^2)$$
2. Soit $y \in im(u^2)$, il existe $x \in E$ tel que $y = u^2(x) = u\big(u(x)\big)$, autrement dit il existe $x' = u(x)$ tel que $y = u(x')$, ce qui montre que $y \in im(u)$.

Allez à : Exercice 29

Correction exercice 30.

Supposons que $\ker(u) \cap im(u) = \{0_E\}$ et montrons que $\ker(u) = \ker(u \circ u)$

Si $x \in \ker(u)$ alors $u(x) = 0_E$ alors $u\big(u(x)\big) = u(0_E) = 0_E$ alors $x \in \ker(u \circ u)$

Cela montre que $\ker(u) \subset \ker(u \circ u)$

Si $x \in \ker(u \circ u)$ alors $u\big(u(x)\big) = 0_E$, on pose $y = u(x) \in Im(u)$ et comme $u(y) = 0_E$, $y \in \ker(u) \cap im(u)$, d'après (i) $y = 0_E$ et donc $u(x) = 0_E$ ce qui signifie que $x \in \ker(u)$

Cela montre que $\ker(u \circ u) \subset \ker(u)$ et finalement $\ker(u) = \ker(u \circ u)$

Supposons que $\ker(u) = \ker(u \circ u)$ et montrons que $\ker(u) \cap Im(u) = \{0_E\}$

Soit $y \in \ker(u) \cap Im(u)$, il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$ et $u(y) = 0_E$, cela entraine que $u\big(u(x)\big) = 0_E$, autrement dit $x \in \ker(u \circ u)$, d'après (ii) $x \in \ker(u)$ donc $y = u(x) = 0_E$, cela montre bien que

$$\ker(u) \cap im(u) = \{0_E\}$$

Allez à : Exercice 30

Correction exercice 31.

1.

a)

$$u(x) = u(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = x_1u(e_1) + x_2u(e_2) + x_3u(e_3)$$
$$= x_1(f_1 + 2f_2) + x_2(2f_1 - f_2) + x_3(-f_1 + f_2)$$
$$= (x_1 + 2x_2 - x_3)f_1 + (2x_1 - x_2 + x_3)f_2 = (x_1 + 2x_2 - x_3, 2x_1 - x_2 + x_3)$$

b)

$$A = Mat_{\underline{e}}(u) = \begin{array}{c} \begin{matrix} u(e_1) & u(e_2) & u(e_3) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \end{matrix}$$

c)

$$x = (x_1, x_2, x_3) \in Ker(u) \Leftrightarrow u(x) = 0_{\mathbb{R}^2}$$
$$\Leftrightarrow AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - 2L_1 \end{matrix} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ -5x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2 \times \dfrac{3}{5}x_3 - x_3 = 0 \\ x_2 = \dfrac{3}{5}x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{5}x_3 \\ x_2 = \dfrac{3}{5}x_3 \end{cases}$$

Donc $x = \left(-\frac{1}{5}x_3, \frac{3}{5}x_3, x_3\right) = \frac{x_3}{5}(-1,3,5)$, on en déduit que $\ker(u) = Vect(a)$ avec $a = (-1,3,5)$.

On en déduit que $\dim(\ker(u)) = 1$ et d'après le théorème du rang :

$$\dim(\ker(u)) + \dim\big(Im(u)\big) = \dim(\mathbb{R}^3) \Leftrightarrow \dim\big(Im(u)\big) = 2$$

Or $Im(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ donc $Im(u) = \mathbb{R}^2$.

Une autre méthode est d'écrire que :

$$Im(u) = Vect\big(u(e_1), u(e_2), u(e_3)\big)$$

Puis, avec le théorème du rang, de dire que la dimension de cet espace est 2, il suffit donc de trouver deux vecteurs non colinéaires dans $Im(u)$, soit par exemple $\big(u(e_1), u(e_2)\big)$ ou $\big(u(e_1), u(e_3)\big)$ ou encore $\big(u(e_2), u(e_3)\big)$, pour trouver une base (libre plus le bon nombre de vecteurs égal base). Mais je pense que si on ne remarque pas que $Im(u) = \mathbb{R}^2$ on a raté quelque chose parce que cela signifie que u est surjective.

2.

a) Soit $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 = (x_1, x_2, x_3)$

$$u(x)=u(x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3)=x_1u(e_1)+x_2u(e_2)+x_3u(e_3)$$
$$=x_1(3e_1+2e_2+2e_3)+x_2(2e_1+3e_2+2e_3)+x_3(2e_1+2e_2+3e_3)$$
$$=(3x_1+2x_2+2x_3)e_1+(2x_1+3x_2+2x_3)e_2+(2x_1+2x_2+3x_3)e_3$$
$$=(3x_1+2x_2+2x_3,2x_1+3x_2+2x_3,2x_1+2x_2+3x_3)$$

b) Histoire de changer de méthode je ne vais pas faire comme dans le 1.
Les coordonnées de $u(x)$ dans la base $\underline{e}$ sont

$$\begin{pmatrix}3x_1+2x_2+2x_3\\2x_1+3x_2+2x_3\\2x_1+2x_2+3x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=AX$$

Où

$$A=Mat_{\underline{e}}(u)=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{pmatrix}$$

c)

$$x=(x_1,x_2,x_3)\in\ker(u)\Leftrightarrow u(x)=0_{\mathbb{R}^3}\Leftrightarrow AX=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}3x_1+2x_2+2x_3\\2x_1+3x_2+2x_3\\2x_1+2x_2+3x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}\begin{cases}3x_1+2x_2+2x_3=0\\2x_1+3x_2+2x_3=0\\2x_1+2x_2+3x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\3L_2-2L_1\\L_3-L_2\end{matrix}\begin{cases}3x_1+2x_2+2x_3=0\\5x_2+2x_3=0\\-x_2+x_3=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2\\5L_3+L_2\end{matrix}\begin{cases}3x_1+2x_2+2x_3=0\\5x_2+2x_3=0\\7x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=0\\x_2=0\\x_3=0\end{cases}$$

Donc $\ker(u)=\{0_{\mathbb{R}^3}\}$
On peut utiliser le théorème du rang, mais je vais faire plus théorique (pour rire), u est un endomorphisme dont le noyau est réduit au vecteur nul est une injection, c'est donc une bijection, donc u est surjective et $Im(u)=\mathbb{R}^3$.

Allez à : Exercice 31

Correction exercice 32.

1.

a) Les coordonnées du vecteur $u(x)$ dans la base $\underline{f}$ sont :

$$AX=\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\-x_1+2x_2\\x_1+x_2\end{pmatrix}$$

Donc $u(x)=(x_1,-x_1+2x_2,x_1+x_2)$

b) $u(e_1)=f_1-f_2+f_3$ et $u(e_2)=2f_2+f_3$

c)

$$x\in\ker(u)\Leftrightarrow u(x)=0_{\mathbb{R}^3}\Leftrightarrow AX=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x_1\\-x_1+2x_2\\x_1+x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=0\\-x_1+2x_2=0\\x_1+x_2=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=0\\x_2=0\end{cases}$$

Donc $\ker(u)=\{0_{\mathbb{R}^2}\}$

$$Im(u)=Vect\big(u(e_1),u(e_2)\big)$$

$u(e_1)$ et $u(e_2)$ sont deux vecteurs non proportionnels donc il forme une famille libre de $Im(u)$, cette famille étant génératrice, c'est une base de $Im(u)$.

Remarque :

Ici le théorème du rang ne sert pas à grand-chose.
Dans ce cas $Im(u)$ est un plan de $\mathbb{R}^3$.

2.

a) Les coordonnées du vecteur $u(x)$ dans la base $\underline{e}$ sont :

$$AX=\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\-1&2&0&-1\\1&-1&1&0\\2&3&7&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+2x_3-x_4\\-x_1+2x_2-x_4\\x_1-x_2+x_3\\2x_1+3x_2+7x_3-5x_4\end{pmatrix}$$

$$u(x)=(x_1+2x_3-x_4,-x_1+2x_2-x_4,x_1-x_2+x_3,2x_1+3x_2+7x_3-5x_4)$$

b)

$u(e_1)=e_1-e_2+e_3+2e_4, u(e_2)=2e_2-e_3+3e_4, u(e_3)=2e_1+e_3+7e_4$ et $u(e_4)=-e_1-e_2-5e_4$.

c)

$$x\in\ker(u)\Leftrightarrow u(x)=0_{R^4}\Leftrightarrow AX=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x_1+2x_3-x_4\\-x_1+2x_2-x_4\\x_1-x_2+x_3\\2x_1+3x_2+7x_3-5x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\end{matrix}\begin{cases}x_1+2x_3-x_4=0\\-x_1+2x_2-x_4=0\\x_1-x_2+x_3=0\\2x_1+3x_2+7x_3-5x_4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2+L_1\\L_3+L_2\\L_4-2L_1\end{matrix}\begin{cases}x_1+2x_3-x_4=0\\2x_2+2x_3-2x_4=0\\x_2+x_3-x_4=0\\3x_2+3x_3-3x_4=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+2x_3-x_4=0\\x_2+x_3-x_4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=-2x_3+x_4\\x_2=-x_3+x_4\end{cases}$$

Un vecteur de $\ker(u)$ s'écrit $x=(-2x_3+x_4,-x_3+x_4,x_3,x_4)=x_3(-2,-1,1,0)+x_4(1,1,0,1)$ si on pose $a=(-2,-1,1,0)$ et $b=(1,1,0,1)$ alors

$$\ker(u)=Vect(a,b)$$

a et b ne sont pas propotionnels, ils forment une famille libre de $\ker(u)$, c'est une famille génératrice de $\ker(u)$et donc une base de $\ker(u)$

D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(u))+\dim(Im(u))=\dim(\mathbb{R}^4)\Leftrightarrow 2+\dim(Im(u))=4\Leftrightarrow\dim(Im(u)=2$$

D'autre part :

$u(e_1)=e_1-e_2+e_3+2e_4$, $u(e_2)=2e_2-e_3+3e_4$ sont deux vecteurs non proportionnels de $Im(u)$, $(u(e_1),u(e_2))$ est une famille libre à deux vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 2, c'est une base de $Im(u)$.

Remarque :

$Im(u)=Vect(u(e_1),u(e_2),u(e_3),u(e_4))$ ne sert à rien dans cette question.

Allez à : Exercice 32

Correction exercice 33.

1.

a)

$$e_1=(1,0,0)\Rightarrow u(e_1)=(1,2,3)=e_1+2e_2+3e_3$$
$$e_2=(0,1,0)\Rightarrow u(e_2)=(1,0,1)=e_1+e_3$$
$$e_3=(0,0,1)\Rightarrow u(e_3)=(0,-1,-1)=-e_2-e_3$$

b)

$$A=Mat_{\underline{e}}(u)=\begin{array}{c}\\ \\ \end{array}\begin{array}{ccc}u(e_1)&u(e_2)&u(e_3)\\ \end{array}$$
$$\phantom{A=Mat_{\underline{e}}(u)=}\begin{pmatrix}1&1&0\\2&0&-1\\3&1&-1\end{pmatrix}\begin{matrix}e_1\\e_2\\e_3\end{matrix}$$

c)

$$x\in\ker(u)\Leftrightarrow u(x)=0_{\mathbb{R}^3}\Leftrightarrow(x_1+x_2,2x_1-x_3,3x_1+x_2-x_3)=(0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}\begin{cases}x_1+x_2=0\\2x_1-x_3=0\\3x_1+x_2-x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2-2L_1\\L_3-3L_1\end{matrix}\begin{cases}x_1+x_2=0\\-2x_2-x_3=0\\-2x_2-x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=-x_2\\x_3=-2x_2\end{cases}$$

$$x = (-x_2, x_2, -2x_2) = x_2(-1,1,-2)$$

$a = (-1,1,-2)$, $\ker(u) = Vect(a)$.

D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(u)) + \dim(Im(u)) = \dim(\mathbb{R}^3) \Leftrightarrow \dim(Im(u)) = 3 - 1 = 2$$

Il suffit de trouver deux vecteurs non colinéaires (qui forment donc une famille libre) dans $Im(u)$, par exemple : $u(e_1)$ et $u(e_2)$ (on aurait pu prendre $u(e_1)$ et $u(e_3)$ ou $u(e_2)$ et $u(e_3)$).

$$Im(u) = Vect(u(e_1), u(e_2))$$

Il est totalement inutile de chercher une relation entre $u(e_1)$, $u(e_2)$ et $u(e_3)$ car le théorème du rang donne la dimension de l'image de u.

2.

a)

$$e_1 = (1,0,0) \Rightarrow u(e_1) = (1,1,1) = e_1 + e_2 + e_3$$
$$e_2 = (0,1,0) \Rightarrow u(e_2) = (1,1,1) = e_1 + e_2 + e_3$$
$$e_3 = (0,0,1) \Rightarrow u(e_3) = (0,0,0) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

b)

$$Mat_{\underline{e}}(u) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} u(e_1) & u(e_2) & u(e_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array}$$

c) $x = (x_1, x_2, x_3) \in \ker(u) \Leftrightarrow u(x) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow (x_1 + x_2, x_1 + x_2, x_1 + x_2) = (0,0,0) \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0$

Un vecteur de $\ker(u)$ est de la forme $x = (x_1, -x_1, x_3) = x_1(1,-1,0) + (0,0,1)x_3$

Si on pose $a = (1,-1,0)$ et $b = (0,0,1)$, $Ker(u) = Vect(a, b)$

a et b sont deux vecteurs non proportionnels de $Ker(u)$ $\ker(u)$, cette famille engendre $\ker(u)$ il s'agit donc d'une base de $\ker(u)$. Pour l'image, pas besoin du théorème du rang, on pose $c = (1,1,1)$

$$Im(u) = Vect(c, c, 0_{\mathbb{R}^3}) = Vect(c)$$

$Im(u)$ est la droite engendrée par c.

Allez à : Exercice 33

Correction exercice 34.

1. soit $x \in \mathbb{R}^4$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ ses coordonnées dans la base canonique.

$$x \in \ker(f) \Leftrightarrow AX = O_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 5 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 11x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1 \end{array} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ -x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ -4x_2 + 4x_3 - 14x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ -x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ -2x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \\ \\ L_3 - 2L_2 \end{array} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ -x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ -3x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3x_3 \\ x_2 = x_3 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

$$x = (-3x_3, x_3, x_3, 0) = x_3(-3,1,1,0)$$

On pose $= (-3,1,1,0)$ $\ker(f) = Vect(a)$, c'est une base de $\ker(f)$.

2. D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(f)) + \dim(Im(f)) = \dim(\mathbb{R}^4)$$

Donc

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$$

Comme

$$Im(f) \subset \mathbb{R}^3$$

On a

$$Im(f) = \mathbb{R}^3$$

Et

$$rg(A) = 3$$

Allez à : Exercice 34

Correction exercice 35.

A est la matrice d'une application linéaire de $\mathbb{R}^5$ dans $\mathbb{R}^4$.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \ker(A) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - L_1 \end{matrix} \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ -x_2 - 3x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ -x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ -x_2 - 3x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 - 2x_3 - x_4 - x_5 \\ x_2 = -3x_3 - x_4 - x_5 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 - 2x_4 - x_4 - x_5 \\ x_2 = -3x_4 - x_4 - x_5 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -(-4x_4 - x_5) - 2x_4 - x_4 - x_5 \\ x_2 = -4x_4 - x_5 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_4 \\ x_2 = -4x_4 - x_5 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$$

Donc

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_4, -4x_4 - x_5, x_4, x_4, x_5) = x_4(1,-4,1,1,0) + x_5(0,-1,0,0,1)$$

Les vecteurs $(1,-4,1,1,0)$ et $(0,-1,0,0,1)$ ne sont pas proportionnels et ils engendrent le noyau, donc $\ker(A)$ est de dimension 2.

D'après le théorème du rang

$$\dim(ker(A)) + \dim\big(Im(A)\big) = 5$$

Ce qui montre que $rang(A) = \dim\big(Im(A)\big) = 3$.

Allez à : Exercice 35

Correction exercice 36.

1.

$$Y = AX \Leftrightarrow AX = Y \Leftrightarrow \begin{cases} 13x_1 - 8x_2 - 12x_3 = y_1 \\ 12x_1 - 7x_2 - 12x_3 = y_2 \\ 6x_1 - 4x_2 - 5x_3 = y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ 13L_2 - 12L_1 \\ 2L_3 - L_2 \end{matrix} \begin{cases} 13x_1 - 8x_2 - 12x_3 = y_1 \\ 5x_2 - 12x_3 = 13y_2 - 12y_1 \\ -x_2 + 2x_3 = 2y_3 - y_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} \\ \\ 5L_3 + L_2 \end{matrix} \begin{cases} 13x_1 - 8x_2 - 12x_3 = y_1 \\ 5x_2 - 12x_3 = 13y_2 - 12y_1 \\ -2x_3 = 10y_3 - 5y_2 + 13y_2 - 12y_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13x_1 = y_1 + 8x_2 + 12x_3 \\ 5x_2 = 13y_2 - 12y_1 + 12x_3 \\ x_3 = 6y_1 - 4y_2 - 5y_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 13x_1 = y_1 + 8x_2 + 12(6y_1 - 4y_2 - 5y_3) \\ 5x_2 = 13y_2 - 12y_1 + 12(6y_1 - 4y_2 - 5y_3) = 60y_1 - 35y_2 - 60y_3 \\ x_3 = 6y_1 - 4y_2 - 5y_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 13x_1 = 73y_1 - 48y_2 - 60y_3 + 8(12y_1 - 7y_2 - 12y_3) \\ x_2 = 12y_1 - 7y_2 - 12y_3 \\ x_3 = 6y_1 - 4y_2 - 5y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13x_1 = 169y_1 - 104y_2 - 156y_3 \\ x_2 = 12y_1 - 7y_2 - 12y_3 \\ x_3 = 6y_1 - 4y_2 - 5y_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 13y_1 - 8y_2 - 12y_3 \\ x_2 = 12y_1 - 7y_2 - 12y_3 \\ x_3 = 6y_1 - 4y_2 - 5y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -8 & -12 \\ 12 & -7 & -12 \\ 6 & -4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} 13 & -8 & -12 \\ 12 & -7 & -12 \\ 6 & -4 & -5 \end{pmatrix} = A$

Le mieux aurait été de changer les rôles de x_1 et x_3 dans le premier système.

2. $A^2 = I$ donc $A^{2n} = (A^2)^n = I^n = I$ et $A^{2n+1} = A^{2n}A = A$.

Allez à : Exercice 36

Correction exercice 37.

1. et 2.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = A + 2I \text{ donc } P(X) = X^2 - X - 2$$

3. $A^2 - A = 2I \Leftrightarrow A(A - I) = 2I \Leftrightarrow A \times \frac{A-I}{2} = I$ donc $A^{-1} = \frac{A-I}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

4.

$$AX = Y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{cases} x_2 + x_3 = y_1 \\ x_1 + x_3 = y_2 \\ x_1 + x_2 = y_3 \end{cases}$$

Ici il y a un problème pour appliquer le pivot de Gauss parce qu'il n'y a pas de termes en x_1 dans la première ligne, il y a deux façons d'arranger ce problème, soit on intervertit $x_1$et x_2 soit on intervertit la ligne 1 avec une ligne où il y a un x_1, c'est ce que nous allons faire.

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{cases} x_2 + x_3 = y_1 \\ x_1 + x_3 = y_2 \\ x_1 + x_2 = y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_2 \\ L_1 \\ L_3 \end{matrix} \begin{cases} x_1 + x_3 = y_2 \\ x_2 + x_3 = y_1 \\ x_1 + x_2 = y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 - L_1 \end{matrix} \begin{cases} x_1 + x_3 = y_2 \\ x_2 + x_3 = y_1 \\ x_2 - x_3 = -y_2 + y_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 - L_2 \end{matrix} \begin{cases} x_1 + x_3 = y_2 \\ x_2 + x_3 = y_1 \\ -2x_3 = -y_1 - y_2 + y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 + y_2 \\ x_2 = -x_3 + y_1 \\ x_3 = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\left(\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_3\right) + y_2 \\ x_2 = -\left(\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_3\right) + y_1 \\ x_3 = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3 \\ x_2 = \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3 \\ x_3 = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Donc

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Allez à : Exercice 37

Correction exercice 38.

1. $A^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$

   $A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$

   $A^3-A^2+A-I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=O$
2. $A^3-A^2+A-I=O\Leftrightarrow A(A^2-A+I)=I$ donc $A^{-1}=A^2-A+I$
3. $A^3=A^2-A+I$ donc $A^4=A(A^2-A+I)=A^3-A^2+A=(A^2-A+I)-A^2+A=I$

Allez à : Exercice 38

Correction exercice 39.

$$A-2I=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&1&-2\\-1&1&-2\end{pmatrix}$$

$$(A-2I)^2=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&1&-2\\-1&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&1&-2\\-1&1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\0&-1&1\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

$$(A-2I)^3=(A-2I)(A-2I)^2=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&1&-2\\-1&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&-1\\0&-1&1\\0&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Ce qui entraine que

$$A^3-3\times 2A^2+3\times 2^2A-2^3I=O$$

Car A et I commutent.

Ce qui équivaut à

$$A^3-6A^2+12A-8I=O$$

Soit encore

$$A^3-6A^2+12A=8I$$

Puis en divisant par 8 et en mettant A en facteur

$$A\left(\frac{1}{8}A^2-\frac{3}{4}A+\frac{3}{2}I\right)=I$$

Ce qui montre que A est inversible et que

$$A^{-1}=\frac{1}{8}A^2-\frac{3}{4}A+\frac{3}{2}I$$

Allez à : Exercice 39

Correction exercice 40.

1.

$$M(t_1)M(t_2)=\begin{pmatrix}\mathrm{ch}(t_1)&\mathrm{sh}(t_1)\\\mathrm{sh}(t_1)&\mathrm{ch}(t_1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{ch}(t_2)&\mathrm{sh}(t_2)\\\mathrm{sh}(t_2)&\mathrm{ch}(t_2)\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\mathrm{ch}(t_1)\mathrm{ch}(t_2)+\mathrm{sh}(t_1)\mathrm{sh}(t_2)&\mathrm{ch}(t_1)\mathrm{sh}(t_2)+\mathrm{sh}(t_1)\mathrm{ch}(t_2)\\\mathrm{sh}(t_1)\mathrm{ch}(t_2)+\mathrm{ch}(t_1)\mathrm{sh}(t_2)&\mathrm{sh}(t_1)\mathrm{sh}(t_2)+\mathrm{ch}(t_1)\mathrm{ch}(t_2)\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{ch}(t_1)\mathrm{ch}(t_2)+\mathrm{sh}(t_1)\mathrm{sh}(t_2)=\frac{e^{t_1}+e^{-t_1}}{2}\frac{e^{t_2}+e^{-t_2}}{2}+\frac{e^{t_1}-e^{-t_1}}{2}\frac{e^{t_2}-e^{-t_2}}{2}$$
$$=\frac{e^{t_1+t_2}+e^{t_1-t_2}+e^{-t_1+t_2}+e^{-t_1-t_2}}{4}+\frac{e^{t_1+t_2}+e^{t_1-t_2}+e^{-t_1+t_2}+e^{-t_1-t_2}}{4}$$
$$=\frac{2e^{t_1+t_2}+2e^{-(t_1+t_2)}}{4}=\mathrm{ch}(t_1+t_2)$$

$$\begin{aligned}\operatorname{sh}(t_1)\operatorname{ch}(t_2)+\operatorname{ch}(t_1)\operatorname{sh}(t_2)&=\frac{e^{t_1}-e^{-t_1}}{2}\frac{e^{t_2}+e^{-t_2}}{2}+\frac{e^{t_1}+e^{-t_1}}{2}\frac{e^{t_2}-e^{-t_2}}{2}\\&=\frac{e^{t_1+t_2}+e^{t_1-t_2}-e^{-t_1+t_2}-e^{-t_1-t_2}}{4}+\frac{e^{t_1+t_2}-e^{t_1-t_2}+e^{-t_1+t_2}-e^{-t_1-t_2}}{4}\\&=\frac{2e^{t_1+t_2}-2e^{-(t_1+t_2)}}{4}=\operatorname{sh}(t_1+t_2)\end{aligned}$$

Donc $M(t_1)M(t_2)=M(t_1+t_2)$

2. $\det\big(M(t)\big)=\operatorname{ch}^2(t)-\operatorname{sh}^2(t)=1\neq 0$ donc la matrice est inversible.

   Or $M(t)M(-t)=M(0)=I$ donc $\big(M(t)\big)^{-1}=M(-t)$

Allez à : Exercice 40

Correction exercice 41.

1.

$$\begin{aligned}E_1=\{x\in\mathbb{R}^3,u(x)=x\}=\{x\in\mathbb{R}^3,u(x)-x=0_{\mathbb{R}^3}\}=\{x\in\mathbb{R}^3,(u-Id_{\mathbb{R}^3})(x)=0_{\mathbb{R}^3}\}\\=\ker(u-Id_{\mathbb{R}^3})\end{aligned}$$

   Donc E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

$$x\in E_1\Leftrightarrow u(x)=x\Leftrightarrow AX=X\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&1&-2\\2&2&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+2x_2-2x_3=x_1\\2x_1+x_2-2x_3=x_2\\2x_1+2x_2-3x_3=x_3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x_2-2x_3=0\\2x_1-2x_3=0\\2x_1+2x_2-4x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=x_3\\x_1=x_3\\2x_3+2x_3-4x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=x_3\\x_2=x_3\end{cases}$$

   Par conséquent $x=(x_3,x_3,x_3)=x_3(1,1,1)$, on pose $a=(1,1,1)$ c'est une base de E_1.

2. Les coordonnées de $u(b)$ dans la base canonique sont

$$AX_b=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&1&-2\\2&2&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}=-X_b$$

   Donc $u(b)=-e_1-e_2=-b$

   Les coordonnées de $u(c)$ dans la base canonique sont

$$AX_c=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&1&-2\\2&2&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-2\end{pmatrix}=-X_c$$

   Donc $u(b)=-e_1-e_2-2e_3=-c$

3.

$$\det(a,b,c)=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&1\\1&1&2\end{vmatrix}=1\times\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}-0\times\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}+1\times\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}=1\neq 0$$

   Ce qui montre que (a,b,c) est une base de $\mathbb{R}^3$.

4.

$$P=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}$$

5. On pose $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ et $X'=\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}$

$$PX'=X\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}\begin{cases}x_1'+x_3'=x_1\\x_1'+x_2'+x_3'=x_2\\x_1'+x_2'+2x_3'=x_3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2-L_1\\L_3-L_2\end{matrix}\begin{cases}x_1'+x_3'=x_1\\x_2'=-x_1+x_2\\x_3'=-x_2+x_3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1'=-x_3'+x_1=x_1+x_2-x_3\\x_2'=-x_1+x_2\\x_3'=-x_2+x_3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

D'où

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

6.

$$D=\begin{array}{cc} \begin{matrix}u(a)&u(b)&u(c)\end{matrix} & \\ \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix} & \begin{matrix}a\\b\\c\end{matrix}\end{array}$$

7. $D=P^{-1}AP$

Allez à : Exercice 41

Correction exercice 42.

1. Soient $x=(x_1,x_2)$ et $x'=(x_1',x_2')$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et soient λ et λ' deux réels.

$$f(\lambda x+\lambda' x')=f(\lambda x_1+\lambda' x_1',\lambda x_2+\lambda' x_2')=\big(\lambda x_1+\lambda' x_1'-(\lambda x_2+\lambda' x_2'),\lambda x_1+\lambda' x_1'+(\lambda x_2+\lambda' x_2')\big)$$
$$=\big(\lambda(x_1-x_2)+\lambda'(x_1'-x_2'),\lambda(x_1+x_2)+\lambda'(x_1'+x_2')\big)$$
$$=\lambda(x_1-x_2,x_1+x_2)+\lambda'(x_1'-x_2',x_1'+x_2')=\lambda f(x)+\lambda' f(x')$$

f est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ donc f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

2. $A=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$

3.

a) $x\in\ker(f)\Leftrightarrow\begin{cases}x_1-x_2=0\\x_1+x_2=0\end{cases}\Leftrightarrow L_1+L_2\begin{cases}x_1-x_2=0\\2x_1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=0\\x_2=0\end{cases}$

Donc $\ker(f)=\{0_{\mathbb{R}^2}\}$

On en déduit que f est injective, comme de plus, f est un endomorphisme, f est surjective et donc $Im(f)=\mathbb{R}^2$. (On aurait pu aussi invoquer le théorème du rang)

b) Du a) on tire que f est bijective et donc inversible (cela signifie la même chose).

c)

$$y=f(x)\Leftrightarrow(y_1,y_2)=f(x_1,x_2)\Leftrightarrow(y_1,y_2)=(x_1-x_2,x_1+x_2)\Leftrightarrow\begin{cases}y_1=x_1-x_2\\y_2=x_1+x_2\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}y_1=x_1-x_2\\y_1+y_2=2x_1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=x_1-y_1\\x_1=\frac{1}{2}y_1+\frac{1}{2}y_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=\frac{1}{2}y_1+\frac{1}{2}y_2-y_1\\x_1=\frac{1}{2}y_1+\frac{1}{2}y_2\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=-\frac{1}{2}y_1+\frac{1}{2}y_2\\x_1=\frac{1}{2}y_1+\frac{1}{2}y_2\end{cases}$$

Donc $f^{-1}(y_1,y_2)=(\frac{1}{2}y_1+\frac{1}{2}y_2,-\frac{1}{2}y_1+\frac{1}{2}y_2)$, ou, en changeant les rôles de x et de y :

$$f^{-1}(x_1,x_2)=(\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2,-\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2)$$

Et $A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$

4. La matrice d'une homothétie est de la forme $H=\begin{pmatrix}h&0\\0&h\end{pmatrix}=hI$ et la matrice d'une rotation d'angle α est de la forme $R=\begin{pmatrix}\cos(\alpha)&-\sin(\alpha)\\\sin(\alpha)&\cos(\alpha)\end{pmatrix}$. Alors $RH=h\begin{pmatrix}\cos(\alpha)&-\sin(\alpha)\\\sin(\alpha)&\cos(\alpha)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}h\cos(\alpha)&-h\sin(\alpha)\\h\sin(\alpha)&h\cos(\alpha)\end{pmatrix}$

Donc $\begin{cases}h\cos(\alpha)=1\\h\sin(\alpha)=1\end{cases}$, donc $\big(h\cos(\alpha)\big)^2+\big(h\sin(\alpha)\big)^2=1^2+1^2\Leftrightarrow h^2=2\Leftrightarrow h=\sqrt{2}\ ou\ h=-\sqrt{2}$

Si $h=-\sqrt{2}$ alors $\begin{cases}\cos(\alpha)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin(\alpha)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}$ donc $\alpha=\frac{5\pi}{4}$ modulo 2π.

Si $h=\sqrt{2}$ alors $\begin{cases}\cos(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}$ donc $\alpha=\frac{\pi}{4}$ modulo 2π.

5. $\det(a,b)=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2\neq 0$ donc (a,b) est une base de $\mathbb{R}^2$.
6. Les coordonnées de $f(a)$ dans la base (e_1,e_2) sont $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 2\end{pmatrix}$, donc $f(a)=2e_2=a+b$

   Les coordonnées de $f(b)$ dans la base (e_1,e_2) sont $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 0\end{pmatrix}$, donc $f(a)=2e_1=a-b$
7. $Mat_{\beta'}(f)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

Allez à : Exercice 42

Correction exercice 43.

1.
$$\det(a,b,c)=\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ -1 & -1 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=\underset{C_3-C_2}{}\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ -1 & -1 & -2\\ 0 & 0 & -1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{vmatrix}=-(-1+2)=-1\neq 0$$
Donc (a,b,c) est une base de $\mathbb{R}^3$

2.
$$P=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ -1 & -1 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$
$$PX=Y\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ -1 & -1 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\ L_2\\ L_3\end{matrix}\begin{cases}x_1+2x_2+2x_3=y_1\\ -x_1-x_2-2x_3=y_2\\ x_1+x_2+x_3=y_3\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\ L_2+L_1\\ L_3+L_2\end{matrix}\begin{cases}x_1+2x_2+2x_3=y_1\\ x_2=y_1+y_2\\ -x_3=y_2+y_3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=-2x_2-2x_3+y_1\\ x_2=y_1+y_2\\ x_3=-y_2-y_3\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=-2y_1-2y_2+2y_2+2y_3+y_1\\ x_2=y_1+y_2\\ x_3=-y_2-y_3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=-y_1+2y_3\\ x_2=y_1+y_2\\ x_3=-y_2-y_3\end{cases}$$
Donc
$$P^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

3. Les coordonnées de $u(a)$ dans la base β sont
$$\begin{pmatrix}1 & 4 & 4\\ -1 & -3 & -3\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$$
Donc $u(a)=a$

Les coordonnées de $u(b)$ dans la base β sont
$$\begin{pmatrix}1 & 4 & 4\\ -1 & -3 & -3\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ -2\\ 1\end{pmatrix}$$
Donc $u(b)=c$

Les coordonnées de $u(c)$ dans la base β sont
$$\begin{pmatrix}1 & 4 & 4\\ -1 & -3 & -3\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ -2\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$$

Donc $u(c) = -b$

Par conséquent

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4.

a)

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = R$$

b)

$$R^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$R^4 = R^2R^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

c) $R = P^{-1}AP \Leftrightarrow A = PRP^{-1}$

$$A^4 = PRP^{-1}PRP^{-1}PRP^{-1}PRP^{-1} = PR^4P^{-1} = PIP^{-1} = I$$

Donc

$$A^{4n} = (A^4)^n = I^n = I$$

Allez à : Exercice 43

Correction exercice 44.

1. $A = Mat_\beta(u) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$
2. $u(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3}$ donc $0_{\mathbb{R}^3} \in E$

   Soient $x \in E$ et $y \in E$ et λ et μ deux réels, $u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y) = \lambda x + \mu y$, donc $\lambda x + \mu y \in E$, E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

$$x = (x_1, x_2, x_3) \in E \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x_1 + x_2 + 4x_3 = x_1 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = x_2 \\ -4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = x_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ -4x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\begin{cases} -4x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ 4L_2 + L_1 \\ 2L_3 - L_1 \end{matrix}\begin{cases} -4x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ -3x_2 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

   Une base de E est le vecteur $a = (1,0,1)$ et bien sur $\dim(E) = 1$.
3. Il est clair que le vecteur nul est dans F.

   Soient $x \in F$ et $y \in F$ et λ et μ deux réels

   $\lambda x + \mu y = (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \lambda x_3 + \mu y_3)$,

$$-2(\lambda x_1 + \mu y_1) + 2(\lambda x_2 + \mu y_2) + 3(\lambda x_3 + \mu y_3) = \lambda(-2x_1 + 2x_2 + 3x_3) + \mu(-2y_1 + 2y_2 + 3y_3) = 0$$

   Donc $\lambda x + \mu y \in F$. F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

$$x = (x_1, x_2, x_3) \in F \Leftrightarrow x = \left(x_2 + \frac{3}{2}x_3, x_2, x_3\right) = x_2(1,1,0) + \frac{x_3}{2}(3,0,2)$$

   On pose $b = (1,1,0)$ et $c = (3,0,2)$

(b,c) est une famille génératrice de F formée de deux vecteurs non proportionnels, cette famille est donc libre.
Une base de F est (b,c).

4. $u(b)$ a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\det(a,b,u(b)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2+3 = 1 \neq 0$$

Donc $\big(a,b,u(b)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
On aurait pu montrer que la famille est libre, et dire qu'une famille libre à 3 vecteurs dans un espace de dimension 3 est une base.

5. $\dim(E)+\dim(F) = 1+2 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$
$(1,0,1) \notin F$ car $-2\times 1 + 2\times 0 + 3\times 1 = 1 \neq 0$ donc $E\cap F = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$
Donc $E \oplus F = \mathbb{R}^3$.

6. $u\big(u(b)\big)$ a pour coordonnées

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc $u\big(u(b)\big) = -b$

$$mat_{\beta'}(u) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} u(a) & u(b) & u(u(b)) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} a \\ b \\ u(b) \end{array} \end{array}$$

Allez à : Exercice 44

Correction exercice 45.

1. Les coordonnées de $u(x)$ dans la base canonique sont

$$\begin{pmatrix} x_2 - 2x_3 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Donc la matrice de u dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ les coordonnées d'un vecteur $x = (x_1,x_2,x_3)$ dans la base canonique

$$x = (x_1,x_2,x_3) \in \ker(u - Id) \Leftrightarrow (A-I)X = O \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 - 2x_3$$

Donc $x = (x_2 - 2x_3, x_2, x_3) = x_2(1,1,0) + x_3(-2,0,1)$
On pose $a = (1,1,0)$ et $b = (-2,0,1)$, (a,b) est une famille de deux vecteurs non proportionnels, donc libre, qui engendrent $\ker(u-Id)$, c'est une base de $\ker(u-Id)$.

3. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ les coordonnées d'un vecteur $x = (x_1,x_2,x_3)$ dans la base canonique

$$x=(x_1,x_2,x_3)\in\ker(u)\Leftrightarrow AX=O\Leftrightarrow\begin{pmatrix}0&1&-2\\2&-1&4\\1&-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x_2-2x_3=0\\2x_1-x_2+4x_3=0\\x_1-x_2+3x_3=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=2x_3\\2x_1-2x_3+4x_3=0\\x_1-2x_3+3x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=2x_3\\2x_1+2x_3=0\\x_1+x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=-x_3\\x_2=2x_3\end{cases}$$

Donc $x=(-x_3,2x_3,x_3)$, si on pose $c=(-1,2,1)$ alors $\ker(u)=Vect(c)$

4.

$$\det(a,b,c)=\begin{vmatrix}1&-2&-1\\1&0&2\\0&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&2\\1&1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}-2&-1\\1&1\end{vmatrix}=-2-(-2+1)=-1\neq0$$

En développant par rapport à la première colonne, donc (a,b,c) est une base de $\mathbb{R}^3$.

5. $u(a)-a=0_{\mathbb{R}^3}\Rightarrow u(a)=a$, de même $u(b)=b$ et $u(c)=0_{\mathbb{R}^3}$ donc

$$D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

6. D'après la matrice de u dans la base β', $Im(u)=Vect(a,b)=\ker(u-Id)$
7. D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(u))+\dim\big(Im(u)\big)=\dim(\mathbb{R}^3)$$

Il reste à montrer que l'intersection de $\ker(u)$ et de $Im(u)$ est le vecteur nul.

$$x\in\ker(u)\cap Im(u)\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\ker(u)\\x\in Im(u)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\ker(u)\\x\in\ker(u-Id)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u(x)=0_{\mathbb{R}^3}\\u(x)-x=0_{\mathbb{R}^3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u(x)=0_{\mathbb{R}^3}\\u(x)=x\end{cases}\Leftrightarrow x=0_{\mathbb{R}^3}$$

On a donc $\ker(u)\oplus Im(u)=\mathbb{R}^3$.

Allez à : Exercice 45

Correction exercice 46.

1.

$$A=\begin{pmatrix}-10&3&15\\-2&0&3\\-6&2&9\end{pmatrix}$$

2.

$$x=(x_1,x_2,x_3)\in\ker(u)\Leftrightarrow u(x)=0_{\mathbb{R}^3}\Leftrightarrow\begin{cases}-10x_1+3x_2+15x_3=0\\-2x_1+3x_3=0\\-6x_1+2x_2+9x_3=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{matrix}\\5L_2-L_1\\L_3-3L_2\end{matrix}\begin{cases}-10x_1+3x_2+15x_3=0\\12x_2=0\\2x_2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-10x_1+15x_3=0\\x_2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=\frac{3}{2}x_3\\x_2=0\end{cases}$$

$$x=\left(\frac{3}{2}x_3,0,x_3\right)=\frac{x_3}{2}(3,0,2)$$

On pose $a=(3,0,2)$ et alors $\ker(u)=Vect(a)$ et $\dim(\ker(u))=1$

D'après le théorème du rang, $\dim(\ker(u))+\dim\big(Im(u)\big)=\dim(\mathbb{R}^3)\Leftrightarrow\dim\big(Im(u)\big)=2$

3. Le problème est de savoir si $\ker(u)\cap im(u)=\{0_{\mathbb{R}^3}\}$ car $\dim(\ker(u))+\dim\big(Im(u)\big)=\dim(\mathbb{R}^3)$

Première méthode :

On cherche une base de $Im(u)$ (ce qui revient à choisir deux des trois vecteurs parmi $u(e_1),u(e_2)$ et $u(e_3)$ car ces vecteurs sont deux à deux non proportionnels et que la dimension de l'image de u est 2, puis de montrer que ces trois vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^3$, c'est long, on passe)

Deuxième méthode

D'après la matrice, il est clair que $a=u(e_2)$, comme $\ker(u)=Vect(a)$ on a $\ker(u)\subset im(u)$ et donc $\ker(u)\cap Im(u)\neq\{0_{\mathbb{R}^3}\}$, ce qui montre que l'on n'a pas $\ker(u)\oplus Im(u)=\mathbb{R}^3$.

4.

Première méthode

On pose $X_a = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $X_b = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ les coordonnées de a et de b dans la base canonique et on résout le système

$$u(b) = a \Leftrightarrow AX_b = X_a \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -10 & 3 & 15 \\ -2 & 0 & 3 \\ -6 & 2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

C'est long

Deuxième méthode

On remarque que $u(e_2) = a$ donc un vecteur b qui vérifie $u(b) = a$ est par exemple $b = e_2$

Remarque :

Ce n'est pas le seul mais l'énoncé demande « un vecteur b tel que $u(b) = a$ »

5. $u(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3} = -0_{\mathbb{R}^3}$ donc $0_{\mathbb{R}^3} \in E_{-1}$

Soit $x_1 \in E_{-1}$ et $x_2 \in E_{-1}$, on a $u(x_1) = -x_1$ et $u(x_2) = -x_2$, alors pour tout $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ on a

$$u(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 u(x_1) + \lambda_2 u(x_2) = \lambda_1(-x_1) + \lambda_2(-x_2) = -(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$$

Donc

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in E_{-1}$$

Et E_{-1} est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

Autre méthode :

$E_{-1} = \ker(u + id)$ donc E_{-1} est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

On pose $X_c = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ les coordonnées de c dans la base canonique

$$u(c) = -c \Leftrightarrow AX_c = -X_c \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -10 & 3 & 15 \\ -2 & 0 & 3 \\ -6 & 2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -10x_1 + 3x_2 + 15x_3 = -x_1 \\ -2x_1 + 3x_3 = -x_2 \\ -6x_1 + 2x_2 + 9x_3 = -x_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -9x_1 + 3x_2 + 15x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ -6x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ -3x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - L_1 \end{matrix} \begin{cases} -3x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6x_3 + x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 = 2x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = x_3 \\ x_1 = 2x_3 \end{cases}$$

$$x = (2x_3, x_3, x_3) = x_3(2,1,1)$$

On prend $c = (2,1,1)$ et on a $E_{-1} = Vect(c)$

6.

$$\alpha a + \beta b + \gamma c = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \alpha(3,0,2) + \beta(0,1,0) + \gamma(2,1,1) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha + 2\gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ 2\alpha + \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

(a, b, c) est une famille libre dans un espace vectoriel de dimension 3, c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

7.

$$u(a) = 0_{\mathbb{R}^3}, u(b) = a, u(c) = -c$$

Donc

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$A' = P^{-1}AP$$

Où

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Allez à : Exercice 46

Correction exercice 47.

1. $\det(a,b,c,d)=\begin{vmatrix}1&1&2&-1\\-1&-1&-2&2\\0&-1&1&0\\0&0&1&0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&1&-1\\-1&-1&2\\0&-1&0\end{vmatrix}$ en développant par rapport à la dernière ligne. Puis $\det(e_1',e_2',e_3',e_4')=-\begin{vmatrix}1&-1\\-1&2\end{vmatrix}=-1$, de nouveau en développant par rapport à la dernière ligne. Ce déterminant est non nul donc (e_1',e_2',e_3',e_4') est une base de $\mathbb{R}^4$.
2. Les coordonnées de $f(a)$ dans la base β sont : $\begin{pmatrix}-6&-3&0&6\\6&3&0&-6\\0&0&-3&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\3\\0\\0\end{pmatrix}$
$$f(a)=-3e_1+3e_2=-3(e_1-e_2)=-3a$$
Les coordonnées de $f(b)$ dans la base β sont : $\begin{pmatrix}-6&-3&0&6\\6&3&0&-6\\0&0&-3&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\3\\3\\0\end{pmatrix}$
$$f(b)=-3e_1+3e_2+3e_3=-3(e_1-e_2-e_3)=-3b$$
Les coordonnées de $f(c)$ dans la base β sont : $\begin{pmatrix}-6&-3&0&6\\6&3&0&-6\\0&0&-3&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$
$$f(c)=0_{\mathbb{R}^4}$$
Les coordonnées de $f(d)$ dans la base β sont : $\begin{pmatrix}-6&-3&0&6\\6&3&0&-6\\0&0&-3&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$
$$f(d)=0_{\mathbb{R}^4}$$
3. $Mat_{\beta'}(f)=\begin{pmatrix}-3&0&0&0\\0&-3&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

Allez à : Exercice 47

Correction exercice 48.

1. $\det(a,b,c,d)=\begin{vmatrix}-1&1&-2&2\\1&-2&3&-1\\0&-1&1&0\\-1&1&-1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&1&-1&2\\1&-2&1&-1\\0&-1&0&0\\-1&1&0&1\end{vmatrix}$, en additionnant , C_3+C_2

   Puis en développant par rapport à la troisième ligne :
$$\det(a,b,c,d)=-(-1)\begin{array}{c}\begin{matrix}C_1&C_2&C_3\end{matrix}\\\begin{vmatrix}-1&-1&2\\1&1&-1\\-1&0&1\end{vmatrix}\end{array}=\begin{array}{c}\begin{matrix}C_1&C_2&C_3+C_1\end{matrix}\\\begin{vmatrix}-1&-1&1\\1&1&0\\-1&0&0\end{vmatrix}\end{array}=1\neq 0$$
   Donc (a,b,c,d) est une base de $\mathbb{R}^4$.
2. $P=\begin{pmatrix}-1&1&-2&2\\1&-2&3&-1\\0&-1&1&0\\-1&1&-1&1\end{pmatrix}$

$$X = PX' \Leftrightarrow PX' = X \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix}\begin{cases} -x_1' + x_2' - 2x_3' + 2x_4' = x_1 \\ x_1' - 2x_2' + 3x_3' - x_4' = x_2 \\ -x_2' + x_3' = x_3 \\ -x_1' + x_2' - x_3' + x_4' = x_4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 + L_1 \\ L_3 \\ L_4 + L_2 \end{matrix}\begin{cases} -x_1' + x_2' - 2x_3' + 2x_4' = x_1 \\ -x_2' + x_3' + x_4' = x_1 + x_2 \\ -x_2' + x_3' = x_3 \\ -x_2' + 2x_3' = x_2 + x_4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 - L_2 \\ L_4 - L_2 \end{matrix}\begin{cases} -x_1' + x_2' - 2x_3' + 2x_4' = x_1 \\ -x_2' + x_3' + x_4' = x_1 + x_2 \\ -x_4' = -x_1 - x_2 + x_3 \\ x_3' - x_4' = -x_1 + x_4 \end{cases}$$

L_3 donne $x_4' = x_1 + x_2 - x_3$

L_4 donne $x_3' = -x_1 + x_4 + x_4' = x_2 - x_3 + x_4$

L_2 donne $x_2' = x_3' + x_4' - x_1 - x_2 = x_2 - x_3 + x_4 + x_1 + x_2 - x_3 - x_1 - x_2 = x_2 - 2x_3 + x_4$

L_1 donne

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2' - 2x_3' + 2x_4' - x_1 = x_2 - 2x_3 + x_4 - 2(x_2 - x_3 + x_4) + 2(x_1 + x_2 - x_3) - x_1 \\ &= x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 \end{aligned}$$

D'où l'on déduit que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

3. Les coordonnées de $u(a)$ dans la base (e_1, e_2, e_3, e_4) sont : $\begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

   Donc $u(a) = e_1 - e_2 + e_4 = -(e_1 + e_2 - e_4) = -a$

   Les coordonnées de $u(b)$ dans la base (e_1, e_2, e_3, e_4) sont : $\begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

   Donc $u(b) = -2e_1 + 3e_2 + e_3 - 2e_4 = a - b$

   Les coordonnées de $u(c)$ dans la base (e_1, e_2, e_3, e_4) sont : $\begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

   Donc $u(c) = 3e_1 - 5e_2 - 2e_3 + 2e_4 = b - c$

   Les coordonnées de $u(d)$ dans la base (e_1, e_2, e_3, e_4) sont : $\begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

   Donc $u(d) = -4e_1 + 4e_2 + e_3 - 2e_4 = c - d$

4.

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Autre méthode

$$T=P^{-1}AP=(P^{-1}A)P=\left(\begin{pmatrix}1&1&-2&-1\\0&1&-2&1\\0&1&-1&1\\1&1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&-2&3&0\\3&1&-3&-1\\1&0&-1&-1\\-1&-1&2&-1\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}-1&1&-2&2\\1&-2&3&-1\\0&-1&1&0\\-1&1&-1&1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-1&0&0&2\\0&0&1&0\\1&0&0&-1\\-1&-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&-2&2\\1&-2&3&-1\\0&-1&1&0\\-1&1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&-1&1\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$$

5.
$$N=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\text{, donc } N^2=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$
$$\text{Et } N^4=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Comme $A=P^{-1}TP$, $A+I=PTP^{-1}+PIP^{-1}=P(T+I)P^{-1}=PNP^{-1}$

Donc $(A+I)^4=PNP^{-1}PNP^{-1}PNP^{-1}PNP^{-1}=PN^4P^{-1}=POP^{-1}=O$, la matrice nulle.

Allez à : Exercice 48

Correction exercice 49.

1.
$$\alpha a+\beta b+\gamma c+\delta d=0_{\mathbb{R}^4}\Leftrightarrow \begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\end{matrix}\begin{cases}-2\alpha+2\gamma+3\delta=0\\-\alpha+\beta=0\\-\alpha+\gamma+\delta=0\\-\alpha-\beta+\gamma+2\delta=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{matrix}L_1\\2L_2-L_1\\2L_3-L_1\\2L_4-L_2\end{matrix}\begin{cases}-2\alpha+2\gamma+3\delta=0\\2\beta-2\gamma-3\delta=0\\-\delta=0\\-2\beta+\delta=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=0\\\gamma=0\\\delta=0\\\beta=0\end{cases}$$

Il s'agit d'une famille libre à 4 vecteurs dans un espace de dimension 4, c'est une base de $\mathbb{R}^4$.

2. Les coordonnées de $u(a)$ dans β sont
$$AX_a=\begin{pmatrix}-7&6&6&6\\0&2&0&0\\-3&3&2&3\\-6&3&6&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\-2\\-2\\-2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}-2\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix}=2X_a$$

Donc $u(a)=2a$

Les coordonnées de $u(b)$ dans β sont
$$AX_b=\begin{pmatrix}-7&6&6&6\\0&2&0&0\\-3&3&2&3\\-6&3&6&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\0\\2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}=2X_b$$

Donc $u(b)=2b$

Les coordonnées de $u(c)$ dans β sont
$$AX_c=\begin{pmatrix}-7&6&6&6\\0&2&0&0\\-3&3&2&3\\-6&3&6&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\0\\-1\\-1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}2\\0\\1\\1\end{pmatrix}=-X_c$$

Donc $u(c)=-c$

Les coordonnées de $u(c)$ dans β sont

$$AX_d=\begin{pmatrix}-7&6&6&6\\0&2&0&0\\-3&3&2&3\\-6&3&6&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\0\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\0\\-1\\-2\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}3\\0\\1\\2\end{pmatrix}=-X_d$$

Donc $u(d)=-d$

3.

$$D=Mat_{\beta'}(u)=\begin{array}{cc}\begin{array}{cccc}u(a)&u(b)&u(c)&u(d)\end{array}&\\ \begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}&\begin{array}{c}a\\b\\c\\d\end{array}\end{array}$$

4.

$$P=\begin{pmatrix}2&0&2&3\\-1&1&0&0\\-1&0&1&1\\-1&1&1&2\end{pmatrix}$$

5.

$$Y=PX\Leftrightarrow\Leftrightarrow\begin{array}{c}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\end{array}\begin{cases}-2x_1+2x_3+3x_4=y_1\\-x_1+x_2=y_2\\-x_1+x_3+x_4=y_3\\-x_1-x_2+x_3+2x_4=y_4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{array}{c}L_1\\2L_2-L_1\\2L_3-L_1\\2L_4-L_1\end{array}\begin{cases}-2x_1+2x_3+3x_4=y_1\\2x_2-2x_3-3x_4=-y_1+2y_2\\-x_4=-y_1+2y_3\\-2x_2+x_4=-y_1+2y_4\end{cases}$$

D'après L_3

$$x_4=y_1-2y_3$$

Ce que l'on remplace dans L_4

$$-2x_2+y_1-2y_3=-y_1+2y_4\Leftrightarrow-2x_2=-2y_1+2y_3+2y_4\Leftrightarrow x_2=y_1-y_3-y_4$$

On remplace ces deux résultats dans L_2

$$2(y_1-y_3-y_4)-2x_3-3(y_1-2y_3)=-y_1+2y_2\Leftrightarrow-2x_3=2y_2-4y_3+2y_4$$
$$\Leftrightarrow x_3=-y_2+2y_3-y_4$$

Et enfin on remet le tout dans L_1

$$-2x_1+2(-y_2+2y_3-y_4)+3(y_1-2y_3)=y_1\Leftrightarrow-2x_1=-2y_1+2y_2+2y_3+2y_4$$
$$\Leftrightarrow x_1=y_1-y_2-y_3-y_4$$

Donc

$$\begin{cases}x_1=y_1-y_2-y_3-y_4\\x_2=y_1-y_3-y_4\\x_3=-y_2+2y_3-y_4\\x_4=y_1-2y_3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\1&0&-1&-1\\0&-1&2&-1\\1&0&-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}$$

Donc

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\1&0&-1&-1\\0&-1&2&-1\\1&0&-2&0\end{pmatrix}$$

6.

$$P^{-1}AP=P^{-1}\begin{pmatrix}-7&6&6&6\\0&2&0&0\\-3&3&2&3\\-6&3&6&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&0&2&3\\-1&1&0&0\\-1&0&1&1\\-1&-1&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\1&0&-1&-1\\0&-1&2&-1\\1&0&-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4&0&-2&-3\\-2&2&0&0\\-2&0&-1&-1\\-2&-2&-1&-2\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$$

Allez à : Exercice 49

Correction exercice 50.

1. $c=u(b)=u(e_1)=\mathrm{e}_1+\mathrm{e}_2$, voir la matrice.

   Les coordonnées de $d=u(c)$ dans la base β sont : $\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\1&0&-1&1\\0&1&-1&1\\0&1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$
$$\det(a,b,c,d)=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&0&1&1\\1&0&0&1\\0&0&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&0&1\\1&0&0\end{vmatrix}$$
   En développant par rapport à la quatrième colonne.
$$\det(a,b,c,d)=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&0&1\\1&0&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}=1\neq 0$$
   En développant par rapport à la troisième ligne.
   Donc (a,b,c,d) est une base de $\mathbb{R}^4$.

2. $P=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&0&1&1\\1&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$
$$X=PX'\Leftrightarrow PX'=X\Leftrightarrow\begin{cases}x_1'+x_2'+x_3'+x_4'=x_1\\x_1'+x_3'+x_4'=x_2\\x_1'+x_4'=x_3\\x_4'=x_4\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_2'=x_1-x_1'-x_3'-x_4'=x_1-(x_3-x_4)-(x_2-x_3)-x_4\\x_3'=x_2-x_1'-x_4'=x_2-x_3\\x_1'=x_3-x_4'=x_3-x_4\\x_4'=x_4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1'=x_3-x_4\\x_2'=x_1-x_2\\x_3'=x_2-x_3\\x_4'=x_4\end{cases}$$
   Donc $P^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1&-1\\1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

3. Les coordonnées de $u(a)$ dans la base β sont $\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\1&0&-1&1\\0&1&-1&1\\0&1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

   Donc $u(a)=0_{\mathbb{R}^4}$
   $u(b)=c$, on a aussi $u(b)=e_1+e_2$ c'est donné par la deuxième colonne de la matrice, on en aura besoin plus tard.
   $u(c)=u\big(u(b)\big)=u^2(b)=d$,
$$u(d)=u\big(u^2(b)\big)=u^2\big(u(b)\big)=u^2(e_1+e_2)=u\big(u(e_1)+u(e_2)\big)=u(e_1+e_2+e_3+e_4)$$
$$=u(e_1)+u(e_2)+u(e_3)+u(e_4)=e_1=a$$
   Il suffit de faire la somme des quatre colonnes pour trouver les coordonnées de $u(d)$ dans la base β.

4.

$$N=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

5.

$$N^2=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$$

$$N^4=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Or $A=PNP^{-1}$ donc $A^4=(PNP^{-1})^4=PNP^{-1}PNP^{-1}PNP^{-1}PNP^{-1}=PN^4P^{-1}=O$

6. Soit $x\in\mathbb{R}^4$, il s'exprime sous la forme $x=x'_1a+x'_2b+x'_3c+x'_4d$ dans la base β' ?

$$x\in\ker(u)\Leftrightarrow u(x)=0_{\mathbb{R}^4}\Leftrightarrow NX'=O\Leftrightarrow\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'_1\\x'_2\\x'_3\\x'_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x'_4\\0\\x'_2\\x'_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Donc $x=x'_1a$, $\ker(u)$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur a.

7. $Im(u)=Vect\big(u(a),u(b),u(c),u(d)\big)=Vect(0_{\mathbb{R}^4},c,d,a)=Vect(a,c,d)$

(a,c,d) est une famille (car (a,b,c,d) est libre) et génératrice de $Im(u)$, c'est une base de $Im(u)$.

Allez à : Exercice 50

Correction exercice 51.

1. Soit $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\ker(u)$

$$u(x)=0_{\mathbb{R}^4}\Leftrightarrow\begin{cases}-x_1-x_2=0\\0=0\\-2x_1-x_3+x_4=0\\-x_1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=0\\x_2=0\\x_3=x_4\end{cases}$$

$$x=(0,0,x_4,x_4)=x_4(0,0,1,1)$$

On pose $a=(0,0,1,1)$

2. On cherche les vecteurs $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ tels que $a=u(x)$

$$u(x)=a\Leftrightarrow AX=X_a\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-1&-1&0&0\\0&0&0&0\\-2&0&-1&1\\-1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}-x_1-x_2=0\\0=0\\-2x_1-x_3+x_4=1\\-x_1=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=-1\\x_2=1\\x_4=1+x_3\end{cases}$$

On prend un x_3 quelconque, $x_3=0$ par exemple

On pose $b=(-1,1,0,1)$

3. Première méthode

En regardant la matrice, il est clair que $u(e_3)=-e_3$, donc $c=e_3$ convient

Deuxième méthode

On cherche les vecteurs $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ tels que $u(x)=-x$

$$u(x)=-x\Leftrightarrow\begin{cases}-x_1-x_2=-x_1\\0=-x_2\\-2x_1-x_3+x_4=-x_3\\-x_1=-x_4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=0\\x_4=x_1\\x_4=2x_1\end{cases}\Leftrightarrow x_1=x_2=x_4=0$$

$$x=(0,0,x_3,0)=x_3(0,0,1,0)=x_3e_3$$

4.

$$\det(a,b,c,d)=\begin{vmatrix}0&-1&0&0\\0&1&0&-1\\1&0&1&0\\1&1&0&1\end{vmatrix}=-(-1)\begin{vmatrix}0&0&-1\\1&1&0\\1&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&0&-1\\1&1&0\\1&0&1\end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la première ligne

$$\det(a,b,c,d)=\begin{vmatrix}0&-1&0&0\\0&1&0&-1\\1&0&1&0\\1&1&0&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix}=1\neq 0$$

En développant par rapport à la première ligne

Par conséquent β' est une base de $\mathbb{R}^4$.

5. Les coordonnées de $u(d)$ dans la base β sont

$$AX_d=\begin{pmatrix}-1&-1&0&0\\0&0&0&0\\-2&0&-1&1\\-1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}=X_c-X_d$$

Donc

$$u(d)=c-d$$

6. On en déduit que

$$T=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&-1&1\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$$

7. Le rang de A est le même que celui de T, la matrice T a trois colonnes libres, (les seconde, troisième et quatrième) donc son rang est 3, donc le rang de A est 3.

8.

Les coordonnées de $u(f)$ dans la base β sont

$$AX_f=\begin{pmatrix}-1&-1&0&0\\0&0&0&0\\-2&0&-1&1\\-1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\-2\\-2\end{pmatrix}$$

Donc $u(f)=-e_1-2e_3-2e_4$

Les coordonnées de $u^2(f)$ dans la base β sont

$$A^2X_f=\begin{pmatrix}-1&-1&0&0\\0&0&0&0\\-2&0&-1&1\\-1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\\-2\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}$$

Donc $u^2(f)=e_1+2e_3+e_4$

Les coordonnées de $u^3(f)$ dans la base β sont

$$A^3X_f=A\left(A^2X_f\right)=\begin{pmatrix}-1&-1&0&0\\0&0&0&0\\-2&0&-1&1\\-1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}=A\left(AX_f\right)=\begin{pmatrix}-1\\0\\-3\\-1\end{pmatrix}$$

Donc $u^3(f)=-2e_1-4e_3-2e_4$

$$\det\left(f,u(f),u^2(f),u^3(f)\right)=\begin{vmatrix}2&-1&1&-1\\-1&0&0&0\\-1&-2&2&-3\\1&-2&1&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&1&-1\\-2&-2&-3\\-2&1&-1\end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la deuxième ligne, puis en remplaçant la deuxième colonne par elle-même plus la première colonne et la troisième par elle-même moinss la première colonne

$$\det\big(f,u(f),u^2(f),u^3(f)\big)=\begin{vmatrix}-1&0&0\\-2&-4&-1\\-2&-1&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-4&-1\\-1&1\end{vmatrix}=5\neq 0$$

Donc $\big(f,u(f),u^2(f),u^3(f)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^4$

9.

Les coordonnées de $u^4(f)$ dans la base β sont

$$A^4X_f=\begin{pmatrix}-1&-1&0&0\\0&0&0&0\\-2&0&-1&1\\-1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\\-3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\4\\1\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}-1\\0\\-3\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}$$

Ce qui montre que $u^4(f)=-2u^3(f)-u^2(f)$

$$C=\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}u(f)&u^2(f)&u^3(f)&u^4(f)\end{array}\\\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&-1\\0&0&1&-2\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c}f\\u(f)\\u^2(f)\\u^3(f)\end{array}$$

10. Soit Q la matrice de passage de β à β''

$$C=Q^{-1}AQ\Leftrightarrow A=QCQ^{-1}$$

D'autre part $A=PTP^{-1}$

Donc

$$PTP^{-1}=QCQ^{-1}$$

Ce qui entraine que

$$T=P^{-1}QCQ^{-1}P=(Q^{-1}P)^{-1}C(Q^{-1}P)$$

Soit $R=Q^{-1}P$

Allez à : Exercice 51

Correction exercice 52.

1. Soit $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\ker(u)$

$$u(x)\in\ker(u)\Leftrightarrow\begin{pmatrix}3&-1&1&-3\\1&1&-1&-1\\0&1&-1&0\\1&0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}3x_1-x_2+x_3-3x_4=0\\x_1+x_2-x_3-x_4=0\\x_2-x_3=0\\x_1-x_4=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3x_1-x_2+x_3-3x_4=0\\x_1+x_2-x_3-x_4=0\\x_2=x_3\\x_1=x_4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-x_2+x_3=0\\x_1-x_4=0\\x_2=x_3\\x_1=x_4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=x_4\\x_2=x_3\end{cases}$$

Donc $x=(x_4,x_3,x_3,x_4)=x_3(0,1,1,0)+x_4(1,0,0,1)$

On pose $a=(0,1,1,0)$ et $b=(1,0,0,1)$, c'est deux vecteurs engendrent $\ker(u)$ et ils ne sont proportionnels, ils forment une famille libre et génératrice de $\ker(u)$, c'est une base.

2. Soit $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in E_1$

$$u(x)\in E_1\Leftrightarrow\begin{pmatrix}3&-1&1&-3\\1&1&-1&-1\\0&1&-1&0\\1&0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}3x_1-x_2+x_3-3x_4=x_1\\x_1+x_2-x_3-x_4=x_2\\x_2-x_3=x_3\\x_1-x_4=x_4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x_1-x_2+x_3-3x_4=0\\x_1-x_3-x_4=0\\x_2-2x_3=0\\x_1-2x_4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x_4-2x_3+x_3-3x_4=0\\2x_4-x_3-x_4=0\\x_2=2x_3\\x_1=2x_4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_3-x_4=0\\-x_3-x_4=0\\x_2=2x_3\\x_1=2x_4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=2x_4\\x_2=2x_4\\x_3=x_4\end{cases}$$

Donc $x = (2x_4, 2x_4, x_4, x_4) = x_4 = (2,2,1,1)$ par conséquent si on pose $c = (2,2,1,1)$ on a $E_1 = vect(c)$

3. La matrice de $\ker((u - id)^2)$dans la base β est $(A - I)^2$

$$(A-I)^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \ker((u - id)^2) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ -x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ -x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_2 - 3x_3 + x_4 \\ x_2 = x_3 + x_4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_3 + 2x_4 - 3x_3 + x_4 = -x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 + x_4 \end{cases}$$

Donc

$$x = (-x_3 + 3x_4, x_3 + x_4, x_3, x_4) = x_3(-1,1,1,0) + x_4(3,1,0,1)$$

Le tout est de ne pas prendre $x_3 = x_4$ sinon on retombe un vecteur proportionnel à $(2,2,1,1)$ on prend n'importe que quoi d'autre par exemple $x_3 = 1$ et $x_4 = 0$

Ensuite on regarde les coordonnées de $d = (-1,1,1,0)$ dans la base canonique soit AX_d

$$AX_d = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -X_c + X_d$$

4.

$$\det(a,b,c,d) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

En soustrayant la quatrième colonne avec la seconde

$$\det(a,b,c,d) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Donc (a,b,c,d) est une base de $\mathbb{R}^4$.

5.

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Allez à : Exercice 52

Correction exercice 53.

1.

$$x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\ker(u)\Leftrightarrow u(x)=0_{\mathbb{R}^4}\Leftrightarrow AX=O\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2&-1&0&1\\1&0&0&1\\0&0&1&0\\-3&1&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x_1-x_2+x_4=0\\x_1+x_4=0\\x_3=0\\-3x_1+x_2-2x_4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x_1-x_2+x_4=0\\x_1=-x_4\\x_3=0\\-3x_1+x_2-2x_4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2x_4-x_2+x_4=0\\x_1=-x_4\\x_3=0\\3x_4+x_2-2x_4=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=-x_4\\x_1=-x_4\\x_3=0\\x_2=-x_4\end{cases}$$

$$x=(x_1,x_2,x_3,x_4)=(-x_4,-x_4,0,x_4)=x_4(-1,-1,0,1)$$

$a=(-1,-1,0,1)$ engendre $\ker(u)$.

2. $u(0_{\mathbb{R}^4})=0_{\mathbb{R}^4}=\lambda 0_{\mathbb{R}^4}$, donc $0_{\mathbb{R}^4}\in E_\lambda$
Soient x et y deux vecteurs de E_λ, on a $u(x)=\lambda x$ et $f(y)=\lambda y$
Par conséquent
$$u(\alpha x+\beta y)=\alpha u(x)+\beta u(y)=\alpha\lambda x+\beta\lambda y=\lambda(\alpha x+\beta y)$$
Ce qui montre que $\alpha x+\beta y\in E_\lambda$
E_λ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

3.
$$x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in E_{-1}\Leftrightarrow u(x)=-x\Leftrightarrow AX=-X\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2&-1&0&1\\1&0&0&1\\0&0&1&0\\-3&1&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x_1-x_2+x_4=-x_1\\x_1+x_4=-x_2\\x_3=-x_3\\-3x_1+x_2-2x_4=-x_4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x_1-x_2+x_4=0\\x_1+x_2+x_4=0\\2x_3=0\\-3x_1+x_2-x_4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x_1-x_2+x_4=0\\x_1+x_2+x_4=0\\2x_3=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow L_2+L_1\begin{cases}3x_1-x_2+x_4=0\\4x_1+2x_4=0\\x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x_1-x_2+x_4=0\\x_4=-2x_1\\x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=x_1\\x_4=-2x_1\\x_3=0\end{cases}$$

$$x=(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1,x_1,0,-2x_1)=x_1(1,1,0,-2)$$

$b=(1,1,0,-2)$ engendre E_{-1}.

$$x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in E_1\Leftrightarrow u(x)=x\Leftrightarrow AX=X\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2&-1&0&1\\1&0&0&1\\0&0&1&0\\-3&1&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x_1-x_2+x_4=x_1\\x_1+x_4=x_2\\x_3=x_3\\-3x_1+x_2-2x_4=x_4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1-x_2+x_4=0\\x_1-x_2+x_4=0\\0=0\\-3x_1+x_2-3x_4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2\end{matrix}\begin{cases}x_1-x_2+x_4=0\\-3x_1+x_2-3x_4=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2+3L_2\end{matrix}\begin{cases}x_1-x_2+x_4=0\\-2x_2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=-x_4\\x_2=0\end{cases}$$

$$x=(x_1,x_2,x_3,x_4)=(-x_4,0,x_3,x_4)=x_3(0,0,1,0)+x_4(-1,0,0,1)$$

On pose $c=(0,0,1,0)$ et $d=(-1,0,0,1)$, (c,d) engendrent E_1, de plus ils ne sont pas proportionnels, donc ils forment une famille libre, c'est une base de E_1.

4. Première méthode
$$\det(a,b,c,d)=\begin{vmatrix}-1&1&0&-1\\-1&1&0&0\\0&0&1&0\\1&-2&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&1&-1\\-1&1&0\\1&-2&1\end{vmatrix}$$
En développant par rapport à la troisième colonne

$$\det(a,b,c,d)=\begin{array}{c}L_1\\L_2\\L_3\end{array}\begin{vmatrix}-1&1&-1\\-1&1&0\\1&-2&1\end{vmatrix}=\begin{array}{c}L_1+L_3\\L_2\\L_3\end{array}\begin{vmatrix}0&-1&0\\-1&1&0\\1&-2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-1\\-1&1\end{vmatrix}=-1\neq 0$$

En développant par rapport à la troisième colonne

Donc (a,b,c,d) est une base de $\mathbb{R}^4$.

Deuxième méthode

$$\alpha a+\beta b+\gamma c+\delta d=0_{\mathbb{R}^4}\Leftrightarrow\begin{cases}-\alpha+\beta-\delta=0\\-\alpha+\beta=0\\\gamma=0\\\alpha-2\beta+\delta=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\alpha+\beta-\delta=0\\\alpha=\beta\\\gamma=0\\\alpha-2\beta+\delta=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\delta=0\\\alpha=\beta\\\gamma=0\\-\beta+\delta=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\delta=0\\\alpha=\beta\\\gamma=0\\\beta=0\end{cases}$$

(a,b,c,d) est une famille libre à 4 vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 4, c'est une base.

5. D'après les questions précédentes on a

$$u(a)=0_{\mathbb{R}^4};u(b)=-b;u(c)=c\quad\text{et}\,u(d)=d$$

Donc

$$Mat_{\beta'}(u)=\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}u(a)&u(b)&u(c)&u(d)\end{array}\\\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c}\\a\\b\\c\\d\end{array}$$

Allez à : Exercice 53

Correction exercice 54.

1.

$$\det(a_1,a_2,a_3,c)=\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}C_1&C_2&C_3&C_4\end{array}\\\begin{vmatrix}1&0&1&-1\\2&1&3&-1\\3&1&5&-1\\-2&0&-3&0\end{vmatrix}\end{array}=\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}C_1&C_2&C_3-C_1&C_4+C_1\end{array}\\\begin{vmatrix}1&0&0&0\\2&1&-1&1\\3&1&-2&2\\-2&0&1&-2\end{vmatrix}\end{array}=\begin{array}{c}L_1\\L_2\\L_3\end{array}\begin{vmatrix}2&1&3\\3&1&5\\-2&0&-3\end{vmatrix}$$

$$=\begin{array}{c}L_1\\L_2-L_1\\L_3\end{array}\begin{vmatrix}2&1&3\\1&0&2\\-2&0&-3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&2\\-2&-3\end{vmatrix}=-1$$

$$P=\begin{pmatrix}1&0&1&-1\\2&1&3&-1\\3&1&5&-1\\-2&0&-3&0\end{pmatrix}$$

2. Les coordonnées de $u(a_1)$ dans la base β sont $\begin{pmatrix}-1&2&-2&-2\\-2&3&-2&-2\\-2&2&-1&-2\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\-2\end{pmatrix}$

Donc $u(a_1)=e_1+2e_2+3e_3-2e_4=a_1$

Les coordonnées de $u(a_2)$ dans la base β sont $\begin{pmatrix}-1&2&-2&-2\\-2&3&-2&-2\\-2&2&-1&-2\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$

Donc $u(a_2)=e_2+e_3=a_2$

Les coordonnées de $u(a_3)$ dans la base β sont $\begin{pmatrix}-1&2&-2&-2\\-2&3&-2&-2\\-2&2&-1&-2\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\\5\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\5\\-3\end{pmatrix}$

Donc $u(a_3)=e_1+3e_2+5e_3-3e_4=a_3$

Les coordonnées de $u(c)$ dans la base β sont $\begin{pmatrix}-1&2&-2&-2\\-2&3&-2&-2\\-2&2&-1&-2\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$

Donc $u(c)=e_1+e_2+e_3=-c$

$$D=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$$

3. $u(a_1)=a_1\in F$, $u(a_2)=a_2\in F$ et $u(a_3)=a_3\in F$, (a_1,a_2,a_3) est une base de F donc pour tout $x\in F$, $u(x)\in F$.
   Pour tout $x\in F$, $v(x)=u(x)\in F$, et v est linéaire donc v est un endomorphisme de F.
$$Mat_{(a_1,a_2,a_3)}(v)=\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}u(a_1)&u(a_2)&u(a_3)\end{array}\\ \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c}\\a_1\\a_2\\a_3\end{array}$$
4. (a_1,a_2,a_3) est une base de F, (c) est une base de $Vect(c)$, et (a_1,a_2,a_3,c) est une base de $\mathbb{R}^4$, donc
$$\mathbb{R}^4=F\oplus Vect(c)$$
5. Par définition de la somme directe, pour tout $x\in\mathbb{R}^4$ il existe un unique $f\in F$ et un unique $g\in Vect(c)$ tel que $x=f+g$.
$$u(x)=u(f+g)=u(f)+u(g)=f-g$$

Allez à : Exercice 54

Correction exercice 55.

1.
$$\begin{vmatrix}-10-\lambda&-3&-12\\5&-\lambda&7\\6&2&7-\lambda\end{vmatrix}=(-10-\lambda)\begin{vmatrix}-\lambda&7\\2&7-\lambda\end{vmatrix}-5\begin{vmatrix}-3&-12\\2&7-\lambda\end{vmatrix}+6\begin{vmatrix}-3&-12\\-\lambda&7\end{vmatrix}$$
$$=(-10-\lambda)[-\lambda(7-\lambda)-14]-5[-3(7-\lambda)+24]+6(-21-12\lambda)$$
$$=(-10-\lambda)(\lambda^2-7\lambda-14)-5(3+3\lambda)-126-72\lambda$$
$$=-10\lambda^2+70\lambda+140-\lambda^3+7\lambda^2+14\lambda-15-15\lambda-126-72\lambda$$
$$=-\lambda^3-3\lambda^2-3\lambda-1=-(\lambda+1)^3$$

Si $\lambda=-1$ alors $A-\lambda I=A+I$ n'est pas inversible.

Soit $x=(x_1,x_2,x_3)$ et $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ ses coordonnées dans la base canonique.

$$x\in\ker(u+id)\Leftrightarrow X\in\ker(A+I)\Leftrightarrow(A+I)X=O\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-9&-3&-12\\5&1&7\\6&2&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}-9x_1-3x_2-12x_3=0\\5x_1+x_2+7x_3=0\\6x_1+2x_2+8x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x_1+x_2+4x_3=0\\5x_1+x_2+7x_3=0\\3x_1+x_2+4x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2\end{matrix}\begin{cases}3x_1+x_2+4x_3=0\\5x_1+x_2+7x_3=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow L_2-L_1\begin{cases}3x_1+x_2+4x_3=0\\2x_1+3x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x_1+x_2+4x_3=0\\x_1=-\frac{3}{2}x_3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\frac{9}{2}x_3+x_2+4x_3=0\\x_1=-\frac{3}{2}x_3\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=\frac{1}{2}x_3\\x_1=-\frac{3}{2}x_3\end{cases}$$

Donc $x=\left(-\frac{3}{2}x_3,\frac{1}{2}x_3,x_3\right)=\frac{x_3}{2}(-3,1,2)$

Donc $\ker(A+I)$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur colonne $\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}$.

2. $(u+Id)(a)=0_{\mathbb{R}^3}\Leftrightarrow u(a)+a=0_{\mathbb{R}^3}\Leftrightarrow u(a)=-a$
3. Si on pose $X_a=\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}$ et $X_b=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ où X_b sont les coordonnées de b dans la base canonique alors

$$u(b)=a-b\Leftrightarrow AX_b=X_a-X_b\Leftrightarrow (A+I)X_b=X_a\Leftrightarrow \begin{pmatrix}-9&-3&-12\\5&1&7\\6&2&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-9x_1-3x_2-12x_3=-3\\5x_1+x_2+7x_3=1\\6x_1+2x_2+8x_3=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x_1+x_2+4x_3=1\\5x_1+x_2+7x_3=1\\3x_1+x_2+4x_3=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2\end{matrix}\begin{cases}3x_1+x_2+4x_3=1\\5x_1+x_2+7x_3=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow L_2-L_1\begin{cases}3x_1+x_2+4x_3=1\\2x_1+3x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x_1+x_2+4x_3=1\\x_1=-\frac{3}{2}x_3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\frac{9}{2}x_3+x_2+4x_3=1\\x_1=-\frac{3}{2}x_3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=\frac{1}{2}x_3+1\\x_1=-\frac{3}{2}x_3\end{cases}$$

Si on prend $x_3=0$ on a pour solution $b=(0,1,0)$.

Si on pose $X_b=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $X_c=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ où X_c sont les coordonnées de c dans la base canonique alors

$$u(c)=b-c\Leftrightarrow AX_c=X_b-X_c\Leftrightarrow (A+I)X_c=X_b\Leftrightarrow \begin{pmatrix}-9&-3&-12\\5&1&7\\6&2&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-9x_1-3x_2-12x_3=0\\5x_1+x_2+7x_3=1\\6x_1+2x_2+8x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x_1+x_2+4x_3=0\\5x_1+x_2+7x_3=1\\3x_1+x_2+4x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2\end{matrix}\begin{cases}3x_1+x_2+4x_3=0\\5x_1+x_2+7x_3=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow L_2-L_1\begin{cases}3x_1+x_2+4x_3=0\\2x_1+3x_3=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x_1+x_2+4x_3=0\\x_1=-\frac{3}{2}x_3+\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\frac{9}{2}x_3+\frac{3}{2}+x_2+4x_3=0\\x_1=-\frac{3}{2}x_3+\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=\frac{1}{2}x_3-\frac{3}{2}\\x_1=-\frac{3}{2}x_3+\frac{1}{2}\end{cases}$$

Si on prend $x_3=1$ on a pour solution $c=(-1,-1,1)$.

4. $\det(a,b,c)=\begin{vmatrix}-3&0&-1\\1&1&-1\\2&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-3&-1\\2&1\end{vmatrix}=-1\neq 0$ donc (a,b,c) est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. $T=\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$
6. $(T+I)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$, par de simple calculs on trouve que $(T+I)^3=O$.

$$(A+I)^3=(PTP^{-1}+PIP^{-1})^3=(P(T+I)P^{-1})^3=P(T+I)^3P^{-1}=O$$

7. $(A+I)^3\Leftrightarrow A^3+3A^2+3A+I=O\Leftrightarrow A(-3A^2-3A-3I)=I$

   Donc $A^{-1}=-3A^2-3A-3I$

Allez à : Exercice 55

Correction exercice 56.

1.

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} f(e_1) & f(e_1) & f(e_3) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$$

2. Soient $x \in E_1$, $(f - id_{\mathbb{R}^3})(x) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow f(x) - x = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow f(x) = x$

$$f(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow 0_{\mathbb{R}^3} \in E_1$$

Soient x, x' deux vecteurs de E_1 donc $f(x) = x$ et $f(x') = x'$, soient λ, λ' deux réels

$$f(\lambda x + \lambda' x') = \lambda f(x) + \lambda' f(x') = \lambda x + \lambda' x'$$

Cela entraine que $\lambda x + \lambda' x' \in E_1$, par conséquent E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Soient $x \in N_{-1}$, $(f^2 + id_{\mathbb{R}^3})(x) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow f^2(x) + x = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow f^2(x) = -x$

$$f(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow f^2(0_{\mathbb{R}^3}) = f(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3} = -0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow 0_{\mathbb{R}^3} \in N_{-1}$$

Soient x, x' deux vecteurs de N_{-1} donc $f^2(x) = -x$ et $f^2(x') = -x'$, soient λ, λ' deux réels

$$f^2(\lambda x + \lambda' x') = \lambda f^2(x) + \lambda' f^2(x') = \lambda(-x) + \lambda'(-x') = -(\lambda x + \lambda' x')$$

Cela entraine que $\lambda x + \lambda' x' \in N_{-1}$, par conséquent$N_{-1}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Remarque :

On peut aller plus vite en remarquant que $f + id_{\mathbb{R}^3}$ est une application linéaire et en invoquant le fait que le noyau d'une application linéaire un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Et puis pareil pour $f^2 + id_{\mathbb{R}^3}$.

3.

$$x \in E_1 \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow AX = X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_2 - x_3 = x_1 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 = x_2 \\ 3x_1 - 8x_2 + 6x_3 = x_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 - 8x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

Maintenant on peut appliquer la méthode du pivot de Gauss (à l'étape d'avant ce n'était pas possible).

$$x \in E_1 \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 - 8x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - 8x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 + L_1 \\ L_3 + 3L_1 \end{matrix}\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$$

$$x = (x_3, x_3, x_3) = x_3(1,1,1)$$

E_1 est la droite vectoriel engendrée par le vecteur $a = (1,1,1), E_1 = Vect(a)$.

$$x \in E_1 \Leftrightarrow f^2(x) = -x \Leftrightarrow A^2X = -X$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -x_1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -x_2 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = -x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x_1 - x_2 + x_3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 - x_3$$

$$x = (x_2 - x_3, x_2, x_3) = x_2(1,1,0) + x_3(-1,0,1)$$

On cherche un vecteur de N_{-1}, prenons $x_2 = 1$ et $x_3 = 0$: $b = (1,1,0) = e_1 + e_2$

$$f(b) = f(e_1 + e_2) = f(e_1) + f(e_2) = 2e_2 + 3e_3 + 2e_1 - 5e_2 - 8e_3 = 2e_1 - 3e_2 - 5e_3$$

Il faut vérifier que ce vecteur est bien dans N_{-1}, $x_1 - x_2 + x_3 = 2 -- 3 + (-5) = 0$, c'est bon, $f(b) \in N_{-1}$ ensuite il faut montrer que $\big(b, f(b)\big)$ est une base de N_{-1}. $\dim(N_{-1}) < 3$ or $\big(b, f(b)\big)$ est une famille libre (car b et $f(b)$ ne sont pas proportionnels) dans un espace de dimension inférieur ou égale à 2, cela entraine à la fois que $\dim(N_{-1}) \geq 2$, qu'alors $\dim(N_{-1}) = 2$ et que $\big(b, f(b)\big)$ est une base de cet espace.

Il y a plusieurs méthode possible, la plus basique est de montrer que $(a,b,f(b))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, on passe, c'est trop facile. Deuxième méthode, soit $x\in E_1\cap N_{-1}$,
$x\in E_1 \Leftrightarrow f(x)=x \Rightarrow f(f(x))=f(x)=x$ et $x\in N_{-1}\Leftrightarrow f^2(x)=-x$, cela entraine que $-x=x\Leftrightarrow x=0_{\mathbb{R}^3}$, autrement dit $E_1\cap N_{-1}=\{0_{\mathbb{R}^3}\}$
Comme $\dim(E_1)+\dim(N_{-1})=1+2=3=\dim(\mathbb{R}^3)$, on en déduit que $E_1\oplus N_{-1}=\mathbb{R}^3$.

Remarque :

Sans rien faire de plus on peut en déduire que β' est une base.

4. Il faut d'abord calculer $f(a), f(b)$ et $f(f(b))$ dans la base $(a,b,f(b))$
$f(a)=a$ car $a\in E_1$.
$f(b)=f(b)$ çà c'est sûr ! et $f(f(b))=f^2(b)=-b$
On en déduit la matrice de f dans la base $(a,b,f(b))$

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} f(a) & f(b) & f^2(b) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} a \\ b \\ f(b) \end{matrix}$$

5. Il faut calculer $f^2(a), f^2(b)$ et $f^2(f(b))$ dans la base $(a,b,f(b))$

$$f^2(a)=f(f(a))=f(a)=a$$
$$f^2(b)=-b$$
$$f^2(f(b))=f^3(b)=f(f^2(b))=f(-b)=-f(b)$$

Donc la matrice est

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} f^2(a) & f^2(b) & f^3(b) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} a \\ b \\ f(b) \end{matrix}$$

Autre méthode la matrice de f^2 est la matrice de f au carré

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Allez à : Exercice 56

Correction exercice 57.

1. On appelle X_{e_2} les coordonnées de e_2 dans la base canonique
Les coordonnées de $u(e_2)$ dans la base canonique sont

$$AX_{e_2}=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Les coordonnées de $u^2(e_2)$ dans la base canonique sont

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Les coordonnées de $u^3(e_2)$ dans la base canonique sont

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Montrons que $(e_2,u(e_2),u^2(e_2),u^3(e_2))$ est libre

$$\alpha e_2+\beta u(e_2)+\gamma u^2(e_2)+\delta u^3(e_2)=0_{\mathbb{R}^4}\Leftrightarrow \alpha\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\-1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}-4\\1\\4\\-2\end{pmatrix}+\delta\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-2\beta-4\gamma-2\delta=0\\ \alpha+\beta+\gamma+\delta=0\\ 4\gamma=0\\ -\beta-2\gamma+\delta=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2\beta-2\delta=0\\ \alpha+\beta+\delta=0\\ \gamma=0\\ -\beta+\delta=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta+\delta=0\\ \alpha+\beta+\delta=0\\ \gamma=0\\ -\beta+\delta=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta+\delta=0\\ \alpha=0\\ \gamma=0\\ -\beta+\delta=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=0\\ \beta=0\\ \gamma=0\\ \delta=0\end{cases}$$

$\big(e_2,u(e_2),u^2(e_2),u^3(e_2)\big)$ est une famille libre à 4 vecteurs dans un espace de dimension 4, c'est une base.

2.

Les coordonnées de $u^4(e_2)$ dans la base canonique sont

$$\begin{pmatrix}2&-2&1&-2\\0&1&0&0\\-3&0&-2&2\\1&-1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\1\\8\\-4\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}-4\\1\\4\\-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

Donc $u^4(e_2)=-e_2+2u^2(e_2)$

$$C=\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}u(e_2)&u^2(e_2)&u^3(e_2)&u^4(e_2)\end{array}\\ \begin{pmatrix}0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&1&0&2\\0&0&1&0\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c}e_2\\u(e_2)\\u^2(e_2)\\u^3(e_2)\end{array}$$

3. On cherche les vecteurs $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ tels que $u(x)=x$

$$u(x)=x\Leftrightarrow AX=X\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2&-2&1&-2\\0&1&0&0\\-3&0&-2&2\\1&-1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}2x_1-2x_2+x_3-2x_4=x_1\\ x_2=x_2\\ -3x_1-2x_3+2x_4=x_3\\ x_1-x_2+x_3-x_4=x_4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}\begin{cases}x_1-2x_2+x_3-2x_4=0\\ -3x_1-3x_3+2x_4=0\\ x_1-x_2+x_3-2x_4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2+3L_1\\L_3-L_1\end{matrix}\begin{cases}x_1-2x_2+x_3-2x_4=0\\ -6x_2-4x_4=0\\ x_2=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_3=0\\ x_4=0\\ x_2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_3=-x_1\\ x_4=0\\ x_2=0\end{cases}$$

$$x=(x_1,0,-x_1,0)=x_1(1,0,-1,0)$$

4. Les coordonnées de $u(b)$ dans la base canonique sont

$$AX_b=\begin{pmatrix}2&-2&1&-2\\0&1&0&0\\-3&0&-2&2\\1&-1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}=X_a+X_b$$

Les coordonnées de $u(c)$ dans la base canonique sont

$$AX_c=\begin{pmatrix}2&-2&1&-2\\0&1&0&0\\-3&0&-2&2\\1&-1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\-1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}=-X_c$$

Donc $u(c)=-c$

5. On cherche les vecteurs $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ tels que $u(x)=c-x$

$$u(x)=c-x\Leftrightarrow AX=X_c-X\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2&-2&1&-2\\0&1&0&0\\-3&0&-2&2\\1&-1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x_1-2x_2+x_3-2x_4=1-x_1\\x_2=-x_2\\-3x_1-2x_3+2x_4=-1-x_3\\x_1-x_2+x_3-x_4=1-x_4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x_1-2x_2+x_3-2x_4=1\\2x_2=0\\-3x_1-x_3+2x_4=-1\\x_1-x_2+x_3=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3x_1+x_3-2x_4=1\\x_2=0\\-3x_1-x_3+2x_4=-1\\x_1+x_3=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=0\\-3x_1-x_3+2x_4=-1\\x_1=1-x_3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=0\\-3(1-x_3)-x_3+2x_4=-1\\x_1=1-x_3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=0\\2x_4=2-2x_3\\x_1=1-x_3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=0\\x_4=1-x_3\\x_1=1-x_3\end{cases}$$

Prenons $x_3=0$ par exemple, alors $d=(1,0,0,1)$

6. On peut montrer que la famille β'' est libre et rappeler qu'elle a 4 vecteurs dans un espace de dimension 4 ou alors calculer le déterminant

$$\det(a,b,c,d)=\begin{vmatrix}1&1&0&-1\\0&-1&0&0\\-1&0&-1&1\\1&1&1&0\end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la seconde ligne

$$\det(a,b,c,d)=+(-1)\begin{vmatrix}1&0&-1\\-1&-1&1\\1&1&0\end{vmatrix}$$

Puis par rapport à la première ligne

$$\det(a,b,c,d)=-\left(\begin{vmatrix}-1&1\\1&0\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}-1&-1\\1&1\end{vmatrix}\right)=-(-1-0)=1\neq 0$$

Donc β'' est une base.

7.

$$T=\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}u(a)&u(b)&u(c)&u(d)\end{array}\\\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&1\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c}a\\b\\c\\d\end{array}$$

8. On pose

$$Q=\begin{pmatrix}0&-2&-4&-2\\1&1&1&1\\0&0&4&0\\0&-1&-2&1\end{pmatrix}$$

La matrice de passage de β à β', on $A=QCQ^{-1}$
Et

$$P=\begin{pmatrix}1&1&0&-1\\0&-1&0&0\\-1&0&-1&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}$$

La matrice de passage de β à β'', on a $A=PTP^{-1}$
Donc

$$QCQ^{-1}=PTP^{-1}$$

Ce qui équivaut à

$$C=Q^{-1}PTP^{-1}Q=(P^{-1}Q)^{-1}T(P^{-1}Q)$$

Ce qui montre que C et T sont semblables.

Allez à : Exercice 57

Correction exercice 58.

1. Si $\in \mathbb{R}_2[X]$, $d°(X+1)P' \leq 1+2-1=2$ donc f est bien une application de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$.
   $f(\lambda_1 P_1+\lambda_2 P_2)=(X+1)(\lambda_1 P_1+\lambda_2 P_2)'=(X+1)\left(\lambda_1 P_1'+\lambda_2 P_2'\right)=\lambda_1(X+1)P_1'+\lambda_2(X+1)P_2'=\lambda_1 f(P_1)+\lambda_2 f(P_2)$
   donc f est linéaire, c'est même un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2.
$$f(1)=(X+1)\times 0=0=0\times 1+0\times X+0\times X^2$$
$$f(X)=(X+1)\times 1=0=1\times 1+1\times X+0\times X^2$$
$$f(X^2)=(X+1)\times 2X=0=0\times 1+2\times X+2\times X^2$$
   Donc $A=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(1) & f(X) & f(X^2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \end{array}$
3. $\alpha+\beta(X+1)+\gamma(X+1)^2=0 \Leftrightarrow \gamma X^2+(\beta+2\gamma)X+\alpha+\beta+\gamma=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma=0 \\ \beta+2\gamma=0 \\ \alpha+\beta+\gamma=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=0 \\ \beta=0 \\ \gamma=0 \end{cases}$
   Donc B′ est une famille libre de trois vecteurs dans un espace de dimension 3 ($\dim \mathbb{R}_2[X]=3$), c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
4.
$$f(1)=(X+1)\times 0=0=0\times 1+0\times X+0\times X^2$$
$$f(X+1)=(X+1)\times 1=0=0\times 1+1\times (X+1)+0\times (X+1)^2$$
$$f((X+1)^2)=(X+1)\times 2(X+1)=0=0\times 1+0\times (X+1)+2\times (X+1)^2$$
   Donc
$$B=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(1) & f(X+1) & f((X+1)^2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ X+1 \\ (X+1)^2 \end{array}$$
5.
$$A^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$
$$A^3=AA^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 14 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$
   Si $k>0$
$$B^k=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}$$
   Et $B^0=I$
6.
   La première colonne de la matrice A est nulle, donc le rang de A est inférieur ou égal à 2, les deux suivantes ne sont pas proportionnelles, donc le rang de A est au moins 2.
$$rg(A)=rg(f)=2$$
7.
   $Im(f)$ est engendré par $f(X)=1+X$ et $f(X^2)=2X+2X^2$, cette famille constitue une base de $Im(f)$.
8.
   D'après le théorème du rang, la dimension du noyau de f est 1, car
$$\dim(\ker(f)+\dim(Im(f)=\dim \mathbb{R}_2[X]=3$$

Or $f(1)=0$, donc le noyau de f est la droite vectorielle engendrée par le « vecteur » 1. (C'est-à-dire le polynôme constant égale à 1).

Allez à : Exercice 58

Correction exercice 59.

1.

$$u(\alpha P+\beta Q)=\alpha P+\beta Q+(1-X)(\alpha P+\beta Q)'=\alpha P+\beta Q+(1-X)(\alpha P'+\beta Q')$$
$$=\alpha(P+(1-X)P')+\beta(Q+(1-X)Q')=\alpha u(P)+\beta u(Q)$$

Donc u est une application linéaire

$$d°P\leq 2\Rightarrow d°u(P)\leq 2$$

Elle va de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ il s'agit d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

2.

$$u(1)=1+(1-X)\times 0=1$$
$$u(X)=X+(1-X)\times 1=1$$
$$u(X^2)=X^2+(1-X)\times 2X=2X-X^2$$
$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&2\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

3. $P\in\ker(u)$

$$u(P)=0\Leftrightarrow u(aX^2+bX+c)=au(X^2)+bu(X)+cu(1)=a(2X-X^2)+b+c=0$$
$$\Leftrightarrow -aX^2+2aX+b+c=0\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\c=-b\end{cases}$$
$$P=bX-b=b(X-1)$$

Donc $\ker(u)$ est la droite vectorielle engendrée par le polynôme $X-1$.

$$Im(u)=Vect\big(u(1),u(X),u(X^2)\big)=Vect(1,1,2X-X^2)=Vect(1,2X-X^2)$$

Ces deux polynômes ne sont pas proportionnels ils forment donc une famille libre (et génératrice) de $Im(u)$ donc une base de $Im(u)$.

Allez à : Exercice 59

Correction exercice 60.

1. Si $d°P\leq 2$ alors $d°P'\leq 1$ et $d°(X-1)P'\leq 2$ donc $d°u(P)\leq 2$

D'autre part

$$u(\lambda P+\mu Q)=2(\lambda P+\mu Q)-(X-1)(\lambda P+\mu Q)'=2(\lambda P+\mu Q)-(X-1)(\lambda P'+\mu Q')$$
$$=\lambda(2P-(X-1)P')+\mu(2Q-(X-1)Q')=\lambda u(P)+\mu u(Q)$$

Cela montre que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

2.

$$u(1)=2\times 1-(X-1)\times 0=2;$$
$$u(X)=2X-(X-1)\times 1=X+1;$$
$$u(X^2)=2X^2-(X-1)\times 2X=2X$$

Par conséquent

$$A=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

3. Soit $P=aX^2+bX+c$

$$u(P)=au(X^2)+bu(X)+cu(1)=2aX+b(1+X)+2c=(2a+b)X+b+2c$$

Donc

$$u(P)=0\Leftrightarrow\begin{cases}2a+b=0\\b+2c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{b}{2}\\c=-\dfrac{b}{2}\end{cases}$$

Et

$$P=-\frac{b}{2}X^2+bX-\frac{b}{2}=-\frac{b}{2}(X^2-2X+1)=-\frac{b}{2}(X-1)^2$$

Le noyau de u est la droite vectorielle engendrée par le polynôme $P_2=(X-1)^2$

4. D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(u))+\dim\big(Im(u)\big)=\dim(\mathbb{R}_2[X])$$

Donc

$$\dim\big(Im(u)\big)=\dim(\mathbb{R}_2[X])-\dim(\ker(u))=3-1=2$$

$u(1)=2$ et $u(X)=1+X$ sont deux polynômes non proportionnels de l'image de u, ils forment donc une famille libre dans un espace de dimension 2, $(2,1+X)$ est une base de $Im(u)$.

5. Soit $P=aX^2+bX+c$

$$u(P)=P\Leftrightarrow(2a+b)X+b+2c=aX^2+bX+c\Leftrightarrow\begin{cases}0=a\\2a+b=b\\b+2c=c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\2a=0\\c=-b\end{cases}$$

$$P=bX-b=b(X-1)$$

$$P_1=X-1$$

6.

$$\alpha+\beta(X-1)+\gamma(X-1)^2=0\Leftrightarrow\alpha-\beta+\gamma+(\beta-2\gamma)X+\gamma X^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha-\beta+\gamma=0\\\beta-2\gamma=0\\\gamma=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=0\\\beta=0\\\gamma=0\end{cases}$$

β' est un famille libre à trois vecteurs dans un espace de dimension 3, c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$

7. $u(1)=2\times 1$, $u(P_1)=P_1$ et $u(P_2)=0$, donc

$$D=\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}u(1)&u(P_1)&u(P_2)\end{array}\\\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c}\\1\\P_1\\P_2\end{array}$$

Allez à : Exercice 60

Correction exercice 61.

1. Soient $P_1,P_2\in\mathbb{R}_2[X]$, soient $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$

$$f(\lambda_1P_1+\lambda_2P_2)=(\lambda_1P_1+\lambda_2P_2)-(X-2)(\lambda_1P_1+\lambda_2P_2)'=\lambda_1P_1+\lambda_2P_2-(X-2)(\lambda_1P_1'+\lambda_2P_2')$$
$$=\lambda_1(P_1-(X-2)P_1')+\lambda_2(P_2-(X-2)P_2')=\lambda_1f(P_1)+\lambda_2f(P_2)$$

Donc f est linéaire.

2. f est un endomorphisme si l'image de $\mathbb{R}_2[X]$ par f est $\mathbb{R}_2[X]$, autrement dit il faut que l'image d'un polynôme de degré inférieur ou égal à 2 soit un polynôme de degré inférieur ou égal à 2.

Première méthode

$$f(aX^2+bX+c)=aX^2+bX+c-(X-2)(2aX+b)$$
$$=aX^2+bX+c-(2aX^2+bX-4aX-2b)=-aX^2+4aX+c-2b$$

C'est bon, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ (parce qu'il est clair que f est linéaire d'après la première question).

Deuxième méthode

$$d°P\le 2\Rightarrow d°P'\le 1$$

Donc

$$d°(X-2)P'\le 1+1=2$$

Par conséquent

$$d°f(P)\le 2$$

Troisième méthode

Comme $f(aX^2+bX+c)=af(X^2)+bf(X)+cf(1)$, il suffit de vérifier que $d°f(X^2)\le 2$, $d°f(X)\le 2$ et que $d°f(1)\le 2$, ce qui est le cas car

$$f(X^2)=X^2-(X-2)\times 2X=-X^2+4X;$$

$$f(X) = X - (X - 2) \times 1 = 2;$$
$$f(1) = 1 - (X - 2) \times 0 = 1$$

3.

$$P \in \ker(f) \Leftrightarrow f(P) = 0 \Leftrightarrow -aX^2 + 4aX + c - 2b = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -a = 0 \\ 4a = 0 \\ c - 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = 2b \end{cases}$$
$$P = bX + 2b = b(X + 2)$$

Les polynômes de $\ker(f)$ sont proportionnels au polynômes $X + 2$, il s'agit d'une droite vectorielle dont une base est le polynôme $X + 2$.

D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(f)) + \dim(Im(f)) = \dim(\mathbb{R}_2[X]) \Leftrightarrow 1 + \dim(Im(f)) = 3 \Leftrightarrow \dim(Im(f)) = 2$$
$$f(X^2) = -X^2 + 4X; f(X) = 2$$

Ces deux polynômes ne sont pas proportionnels, ils forment une famille libre de $Im(f)$ qui est de dimension 2, c'est une base de $Im(f)$.

Remarque :

$f(1) = 1$ est proportionnel au vecteur (polynôme) $f(X) = 2$.

4.

$$f(X^2) = 4X - X^2; f(X) = 2; f(1) = 1$$

Par conséquent

$$A = Mat_{(1,X,X^2)}(f) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(1) & f(X) & f(X^2) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \end{array} \end{array}$$

5.

$$\alpha \times 1 + \beta(X - 2) + \gamma(X - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta X - 2\beta + \gamma X^2 - 4\gamma X + 4\gamma = 0$$
$$\Leftrightarrow \gamma X^2 + (\beta - 4\gamma)X + \alpha - 2\beta + 4\gamma = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 0 \\ \beta - 4\gamma = 0 \\ \alpha - 2\beta + 4\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$$

β' est une famille libre à trois vecteurs dans un espace de dimension 3, c'est une base.

6.

$$P = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} 1 & X-2 & (X-2)^2 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \end{array} \end{array}$$

$$PX = Y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = y_1 \\ x_2 - 4x_3 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_2 - 4x_3 + y_1 \\ x_2 = 4x_3 + y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2(y_2 + 4y_3) - 4y_3 + y_1 \\ x_2 = y_2 + 4y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 + 2y_2 + 4y_3 \\ x_2 = y_2 + 4y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$
$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque :

On rappelle que P^{-1} est la matrice de passage de β' à β, cela signifie que

$$1 = 1$$
$$X = 2 \times 1 + 1 \times (X - 2)$$
$$X^2 = 4 \times 1 + 4 \times (X - 2) + 1 \times (X - 2)^2$$

7.

$$f(1)=1$$
$$f(X-2)=X-2-(X-2)\times 1=0$$
$$f((X-2)^2)=(X-2)^2-(X-2)\times 2(X-2)=-(X-2)^2$$

Donc

$$D=Mat_{\beta'}(f)=\begin{array}{cccc} f(1) & f(X-2) & f((X-2)^2) & \\ \multicolumn{3}{c}{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}} & \begin{array}{c}1\\X-2\\(X-2)^2\end{array}\end{array}$$

Deuxième méthode

On calcule

$$D=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&2&4\\0&1&4\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&4\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2&4\\0&1&-4\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&4\\0&1&4\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-4\\0&0&4\\0&0&-1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

On trouve bien sûr le même résultat (cela fait partie du cours).

Allez à : Exercice 61

Correction exercice 62.

1. Soient P_1 et P_2 deux polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ et soient λ_1 et λ_2 deux réels.
$$u(\lambda_1P_1+\lambda_2P_2)=2X(\lambda_1P_1+\lambda_2P_2)-X^2(\lambda_1P_1+\lambda_2P_2)'=2X(\lambda_1P_1+\lambda_2P_2)-X^2(\lambda_1P_1'+\lambda_2P_2')$$
$$=\lambda_1(2XP_1-X^2P_1')+\lambda_2(2XP_2-X^2P_2')=\lambda_1u(P_1)+\lambda_2u(P_2)$$
Donc u est linéaire.
Soit $P=aX^2+bX+c\in\mathbb{R}_2[X]$, $P'=2aX+b$
$$u(P)=2X(aX^2+bX+c)-X^2(2aX+b)=2aX^3+2bX^2+2cX-2aX^3-bX^2=bX^2+2cX\in\mathbb{R}_2[X]$$
Donc u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. $u(1)=2X$, $u(X)=2X^2-X^2=X^2$ et $u(X^2)=2X^3-2X^3=0$
Par conséquent
$$A=\begin{array}{cccc} u(1) & u(X) & u(X^2) & \\ \multicolumn{3}{c}{\begin{pmatrix}0&0&0\\2&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}} & \begin{array}{c}1\\X\\X^2\end{array}\end{array}$$
3. Soit $P=aX^2+bX+c\in\ker(u)$,
$$u(P)=bX^2+2cX=0\Leftrightarrow b=c=0$$
Donc $P=aX^2$, une base de $\ker(u)$ est X^2 et $\dim(\ker(u))=1$.
4.
$$Im(u)=Vect\big(u(1),u(X),u(X^2)\big)=Vect(2X,X^2,0)=Vect(2X,X^2)=Vect(X,X^2)$$
(X,X^2) est une sous-famille d'une famille libre, c'est une famille libre et génératrice de $Im(u)$ c'est une base de $Im(u)$ et $\dim\big(Im(u)\big)=2$

Allez à : Exercice 62

Correction exercice 63.

1.
$$u(\lambda_1P_1+\lambda_2P_2)=\lambda_1P_1+\lambda_2P_2+(1-X)(\lambda_1P_1+\lambda_2P_2)'+2(\lambda_1P_1+\lambda_2P_2)''$$
$$=\lambda_1P_1+\lambda_2P_2+(1-X)(\lambda_1P_1'+\lambda_2P_2')+2(\lambda_1P_1''+\lambda_2P_2'')$$
$$=\lambda_1(P_1+(1-X)P_1'+2P_1'')+\lambda_2(P_2+(1-X)P_2'+2P_2'')=\lambda_1u(P_1)+\lambda_2u(P_2)$$
u est une application linéaire.

2. Il est clair que le degré de $u(P)=P+(1-X)P'+2P''$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2 lorsque P est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2. Par conséquent u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
3.
$$u(1)=1$$
$$u(X)=X+(1-X)\times 1=1$$
$$u(X^2)=X^2+(1-X)\times 2X+2\times 2=4+2X-X^2$$
$$A=\begin{pmatrix}1&1&4\\0&0&2\\0&0&-1\end{pmatrix}$$
4.
$$\alpha(1-X)+\beta\times 1+\gamma(1+2X-X^2)=0\Leftrightarrow -\gamma X^2+(-\alpha+2\gamma)X+\alpha+\beta+\gamma=0$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}-\gamma=0\\-\alpha+2\gamma=0\\\alpha+\beta+\gamma=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=0\\\beta=0\\\gamma=0\end{cases}$$
Cette famille est libre, elle a trois vecteurs dans un espace de dimension 3, c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
5.
$$u(1-X)=1-X+(1-X)\times(-1)=0$$
$$u(1)=1$$
$$u(1+2X-X^2)=1+2X-X^2+(1-X)\times(2-2X)+2\times(-2)=-1-2X+X^2$$
$$=-(1+2X-X^2)$$
Donc
$$D=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

Allez à : Exercice 63

Correction exercice 64.

1. Soit λ et μ deux réels et P et Q deux polynômes
$$u(\lambda P+\mu Q)=\frac{1}{2}(1-X^2)(\lambda P+\mu Q)''+X(\lambda P+\mu Q)'-(\lambda P+\mu Q)$$
$$=\frac{1}{2}(1-X^2)(\lambda P''+\mu Q'')+X(\lambda P'+\mu Q')-(\lambda P+\mu Q)$$
$$=\lambda\left(\frac{1}{2}(1-X^2)P''+XP'-P\right)+\mu\left(\frac{1}{2}(1-X^2)Q''+XQ'-Q\right)=\lambda u(P)+\mu u(Q)$$
Donc u est linéaire
Pour $P\in\mathbb{R}_2[X]$
$$d^\circ P''\leq 0\Rightarrow d^\circ(1-X^2)P''\leq 2$$
$$d^\circ P'\leq 1\Rightarrow d^\circ XP''\leq 2$$
Donc
$$d^\circ u(P)\leq 2$$
Ce qui montre que $P\in\mathbb{R}_2[X]$ entraine que $u(P)\in\mathbb{R}_2[X]$. Donc u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Soit $P=aX^2+bX+c$
$$P\in\ker(u)\Leftrightarrow u(P)=0\Leftrightarrow\frac{1}{2}(1-X^2)2a+X(2aX+b)-(aX^2+bX+c)=0\Leftrightarrow a-c=0$$
Donc $P=aX^2+bX+a=a(X^2+1)+bX$
La famille (X^2+1,X) est une famille de deux vecteurs non proportionnels, donc libre, qui engendre $\ker(u)$ donc c'est une base de $\ker(u)$
3. D'après le théorème du rang
$$\dim(\ker(u))+\dim(Im(u))=\dim(\mathbb{R}_2[X])$$
Donc $\dim(Im(u))=1$

$$u(1) = -1$$

Donc $Im(u)$ est la droite engendrée par le polynôme constant $P_3 = 1$ (ou -1 c'est pareil)

4.

$$\alpha(X^2+1)+\beta X+\gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha X^2+\beta X+\alpha+\gamma = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha+\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Ce qui montre que (P_1, P_2, P_3) est une famille libre à trois vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 3, il s'agit donc d'une base de $\mathbb{R}_2[X]$

5. On a $u(P_1) = 0$, $u(P_2) = 0$ et $u(P_3) = -1$ donc

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Allez à : Exercice 64

Correction exercice 65.

1. Soient P_1 et P_2 deux polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ et λ_1 et λ_2 deux réels.

$$\begin{aligned} f(\lambda_1P_1+\lambda_2P_2)(X) &= (\lambda_1P_1+\lambda_2P_2)(X+1)-(\lambda_1P_1+\lambda_2P_2)(X) \\ &= \lambda_1P_1(X+1)+\lambda_2P_2(X+1)-\big(\lambda_1P_1(X+1)+\lambda_2P_2(X+1)\big) \\ &= \lambda_1\big(P_1(X+1)-P_1(X)\big)+\lambda_2\big(P_2(X+1)-P_2(X)\big) = \lambda_1f(P_1)(X)+\lambda_2f(P_2)(X) \end{aligned}$$

Ce qui entraine que :

$$f(\lambda_1P_1+\lambda_2P_2) = \lambda_1f(P_1)(X)+\lambda_2f(P_2)$$

2. f est linéaire.

$$f(1)(X) = 1-1 = 0$$
$$f(X)(X) = (X+1)-X = 1$$
$$f(X^2) = (X+1)^2-X^2 = 1+2X$$

Donc

$$A = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(1) & f(X) & f(X^2) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \end{array} \end{array}$$

3.

$$\alpha\times 1+\beta\times(X-1)+\gamma\times(X-1)(X-2) = 0 \Leftrightarrow \gamma X^2+(\beta-3\gamma)X+(\alpha-\beta+2\gamma) = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 0 \\ \beta-3\gamma = 0 \\ \alpha-\beta+2\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$$

$\mathcal{B}'$ est une famille libre à trois vecteurs dans un espace de dimension 3 c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

4.

$f(1)(X) = 0$, $f(X-1)(X) = (X-1+1)-(X-1) = 1$ et

$$\begin{aligned} f\big((X-1)(X-2)\big)(X) &= (X-1+1)(X-2+1)-(X-1)(X-2) = X(X-1)-(X-1)(X-2) \\ &= (X-1)\big(X-(X-2)\big) = 2(X-1) \end{aligned}$$

Donc

$$B = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(1) & f(X-1) & f\big((X-1)(X-2)\big) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ X-1 \\ (X-1)(X-2) \end{array} \end{array}$$

Allez à : Exercice 65

Correction exercice 66.

1. Soient $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_3[X]$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$
$$\begin{aligned} g(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) &= \big((\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(1), (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(-1)\big) \\ &= \big(\lambda_1 P_1(-1) + \lambda_2 P_2(-1), \lambda_1 P_1(1) + \lambda_2 P_2(1)\big) \\ &= \lambda_1\big(P_1(-1), P_1(1)\big) + \lambda_2\big(P_2(-1), P_2(1)\big) = \lambda_1 g(P_1) + \lambda_2 g(P_2) \end{aligned}$$
Donc h est linéaire.
2. Soit $P \in \ker(g)$, $\big(P(-1), P(1)\big) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} P(-1) = 0 \\ P(1) = 0 \end{cases}$
Un polynôme de degré inférieur ou égal à 3 qui s'annule en -1 et en 1 est de la forme
$$P = (aX + b)(X + 1)(X - 1) = aX(X^2 - 1) + b(X^2 - 1)$$
$(X(X^2 - 1), X^2 - 1)$ forme une famille libre (car les polynômes ne sont pas proportionnels) qui engendre $\ker(g)$, c'est une base de $\ker(g)$.
Une base $\mathbb{R}^3$ est $(1, X, X^2, X^3)$
$$g(1) = (1,1); g(X) = (-1,1); g(X^2) = (1,1); g(X^3) = (-1,1)$$
L'image de g est engendré par $(1,1)$ et $(-1,1)$ (ces vecteurs ne sont pas proportionnels) ils forment donc une famille libre, bref c'est une base de $\mathcal{Im}(g)$, comme $\mathcal{Im}(g) \subset \mathbb{R}^2$ et qu'ils ont la même dimension, on en déduit que $\mathcal{Im}(g) = \mathbb{R}^2$.
3. La linéarité de h est évidente (voir 1°)).
Soit $P = aX + b \in \mathbb{R}_1[X]$ un vecteur de $\ker(h)$,
$$\begin{cases} P(-1) = 0 \\ P(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + b = 0 \\ a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 0$$
Le noyau de h est réduit au vecteur nul, de plus d'après le théorème du rang
$$\dim(\ker(h)) + \dim\big(\mathcal{Im}(h)\big) = \dim(\mathbb{R}_1[X]) \Leftrightarrow \dim\big(\mathcal{Im}(h)\big) = 2$$
Donc $\mathcal{Im}(h) = \mathbb{R}_1[X]$, autrement dit h est surjective, finalement h est bijective.

Allez à : Exercice 66

Correction exercice 67.

1. a et b ne sont pas proportionnelles donc (a, b) est libre, de plus (a, b) est une famille génératrice de H donc c'est une base de H, d'où $\dim(H) = 2$.
2. Soit $\theta_{\mathbb{R}}$ l'application nulle, $\theta_{\mathbb{R}}(\ln(2)) = 0$ donc $\theta_{\mathbb{R}} \in F$
Soient $f_1 \in F$ et $f_2 \in F$, donc $f_1(\ln(2)) = 0$ et $f_2(\ln(2)) = 0$ et soient λ_1, λ_2 deux réels
$$(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(\ln(2)) = \lambda_1 f_1(\ln(2)) + \lambda_2 f_2(\ln(2)) = \lambda_1 \times 0 + \lambda_2 \times 0 = 0$$
Donc $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \in F$, F est un sous-espace-vectoriel de H.
3. On rappelle que
$$\operatorname{ch}(\ln(2)) = \frac{e^{\ln(2)} + e^{-\ln(2)}}{2} = \frac{2 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{5}{4}$$
$$\operatorname{sh}(\ln(2)) = \frac{e^{\ln(2)} - e^{-\ln(2)}}{2} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}$$

$$f\in F\Leftrightarrow\begin{cases}f\in H\\ f(\ln(2))=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\exists\lambda,\mu\in\mathbb{R},\ \ f=\lambda a+\mu b\\ f(\ln(2))=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\exists\lambda,\mu\in\mathbb{R},\forall x\in\mathbb{R}\ \ f(x)=\lambda a(x)+\mu b(x)\\ f(\ln(2))=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\exists\lambda,\mu\in\mathbb{R},\forall x\in\mathbb{R}\ \ f(x)=\lambda a(x)+\mu b(x)\\ \lambda a(\ln(2))+\mu b(\ln(2))=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\exists\lambda,\mu\in\mathbb{R},\forall x\in\mathbb{R}\ \ f(x)=\lambda a(x)+\mu b(x)\\ \lambda\frac{5}{4}+\mu\frac{3}{4}=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\exists\lambda,\mu\in\mathbb{R},\forall x\in\mathbb{R}\ \ f(x)=\lambda a(x)+\mu b(x)\\ \lambda=-\frac{3}{5}\mu\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\exists\mu\in\mathbb{R},\forall x\in\mathbb{R},\ \ f(x)=-\frac{3}{5}\mu a(x)+\mu b(x)\Leftrightarrow\exists\mu\in\mathbb{R},f=\mu(-\frac{3}{5}a+b)$$

F est un espace de dimension 1 dont une base est $-\frac{3}{5}a+b$.

4.

a) Soient $f_1\in H$ et $f_2\in H$ et soient λ_1,λ_2 deux réels.

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2)&=((\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2)(-\ln(2)),(\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2)(\ln(2))\\&=(\lambda_1 f_1(-\ln(2))+\lambda_2 f_2(-\ln(2)\,,\lambda_1 f_1(-\ln(2))+\lambda_2 f_2(-\ln(2))\\&=\lambda_1(f_1(-\ln(2)\,,f_1(\ln(2))+\lambda_2(f_2(-\ln(2)\,,f_2(\ln(2))=\lambda_1\varphi(f_1)+\lambda_2\varphi(f_2)\end{aligned}$$

Donc φ est une application linéaire.

b) Soit $f\in\ker(\varphi)$, $\exists\lambda,\mu\in\mathbb{R},\forall x\in\mathbb{R}\ \ f(x)=\lambda a(x)+\mu b(x)$

$$\varphi(f)=(0,0)\Leftrightarrow(f(-\ln(2)\,,f(\ln(2))=(0,0)\Leftrightarrow\begin{cases}f(-\ln(2)=0\\ f(\ln(2)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda a(-\ln(2))+\mu b(-\ln(2))=0\\ \lambda a(\ln(2))+\mu b(\ln(2))=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda\frac{5}{4}-\mu\frac{3}{4}=0\\ \lambda\frac{5}{4}+\mu\frac{3}{4}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda=0\\ \mu=0\end{cases}$$

Donc $f=\theta_{\mathbb{R}}$, le noyau de φ est réduit au vecteur nul donc φ est injective, d'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(\varphi))+\dim(Im(\varphi)=\dim(H)\Leftrightarrow\dim(Im(\varphi)=2$$

Ce qui montre que φ est surjective, finalement φ est surjective donc bijective.

Allez à : Exercice 67

Correction exercice 68.

1. Soient $A\in\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $B\in\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et soient λ et μ deux réels.
La matrice nulle O vérifie ${}^tO=-O$
${}^t(\lambda A+\mu B)=\lambda{}^tA+\mu{}^tB=\lambda(-A)+\mu(-B)=-(\lambda A+\mu B)$
Donc $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Soient $A\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$et $B\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$et soient λ et μ deux réels.
La matrice nulle O vérifie ${}^tO=O$
${}^t(\lambda A+\mu B)=\lambda{}^tA+\mu{}^tB=\lambda A+\mu B=\lambda A+\mu B$
Donc $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. ${}^t\left(\frac{A+{}^tA}{2}\right)=\frac{1}{2}({}^tA+{}^t({}^tA))=\frac{1}{2}({}^tA+A)$ donc $\frac{A+{}^tA}{2}\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$
${}^t\left(\frac{A-{}^tA}{2}\right)=\frac{1}{2}({}^tA-{}^t({}^tA))=\frac{1}{2}({}^tA-A)=-\frac{1}{2}(A-{}^tA)$ donc $\frac{A-{}^tA}{2}\in\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$
3. Pour toute matrice A :
$$A=\frac{1}{2}(A+{}^tA)+\frac{1}{2}(A-{}^tA)$$
Donc $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})+\mathcal{S}_n(\mathbb{R})=\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

4. Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, ${}^tA = -A$ et ${}^tA = A$ donc $A = -A$ d'où $A = O$.
   $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{O\}$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ entraine que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
5.
$$A_s = \frac{1}{2}(A + {}^tA) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 4 \end{pmatrix}$$
$$A_a = \frac{1}{2}(A - {}^tA) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$
   A est la somme de $A_s \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et de $A_a \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Allez à : Exercice 68

Correction exercice 69.

1. $\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) = 2 \times 2 = 4$
2. Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \ker(\phi)$
$$\phi(A) = O \Leftrightarrow A - {}^tA = O \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow b = c$$
   Donc
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   La famille de matrices
   $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ engendre $\ker(\phi)$ et
$$\alpha\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$
   Montre que cette famille est libre, elle forme donc une base de $\ker(\phi)$ et $\dim(\ker(\phi)) = 3$
3. Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$
$$\phi(A) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c-b \\ b-c & 0 \end{pmatrix} = (b-c)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
   Par conséquent l'image de ϕ est la droite engendrée par la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
   $Im(\phi)$ étant une droite, toute matrice de cette image est proportionnelle à J.

Allez à : Exercice 69

Correction exercice 70.

1.
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ b+c & a-b & a-c \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ b+c & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$
2.
   a)
$$\begin{array}{ccc} L_1 & L_2 & L_3 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} L_1 & L_2 - L_1 & L_3 - L_1 \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & c-b & d-b \\ b^2 & c^2-b^2 & d^2-b^2 \end{vmatrix} = (c-b)(d-b)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 1 \\ b^2 & c+b & d+b \end{vmatrix}$$
$$= (c-b)(d-b)(d-c)$$
   b)

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\a&b&c&d\\a^2&b^2&c^2&d^2\\a^3&b^3&c^3&d^3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\a&b-a&c-a&d-a\\a^2&b^2-a^2&c^2-a^2&d^2-a^2\\a^3&b^3-a^3&c^3-a^3&d^3-a^3\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\a&b-a&c-a&d-a\\a^2&(b-a)(b+a)&(c-a)(c+a)&(d-a)(d+a)\\a^3&(b-a)(b^2+ba+a^2)&(c-a)(c^2+ac+a^2)&(d-a)(d^2+da+a^2)\end{vmatrix}$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix}1&0&0&0\\a&1&1&1\\a^2&b+a&c+a&d+a\\a^3&b^2+ba+a^2&c^2+ac+a^2&d^2+da+a^2\end{vmatrix}$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix}1&1&1\\b+a&c+a&d+a\\b^2+ba+a^2&c^2+ac+a^2&d^2+da+a^2\end{vmatrix}$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix}1&1&1\\b&c&d\\b^2+ba&c^2+ac&d^2+da\end{vmatrix}\begin{matrix}\\L_2-aL_1\\L_3-a^2L_1\end{matrix}$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix}1&1&1\\b&c&d\\b^2&c^2&d^2\end{vmatrix}\begin{matrix}\\ \\L_3-aL_2\end{matrix}$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$$

Allez à : Exercice 70

Correction exercice 71.

1.

$$\begin{array}{c}\begin{matrix}C_1&C_2&C_3&C_4\end{matrix}\\\begin{vmatrix}a&a&a&a\\a&b&b&b\\a&b&c&c\\a&b&c&d\end{vmatrix}\end{array}=\begin{array}{c}\begin{matrix}C_1&C_2-C_1&C_3-C_1&C_4-C_1\end{matrix}\\\begin{vmatrix}a&0&0&0\\a&b-a&b-a&b-a\\a&b-a&c-a&c-a\\a&b-a&c-a&d-a\end{vmatrix}\end{array}=a\begin{vmatrix}b-a&b-a&b-a\\b-a&c-a&c-a\\b-a&c-a&d-a\end{vmatrix}$$

$$=a(b-a)\begin{array}{c}\begin{matrix}C_1&C_2&C_3\end{matrix}\\\begin{vmatrix}1&1&1\\b-a&c-a&c-a\\b-a&c-a&d-a\end{vmatrix}\end{array}=a(b-a)\begin{array}{c}\begin{matrix}C_1&C_2-C_2&C_3-C_1\end{matrix}\\\begin{vmatrix}1&0&0\\b-a&c-b&c-b\\b-a&c-b&d-b\end{vmatrix}\end{array}$$

$$=a(b-a)\begin{vmatrix}c-b&c-b\\c-b&d-b\end{vmatrix}=a(b-a)(c-b)\begin{vmatrix}1&1\\c-b&d-b\end{vmatrix}$$

$$=a(b-a)(c-b)(d-c)$$

2. $\Delta=0\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\ \quad ou\\ a=b\\ \quad ou\\ b=c\\ \quad ou\\ c=d\end{cases}$

Allez à : Exercice 71

Correction exercice 72.

Première partie

1.

Soit $x=(x_1,x_2,x_3)$ et $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

$$x\in\ker(u)\Leftrightarrow AX=O\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&-1&-2\\-1&1&2\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x_1-x_2-2x_3=0\\-x_1+x_2+2x_3=0\\x_1\qquad\quad-x_3=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x_1-x_2-2x_3=0\\x_1=x_3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x_2=-x_3\\x_1=x_3\end{array}\right.$$

$$x=(x_3,-x_3,x_3)=x_3(1,-1,1)$$

On pose $a=(1,-1,1)$ et alors $\ker(u)=Vect(a)$

2. On pose $X_b=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$, $X_a=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

$$u(b)=a\Leftrightarrow AX_b=X_a\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&-1&-2\\-1&1&2\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x_1-x_2-2x_3=1\\-x_1+x_2+2x_3=-1\\x_1\qquad\quad-x_3=1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x_1-x_2-2x_3=1\\x_1=1+x_3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x_2=-x_3\\x_1=x_3+1\end{array}\right.$$

On prend, par exemple $x_3=0$ alors $b=(1,0,0)$

3. Soient $x\in E_1$, $x'\in E_1$ et λ et λ' deux réels

$$u(\lambda x+\lambda' x')=\lambda u(x)+\lambda' u(x')=\lambda x+\lambda' x'$$

Donc

$$\lambda x+\lambda' x'\in E_1$$
$$u(0_{\mathbb{R}^3})=0_{\mathbb{R}^3}\Rightarrow 0_{\mathbb{R}^3}\in E_1$$

Donc E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

$$x\in E_1\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&-1&-2\\-1&1&2\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x_1-x_2-2x_3=x_1\\-x_1+x_2+2x_3=x_2\\x_1\qquad\quad-x_3=x_3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}-x_2-2x_3=0\\-x_1+2x_3=0\\x_1\qquad-2x_3=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x_2=-2x_3\\x_1=2x_3\end{array}\right.$$

$$x=(2x_3,-2x_3,x_3)=x_3(2,-2,1)$$

Si on pose $c=(2,-2,1)$ alors $E_1=Vect(c)$.

4.

$$\det(a,b,c)=\begin{vmatrix}1&1&2\\-1&0&-2\\1&0&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-1&-2\\1&1\end{vmatrix}=-1\neq 0$$

Donc (a,b,c) est une base de $\mathbb{R}^3$.

5.

$$u(a)=0_{\mathbb{R}^3}$$
$$u(b)=a$$
$$u(c)=c$$

Donc

$$T=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

6. $T=Q^{-1}AQ$

Deuxième partie

1.

$$f(1)=(2+X+X^2)\times 1-(1+2X+X^2+X^3)\times 0+\frac{1}{2}(-1+X+X^2+X^3+X^4)\times 0$$
$$=2+X+X^2$$

$$f(X)=(2+X+X^2)X-(1+2X+X^2+X^3)\times 1+\frac{1}{2}(-1+X+X^2+X^3+X^4)\times 0$$
$$=2X+X^2+X^3-1-2X-X^2-X^3=-1$$

$$f(X^2)=(2+X+X^2)X^2-(1+2X+X^2+X^3)\times 2X+\frac{1}{2}(-1+X+X^2+X^3+X^4)\times 2$$
$$=2X^2+X^3+X^4-2X-4X^2-2X^3-2X^4-1+X+X^2+X^3+X^4=-1-X-X^2$$
$$f(\alpha+\beta X+\gamma X^2)=\alpha f(1)+\beta f(X)+\gamma f(X^2)\in\mathbb{R}_2[X]$$

Car $f(1)\in\mathbb{R}_2[X]$, $f(X)\in\mathbb{R}_2[X]$ et $f(X^2)\in\mathbb{R}_2[X]$

2.

$$B=\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} f(1) & f(X) & f(X^2)\end{array} \\ & \begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{array}{c}1\\ X\\ X^2\end{array}\end{array}$$

3. Les coordonnées de $P_0=1+X+X^2$ dans la base $\mathcal{B}$ sont $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

   Les coordonnées de $P_1=1+X$ dans la base $\mathcal{B}$ sont $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

   Les coordonnées de $P_2=2+X+X^2$ dans la base $\mathcal{B}$ sont $\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$

$$\det(P_0,P_1,P_2)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1\neq 0$$

   En développement par rapport à la troisième ligne.
   Donc (P_0,P_1,P_2) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

4.

   Les coordonnées de $f(P_0)$ dans la base $\mathcal{B}$ sont $\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

   Donc $f(P_0)=O$

   Les coordonnées de $f(P_1)$ dans la base $\mathcal{B}$ sont $\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

   Donc $f(P_1)=1+X+X^2=P_0$

   Les coordonnées de $f(P_2)$ dans la base $\mathcal{B}$ sont $\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$

   Donc $f(P_2)=2+X+X^2=P_2$
   Donc

$$T'=\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} f(P_0) & f(P_1) & f(P_2)\end{array} \\ & \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{array}{c}P_0\\ P_1\\ P_2\end{array}\end{array}=T$$

5. $T'={Q'}^{-1}BQ'$

Troisième partie

$$Q'^{-1}BQ'=Q^{-1}AQ\Leftrightarrow QQ'^{-1}BQ'Q^{-1}=A\Leftrightarrow (Q'Q^{-1})^{-1}B(Q'Q^{-1})=A$$

   Donc A et B sont semblables.

Allez à : Exercice 72

Correction exercice 73.

1. Si $x\in\ker(v)$ alors $v(x)=0_E$, alors $v\big(v(x)\big)=v(0_E)=0_E$ donc $x\in\ker(v^2)$, cela montre que $\ker(v)\subset\ker(v^2)$, de même si $x\in\ker(v^2)$ alors $v^2(x)=0_E$, alors $v\big(v^2(x)\big)=v(0_E)=0_E$ donc $x\in\ker(v^3)$, cela montre que $\ker(v^2)\subset\ker(v^3)$ et ainsi de suite.

2. Soit $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ et $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$ ses coordonnées dans la base canonique.

$$x\in\ker(u+id_{\mathbb{R}^4})\Leftrightarrow(A+I)X=O\Leftrightarrow\begin{pmatrix}0&1&0&1\\-1&0&1&3\\0&1&0&-1\\0&0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_2+x_4=0\\-x_1+x_3+3x_4=0\\x_2-x_4=0\\2x_4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=0\\-x_1+x_3=0\\x_2=0\\x_4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_3=x_1\\x_2=0\\x_4=0\end{cases}$$

$$x=(x_1,0,x_1,0)=x_1(1,0,1,0)$$

$$(A+I)^2=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\-1&0&1&3\\0&1&0&-1\\0&0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&1\\-1&0&1&3\\0&1&0&-1\\0&0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&1&5\\0&0&0&4\\-1&0&1&1\\0&0&0&4\end{pmatrix}$$

$$x\in\ker((u+id_{\mathbb{R}^4})^2)\Leftrightarrow(A+I)^2X=O\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-1&0&1&5\\0&0&0&4\\-1&0&1&1\\0&0&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-x_1+x_3+5x_4=0\\4x_4=0\\-x_1+x_3+x_4=0\\4x_4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_3=x_1\\x_4=0\end{cases}$$

$$x=(x_1,x_2,x_1,0)=x_1(1,0,1,0)+x_2(0,1,0,0)$$

$\big((1,0,1,0),(0,1,0,0)\big)$ est une famille de vecteurs non proportionnels (donc libre) qui engendrent $\ker((u+id_{\mathbb{R}^4})^2)$, il s'agit d'une base de $\ker((u+id_{\mathbb{R}^4})^2)$.

$$(A+I)^3=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\-1&0&1&3\\0&1&0&-1\\0&0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&1&5\\0&0&0&4\\-1&0&1&1\\0&0&0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&8\end{pmatrix}$$

$$x\in\ker((u+id_{\mathbb{R}^4})^3)\Leftrightarrow(A+I)^3X=O\Leftrightarrow\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow x_4=0$$

$$x=(x_1,x_2,x_3,0)=x_1(1,0,0,0)+x_2(0,1,0,0)+x_3(0,0,0,1)=x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3$$

(e_1,e_2,e_3) est une famille (évidement libre) qui engendre $\ker((u+id_{\mathbb{R}^4})^3)$, c'est une base de $\ker((u+id_{\mathbb{R}^4})^3)$.

$$(A+I)^4=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\-1&0&1&3\\0&1&0&-1\\0&0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&16\end{pmatrix}$$

$$x\in\ker((u+id_{\mathbb{R}^4})^4)\Leftrightarrow(A+I)^4X=O\Leftrightarrow\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&16\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow x_4=0$$

$$\ker((u+id_{\mathbb{R}^4})^3)=\ker((u+id_{\mathbb{R}^4})^4)$$

$$p=3$$

3.

a) $a=(1,0,1,0)$ et $X_a=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$

b) On pose $b=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ et et $X_b=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$ ses coordonnées dans la base canonique

$$a=(u+id_{\mathbb{R}^4})(b)\Leftrightarrow (A+I)X_b=X_a\Leftrightarrow\begin{pmatrix}0&1&0&1\\-1&0&1&3\\0&1&0&-1\\0&0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_2+x_4=1\\-x_1+x_3+3x_4=0\\x_2-x_4=1\\2x_4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=1\\-x_1+x_3=0\\x_2=1\\x_4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_3=x_1\\x_2=1\\x_4=0\end{cases}$$

On prend, par exemple $x_3=0$, $b=(0,1,0,0)$.

$$(u+id_{\mathbb{R}^4})^2(b)=(u+id_{\mathbb{R}^4})\circ(u+id_{\mathbb{R}^4})(b)=(u+id_{\mathbb{R}^4})(a)=0_{\mathbb{R}^4}$$

Donc $b\in\ker((u+id_{\mathbb{R}^4})^2)$

D'autre part, a et b ne sont pas proportionnels ils forment une famille libre d'un espace de dimension 2, c'est une base de $\ker((u+id_{\mathbb{R}^4})^2)$.

c) On pose $c=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ et $X_c=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$ ses coordonnées dans la base canonique

$$b=(u+id_{\mathbb{R}^4})(c)\Leftrightarrow (A+I)X_c=X_b\Leftrightarrow\begin{pmatrix}0&1&0&1\\-1&0&1&3\\0&1&0&-1\\0&0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_2+x_4=0\\-x_1+x_3+3x_4=1\\x_2-x_4=0\\2x_4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=0\\-x_1+x_3=1\\x_2=1\\x_4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_3=x_1+1\\x_2=0\\x_4=0\end{cases}$$

On prend, par exemple $x_1=0$, $c=(0,0,1,0)$

$$x\in\ker((u+id_{\mathbb{R}^4})^2)\Leftrightarrow\begin{cases}x_3=x_1\\x_4=0\end{cases}$$

Les composantes de c ne vérifient pas $\begin{cases}x_3=x_1\\x_4=0\end{cases}$ donc $c\notin Ker((u+id_{\mathbb{R}^4})^2)$, de plus (a,b) est une famille libre de $\ker((u+id_{\mathbb{R}^4})^2)$ par conséquent (a,b,c) est une famille libre, elle a trois vecteurs dans un espace vectoriel de dimension trois, c'est une base de $\ker((u+id_{\mathbb{R}^4})^2)$.

d) $a=(u+id_{\mathbb{R}^4})(b)\Leftrightarrow a=u(b)+b\Leftrightarrow u(b)=a-b$

$b=(u+id_{\mathbb{R}^4})(c)\Leftrightarrow b=u(c)+c\Leftrightarrow u(c)=b-c$

4. les coordonnées de d dans la base canonique sont

$$\begin{pmatrix}-1&1&0&1\\-1&-1&1&3\\0&1&-1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Donc $u(d)=d$

5. $x\in\ker((u+id_{\mathbb{R}^4})^3)\Leftrightarrow x_4=0$

Les composantes de d ne vérifient pas $x_4=0$ et (a,b,c) est une famille libre de $\ker((u+id_{\mathbb{R}^4})^3)$ donc (a,b,c,d) est une famille libre, elle a quatre vecteurs donc c'est une base de $\mathbb{R}^4$.

6.

$$T=\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}u(a)&u(b)&u(b)&u(d)\end{array}\\\begin{pmatrix}-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&-1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c}a\\b\\c\\d\end{array}$$

$$T=P^{-1}AP\Leftrightarrow A=PTP^{-1}$$

7.

$$T+I=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}\Rightarrow (T+I)^2=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&4\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (T+I)^3=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&8\end{pmatrix}$$

$$T-I=\begin{pmatrix}-2&1&0&0\\0&-2&1&0\\0&0&-2&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$(T+I)^3(T-I)=O$$

$$A+I=PTP^{-1}+PIP^{-1}=P(T+I)P^{-1}\Rightarrow (A+I)^3=P(T+I)^3P^{-1}$$

Et

$$A-I=P(T-I)P^{-1}$$

$$(A+I)^3(A-I)=P(T+I)^3P^{-1}P(T-I)P^{-1}=P(T+I)^3(T-I)P^{-1}=POP^{-1}=O$$

Allez à : Exercice 73

Correction exercice 74.

1. Si $u\in\ker(g)$ alors $g(u)=0_{\mathbb{R}^3}$ alors $g\big(g(u)\big)=g(0_{\mathbb{R}^3})=0_{\mathbb{R}^3}$ donc $u\in\ker(g^2)$, cela montre que
$$\ker(g)\subset\ker(g^2)$$
Si $u\in\ker(g^2)$ alors $g^2(u)=0_{\mathbb{R}^3}$ alors $g\big(g^2(u)\big)=g(0_{\mathbb{R}^3})=0_{\mathbb{R}^3}$ donc $u\in\ker(g^3)$, cela montre que
$$\ker(g^2)\subset\ker(g^3)$$
2.
   a) $g^3=O_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$ donc pour tout $u\in\mathbb{R}^3$, $g^3(u)=0_{\mathbb{R}^3}$. Donc $Ker(g^3)=\mathbb{R}^3$ et donc $\dim(Ker(g^3)=3$
   $\{0_{\mathbb{R}^3}\}\subsetneq\ker(g)\subsetneq\ker(g^2)\subsetneq\ker(g^3)$donc $0<\dim(\ker(g))<\dim(\ker(g^2))<\dim(\ker(g^3))=3$
   Donc $\dim(\ker(g))=1$ et $\dim(\ker(g^2))=2$
   b) Si $v\in Im(g)$ alors il existe $u\in\mathbb{R}^3$ tel que $v=g(u)$ donc $g^2(v)=g^3(u)=0_{\mathbb{R}^3}$, donc $Im(g)\subset\ker(g^2)$
   D'après le théorème du rang : $\dim(\ker(g))+\dim\big(Im(g)\big)=3$ donc $\dim\big(Im(g)\big)=2$. Comme $\dim(\ker(g^2))=2$ aussi, on en déduit que $Im(g)=\ker(g^2)$.
3. $a\in\ker(g)\subset\ker(g^2)=Im(g)$ donc il existe $b\in\mathbb{R}^3$ tel que $a=g(b)$.
$g^2(b)=g(a)=0_{\mathbb{R}^3}$ donc $b\in Ker(g^2)$.
$$\lambda a+\mu b=0_{\mathbb{R}^3}\Rightarrow g(\lambda a+\mu b)=0_{\mathbb{R}^3}\Rightarrow \lambda g(a)+\mu g(b)=0_{\mathbb{R}^3}\Rightarrow \mu a=0_{\mathbb{R}^3}\Rightarrow\mu=0$$
On remplace dans $\lambda a+\mu b=0_{\mathbb{R}^3}$, d'où l'on tire que $\lambda=0$. La famille (a,b) est libre.
4. $b\in\ker(g^2)=Im(g)$ donc il existe $c\in\mathbb{R}^3$ tel que $b=g(c)$.
$g^2(c)=g(b)=a\neq 0_{\mathbb{R}^3}$ donc $c\notin\ker(g^2)$ or (a,b) est une famille libre de $\ker(g^2)$ donc (a,b,c) est une famille libre à trois éléments dans $\mathbb{R}^3$, un espace de dimension 3, c'est une base.
5. $$\begin{array}{cc} \begin{matrix} g(a) & g(b) & g(c)\end{matrix} & \\ \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} & \begin{matrix}a\\b\\c\end{matrix}\end{array}$$
6. La matrice de $f+Id$ dans la base canonique est : $A+I=\begin{pmatrix}-9&-3&-12\\5&1&7\\6&2&8\end{pmatrix}$

La matrice de $(f+Id)^2$ dans la base canonique est :

$$(A+I)^2=\begin{pmatrix}-9&-3&-12\\5&1&7\\6&2&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-9&-3&-12\\5&1&7\\6&2&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6&0&-9\\2&0&3\\4&0&6\end{pmatrix}$$

La matrice de $(f+Id)^3$ dans la base canonique est :

$$(A+I)^3=\begin{pmatrix}-6&0&-9\\2&0&3\\4&0&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-9&-3&-12\\5&1&7\\6&2&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Donc $(f+Id)^3=O_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$, par conséquent $\ker((f+Id)^3)=\mathbb{R}^3$

$(A+I)^2\neq O$ donc $(f+Id)^2\neq O_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$, il existe donc un vecteur x de $\mathbb{R}^3$ tel que $(f+Id)^2(x)\neq 0_{\mathbb{R}^3}$

Donc $\ker((f+Id)^2)\subsetneq \ker$.

Autre méthode :

on détermine une base de $\ker((f+Id)^2)$

$$x\in\ker((f+Id)^2)\Leftrightarrow (A+I)^2X=0\Leftrightarrow \begin{pmatrix}-6&0&-9\\2&0&3\\4&0&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-6x_1-9x_3=0\\2x_1+3x_3=0\\4x_1+6x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow 2x_1+3x_3=0\Leftrightarrow x_1=-\frac{3}{2}x_3$$

$$x=(x_1,x_2,x_3)=\left(-\frac{3}{2}x_3,x_2,x_3\right)=\frac{3}{2}x_3(-1,0,2)+x_2(0,1,0)$$

$(-1,0,2)$ et $(0,1,0)$ sont deux vecteurs non proportionnels, donc libre de $\ker((f+Id)^2)$, d'autre part ils engendrent $\ker((f+Id)^2)$, il s'agit d'une base de $\ker((f+Id)^2)$, et $\dim(\ker((f+Id)^2))=2$

Donc $\ker((f+Id)^2)\subsetneq\ker((f+Id)^3)=\mathbb{R}^3$

$(A+I)^2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6&0&-9\\2&0&3\\4&0&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ et $(A+I)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9&-3&-12\\5&1&7\\6&2&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

Donc $(0,1,0)\in\ker((f+Id)^2)$ et $(0,1,0)\notin\ker(f+Id)$

Donc $\ker(f+Id)\subsetneq\ker((f+Id)^2)$

Autre méthode :

On calcule la dimension de $\ker(f+Id)$.

$$x\in\ker(f+Id)\Leftrightarrow(A+I)X=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-9&-3&-12\\5&1&7\\6&2&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}-9x_1-3x_2-12x_3=0\\5x_1+x_2+7x_3=0\\6x_1+2x_2+8x_3=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3x_1+x_2+4x_3=0\\5x_1+x_2+7x_3=0\\3x_1+x_2+4x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x_1+x_2+4x_3=0\\5x_1+x_2+7x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow 3L_2-5L_1\begin{cases}3x_1+x_2+4x_3=0\\-2x_2+x_3=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=-3x_2\\x_3=2x_2\end{cases}$$

Donc $x=(x_1,x_2,x_3)=(-3x_2,x_2,2x_2)=x_2(-3,1,2)$, $\ker(f+Id)$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(-3,1,2)$. $\dim(\ker(f+Id))=1$, comme $\ker(f+Id)\subset\ker((f+Id)^2)$ et que $\dim(\ker(f+Id))<\dim Ker((f+Id)^2)$, on a $\ker(f+Id)\subsetneq\ker((f+Id)^2)$

Il reste à montrer que $\ker(f+Id)\neq\{0_{\mathbb{R}^3}\}$, on vient de montrer que $\dim(\ker(f+Id))=1$, donc c'est fini.

7. D'après la question précédente $a=(-3,1,2)$

Soit $b=(x_1,x_2,x_3)$ tel que $(f+Id)(b)=a$

$$(A+I)X_b=X_a\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-9&-3&-12\\5&1&7\\6&2&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}-9x_1-3x_2-12x_3=-3\\5x_1+x_2+7x_3=1\\6x_1+2x_2+8x_3=2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3x_1+x_2+4x_3=1\\5x_1+x_2+7x_3=1\\3x_1+x_2+4x_3=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x_1+x_2+4x_3=1\\5x_1+x_2+7x_3=1\end{cases}\Leftrightarrow 3L_2-5L_1\begin{cases}3x_1+x_2+4x_3=1\\-2x_2+x_3=-2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3x_1+x_2+4(-2+2x_2)=1\\x_3=-2+2x_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x_1=-9-9x_2\\x_3=-2+2x_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=3-3x_2\\x_3=-2+2x_2\end{cases}$$

On peut prendre n'importe quelle valeur pour x_2, en général on prend 0, mais ici, $x_2=1$ est plus adapté.

$b=(0,1,0)$ convient.

$$(f+Id)(c)=b\Leftrightarrow(A+I)X_c=X_b\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-9&-3&-12\\5&1&7\\6&2&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}-9x_1-3x_2-12x_3=0\\5x_1+x_2+7x_3=1\\6x_1+2x_2+8x_3=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3x_1+x_2+4x_3=0\\5x_1+x_2+7x_3=1\\3x_1+x_2+4x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x_1+x_2+4x_3=0\\5x_1+x_2+7x_3=1\end{cases}\Leftrightarrow 3L_2-5L_1\begin{cases}3x_1+x_2+4x_3=0\\-2x_2+x_3=3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3x_1+x_2+4(3+2x_2)=0\\x_3=3+2x_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x_1=-12-9x_2\\x_3=3+2x_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=-4-3x_2\\x_3=3+2x_2\end{cases}$$

Je prends, par exemple $x_2=-1$, on trouve alors $x_1=-1$ et $x_3=1$ donc $c=(-1,-1,1)$

8. On rappelle que, choisit ainsi, (a,b,c) est une base.

$$(f+Id)(a)=0_{\mathbb{R}^3}\Leftrightarrow f(a)+a=0_{\mathbb{R}^3}\Leftrightarrow f(a)=-a$$
$$(f+Id)(b)=a\Leftrightarrow f(b)+b=a\Leftrightarrow f(b)=a-b$$
$$(f+Id)(c)=b\Leftrightarrow f(c)+c=b\Leftrightarrow f(c)=b-c$$

Donc

$$Mat_{(a,b,c)}(u)=\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

Allez à : Exercice 74

Séries numériques

Exercice 1. Etudier la convergence des séries suivantes :

1.

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2k}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\cdots$$

2.

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2k+1}=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\cdots$$

Allez à : Correction exercice 1

Exercice 2. Etudier la convergence des séries suivantes :

$$S_1=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n^2+1}{n^2};\qquad S_2=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{\sqrt{n}};\qquad S_3=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n+1)^4}{(7n^2+1)^3}$$

$$S_4=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n;\qquad S_5=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(ne^{\frac{1}{n}}-n\right);\qquad S_6=\sum_{n=0}^{+\infty}\ln(1+e^{-n})$$

Allez à : Correction exercice 2

Exercice 3. Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :

1. $u_n=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$
2. $u_n=\frac{1}{n\cos^2(n)}$
3. $u_n=\frac{1}{(\ln(n))^{\ln(n)}}$

Allez à : Correction exercice 3

Exercice 4. Déterminer la nature de la série de terme général :

$$u_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n} & \text{si } n \text{ est un carré}\\ \dfrac{1}{n^2} & \text{sinon}\end{cases}$$

Allez à : Correction exercice 4

Exercice 5. Les sommes suivantes sont-elles finies ?

$$S_1=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{5^n};\quad S_2=\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{-1}{3}\right)^n;\quad S_3=\sum_{n=4}^{+\infty}\frac{2^n}{3^{n-2}};\quad S_4=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\tan^n\left(\frac{\pi}{7}\right)}{3^{n+2}};\quad S_5=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{9}{(3n+1)(3n+4)}$$

Allez à : Correction exercice 5

Exercice 6. Existence et calcul de :

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

Allez à : Correction exercice 6

Exercice 7. Soit (u_n) une suite de réels positifs et $v_n=\frac{u_n}{1+u_n}$

Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Allez à : Correction exercice 7

Exercice 8. Déterminer en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{\ln(n)}{n^\alpha}$$

Allez à : Correction exercice 8

Exercice 9. Etudier la nature de la série de terme général u_n :

1. $u_n = \frac{n+1}{n^3-7}$
2. $u_n = \frac{n+1}{n^2-7}$
3. $u_n = \frac{n+1}{n-7}$
4. $u_n = \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$
5. $u_n = \frac{1}{n^{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}}$
6. $u_n = \frac{1}{\ln(n^2+2)}$
7. $u_n = \frac{\ln(n)}{n^{\frac{3}{2}}}$
8. $u_n = \frac{n}{2^n}$
9. $u_n = \frac{2^n+3^n}{n^2+\ln(n)+5^n}$
10. $u_n = \frac{1}{n!}$
11. $u_n = \frac{n^{10000}}{n!}$
12. $u_n = \frac{4^{n+1}\left((n+1)!\right)^2}{(2n-1)!}$
13. $u_n = \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$
14. $u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$
15. $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$

Allez à : Correction exercice 9

Exercice 10.

Montrer que la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{\ln(\sqrt{n}+1)}$ est semi-convergente.

Allez à : Correction exercice 10

Exercice 11. Etudier la convergence de la série numérique de terme général u_n :

1. $u_n = (-1)^n \frac{n^3}{n!}$.
2. $u_n = \frac{a^n}{n!}$, $a \in \mathbb{C}$.
3. $u_n = na^{n-1}$, $a \in \mathbb{C}$.
4. $u_n = \sin\left(\frac{n^2+1}{n}\pi\right)$.
5. $u_n = (-1)^n\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$
6. $u_n = \frac{\sin(n)}{n}$
7. $u_n = n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

Allez à : Correction exercice 11

Exercice 12. Calculer

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \qquad \text{avec} \qquad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!\,k!}$$

Allez à : Correction exercice 12

Exercice 13. Calculer

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \qquad \text{avec} \qquad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{k!\,2^{n-k}}$$

Allez à : Correction exercice 13

Exercice 14. Etudier la nature des séries de terme général et calculer leur somme :

1. $u_n = \frac{1}{n(n+1)}, \quad n \geq 1$
2. $u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}, \quad n \geq 1$
3. $u_n = \frac{2n-1}{n(n^2-4)}, \quad n \geq 3$
4. $u_n = (-1)^n \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right), \quad n \geq 2$
5. $u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{(n+2)^2}\right), \quad n \geq 1$

Allez à : Correction exercice 14

Exercice 15.

Si $(v_n)_{n\geq 0}$ est une suite numérique tendant vers 0 et si a, b, c sont trois réels vérifiant $a + b + c = 0$, on pose pour tout $n \geq 0$:

$$u_n = av_n + bv_{n+1} + cv_{n+2}$$

Montrer que la suite de terme général u_n converge et calculer sa somme.

Allez à : Correction exercice 15

Exercice 16. Etudier la convergence des séries de terme général :

1. $u_n = \sin\left(\pi \frac{n^3+1}{n^2+1}\right)$
2. $u_n = \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) (\ln(n))^{2011}$
3. $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{n}} \sqrt{\sin(x)}\, dx$
4. $u_n = \frac{1+(-1)^n\sqrt{n}}{1+n}$
5. $u_n = \frac{1}{(\ln(n))^n}$
6. $u_n = \frac{2^n}{n^2}(\sin(\alpha))^{2n}$

Allez à : Correction exercice 16

Exercice 17.

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_n = n! \prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{a}{k}\right), \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \pi\mathbb{N}$$

1. On suppose que $a \neq 1$. En étudiant la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ préciser

a) La nature de la série $\sum u_n$.

b) La nature de la suite (u_n).

2.

a) Si $a_n = \ln\left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$, quelle est la nature de la série $\sum a_n$?

b) Quelle est la nature de la suite (u_n) pour $a = 1$.

Allez à : Correction exercice 17

Exercice 18.

On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{n} e^{-u_n}$ pour tout $n \geq 1$.

1. Nature de la série $\sum u_n$?
2. Nature de la série $\sum (-1)^n u_n$?

Allez à : Correction exercice 18

Exercice 19.

Montrer que la suite $u_n = \frac{e^n n!}{n^{n+\frac{1}{2}}}$ converge, on pourra d'abord montrer que la série de terme général

$$z_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$$

est convergente.

Allez à : Correction exercice 19

Exercice 20.

Nature de la série de terme général (convergence et absolue convergence).

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$$

Où

$$u_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} \qquad \text{et} \qquad v_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$$

Allez à : Correction exercice 20

Exercice 21.

Montrer que les séries de terme général

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \qquad \text{et} \qquad v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$$

Ne sont pas de mêmes natures et que pourtant $u_n \sim v_n$.

Allez à : Correction exercice 21

Exercice 22. On pose

$$f(n) = \int_0^1 x^n e^{-x} dx\,, \quad n \in \mathbb{N}$$

1. Montrer que la suite $f(n)$ est positive et décroissante. Au moyen d'une intégration par parties donner une relation de récurrence entre $f(n)$ et $f(n-1)$.
   Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 0$

$$f(n) = \frac{n!}{e}\left(e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)$$

2. Montrer que l'on a :

$$\frac{1}{e(n+1)} \leq f(n) \leq \frac{1}{n+1}$$

En déduire la nature des séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)\,; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f(n)$$

3. Déterminer le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) x^n$$

Exercice 23. On considère la série numérique de terme général u_n pour $n \geq 1$ et $a \in \mathbb{R}$:

$$u_n = \left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^a}$$

1. Montrer que si cette série est convergente pour une valeur a donnée, elle converge pour tout $b \geq a$.
2. Montrer que si $a \leq 2$ la série est divergente.

On pourra utiliser un développement limité de $\ln(u_n)$.

3. On pose $a = 2 + \epsilon$ avec $0 < \epsilon < 1$

   Montrer que u_n est équivalent à $\exp\left(-\frac{1}{6} n^{\epsilon}\right)$. En déduire que la série est alors convergente.
4. Donner toutes les valeurs de a pour lesquelles cette série converge.

Allez à : Exercice 23

Exercice 24.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx \qquad \text{et} \qquad v_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

1.
   a) Calculer u_0.
   b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{2n+1}$$

2.
   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$u_n + u_{n+1} = \frac{1}{2n+1}$$

   b) En déduire que :

$$\sum_{k=0}^{n} v_k = \frac{\pi}{4} + (-1)^n u_{n+1}$$

   c) Montrer que la série de terme général v_n converge et calculer sa somme.

Allez à : Exercice 24

Corrections

Correction exercice 1.

1.

   Il s'agit d'une série de Riemann divergente avec $\alpha = 1 \leq 1$

2.

$$\frac{1}{2k+1} \sim \frac{1}{2k}$$

Il s'agit d'une série de Riemann divergente avec $\alpha = 1 \leq 1$

Allez à : Exercice 1

Correction exercice 2.

$\frac{n^2+1}{n^2} \to 1 \neq 0$ donc la série ne converge pas

$\frac{2}{\sqrt{n}} = \frac{2}{n^{\frac{1}{2}}}$ il s'agit du terme général d'une série de Riemann divergente avec $\alpha = \frac{1}{2} \leq 1$

$$\frac{(2n+1)^4}{(7n^2+1)^3} \sim \frac{2^4}{7^3} \times \frac{1}{n^2}$$

Il s'agit du terme général d'une série de Riemann convergente avec $\alpha = 2 > 1$

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-1+o(1)} \to \frac{1}{e} \neq 0$$

La série diverge.

$$ne^{\frac{1}{n}} - n = n\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) = n\left(1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right) = 1 + o(1) \to 1 \neq 0$$

La série diverge.

$$\ln(1 + e^{-n}) \sim e^{-n} = \left(\frac{1}{e}\right)^n$$

Il s'agit d'une suite géométrique de raison dans $]-1,1[$.

Allez à : Exercice 2

Correction exercice 3.

1.

$$u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} = e^{n^2\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)} = e^{-n^2\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)} = e^{-n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{-n^2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} = e^{-n+1+o(1)}$$
$$= e^{-n}e^{1+o(1)} \sim e^{-n} \times e = e\left(\frac{1}{e}\right)^n$$

Il s'agit d'une suite géométrique de raison dans $]-1,1[$, la série converge.

2.

$$u_n = \frac{1}{n\cos^2(n)} > \frac{1}{n}$$

Il s'agit d'une série à termes positifs supérieurs à $\frac{1}{n}$, qui est le terme général d'une série de Riemann divergente avec $\alpha = 1 \leq 1$. La série diverge.

3.

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{\ln(n)} \to 0$$

D'après la règle de Cauchy, $0 < 1$, la série converge.

Allez à : Exercice 3

Correction exercice 4.

$$\sum_{n=1}^{N} u_n = \sum_{n=p^2}^{N} u_n + \sum_{n\neq p^2}^{N} u_n > \sum_{n=p^2}^{N} u_n = \sum_{n=p^2}^{N} \frac{1}{p}$$

Cette dernière série diverge (Riemann avec $\alpha = 1 \leq 1$ donc la série de terme général u_n diverge.

Expliquons quand même un peu

$$\sum_{n=1}^{N} u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{10^2} + \cdots$$

Ainsi, il est plus clair que tous les « $\frac{1}{n}$ » sont dans la série et que donc la série diverge.

Allez à : Exercice 4

Correction exercice 5.

- $\frac{1}{5^n} = \left(\frac{1}{5}\right)^n$ est le terme général d'une série géométrique de raison dans $]-1,1[$, la série converge.
- $\left(\frac{-1}{3}\right)^n$ est le terme général d'une série géométrique de raison dans $]-1,1[$, la série converge.
- $\frac{2^n}{3^{n-2}} = 4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$ est le terme général d'une série géométrique de raison dans $]-1,1[$, la série converge.
- $\left|\frac{\tan^n\left(\frac{\pi}{7}\right)}{3^{n+2}}\right| \leq \frac{1}{3^{n+2}} = \frac{1}{9} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$ est le terme général d'une série géométrique de raison dans $]-1,1[$, la série converge.
- $\frac{9}{(3n+1)(3n+4)} \sim \frac{1}{n^2}$ est le terme général d'une série d'une série de Riemann convergente avec $\alpha = 2 > 1$.

Allez à : Exercice 5

Correction exercice 6.

$\ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ est de signe constant (négatif) et

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \sim -\frac{1}{n^2}$$

Est le terme général d'une série d'une série de Riemann convergente avec $\alpha = 2 > 1$.

Allez à : Exercice 6

Correction exercice 7.

Si la série de terme général u_n converge, alors $u_n \to 0$ donc $v_n \sim u_n$ comme ce sont des séries à termes positifs, la série de terme général v_n converge, si elle diverge alors la série de terme général v_n diverge, bref, les deux séries sont de mêmes natures.

Réciproquement

$$v_n = \frac{u_n}{1+u_n} \Leftrightarrow v_n(1+u_n) = u_n \Leftrightarrow v_n + u_n v_n = u_n \Leftrightarrow v_n = u_n(1-v_n) \Leftrightarrow u_n = \frac{v_n}{1-v_n}$$

On a encore $u_n \sim v_n$ donc les série sont de mêmes natures.

Allez à : Exercice 7

Correction exercice 8.

Si $\alpha > 1$, alors on utilise la règle de Riemann avec $\beta \in]\alpha, 1[$

$$n^\beta \frac{\ln(n)}{n^\alpha} = \frac{\ln(n)}{n^{\alpha-\beta}} \to 0 < 1$$

Lorsque $n \to +\infty$. Cela montre que la série de terme général $\frac{\ln(n)}{n^\alpha}$ converge car $\beta < 1$

Si $\alpha < 1$, alors on utilise la règle de Riemann avec $\beta \in]1, \alpha[$

$$n^\beta \frac{\ln(n)}{n^\alpha} = n^{\alpha-\beta} \ln(n) \to +\infty$$

Lorsque $n \to +\infty$. Cela montre que la série de terme général $\frac{\ln(n)}{n^\alpha}$ diverge car $\beta > 1$

Lorsque $\alpha = 1$, c'est plus compliqué, les règles de Riemann ne marche pas. Il s'agit d'une série à termes positifs, on peut appliquer la comparaison à une intégrale

$$x \to \frac{1}{x\ln(x)}$$

Est intégrable car

$$\int_2^X \frac{1}{x\ln(x)}dx = [\ln(\ln(x)]_2^X = \ln(\ln(X)) - \ln(\ln(2))) \to +\infty$$

Lorsque X tend vers l'infini, ce qui montre que l'intégrale est divergente, la fonction $x \to \frac{1}{x\ln(\mathrm{x})}$ est clairement décroissante et tend vers 0 en l'infini, donc la série de terme général $\frac{1}{n\ln(n)}$ diverge.

Allez à : Exercice 8

Remarque :

C'est ce que l'on appelle la règle de Duhamel.

Correction exercice 9.

1. La suite (u_n) est de signe constant

$$u_n \sim \frac{1}{n^2}$$

C'est le terme général d'une série de Riemann convergente avec $\alpha = 2 > 1$

Allez à : Exercice 9

2. La suite (u_n) est de signe constant

$$u_n \sim \frac{1}{n}$$

C'est le terme général d'une série de Riemann divergente avec $\alpha = 1 \leq 1$

Allez à : Exercice 9

3. $u_n \to 1 \neq 0$ la série diverge grossièrement

Allez à : Exercice 9

4. La suite (u_n) est de signe constant

$$u_n \sim \frac{1}{n^2}$$

C'est le terme général d'une série de Riemann convergente avec $\alpha = 2 > 1$

Allez à : Exercice 9

5. Méfiance

$$u_n = \frac{1}{n^{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}} = \frac{1}{n}n^{-\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{n}e^{-\frac{1}{\sqrt{n}}\ln(n)}$$

Comme

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} = 0$$

On a

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{1}{\sqrt{n}}\ln(n)} = 1$$

Ce qui montre que

$$u_n \sim \frac{1}{n}$$

C'est le terme général d'une série de Riemann divergente avec $\alpha = 1 \leq 1$

Allez à : Exercice 9

6. u_n est de signe constant

$$u_n = \frac{1}{\ln(n^2+2)} = \frac{1}{\ln\left(n^2\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\right)} = \frac{1}{2\ln(n) + \ln\left(1+\frac{2}{n^2}\right)} = \frac{1}{2\ln(n) + \frac{2}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\mathrm{n}^2}\right)}$$

$$n^{\frac{1}{2}}u_n = n^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2\ln(n)+\frac{2}{n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{\mathrm{n}^2}\right)} \to +\infty$$

D'après les règles de Riemann $n^\alpha u_n \to +\infty$ avec $\alpha < 1$ entraine que la série de terme général u_n diverge.

Allez à : Exercice 9

7. u_n est de signe constant

$$n^{\frac{5}{4}}u_n = n^{\frac{5}{4}}\frac{\ln(n)}{n^{\frac{3}{2}}} = \frac{\ln(n)}{n^{\frac{1}{4}}} \to 0$$

D'après les règles de Riemann $n^\alpha u_n \to +\infty$ avec $\alpha > 1$ entraine que la série de terme général u_n converge.

Allez à : Exercice 9

8. u_n est de signe constant

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \frac{n+1}{n}\times\frac{1}{2} \to \frac{1}{2} < 1$$

D'après la règle de D'Alembert la série de terme général u_n converge.

Allez à : Exercice 9

9. u_n est de signe constant

$$u_n = \frac{2^n+3^n}{n^2+\ln(n)+5^n} \sim \frac{3^n}{5^n} = \left(\frac{3}{5}\right)^n$$

$\left(\frac{3}{5}\right)^n$ est le terme général d'une série géométrique convergente, la série de terme général u_n converge.

Allez à : Exercice 9

10. u_n est de signe constant

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{n+1} \to 0 < 0$$

D'après la Règle de D'Alembert la série de terme général u_n converge.

Allez à : Exercice 9

11. u_n est de signe constant

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)^{10000}}{(n+1)!}}{\frac{n^{10000}}{n!}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{10000}\frac{n!}{(n+1)!} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{10000}\times\frac{1}{n+1} \to 0 < 1$$

D'après la Règle de D'Alembert la série de terme général u_n converge.

Allez à : Exercice 9

12. u_n est de signe constant

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{4^{n+2}\left((n+2)!\right)^2}{(2n+1)!}}{\frac{4^{n+1}\left((n+1)!\right)^2}{(2n-1)!}} = \frac{4^{n+2}\left((n+2)!\right)^2(2n-1)!}{4^{n+1}\left((n+1)!\right)^2(2n+1)!} = 4\frac{\left((n+2)^2\left((n+1)!\right)^2(2n-1)!\right.}{\left((n+1)!\right)^2(2n+1)2n(2n-1)!}$$

$$= 4\frac{(n+2)^2}{(2n+1)2n} \sim 1$$

Cà ce n'est pas de chance, sauf si on peut montrer que la limite est 1 par valeur supérieure

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 4\frac{(n+2)^2}{(2n+1)2n} = \frac{4(n^2+4n+4)}{4n^2+2n} = \frac{4n^2+16n+16}{4n^2+2n} > 1$$

Ouf ! La limite est 1^+ donc la série de terme général diverge.

Allez à : Exercice 9

13. u_n est de signe constant

$$u_n=\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n=e^{n\sin\left(\frac{1}{n}\right)}=e^{n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{6n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)}=e^{1-\frac{1}{6n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)}\to\frac{1}{e}\neq 0$$

La série de terme général u_n diverge grossièrement

Remarque : il était inutile de faire un développement limité à l'ordre 3 de $\sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

Allez à : Exercice 9

14. u_n est de signe constant

$$u_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}=e^{n^2\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}=e^{n^2\left(-\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}=e^{-n-\frac{1}{2}+o(1)}=e^{-n}e^{-\frac{1}{2}+o(1)}\sim\frac{1}{\sqrt{e}}\left(\frac{1}{e}\right)^n$$

$\frac{1}{\sqrt{e}}\left(\frac{1}{e}\right)^n$ est le terme général d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{e}$ strictement inférieure à 1. La série de terme général u_n converge.

Allez à : Exercice 9

15.

$$u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}>1$$

Donc u_n ne peut pas tendre vers 0.

Allez à : Exercice 9

Correction exercice 10.

On pose

$$f(x)=\frac{1}{\ln\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$f'(x)=-\frac{\left(\ln\left(\sqrt{x}+1\right)\right)'}{\left(\ln\left(\sqrt{x}+1\right)\right)^2}=-\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\times\frac{1}{\ln\left(\sqrt{x}+1\right)}}{\left(\ln\left(\sqrt{x}+1\right)\right)^2}<0$$

Donc la suite de terme général $u_n=f(n)$ est décroissante, elle tend vers 0, d'après le TSSA la série converge.

$$|u_n|=\frac{1}{\ln\left(\sqrt{n}+1\right)}$$

$$n^{\frac{1}{2}}|u_n|=\frac{n^{\frac{1}{2}}}{\ln\left(\sqrt{n}+1\right)}\to+\infty$$

D'après les règles de Riemann si $n^\alpha|u_n|\to+\infty$ avec $\alpha>1$ la série de terme général $|u_n|$ diverge ce qui montre que la série de terme général ne converge pas absolument. Cette série est donc semi-convergente.

Allez à : Exercice 10

Correction exercice 11.

1. On pose $v_n=|u_n|=\frac{n^3}{n!}$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{\frac{(n+1)^3}{(n+1)!}}{\frac{n^3}{n!}}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^3\times\frac{1}{n+1}\to 0$$

D'Après la règle de D'Alembert, la série de terme général v_n converge, donc la série de terme général u_n converge absolument, donc elle converge.

2. On pose $v_n=|u_n|=\frac{|a|^n}{n!}$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{\frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|a|^n}{n!}}=\frac{|a|}{n+1}\to 0$$

D'après la règle de D'Alembert, la série de terme général v_n converge, donc la série de terme général u_n converge absolument, donc elle converge.

3. On pose $v_n=|u_n|=n|a|^{n-1}$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{(n+1)|a|^n}{n|a|^{n-1}}=\frac{n}{n+1}|a|\to|a|$$

Si $|a|<1$

D'après la règle de D'Alembert, la série de terme général v_n converge, donc la série de terme général u_n converge absolument, donc elle converge.

Si $|a|\geq 1$, $|u_n|\to+\infty$ donc la série diverge grossièrement

4.

$$u_n=\sin\left(\frac{n^2+1}{n}\pi\right)=\sin\left(n\pi+\frac{\pi}{n}\right)=(-1)^n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Il s'agit d'une série alternée car $a_n=\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\geq 0$, il est à peu près évident que a_n est décroissant et tend vers 0, d'après le TSSA, la série converge.

Remarque : on pourrait montrer qu'elle semi-convergente.

5.

$$u_n=(-1)^n\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=(-1)^n\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$a_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ est positif, décroissant et tend vers 0, d'après le TSSA la série converge.

6. On pose

$$V_N=\sum_{n=0}^{N}\sin(n)=\sum_{n=0}^{N}\mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{in}\right)=\mathrm{Im}\left(\sum_{n=0}^{N}\mathrm{e}^{in}\right)$$

Normalement il faudrait prendre la somme à partir de $n=1$car u_0 n'est pas défini, mais cela ne change rien au fond.

$$\sum_{n=0}^{N}\mathrm{e}^{in}=\sum_{n=0}^{N}\left(\mathrm{e}^{i}\right)^n=\frac{1-e^{i(N+1)}}{1-e^{ir}}=\frac{e^{\frac{i(N+1)}{2}}\left(e^{-\frac{i(N+1)}{2}}-e^{\frac{i(N+1)}{2}}\right)}{e^{\frac{i}{2}}\left(e^{-\frac{i}{2}}-e^{\frac{i}{2}}\right)}=e^{\frac{iN}{2}}\times\frac{-2i\sin\left(\frac{N+1}{2}\right)}{-2i\sin\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$=e^{\frac{iN}{2}}\times\frac{\sin\left(\frac{N+1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)}$$

Donc

$$\left|\sum_{n=0}^{N}\mathrm{e}^{in}\right|=\left|\frac{\sin\left(\frac{N+1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)}\right|\leq\frac{1}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)}$$

Et

$$|V_N|=\left|\mathrm{Im}\left(\sum_{n=0}^{N}\mathrm{e}^{in}\right)\right|\leq\left|\sum_{n=0}^{N}\mathrm{e}^{in}\right|\leq\frac{1}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)}$$

Les sommes partielles sont bornées et la suite $\frac{1}{n}$ est décroissante et tend vers 0. Cela montre que la série de terme général $u_n=\frac{\sin(n)}{n}$ converge.

7. Tentons de faire un développement limité en $\frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha > 1$ donc à l'ordre 2 ou $3/2$, dans le premier terme on va perdre un ordre à cause du n devant le ln et dans la cos la variable sera $1/\sqrt{n}$

$$u_n = n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - \left(1 - \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^4}{4!} + o\left(\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^4\right)\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{7}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{7}{24n^2}$$

Il s'agit du terme général d'une série de Riemann convergente avec $\alpha = 2 > 1$ donc la série de terme général u_n converge.

Allez à : Exercice 11

Correction exercice 12.

On pose $v_n = \frac{1}{n!}$, il s'agit d'une série absolument convergente en appliquant la règle de D'Alembert

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{n+1} \to 0 < 1$$

On peut appliquer la formule du produit de deux séries absolument convergentes

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} v_{n-k}v_k\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(n-k)!\,k!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

Comme on le verra dans le chapitre « séries entières »

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!} = e$$

Ce qui montre que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = e^2$$

Allez à : Exercice 12

Correction exercice 13.

On pose

$$a_n = \frac{1}{n!} \quad \text{et} \quad b_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$$

a_n est le terme général d'une série absolument convergente en appliquant la règle de D'Alembert

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{n+1} \to 0 < 1$$

$|b_n| = \frac{1}{2^n}$ est le terme général d'une série géométrique convergente avec $q = \frac{1}{2} < 1$, donc la série de terme général b_n converge absolument

On peut appliquer la formule du produit de deux séries absolument convergentes

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} b_{n-k}a_k\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}}{k!\,2^{n-k}}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = e$$

Comme on le verra dans le chapitre « séries entières » et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}$$

Finalement

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \frac{2e}{3}$$

Allez à : Exercice 13

Correction exercice 14.

1. $u_n \sim \frac{1}{n^2}$ qui est une suite de Riemann convergente car $\alpha = 2 > 1$ donc la série de terme général u_n converge.
   On décompose cette fraction en élément simple
$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$
$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k'=2}^{n+1} \frac{1}{k'}$$
   En posant $k' = k + 1$ dans la seconde somme. $k = 1 \Rightarrow k' = 2$ et $k = n \Rightarrow k' = n + 1$
$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k}$$
   En changeant k' en k.
$$\sum_{k=1}^{n} u_k = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Allez à : Exercice 14

   Car tous les termes entre $k = 2$ et $k = n$ se simplifient.
$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k = 1$$

2. $u_n \sim \frac{1}{n^3}$ qui est une suite de Riemann convergente car $\alpha = 3 > 1$ donc la série de terme général u_n converge.
   On décompose cette fraction en élément simple
$$u_n = \frac{\frac{1}{2}}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{\frac{1}{2}}{n+2}$$
$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\frac{1}{2}}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{\frac{1}{2}}{k+2}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2}$$
   Dans la seconde somme on pose $k' = k + 1$, $k = 1 \Rightarrow k' = 2$ et $k = n \Rightarrow k' = n + 1$
   Dans la troisième somme on pose $k'' = k + 2$, $k = 1 \Rightarrow k'' = 3$ et $k = n \Rightarrow k'' = n + 3$
$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k'=2}^{n+1} \frac{1}{k'} + \frac{1}{2}\sum_{k''=3}^{n+2} \frac{1}{k''}$$
   On change k' en k et k'' en k

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k} + \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k}$$

On va réunir les valeurs de k comprises entre $k = 3$ et $k = n$

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}\right) - \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} + \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) + \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} + \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}$$

Les trois dernières sommes s'annulent et il reste

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{4}$$

Allez à : Exercice 14

3. $u_n \sim \frac{1}{n^2}$ qui est une suite de Riemann convergente car $\alpha = 2 > 1$ donc la série de terme général u_n converge.

On décompose cette fraction en élément simple

$$u_n = \frac{2n-1}{n(n-2)(n+2)} = \frac{\frac{1}{4}}{n} + \frac{\frac{3}{8}}{n-2} + \frac{-\frac{5}{8}}{n+2}$$

$$\sum_{k=3}^{n} u_k = \sum_{k=3}^{n}\left(\frac{\frac{1}{4}}{k} + \frac{\frac{3}{8}}{k-2} + \frac{-\frac{5}{8}}{k+2}\right) = \frac{1}{4}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} + \frac{3}{8}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k-2} - \frac{5}{8}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k+2}$$

Dans la seconde somme on pose $k' = k - 2$, $k = 3 \Rightarrow k' = 1$ et $k = n \Rightarrow k' = n - 2$

Dans la troisième somme on pose $k'' = k + 2$, $k = 3 \Rightarrow k'' = 5$ et $k = n \Rightarrow k'' = n + 2$

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{4}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} + \frac{3}{8}\sum_{k'=1}^{n-2}\frac{1}{k'} - \frac{5}{8}\sum_{k''=5}^{n+2}\frac{1}{k''}$$

On change k' en k et k'' en k

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{4}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} + \frac{3}{8}\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{k} - \frac{5}{8}\sum_{k=5}^{n+2}\frac{1}{k}$$

On va réunir les valeurs de k comprises entre $k = 5$ et $k = n - 2$

$$\sum_{k=3}^{n} u_k = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \sum_{k=3}^{n-2}\frac{1}{k} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right) + \frac{3}{8}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \sum_{k=5}^{n-2}\frac{1}{k} + \frac{1}{n+1}\right)$$

$$- \frac{5}{8}\left(\sum_{k=5}^{n-2}\frac{1}{k} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right) + \frac{3}{8}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) - \frac{5}{8}\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)$$

$$+ \frac{1}{4}\sum_{k=3}^{n-2}\frac{1}{k} + \frac{3}{8}\sum_{k=3}^{n-2}\frac{1}{k} - \frac{5}{8}\sum_{k=3}^{n-2}\frac{1}{k}$$

Les trois dernières sommes s'annulent et il reste

$$\sum_{k=3}^{n} u_k = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right)+\frac{3}{8}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)-\frac{5}{8}\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)$$

$$\sum_{k=3}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{8}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)=\frac{7}{48}+\frac{25}{32}=\frac{89}{96}$$

Allez à : Exercice 14

4. Il est à peu près clair que u_n tend vers 0, c'est déjà cela, mais comment, on va faire un développement limité en $\frac{1}{n}$ de $|u_n| = \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$ (car $\frac{n+1}{n-1} > 1$), on pose $x = \frac{1}{n}$ donc $n = \frac{1}{x}$

On fait un développement limité à l'ordre 2 car la série de Riemann $\frac{1}{n}$ est divergente et que la série de Riemann $\frac{1}{n^2}$ est convergente (En général il faut aller à un ordre strictement supérieur à 1, dans les cas raisonnable).

$$|u_n| = \ln\left(\frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}-1}\right) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x)-\ln(1-x) = x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-\left(-x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)$$

$$= 2x+o(x^2) = \frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n}$$

Et voilà, c'est raté la série de terme général u_n ne converge pas absolument, on va essayer de montrer qu'elle converge simplement en utilisant le fait que cette série est alternée.

$$v_n = \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) = f(n) \quad \text{avec} \quad f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \ln(x+1)-\ln(x-1)\,, x \geq 2$$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1} = \frac{x-1-(x+1)}{x^2-1} = -\frac{2}{x^2-1} < 0$$

De plus

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) = 0$$

Donc la série de terme général $u_n = (-1)^n v_n$ est convergente.

$$\sum_{k=2}^{n}(-1)^k\ln\left(\frac{k+1}{k-1}\right) = \sum_{k=2}^{n}(-1)^k(\ln(k+1)-\ln(k-1))$$

$$= \sum_{k=2}^{n}(-1)^k\ln(k+1) - \sum_{k=2}^{n}(-1)^k\ln(k-1)$$

Dans la première somme on pose $k' = k+1$, $k = 2 \Rightarrow k' = 3$ et $k = n \Rightarrow k' = n+1$

Dans la seconde somme on pose $k'' = k-1$, $k = 2 \Rightarrow k' = 1$ et $k = n \Rightarrow k'' = n-1$

$$\sum_{k=2}^{n}(-1)^k\ln\left(\frac{k+1}{k-1}\right) = \sum_{k'=3}^{n+1}(-1)^{k'-1}\ln(k') - \sum_{k''=1}^{n-1}(-1)^{k''+1}\ln(k'')$$

On remarque que $(-1)^{k''+1} = (-1)^{k''-1}(-1)^2 = (-1)^{k''-1}$, puis on remplace k' et k'' par k dans chacune des sommes

$$\sum_{k=2}^{n}(-1)^k\ln\left(\frac{k+1}{k-1}\right) = \sum_{k=3}^{n+1}(-1)^{k-1}\ln(k) - \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\ln(k)$$

$$= \sum_{k=3}^{n-1}(-1)^{k-1}\ln(k) + (-1)^{n-1}\ln(n) + (-1)^{(n+1)-1}\ln(n+1)$$

$$-\left((-1)^{1-1}\ln(1)+(-1)^{2-1}\ln(2)+\sum_{k=3}^{n-1}(-1)^{k-1}\ln(k)\right)$$

Les deux sommes se simplifient

$$\sum_{k=2}^{n}(-1)^k \ln\left(\frac{k+1}{k-1}\right) = \sum_{k=3}^{n+1}(-1)^{k-1}\ln(k) - \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\ln(k)$$
$$= (-1)^{n-1}\ln(n) + (-1)^n \ln(n+1) + \ln(2) = (-1)^{n-1}(\ln(n) - \ln(n+1)) + \ln(2)$$
$$= (-1)^{n-1}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) + \ln(2)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=2}^{n}(-1)^k \ln\left(\frac{k+1}{k-1}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left((-1)^{n-1}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) + \ln(2)\right) = \ln(2)$$

Allez à : Exercice 14

5. $u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{(n+2)^2}\right) \sim -\frac{1}{(n+2)^2} \sim -\frac{1}{n^2}$, il s'agit d'une suite de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$, la série converge.

Petit calcul

$$1 - \frac{1}{(k+2)^2} = \frac{(k+2)^2 - 1}{(k+2)^2} = \frac{(k+2-1)(k+2-1)}{(k+2)^2} = \frac{(k+3)(k+1)}{(k+2)^2}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1 - \frac{1}{(k+2)^2}\right) = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{(k+3)(k+1)}{(k+2)^2}\right) = \sum_{k=1}^{n}\ln(k+3) + \sum_{k=1}^{n}\ln(k+1) - 2\sum_{k=1}^{n}\ln(k+2)$$

Dans la première somme on pose $k' = k+3$, $k = 1 \Rightarrow k' = 4$, $k = n \Rightarrow k' = n+3$

Dans la deuxième somme on pose $k'' = k+1$, $k = 1 \Rightarrow k'' = 2$, $k = n \Rightarrow k'' = n+1$

Dans la troisième somme on pose $k''' = k+2$, $k = 1 \Rightarrow k''' = 3$, $k = n \Rightarrow k'' = n+2$

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1 - \frac{1}{(k+2)^2}\right) = \sum_{k'=4}^{n+3}\ln(k') + \sum_{k''=2}^{n+1}\ln(k'') - 2\sum_{k'''=3}^{n+2}\ln(k''')$$

On remplace k', k'' et k''' par k

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1 - \frac{1}{(k+2)^2}\right) = \sum_{k=4}^{n+3}\ln(k) + \sum_{k=2}^{n+1}\ln(k) - 2\sum_{k=3}^{n+2}\ln(k)$$

On va réunir les sommes entre $k = 4$ et $k = n+1$

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1 - \frac{1}{(k+2)^2}\right)$$
$$= \left(\sum_{k=4}^{n+1}\ln(k) + \ln(n+2) + \ln(n+3)\right) + \left(\ln(2) + \ln(3) + \sum_{k=4}^{n+1}\ln(k)\right)$$
$$- 2\left(\ln(3) + \sum_{k=4}^{n+1}\ln(k) + \ln(n+1)\right)$$

Les sommes de $\ln(k)$ de $k = 4$ à $k = n+1$ s'éliminent.

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1 - \frac{1}{(k+2)^2}\right) = (\ln(n+2) + \ln(n+3)) + (\ln(2) + \ln(3)) - 2(\ln(3) + \ln(n+1))$$
$$= \ln\left(\frac{(n+2)(n+3)}{(n+1)^2}\right) + \ln(2) - \ln(3)$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+2)(n+3)}{(n+1)^2} = 1$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1 - \frac{1}{(k+2)^2}\right) = \ln(2) - \ln(3) = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

Allez à : Exercice 14

Correction exercice 15.

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} (av_k + bv_{k+1} + cv_{k+2}) = a\sum_{k=0}^{n} v_k + b\sum_{k=0}^{n} v_{k+1} + c\sum_{k=0}^{n} v_{k+2}$$

Dans la deuxième somme on pose $k' = k + 1$, $k = 0 \Rightarrow k' = 1$ et $k = n \Rightarrow k' = n + 1$

Dans la troisième somme on pose $k'' = k + 2$, $k = 0 \Rightarrow k' = 2$ et $k = n \Rightarrow k' = n + 2$

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = a\sum_{k=0}^{n} v_k + b\sum_{k'=1}^{n+1} v_{k'} + c\sum_{k''=2}^{n+2} v_{k''}$$

On change k' et k'' par k.

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = a\sum_{k=0}^{n} v_k + b\sum_{k=1}^{n+1} v_k + c\sum_{k=2}^{n+2} v_k$$

On réunit les sommes entre $k = 2$ et $k = n$

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = a\left(v_0 + v_1 + \sum_{k=2}^{n} v_k\right) + b\left(v_1 + \sum_{k=2}^{n} v_k + v_{n+1}\right) + c\left(\sum_{k=2}^{n} v_k + v_{n+1} + v_{n+2}\right)$$

$$= a(v_0 + v_1) + bv_1 + bv_{n+1} + c(v_{n+1} + v_{n+2}) + (a + b + c)\sum_{k=2}^{n} v_k$$

$$= a(v_0 + v_1) + bv_1 + bv_{n+1} + c(v_{n+1} + v_{n+2})$$

Car $a + b + c = 0$

La suite tend vers 0 donc

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = \lim_{n\to+\infty} \big(a(v_0 + v_1) + bv_1 + bv_{n+1} + c(v_{n+1} + v_{n+2})\big) = a(v_0 + v_1) + bv_1$$

Allez à : Exercice 15

Correction exercice 16.

1. On va d'abord diviser $n^3 + 1$ par $n^2 + 1$, ce qui donne $n^3 + 1 = (n^2 + 1)n + (-n + 1)$, donc

$$\frac{n^3 + 1}{n^2 + 1} = n + \frac{-n + 1}{n^2 + 1}$$

Et alors

$$u_n = \sin\left(\pi\frac{n^3 + 1}{n^2 + 1}\right) = \sin\left(n\pi + \frac{-n + 1}{n^2 + 1}\pi\right) = (-1)^n \sin\left(\frac{-n + 1}{n^2 + 1}\pi\right)$$

On va montrer que la série est alternée, mais comme $-n + 1 < 0$, le sinus va être négatif aussi, on va légèrement modifier u_n

$$u_n = \sin\left(\pi\frac{n^3 + 1}{n^2 + 1}\right) = (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{n - 1}{n^2 + 1}\pi\right)$$

Puis on va montrer que $v_n = \sin\left(\frac{n-1}{n^2+1}\pi\right)$ est décroissante et qu'elle tend vers 0

$\frac{n-1}{n^2+1}$ tend vers 0, donc v_n tend vers $\sin(0) = 0$.

Avant de montrer que la suite est décroissante on va montrer que $\frac{n-1}{n^2+1}\pi \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

$\frac{n-1}{n^2+1}\pi > 0$ c'est clair

$$\frac{\pi}{2} - \frac{n - 1}{n^2 + 1}\pi = \left(\frac{1}{2} - \frac{n - 1}{n^2 + 1}\right)\pi = \frac{n^2 + 1 - 2(n - 1)}{2(n^2 + 1)}\frac{\pi}{2} = \frac{n^2 - 2n + 3}{2(n^2 + 1)}\frac{\pi}{2} = \frac{(n - 1)(n - 3)}{2(n^2 + 1)}\frac{\pi}{2} > 0$$

Pour $n > 3$ (n tend vers l'infini donc on n'a pas de problème pour les petites valeurs de n)

$$v_n = \sin\left(\frac{n - 1}{n^2 + 1}\pi\right) = f(n) \qquad \text{avec} \quad f(x) = \sin\left(\frac{x - 1}{x^2 + 1}\pi\right)$$

$$f'(x) = \left(\frac{x-1}{x^2+1}\pi\right)' \cos\left(\frac{x-1}{x^2+1}\pi\right) = \pi \frac{1 \times (x^2+1) - (x-1) \times 2x}{(x^2+1)^2} \cos\left(\frac{x-1}{x^2+1}\pi\right)$$
$$= \pi \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2} \cos\left(\frac{x-1}{x^2+1}\pi\right)$$

Au moins pour x assez grand, $-x^2+2x+1 < 0$ et pour x assez grand (que 3) $\frac{x-1}{x^2+1}\pi \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ donc $\cos\left(\frac{x-1}{x^2+1}\pi\right) > 0$, la fonction est décroissante donc la suite est décroissante. Finalement il s'agit d'une série alternée convergente.

2.

$$u_n = \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) (\ln(n))^{2011} = \left(1 - \left(1 - \frac{\left(\frac{\pi}{n}\right)^2}{2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) (\ln(n))^{2011}$$
$$= \left(\frac{\pi^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)(\ln(n))^{2011} \sim \frac{\pi^2}{2n^2}(\ln(n))^{2011}$$
$$n^{\frac{3}{2}} \frac{\pi^2}{2n^2}(\ln(n))^{2011} = \frac{\pi^2}{2n^{\frac{1}{2}}}(\ln(n))^{2011} \to 0$$

D'après la règle de Riemann la série de terme général u_n converge.

3. On rappelle que pour tout $x \geq 0$, $\sin(x) \leq x$

$$0 \leq u_n = \int_0^{\frac{\pi}{n}} \sqrt{\sin(x)}\, dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{n}} \sqrt{x} dx = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{\pi}{n}} = \frac{2\pi^{\frac{3}{2}}}{3} \times \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

$\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente, avec $\alpha = \frac{3}{2} > 1$. Donc la série de terme général u_n converge.

4. $u_n = \frac{1+(-1)^n\sqrt{n}}{1+n}$ n'est pas de signe constant mais il parait délicat d'appliquer le TSSA

$$u_n = \frac{1+(-1)^n\sqrt{n}}{1+n} = \frac{1}{1+n} + (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{1+n}$$

$\frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n}$ est le terme général d'une série de Riemann avec $\alpha = 1 \leq 1$, donc divergente.

Posons $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+x}$, on a alors $f(n) = \frac{\sqrt{n}}{1+n}$

$$f(n) > 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} f(n) = 0$$

C'est évident. Et pour tout $x > 1$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(1+x) - \sqrt{x}}{(1+x)^2} = \frac{(1+x) - 2x}{2\sqrt{x}(1+x)^2} = \frac{1-x}{2\sqrt{x}(1+x)^2} < 0$$

Ce qui montre que la suite $\left(\frac{\sqrt{n}}{1+n}\right)$ est décroissante, d'après le TSSA la série de terme général $(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{1+n}$ converge.

u_n est la somme du terme général d'une série divergente ($\frac{1}{n+1}$) et du terme général d'une série convergente $(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{1+n}$, donc la série de terme général u_n diverge.

5. D'après la règle de Cauchy

$$(u_n)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{(\ln(n))^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\ln(n)} \to 0 < 1$$

Donc la série de terme général u_n converge.

6. Cela va dépendre de la valeur de α

$$(u_n)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{2^n}{n^2}(\sin(\alpha))^{2n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{2\sin^2(\alpha)}{n^{\frac{2}{n}}}$$

$$n^{\frac{2}{n}} = e^{\frac{2}{n}\ln(n)} \to e^0 = 1$$

Donc

$$(u_n)^{\frac{1}{n}} \to 2\sin^2(\alpha)$$

D'après la règle de Cauchy

Si $2\sin^2(\alpha) < 1$, autrement dit si $\sin^2(\alpha) < \frac{1}{2}$, soit encore $-\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin(\alpha) < \frac{\sqrt{2}}{2}$, c'est-à-dire si $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right[$ avec $k \in \mathbb{Z}$ ou $\alpha \in \left]\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right[$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Cela se voit assez facilement sur le cercle trigonométrique.

La série de terme général u_n converge

Si $2\sin^2(\alpha) > 1$, autrement dit si $\sin^2(\alpha) > \frac{1}{2}$, soit encore $-1 \le \sin(\alpha) < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin(\alpha) \le 1$, c'est-à-dire si $\alpha \in \left]\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right[$ avec $k \in \mathbb{Z}$ ou $\alpha \in \left]\frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \frac{7\pi}{4} + 2k\pi\right[$ avec $k \in \mathbb{Z}$

La série de terme général u_n diverge.

Si $2\sin^2(\alpha) = 1$ on ne peut pas conclure avec la règle de Cauchy, mais alors

$$u_n = \frac{2^n}{n^2}(\sin(\alpha))^{2n} = \frac{(2\sin^2(\alpha))^n}{n^2} = \frac{1}{n^2}$$

Qui est le terme général d'une série de Riemann convergente avec $\alpha = 2 > 1$

Allez à : Exercice 16

Correction exercice 17.

1.

a. La suite u_n n'est pas forcément positive mais à partir d'un certain rang $0 < \frac{a}{k} < \pi$ donc les termes $\sin\left(\frac{a}{k}\right)$ sont positifs donc u_n ne change plus de signe lorsque que n augmente. Elle est de signe constant.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!\prod_{k=1}^{n+1}\sin\left(\frac{a}{k}\right)}{n!\prod_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{a}{k}\right)} = (n+1)\sin\left(\frac{a}{n+1}\right) \sim (n+1)\times\frac{a}{n+1} = a$$

D'après la règle de D'Alembert si $a < 1$ alors la série converge et si $a > 1$ la série diverge.

b. Si la série converge alors la suite tend vers 0.

2.

a. $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$ donc a_n tend vers 0, on va faire un développement limité de a_n en $\frac{1}{n}$ à l'ordre 2.

Attention en multipliant par n on va perdre un ordre. Remarque $\sin\left(\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$ donc $n\sin\left(\frac{1}{n}\right) < 1$ et la suite a_n est négatif (donc de signe constant).

$$a_n = \ln\left(n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \ln\left(n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = -\frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\sim -\frac{1}{6n^2}$$

$-\frac{1}{6n^2}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente ($\alpha = 2 > 1$). Donc la série de terme général a_n converge.

b. Pour $a = 1$

$$u_n = n! \prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{1}{k}\right) = \prod_{k=1}^{n} k \sin\left(\frac{1}{k}\right)$$

Donc

$$\ln(u_n) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} k \sin\left(\frac{1}{k}\right)\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(k \sin\left(\frac{1}{k}\right)\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

La série de terme général a_n converge, donc la suite (u_n) converge.

Allez à : Exercice 17

Correction exercice 18.

1. Dans un premier temps remarquons que pour tout $n \geq 1$, $u_n > 0$, on en déduit que

$$0 < u_{n+1} < \frac{1}{n}$$

Cela montre que la suite (u_n) tend vers 0 mais cela ne suffit pas pour montrer que la série est convergente (si on avait pu montrer que $0 < u_{n+1} < \frac{1}{n^2}$ là cela aurait été bon).

Dans un deuxième temps on va faire un développement limité en « u_n »

$$u_{n+1} = \frac{1}{n}\big(1 - u_n + o(u_n)\big) = \frac{1}{n} - \frac{u_n}{n} + o\left(\frac{u_n}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$$

$\frac{1}{n}$ est le terme général d'une série de Riemann divergente donc la série de terme général u_n diverge.

2.

$$(-1)^{n+1} u_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{n} - (-1)^{n+1} \frac{u_n}{n} + o\left(\frac{u_n}{n}\right)$$

$\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ est une série alternée, $\frac{1}{n}$ tend vers 0 en décroissant, c'est le terme général d'une série de Riemann.

$$\left|(-1)^{n+1} \frac{u_n}{n} + o\left(\frac{u_n}{n}\right)\right| \sim \frac{u_n}{n}$$

Et $0 < \frac{u_n}{n} < \frac{1}{n(n-1)} \sim \frac{1}{n^2}$ par conséquent $(-1)^{n+1} \frac{u_n}{n} + o\left(\frac{u_n}{n}\right)$ est le terme général d'une série absolument convergente, c'est donc le terme général d'une série convergente et enfin $(-1)^{n+1} u_{n+1}$ est le terme général d'une série convergente. (il en est de même pour $(-1)^n u_n$ évidemment).

Allez à : Exercice 18

Correction exercice 19.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{e^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1+\frac{1}{2}}}}{\dfrac{e^n n!}{n^{n+\frac{1}{2}}}} = \frac{e^{n+1}(n+1)!\, n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n n!\,(n+1)^{n+\frac{1}{2}}(n+1)} = \frac{e^1 (n+1) n^{n+\frac{1}{2}}}{(n+1)^{n+\frac{1}{2}}(n+1)} = \frac{e n^{n+\frac{1}{2}}}{(n+1)^{n+\frac{1}{2}}}$$

$$= e\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+\frac{1}{2}} = e e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)} = e e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)} = e e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

Le but est de faire un développement limité de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ en $\frac{1}{n}$ à l'ordre 2.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = e e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)} = e e^{-\left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e e^{-1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{3n^2} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$= e^{\frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n}\right)} = 1 + \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Par conséquent

$$z_n = \ln\left(1 + \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{12n^2}$$

$\frac{1}{12n^2}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente donc z_n est le terme général d'une série convergente.

D'autre part

$$\sum_{k=1}^{n} z_k = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right) = \sum_{k=1}^{n} (\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)) = \sum_{k=1}^{n} \ln(u_{k+1}) - \sum_{k=1}^{n} \ln(u_k)$$

Dans la première somme on pose $k' = k + 1$, $k = 1 \Rightarrow k' = 2$ et $k = n \Rightarrow k' = n + 2$

$$\sum_{k=1}^{n} z_k = \sum_{k'=2}^{n+1} \ln(u_{k'}) - \sum_{k=1}^{n} \ln(u_k)$$

On change k' en k dans la première somme et on simplifie

$$\sum_{k=1}^{n} z_k = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_1)$$

$$\ln(u_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n} z_k + \ln(u_1)$$

La série de terme général z_k converge donc $\ln(u_{n+1})$ converge et finalement u_{n+1} admet une limite finie.

Allez à : Exercice 19

Correction exercice 20.

Commençons par une mauvaise nouvelle, si u_n et v_n sont les termes généraux de séries absolument convergente alors w_n est le terme général de la série produit, qui est convergente et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$$

Seulement voilà la série de terme général v_n ne converge pas absolument alors il faut faire autrement.

$$\sum_{n=0}^{N} w_n = \sum_{n=0}^{N} \left(\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}\right) = \sum_{n=0}^{N} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2} \frac{(-1)^{n-k}}{n-k+1}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{N} \left((-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^2(n-k+1)}\right)$$

Puis on va décomposer la fraction rationnelle $\frac{1}{(k+1)^2(n-k+1)}$ en éléments simples, il existe a, b et c (ces trois constantes peuvent dépendre de n) tels que :

$$\frac{1}{(k+1)^2(n-k+1)} = \frac{a}{(k+1)^2} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{n-k+1}$$

Je multiplie par $(k+1)^2$, puis $k = -1$

$$a = \left[\frac{1}{n-k+1}\right]_{k=-1} = \frac{1}{n+2}$$

Je multiple par $n - k + 1$, puis $k = n + 1$

$$c = \left[\frac{1}{(k+1)^2}\right]_{k=n+1} = \frac{1}{(n+2)^2}$$

Je multiplie par k, puis $k \to +\infty$

$$0 = b - c \Rightarrow b = \frac{1}{(n+2)^2}$$

Finalement on a

$$\frac{1}{(k+1)^2(n-k+1)} = \frac{\frac{1}{n+2}}{(k+1)^2} + \frac{\frac{1}{(n+2)^2}}{k+1} + \frac{\frac{1}{(n+2)^2}}{n-k+1}$$

Ce que l'on remplace dans la somme partielle

$$\sum_{n=0}^{N} w_n = \sum_{n=0}^{N}\left((-1)^n \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\frac{1}{n+2}}{(k+1)^2} + \frac{\frac{1}{(n+2)^2}}{k+1} + \frac{\frac{1}{(n+2)^2}}{n-k+1}\right)\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{N}\left((-1)^n\left(\frac{1}{n+2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1} + \frac{1}{(n+2)^2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n-k+1}\right)\right)$$

Puis on va faire le changement d'indice $k' = n - k$ dans la somme

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n-k+1}$$

$$k = 0 \Rightarrow k' = n \qquad \text{et} \qquad k = n \Rightarrow k' = 0$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n-k+1} = \sum_{k'=0}^{n}\frac{1}{k'+1} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}$$

Ce que l'on remplace dans la somme partielle

$$\sum_{n=0}^{N} w_n = \sum_{n=0}^{N}\left((-1)^n\left(\frac{1}{n+2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1} + \frac{1}{(n+2)^2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\right)\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{N}\left((-1)^n\left(\frac{1}{n+2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)^2} + \frac{2}{(n+2)^2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\right)\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{N}\left(\frac{(-1)^n}{n+2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)^2}\right) + 2\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{(-1)^n}{(n+2)^2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\right) = S_{1,N} + S_{2,N}$$

Où $w_{1,n} = \frac{(-1)^n}{n+2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)^2}$ est le terme général de la série S_1 et $w_{2,n} = \frac{(-1)^n}{(n+2)^2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}$ le terme général de la série S_2.

On rappelle un résultat « connu »,

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1} \sim \ln(n)$$

Alors

$$n^{\frac{3}{2}}|w_{2,n}| = n^{\frac{3}{2}}\frac{1}{(n+2)^2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1} \sim \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \to 0$$

D'après les règles de Riemann la série de terme général converge absolument, donc $S_{1,N}$ admet une limite finie lorsque N tend vers l'infini.

Pour la série S_1 cela va être moins simple $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)^2}$ est une somme partielle qui admet une limite puisque que le terme général est équivalent à $\frac{1}{k^2}$ qui est le terme général d'une série de Riemann convergente, mais le terme $\frac{(-1)^n}{n+2}$ ne permet pas d'espérer une convergence absolue, reste la solution de montrer qu'il s'agit d'une série alternée, il faut montrer que

$a_n = \frac{1}{n+2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)^2}$

Tend vers 0 et est dévroissant, $a_n \to 0$ c'est évident.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+3}\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{(k+1)^2} - \frac{1}{n+2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)^2}$$

$$= \frac{(n+2)\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{(k+1)^2} - (n+3)\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)^2}}{(n+2)(n+3)}$$

Donc $a_{n+1} - a_n$ a le même signe que

$$(n+2)\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{(k+1)^2} - (n+3)\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)^2}$$

$$= (n+2)\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2}\right) - (n+3)\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)^2} = \frac{1}{n+2} - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)^2}$$

Pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $k+1 < n+1$, donc

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)^2} > \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{(n+1)^2}\sum_{k=0}^{n} 1 = \frac{1}{(n+1)^2} \times (n+1) = \frac{1}{n+1}$$

Par conséquent

$$\frac{1}{n+2} - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)^2} < \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{-1}{(n+2)(n+1)} < 0$$

Ce qui montre bien que $a_{n+1} - a_n < 0$ c'est-à-dire que la suite est décroissante.

Par conséquent

$$w_{1,n} = \frac{(-1)^n}{n+2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)^2} = (-1)^n a_n$$

Est le terme général d'une série convergente et enfin la série de terme général w_n est la somme de deux série convergente, elle converge.

Allez à : Exercice 20

Correction exercice 21.

$\frac{1}{\sqrt{n}}$ est décroissant et tend vers 0 donc la série de terme général u_n est une série convergente.

$\frac{1}{n}$ est le terme général d'une série de Riemann divergente donc la série de terme général v_n est la somme d'une série convergente et d'une série divergente, elle diverge.

$$\frac{v_n}{u_n} = \frac{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}}{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = 1 + \frac{\sqrt{n}}{(-1)^n n} = 1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \to 1$$

Ce qui montre que ces deux suites sont équivalentes.

Remarque :

Si $u_n \sim v_n$ alors les séries de terme général u_n et de terme général v_n sont de même nature est un résultat faux, pour qu'il soit vrai, il faut que u_n et v_n soient de signes constants.

Allez à : Exercice 21

Correction exercice 22.

1. $\forall x \in [0,1], x^n e^{-x} > 0$ donc $f(n) > 0$

$$\forall x \in [0,1], 0 \le x \le 1 \Rightarrow 0 \le x^{n+1} \le x^n$$

Donc

$$\int_0^1 x^{n+1}e^{-x}dx \le \int_0^1 x^n e^{-x}dx$$

Autrement dit $f(n+1) \le f(n)$, cette suite est décroissante.

$$f(n) = \int_0^1 x^n e^{-x}dx = [-x^n e^{-x}]_0^1 - \int_0^1 nx^{n-1}(-e^{-x})dx = -\frac{1}{e} + nf(n-1)$$

Montrons par récurrence que

$$f(n) = \frac{n!}{e}\left(e - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)$$

Pour $n = 0$

$$\int_0^1 x^0 e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^1 = -\frac{1}{e} + 1$$

$$\frac{0!}{e}\left(e - \sum_{k=0}^{0} \frac{1}{k!}\right) = \frac{1}{e}(e-1) = 1 - \frac{1}{e}$$

L'hypothèse est vérifiée au rang 0.

Supposons

$$f(n-1) = \frac{(n-1)!}{e}\left(e - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}\right)$$

Alors

$$f(n) = -\frac{1}{e} + nf(n-1) = -\frac{1}{e} + n\frac{(n-1)!}{e}\left(e - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}\right) = -\frac{1}{e} + \frac{n!}{e}\left(e - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}\right)$$

$$= \frac{n!}{e} \times \left(-\frac{1}{n!}\right) + \frac{n!}{e}\left(e - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}\right) = \frac{n!}{e}\left(e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)$$

Ce qui achève la récurrence

2. Pour tout $x \in [0,1]$, $e^{-1} \leq e^{-x} \leq e^{-0}$, on en déduit que :

$$\frac{1}{e} \times x^n \leq x^n e^{-x} \leq x^n$$

Puis en intégrant en 0 et 1

$$\frac{1}{e}\int_0^1 x^n dx \leq f(n) \leq \int_0^1 x^n dx$$

Comme

$$\int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

Cela donne

$$\frac{1}{e(n+1)} \leq f(n) \leq \frac{1}{n+1}$$

$f(n)$ est minorée par $\frac{1}{e(n+1)} \sim \frac{1}{en}$ qui est le terme général d'une série de Riemann divergente donc la série de terme général $f(n)$ diverge.

$$\frac{1}{en(n+1)} \leq \frac{f(n)}{n} \leq \frac{1}{n(n+1)}$$

$\frac{f(n)}{n}$ est majorée par $\frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$ qui est le terme général d'une série de Riemann convergente donc la série de terme général $\frac{f(n)}{n}$ converge.

$f(n)$ est positive et décroissante, la série de terme général $(-1)^n f(n)$ est une série alternée convergente.

3. Soit R le rayon de convergence de la série entière. Comme la série de terme général $f(n)$ diverge cela signifie que 1 n'est pas dans le disque de convergence sinon

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) 1^n$$

Convergerait, cela entraine que $R \geq 1$

Comme la série de terme général $(-1)^n f(n)$ converge, cela signifie que -1 est dans le disque de converge donc $R \leq 1$, en effet

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)(-1)^n < +\infty$$

Allez à : Exercice 22

Correction exercice 23.

1. On a $0 < \sin(u) < u$ pour $u > 0$ donc

$$0 < n\sin\left(\frac{1}{n}\right) < n \times \frac{1}{n} = 1$$

Par conséquent

$$\left(n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^a} > \left(n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^b} > 0$$

Puisque $n^b > n^a$

Cela montre que le terme général $\left(n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^b}$ est majoré par le terme général d'une série convergente, cette série converge.

2.

$$\ln(u_n) = \ln\left(\left(n\ \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^a}\right) = n^a \ln\left(n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

Il faut faire le développement limité de $\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ à un ordre suffisant parce que l'on va d'abord multiplier par n puis par n^a et à la fin on veut un développement limité à un ordre strictement supérieur à 2.

$$\ln(u_n) = n^a \ln\left(n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) = n^a \ln\left(n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right) = n^a \ln\left(1 - \frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$
$$= n^a\left(-\frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = -\frac{1}{6n^{2-a}} + o\left(\frac{1}{n^{3-a}}\right)$$

Comme $a \leq 2$, $2 - a \geq 0$, ce qui montre que $\ln(u_n)$ tend vers 0, et que donc u_n tend vers $1 \neq 0$, la série ne converge pas.

3.

$$\ln(u_n) = n^{2+\epsilon} \ln\left(n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) = n^{2+\epsilon} \ln\left(n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right) = n^{2+\epsilon} \ln\left(1 - \frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$
$$= n^{2+\epsilon}\left(-\frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = -\frac{n^\epsilon}{6} + o\left(\frac{1}{n^{1-\epsilon}}\right)$$
$$u_n = \exp\left(-\frac{n^\epsilon}{6} + o\left(\frac{1}{n^{1-\epsilon}}\right)\right) = \exp\left(-\frac{n^\epsilon}{6}\right)\exp\left(o\left(\frac{1}{n^{1-\epsilon}}\right)\right)$$

$1 - \epsilon > 0$ donc $\frac{1}{n^{1-\epsilon}} \to 0$ et alors $\exp\left(o\left(\frac{1}{n^{1-\epsilon}}\right)\right) \to 1$, ce qui montre que

$$u_n \sim \exp\left(-\frac{n^\epsilon}{6}\right)$$

En utilisant les règles de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 u_n = \lim_{n\to+\infty} n^2 \exp\left(-\frac{n^\epsilon}{6}\right) = 0$$

Ce qui montre que la série de terme général u_n converge.

4. On vient de montrer que la série de terme général u_n était convergente si $2 < a < 3$ et à la première question on a montré qui si la série convergeait pour a alors elle convergeait pour $b > a$, elle converge donc pour tout $a > 2$.

Allez à : Exercice 23

Correction exercice 24.

1.

a)

$$u_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = [\arctan(x)]_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}$$

b) $x^2 + 1 \geq 1$ donc

$$0 \leq \frac{x^{2n}}{1+x^2} \leq \frac{x^{2n}}{1} = x^{2n}$$

Puis en intégrant entre 0 et 1

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}dx \leq \int_0^1 x^{2n}dx = \left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2n+1}$$

2.

a)

$$u_{n+1} + u_n = \int_0^1 \frac{x^{2(n+1)}}{1+x^2}dx + \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{x^{2n+2}+x^{2n}}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{(1+x^2)x^{2n}}{1+x^2}dx = \int_0^1 x^{2n}dx$$
$$= \frac{1}{2n+1}$$

b)

$$\sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k(u_{k+1}+u_k) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_{k+1} + \sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k$$

Dans la première somme on pose $k' = k+1$, $k = 0 \Rightarrow k' = 1$ et $k = n \Rightarrow k' = n+1$

$$\sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k'=1}^{n+1}(-1)^{k'-1}u_{k'} + \sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k$$

On remplace k' par k dans la première somme

$$\sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}u_k + \sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k$$
$$= (-1)^{n-1+1}u_{n+1} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}u_k + (-1)^0 u_0 + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k u_k$$
$$= (-1)^n u_{n+1} + u_0 + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}u_k + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k u_k$$
$$= (-1)^n u_{n+1} + u_0 + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}u_k - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}u_k = (-1)^n u_{n+1} + \frac{\pi}{4}$$

Il ne reste plus qu'à remarquer que u_n tend vers 0 pour montrer que

$$\sum_{k=0}^{\infty} v_k = \frac{\pi}{4}$$

Allez à : Exercice 24

Suites de fonctions

Exercice 1. Convergence uniforme

Etudier la convergence uniforme des deux suites de fonctions définies sur $[0,1]$ par :

1. $\forall n \geq 1, f_n(x) = \frac{ne^{-x}+x^2}{n+x}$
2. $\forall n \geq 1, g_n(x) = \frac{n}{1+xn}$

Allez à : Correction exercice 1

Exercice 2. Autre outil pour la convergence uniforme

Etudier la convergence uniforme de la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall n \geq 0, \forall \alpha \geq 0, f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}$$

Allez à : Correction exercice 2

Exercice 3. Convergence uniforme et dérivation

1. Soit la suite de fonction $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers une fonction f dérivable et constater que la suite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas.
2. Soit $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$

   Montrer que chaque f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ et que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f qui n'est pas $\mathcal{C}^1$.

Allez à : Correction exercice 3

Exercice 4. Convergence uniforme sur un ouvert

On pose $f_n(x) = e^{-nx}\sin(nx)$ avec $x \in \mathbb{R}^+$. Etudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}^+$ puis sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

Allez à : Correction exercice 4

Exercice 5. Convergence simple vers une fonction discontinue

Etudier la convergence, éventuellement uniforme, des suites de fonctions définies par :

a) $f_n: [0,1] \to \mathbb{R}$ avec $f_n(x) = x^n$

b) $g_n: [0,1] \to \mathbb{R}$ avec $g_n(x) = \frac{nx}{nx+1}$

c) $h_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $h_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}$

Allez à : Correction exercice 5

Exercice 6. Un cas pathologique

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de fonction définies par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad x < 0 \\ nx & \text{pour} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1 & \text{pour} \quad x > \frac{1}{n} \end{cases}$$

1. Faire une figure pour quelques valeurs de n.
2. Déterminer la limite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ quand n tend vers l'infini.
3. Préciser si la convergence est uniforme dans les trois cas suivants :
   - Sur $]-\infty, 0[$.
   - Sur un segment contenant l'origine.
   - Sur $[a, +\infty[$ où $a > 0$.

Allez à : Correction exercice 6

Exercice 7. Convergence uniforme et intégration

Soit $f_n: [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x(1-nx) & \text{pour } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Etudier la limite simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Calculer :

$$\int_0^1 f_n(t)dt$$

Y a-t-il convergence uniforme de la suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

3. Etudier la convergence uniforme sur $[a,1]$ avec $a > 0$.

Allez à : Correction exercice 7

Exercice 8. On considère la suite de fonctions réelle définies par

$$f_n(x) = \frac{x}{x+n} + \arctan(x), \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

Cette suite est-elle ?

1. Simplement convergente sur $[0,1]$?
2. Uniformément convergente sur $]0,1]$?
3. Uniformément convergente sur $[a,1]$ ($a \in]0,1[$) ?
4. Uniformément convergente sur $[1,+\infty[$?

Allez à : Correction exercice 8

Exercice 9. On considère la suite de fonctions réelles définies par

$$g_n(x) = \frac{nx}{1+nx}, \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

Cette suite est-elle ?

1. Simplement convergente sur $[0,1]$?
2. Uniformément convergente sur $]0,1]$?
3. Uniformément convergente sur $[a,1]$ ($a \in]0,1[$) ?
4. Uniformément convergente sur $[1,+\infty[$?

Allez à : Correction exercice 9

Exercice 10. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $f_n: [-1,1] \to \mathbb{R}$ définies par

$$f_n(x) = \sin(nx^2)\, e^{-nx^2}$$

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[-1,1]$ vers une fonction f que l'on déterminera.
2. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur $[0,1]$.
3. Montrer que $\forall a \in]0,1[$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a,1]$.

Allez à : Correction exercice 10

Exercice 11. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par

$$f_n(x)=\frac{2^n x}{1+2^n n x^2}$$

1. Etudier la converge simple de cette suite sur $[0,1]$.
2. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, calculer

$$I_n=\int_0^1 f_n(t)dt$$

   Et la limite de I_n lorsque $n\to+\infty$.
3. En déduire que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas uniformément convergente sur $[0,1]$.

Allez à : Correction exercice 11

Exercice 12. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies sur $[-1,1]$ par

$$f_n(x)=\frac{x}{1+n^2x^2}$$

1. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[-1,1]$ vers 0.
2. Etudier la convergence de $(f_n')_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $[-1,1]$.
3. On considère la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie sur $[-1,1]$ par

$$g_n(x)=\frac{\ln(1+n^2x^2)}{2n^2}$$

   Montrer que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[-1,1]$ vers 0.

Allez à : Correction exercice 12

Exercice 13.

Etudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions (f_n) définies par :

$$f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$$

$$x\mapsto x+\frac{x}{1+x}+\cdots+\frac{x}{(1+x)^n}=\sum_{k=0}^{n}\frac{x}{(1+x)^k}$$

Allez à : Correction exercice 13

Exercice 14.

Etudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) définies par :

$$f_n:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$$

$$x\mapsto\begin{cases}\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n & \text{si}\quad x\in[0,n]\\ 0 & \text{si}\quad x>n\end{cases}$$

Allez à : Correction exercice 14

Corrections

Correction exercice 1.

1.

$$\forall x \in [0,1], \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{ne^{-x}+x^2}{n+x} = e^{-x}$$

La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers $f: x \to e^{-x}$

$$f(x) - f_n(x) = e^{-x} - \frac{ne^{-x}+x^2}{n+x} = \frac{e^{-x}(n+x) - (ne^{-x}+x^2)}{n+x} = \frac{xe^{-x}-x^2}{n+x} = \frac{x(e^{-x}-x)}{n+x}$$

Soit on essaye de calculer le sup de la valeur absolue de cette fonction sur l'intervalle $[0,1]$, ce qui ne s'annonce pas joyeux parce que la principale méthode est d'étudier la fonction, ou bien on cherche à majorer la valeur absolue de cette différence par une expression ne faisant plus apparaître de « x » en sachant que $x \in [0,1]$

$$|f(x) - f_n(x)| = \left|\frac{x(e^{-x}-x)}{n+x}\right| \leq \left|\frac{e^{-x}-x}{n+x}\right|$$

Car $x \in [0,1]$

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \left|\frac{e^{-x}-x}{n+x}\right| \leq \frac{|e^{-x}|+|-x|}{|n+x|} = \frac{e^{-x}+x}{n+x} \leq \frac{1+1}{n+0} = \frac{2}{n}$$

Car $e^{-x} \leq 1$ et $\frac{1}{n+x} < \frac{1}{n+0}$

On en déduit que

$$\sup_{x\in[0,1]} |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{2}{n} \to 0$$

La suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction $x \to e^{-x}$.

Allez à : Exercice 1

2.

$$\forall x \in [0,1], \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{1+n(x+1)} = \frac{1}{x+1}$$

La suite de fonction (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers $x \to \frac{1}{x+1}$

$$f(x) - f_n(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{n}{1+n(x+1)} = \frac{1+n(x+1)-n(x+1)}{(x+1)\big(1+n(x+1)\big)} = \frac{1}{(x+1)\big(1+n(x+1)\big)}$$

Aucune majoration claire en vue, on va étudier (en vain ou presque) la fonction $g_n(x) = |f(x) - f_n(x)|$

$$g_n(x) = \frac{1}{(x+1)\big(1+n(x+1)\big)} = \frac{1}{x+1+n(x+1)^2} > 0$$

$$g_n'(x) = -\frac{1+2n(x+1)}{(+1+n(x+1)^2)^2}$$

Cette fonction s'annule pour

$$x_n = -\frac{1}{2n} - 1 = -\frac{2n+1}{2n}$$

Soit

$$x_n + 1 = -\frac{1}{2n}$$

Le maximum de cette fonction est donc en $x_n = -\frac{2n+1}{2n}$ et vaut

$$g_n(x_n)=\frac{1}{x_n+1+n(x_n+1)^2}=\frac{1}{-\frac{1}{2n}+n\left(-\frac{1}{2n}\right)^2}=\frac{1}{-\frac{1}{2n}+\frac{1}{4n}}=\frac{1}{\frac{1}{4n}}=4n$$

Le maximum tend vers l'infini et donc il n'y a pas de convergence uniforme.

Si on n'a rien vu c'est parfait, sinon

$$g_n(x)=\frac{1}{(x+1)\big(1+n(x+1)\big)}=\frac{1}{x+1+n(x+1)^2}$$

Donc

$$g_n\left(\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{\frac{1}{n+1}\left(1+n\frac{1}{n+1}\right)}=\frac{1}{\frac{1}{n+1}\left(1+n\frac{1}{n+1}\right)}=\frac{n+1}{1+\frac{n}{n+1}}\to+\infty$$

Comme

$$\sup_{x\in[0,1]}|f(x)-f_n(x)|=\sup_{x\in[0,1]}g_n(x)\geq g_n\left(\frac{1}{n+1}\right)\to+\infty$$

Cela montre qu'il n'y a pas convergence uniforme.

Allez à : Exercice 1

Correction exercice 2.

Si $x>0$ alors

$$\lim_{n\to+\infty}f_n(x)=0$$

Car l'exponentielle l'emporte sur le n^α

Si $x=0$ alors $f_n(0)=0$

La suite de fonction converge simplement vers la fonction nulle $\Theta_{\mathbb{R}^+}$

Etude de $|f_n-\Theta_{\mathbb{R}^+}|=f_n$ sur $\mathbb{R}^+$

$$f_n'(x)=n^\alpha e^{-nx}-n^{\alpha+1}xe^{-nx}=n^\alpha e^{-nx}(1-nx)$$

La dérivée est positive pour $x\in\left[0,\frac{1}{n}\right[$, nulle en $\frac{1}{n}$ et négative pour $x\in\left]\frac{1}{n},+\infty\right[$

Donc f_n admet un maximum en $x_n=\frac{1}{n}$

$$f_n(x_n)=n^\alpha\frac{1}{n}e^{-\frac{n}{n}}=\frac{n^{\alpha-1}}{e}$$

Si $\alpha\geq1$ alors

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^+}|f_n(x)-\Theta_{\mathbb{R}^+}(x)|=f_n(x_n)=\frac{n^{\alpha-1}}{e}$$

Ne tend pas vers 0 donc la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément vers $\Theta_{\mathbb{R}^+}$.

Si $\alpha<1$ alors

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^+}|f_n(x)-\Theta_{\mathbb{R}^+}(x)|=f_n(x_n)=\frac{n^{\alpha-1}}{e}\to0$$

Donc la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers $\Theta_{\mathbb{R}^+}$.

Allez à : Exercice 2

Correction exercice 3.

1. Pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}} = 0$$

La suite de fonction (f_n) converge simplement vers $\Theta_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}$ la fonction nulle sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, cette fonction est évidemment dérivable.

$$f_n'(x) = \frac{n\sin(nx)}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}\sin(nx)$$

Sauf pour $x = 0$ la suite (f_n') n'a pas de limite.

Allez à : Exercice 3

2.

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} = \sqrt{x^2} = |x|$$

La limite simple est $f(x) = |x|$

Puis on cherche à montrer qu'il y a convergence uniforme

$$\left|\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - |x|\right| = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - |x| = \frac{\left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - |x|\right)\left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + |x|\right)}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + |x|} = \frac{x^2 + \frac{1}{n^2} - x^2}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + |x|}$$

$$= \frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + |x|} \leq \frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{0 + \frac{1}{n^2}} + 0} = \frac{1}{n^2} \times n = \frac{1}{n}$$

Par conséquent

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - |x|\right| \leq \frac{1}{n}$$

Et enfin

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - |x|\right| = 0$$

La suite de fonction (f_n) converge uniformément vers $f(x) = |x|$, fonction qui n'est pas dérivable en 0 donc qui n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Allez à : Exercice 3

Correction exercice 4.

Si $x > 0$ alors

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$$

Car l'exponentielle l'emporte sur le n^α

Si $x = 0$ alors $f_n(0) = 0$

La suite de fonction converge simplement vers la fonction nulle $\Theta_{\mathbb{R}^+}$

Etude de f_n sur $\mathbb{R}^+$

$$f_n'(x) = ne^{-nx}\cos(nx) - ne^{-nx}\sin(nx) = ne^{-nx}\cos(nx)\left(1 - \tan(nx)\right)$$

Là on voit que l'on ne va pas s'en sortir, alors que

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = e^{-1}\sin(1)$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^+}|f_n(x) - \Theta_{\mathbb{R}^+}(x)| \leq f_n\left(\frac{1}{n}\right) = e^{-1}\sin(1) \neq 0$$

Donc la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément vers $\Theta_{\mathbb{R}^+}$.

Sur $[a,+\infty[$, la suite de fonctions converge simplement vers $\Theta_{[a,+\infty[}$

Comme sur $\mathbb{R}^+$ l'étude de la fonction ne va rien donner mais une simple majoration va nous permettre de conclure

$$\left|f_n(x) - \Theta_{[a,+\infty[}(x)\right| = e^{-nx}|\sin(nx)| \leq e^{-nx} \leq e^{-na}$$

Donc

$$\sup_{x\in[a,+\infty[}\left|f_n(x) - \Theta_{[a,+\infty[}(x)\right| \leq e^{-na} \to 0$$

On en déduit que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers $\Theta_{[a,+\infty[}$.

Allez à : Exercice 4

Correction exercice 5.

a) Si $x \in [0,1[$ alors x^n tend vers 0 et si $x = 1$ alors $x^n = 1$, ce qui montre que la suite de fonction converge simplement vers la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in [0,1[\\ 1 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$$

Si la convergence de la suite de fonctions continues (f_n) convergeait uniformément vers f alors f serait continue, ce qui n'est pas le cas par conséquent la convergence n'est pas uniforme.

b) Si $x \in]0,1]$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{nx}{nx+1} = 1$$

Si $x = 0$ alors $g_n(0) = 0$

Ce qui montre que la suite de fonction converge simplement vers la fonction g définie par

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ 1 & \text{si} \quad x \in]0,1] \end{cases}$$

Si la convergence de la suite de fonctions continues (g_n) convergeait uniformément vers g alors g serait continue, ce qui n'est pas le cas par conséquent la convergence n'est pas uniforme.

c) Si $x \neq 0$ alors $1 + x^2 > 1$ et

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^n} = 0$$

Si $x = 0$ alors $h_n(0) = 1$

Ce qui montre que la suite de fonction converge simplement vers la fonction h définie par

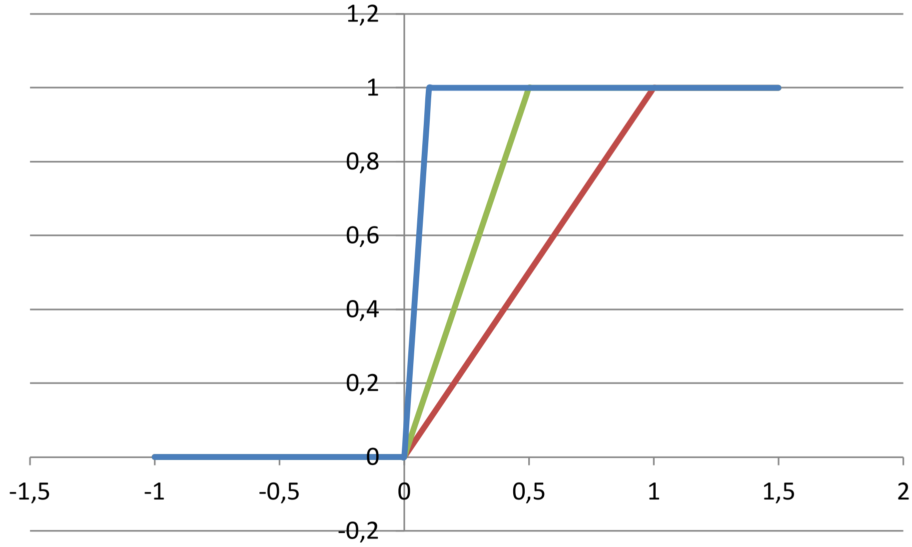
$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Si la convergence de la suite de fonctions continues (h_n) convergeait uniformément vers h alors h serait continue, ce qui n'est pas le cas par conséquent la convergence n'est pas uniforme.

Allez à : Exercice 5

Correction exercice 6.

1.



Courbes pour $n = 1, n = 2$ et $n = 10$

2.

Si $x \leq 0$, $f_n(x) = 0 \to 0$

Si $x > 0$, il existe n_0 tel que $\frac{1}{n_0} < x$ et pour tout $n \geq n_0$ $f_n(x) = 1 \to 1$

Donc la suite de fonction (f_n) converge simplement vers la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

3. Sur $]-\infty, 0[$ la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers $\Theta_{]-\infty,0[}$

Comme

$$f_n(x) - \Theta_{]-\infty,0[}(x) = 0$$

La convergence est uniforme

Sur un segment contenant l'origine la suite de fonctions (f_n) converge vers une fonction qui est nulle si $x \leq 0$ et qui vaut 1 pour $x > 0$, c'est-à-dire une fonction discontinue or les fonctions f_n sont continues, en $x = 0$ les limites à gauche et à droite valent 0 et en $x = 1$ les limites à gauche et à droite valent 1, il n'y a pas convergence uniforme.

Sur $[a, +\infty[$ la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction f qui vaut 1 pour tout $x \geq a$

Comme

$$f_n(x) - f(x) = 1 - 1 = 0$$

Il y a convergence uniforme.

Allez à : Exercice 6

Correction exercice 7.

1. Pour $x \in]0,1]$, il existe n_0 tel que $\frac{1}{n_0} < x$, alors pour tout $n \geq n_0$ $f_n(x) = 0 \to 0$

   Pour $x = 0$ alors $f_n(0) = 0$

   Donc la suite de fonction (f_n) converge simplement vers $\Theta_{[0,1]}$.
2. $$\int_0^1 f_n(t)dt = \int_0^{\frac{1}{n}} n^2 t(1 - nt)dt = n^2 \int_0^{\frac{1}{n}} (t - nt^2)dt = n^2 \left[\frac{t^2}{2} - \frac{nt^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{n}} = n^2 \left(\frac{1}{2n^2} - \frac{n}{3n^3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

   S'il y avait convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) on aurait
   $$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(t)dt = \int_0^1 \Theta_{[0,1]}(t)dt = 0$$
   Ce qui n'est pas le cas, donc il n'y a pas de convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) vers $\Theta_{[0,1]}$.
3. Sur $[a, 1]$ la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers $\Theta_{[a,1]}$, pour tout $n > \frac{1}{a} \Leftrightarrow a > \frac{1}{n}$, et pour tout $x \in [a, 1]$, $f_n(x) = 0$ donc
   $$f_n(x) - \Theta_{[a,1]}(x) = 0$$
   Donc il y a convergence uniforme.

Allez à : Exercice 7

Correction exercice 8.

1. Pour tout $x \in [0,1]$
   $$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \arctan(x)$$
   La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction $\arctan$ sur $[0,1]$.
2. La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction $\arctan$ sur $]0,1]$.
   $$|f_n(x) - \arctan(x)| = \frac{x}{x + n}$$
   On peut étudier cette fonction $(x \to \frac{x}{x+n})$ sur $]0,1]$, on voit qu'elle est croissante et qu'elle atteint son maximum pour $x = 1$ et alors
   $$\sup_{x \in]0,1]} |f_n(x) - \arctan(x)| = \frac{1}{1 + n} \to 0$$
   Pour en déduire qu'il y a convergence uniforme sur $]0,1]$

   Ou alors on peut majorer de façon à éliminer les « x »
   $$|f_n(x) - \arctan(x)| = \frac{x}{x + n} \leq \frac{1}{x + n} \leq \frac{1}{n}$$
   Ainsi
   $$\sup_{x \in]0,1]} |f_n(x) - \arctan(x)| \leq \frac{1}{n} \to 0$$
   Pour en déduire qu'il y a convergence uniforme sur $]0,1]$
3. La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers $[a, 1]$ vers $\arctan$ sur $[a, 1]$.

   On peut faire les deux raisonnements de la question ci-dessus
   $$|f_n(x) - \arctan(x)| = \frac{x}{x + n}$$

On peut étudier cette fonction ($x \to \frac{x}{x+n}$) sur $[a,1]$, on voit qu'elle est croissante et qu'elle atteint son maximum pour $x = 1$ et alors

$$\sup_{x\in[a,1]} |f_n(x) - \arctan(x)| = \frac{1}{1+n} \to 0$$

Pour en déduire qu'il y a convergence uniforme sur $[a,1]$

Ou alors on peut majorer de façon à éliminer les « x », attention ici, il y a une petite nuance

$$|f_n(x) - \arctan(x)| = \frac{x}{x+n} \leq \frac{1}{x+n} \leq \frac{1}{a+n}$$

Mais on aurait aussi pu majorer par $\frac{1}{n}$.

Ainsi

$$\sup_{x\in[a,1]} |f_n(x) - \arctan(x)| \leq \frac{1}{a+n} \to 0$$

Pour en déduire qu'il y a convergence uniforme sur $[a,1]$

4. Pour tout $x \in [1,+\infty[$

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \arctan(x)$$

La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction arctan sur $[1,+\infty[$.

$$|f_n(x) - \arctan(x)| = \frac{x}{x+n}$$

Là, on va avoir un problème pour majorer cette expression indépendamment de x par une expression qui tend vers 0.

Montrons qu'il n'y a pas convergence uniforme, prenons $x_n = n$

$$\sup_{x\in[1,+\infty[} |f_n(x) - \arctan(x)| \geq |f_n(x_n) - \arctan(x_n)| = \frac{n}{n+n} = \frac{1}{2}$$

Ce sup ne peut pas tendre vers 0, il n'y a pas convergence uniforme.

Allez à : Exercice 8

Correction exercice 9.

1. Pour tout $x \in]0,1]$

$$\lim_{n\to+\infty} g_n(x) = 1$$

Il faut bien distinguer le cas $x \neq 0$ (c'est la limite des termes de plus haut degré) et le cas où $x = 0$, auquel cas $g_n(0) = 1$

La suite de fonctions (g_n) converge simplement vers la fonction g constante à 1 sur $[0,1]$

2.

$$|g(x) - g_n(x)| = \left|1 - \frac{nx}{1+nx}\right| = \left|\frac{1+nx-nx}{1+nx}\right| = \frac{1}{1+nx}$$

Etude de la fonction $x \to \frac{1}{1+nx}$ sur $]0,1]$, sa dérivée est $-\frac{n}{(1+nx)^2} < 0$ la fonction est décroissante, donc

$$\sup_{x\in]0,1]} \frac{1}{1+nx} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+nx} = 1$$

Cette expression ne tend pas vers 0 donc il n'y a pas convergence uniforme sur $]0,1]$.

Autre méthode

$$\sup_{x\in]0,1]} |g(x) - g_n(x)| \geq \left|g\left(\frac{1}{n}\right) - g_n\left(\frac{1}{n}\right)\right| = \frac{1}{1+n\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{2}$$

Donc le sup ne peut pas tendre vers 0 et il n'y a pas convergence uniforme sur $]0,1]$

3. La suite de fonctions (g_n) converge simplement vers la fonction constante égal à 1. Reprenons l'étude de la fonction

$$|g(x) - g_n(x)| = \frac{1}{1 + nx}$$

Elle est décroissante donc elle atteint son sup pour $x = a$

$$\sup_{x \in [a,1]} |g(x) - g_n(x)| = \frac{1}{1 + na} \to 0$$

Dans ce cas il y a convergence uniforme de la suite de fonction (g_n) vers la fonction constante égal à 1.

4. La suite de fonctions (g_n) converge simplement vers la fonction constante égal à 1 sur $[1, +\infty[$. Reprenons l'étude de la fonction

$$|g(x) - g_n(x)| = \frac{1}{1 + nx}$$

Elle est décroissante donc elle atteint son sup pour $x = 1$

$$\sup_{x \in [a,1]} |g(x) - g_n(x)| = \frac{1}{1 + n} \to 0$$

Dans ce cas il y a convergence uniforme de la suite de fonction (g_n) vers la fonction constante égal à 1 sur $[1, +\infty[$.

Allez à : Exercice 9

Correction exercice 10.

1. $f_n(0) = 0 \to 0$ et pour tout $x \neq 0$

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$$

Donc la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers $\Theta_{[-1,1]}$

2. la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers $\Theta_{[0,1]}$, l'étude de la fonction n'a rien de réjouissant à priori, prenons la suite $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

$$\sup_{x \in [0,1]} \left|f_n(x) - \Theta_{[0,1]}(x)\right| = \sup_{x \in [0,1]} |\sin(nx^2)|e^{-nx^2} \geq |\sin(nx_n^2)|e^{-nx_n^2} = |\sin(1)|e^{-1}$$

Ce sup ne peut pas tendre vers 0, il n'y a pas convergence uniforme sur $[0,1]$.

3. la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers $\Theta_{[a,1]}$,

$$\left|f_n(x) - \Theta_{[a,1]}(x)\right| = |\sin(nx^2)|e^{-nx^2} \leq e^{-nx^2} \leq e^{-na^2}$$

Donc

$$\sup_{x \in [a,1]} \left|f_n(x) - \Theta_{[a,1]}(x)\right| \leq e^{-na^2} \to 0$$

La suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers $\Theta_{[a,1]}$ sur $[a, 1]$.

Allez à : Exercice 10

Correction exercice 11.

1. Pour tout $x \in]0,1]$

$$\frac{2^n x}{1 + 2^n n x^2} \sim \frac{2^n x}{2^n n x^2} = \frac{1}{nx} \to 0$$
$$f_n(0) = 0$$

La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers $\Theta_{[0,1]}$ sur $[0,1]$

2.

$$I_n = \int_0^1 \frac{2^n x}{1 + 2^n n x^2} dx = \left[\frac{1}{n} \ln(1 + 2^n n x^2)\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{n} \ln(1 + 2^n n)$$
$$= \frac{1}{n} \ln\left(2^n (2^{-n} + n)\right)$$

$$= \frac{1}{n}(\ln(2^n) + \ln(2^{-n} + n))$$
$$= \frac{1}{n}(n\ln(2) + \ln(2^{-n} + n))$$
$$= \ln(2) + \frac{1}{n}\ln(2^{-n} + n)$$
$$= \ln(2) + \frac{1}{n}\ln\left(n\left(\frac{2^{-n}}{n} + 1\right)\right)$$
$$= \ln(2) + \frac{1}{n}\ln(n) + \frac{1}{n}\ln\left(\frac{2^{-n}}{n} + 1\right)$$
$$\frac{1}{n}\ln\left(\frac{2^{-n}}{n} + 1\right) \sim \frac{1}{n} \times \frac{2^{-n}}{n} \to 0$$
$$\frac{\ln(n)}{n} \to 0$$

Donc
$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \ln(2)$$

3. Si la suite de fonctions (f_n) convergeait uniformément vers $\Theta_{[0,1]}$ on aurait
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \Theta_{[0,1]}(x)dx = 0$$
Ce qui n'est pas le cas donc la suite de fonctions ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.

Allez à : Exercice 11

Correction exercice 12.

1. Avant la convergence uniforme il faut montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers $\Theta_{[-1,1]}$. $f_n(0) = 0 \to 0$ et pour tout $x \neq 0$ la limite de $f_n(x)$ est bien nulle, tout va bien.
On ne voit pas de majorations simple qui permettrait de majorer $|f_n(x) - \Theta_{[-1,1]}(x)|$ par une expression indépendante de x qui tendrait vers 0, on va donc étudier la fonction
$$h_n(x) = |f_n(x) - \Theta_{[-1,1]}(x)| = \frac{|x|}{1 + n^2x^2}$$
La fonction étant paire, on va faire l'étude sur $[0,1]$ ainsi on se débarrasse de la valeur absolue.
$$h_n(x) = \frac{x}{1 + n^2x^2}$$
$$h_n'(x) = \frac{1 + n^2x^2 - x \times 2n^2x}{(1 + n^2x^2)^2} = \frac{1 - n^2x^2}{(1 + n^2x^2)^2}$$

x	0 1		$\frac{1}{n}$		
$h_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$h_n(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2n}$	$\searrow$	$\frac{1}{1+n^2}$

On en déduit que le sup de
$$\sup_{x\in[-1,1]} |f_n(x) - \Theta_{[-1,1]}(x)| = \frac{1}{2n} \to 0$$
La suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers $\Theta_{[-1,1]}$ sur $[-1,1]$.

2. En réutilisant le calcul ci-dessus
$$f_n'(x) = \frac{1 - n^2x^2}{(1 + n^2x^2)^2}$$
Pour tout $x \neq 0$

$$\lim_{n\to+\infty} f_n'(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2x^2}{(n^2x^2)^2} = 0$$

Pour $x = 0$, $f_n'(0) = 1$ donc la suite de fonctions (f_n') converge simplement vers la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x = 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \neq 0 \end{cases}$$

Ce qui permet de dire que la convergence de la suite de fonctions continues (f_n') ne converge pas uniformément sinon la limite simple serait continue ce qui n'est pas le cas.

3. Calculons $g_n'(x)$, pour voir.

$$g_n'(x) = \frac{1}{2n^2} \times \frac{2n^2x}{1+n^2x^2} = \frac{x}{1+n^2x^2} = f_n(x)$$

Ah bah çà alors quelle surprise !!!!

La suite de fonctions (g_n') converge uniformément sur $[-1,1]$. Pour $x_0 = 0$ $g_n(0) = 0$ donc la suite de terme général $g_n(x_0)$ converge simplement car la suite de fonction (f_n) converge simplement vers $\Theta_{[-1,1]}$, on en déduit d'après le théorème de dérivation que la suite de terme général (g_n) converge uniformément vers $\Theta_{[-1,1]}$.

Allez à : Exercice 12

Correction exercice 13.

$$f_n(x) = x\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{1+x}\right)^k$$

Si $\frac{1}{1+x} \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 0$ alors

$$f_n(x) = x\frac{1-\left(\frac{1}{1+x}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{1+x}} = \left(1-\left(\frac{1}{1+x}\right)^{n+1}\right)\frac{x(1+x)}{1-(1+x)} = \left(1-\left(\frac{1}{1+x}\right)^{n+1}\right)\frac{x(1+x)}{-x}$$
$$= 1+x-\left(\frac{1}{1+x}\right)^n$$

Comme $1+x>0$

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 1+x$$

Si $x = 0$

$$f_n(0) = 0 \to 0$$

La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ 1+x & \text{si} \quad x \in]0,1] \end{cases}$$

Les fonctions f_n sont continues, si la convergence était uniforme la fonction f serait continue or f n'est pas continue en $x = 0$

Allez à : Exercice 13

Correction exercice 14.

Convergence simple

Pour tout x il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0 > x$ donc pour tout $n > n_0$, $x \in [0,n]$, il faut donc trouver la limite lorsque n tend vers l'infini de $\left(1-\frac{x}{n}\right)^n$

$$\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)} = e^{n\left(-\frac{x}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-x+o(1)} \to e^{-x}$$

La suite de fonction (f_n) converge simplement vers f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = e^{-x}$

Convergence uniforme

$$\forall x \in [0,n[, f(x) - f_n(x) = e^{-x} - e^{n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)} = e^{-x}\left(1 - e^{n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)+x}\right)$$

On pose

$$g_n(x) = n\ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) + x$$

$$g_n'(x) = n \times \frac{-\frac{1}{n}}{1-\frac{x}{n}} + 1 = \frac{-1}{1-\frac{x}{n}} + 1 = \frac{-1+\left(1-\frac{x}{n}\right)}{1-\frac{x}{n}} = \frac{-\frac{x}{n}}{1-\frac{x}{n}} = \frac{-x}{n-x} < 0$$

x	0		n
$g_n'(x)$		$-$	
$g_n(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$

Donc pour tout $x \in [0,n[$, $g_n(x) \le 0$, ce qui montre que

$$f(x) - f_n(x) = e^{-x}\left(1 - e^{g_n(x)}\right) \ge 0$$

On pourrait se passer d'avoir montré cela.

On pose $h_n(x) = f(x) - f_n(x)$ et on va chercher les extrémums de cette fonction continue et dérivable sur le fermé borné $[0,n]$, ces extrémums sont soient sur les bords en $h_n(0) = f(0) - f_n(0) = 1 - 1 = 0$, c'est un minimum, soit en $x = n$, $h_n(n) = f(n) - f_n(n) = e^{-n}$, soit en un point où la dérivée est nulle.

$$h_n'(x) = -e^{-x} - n\left(-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-1} = -e^{-x} + \left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-1}$$

Supposons qu'il existe $x_n \in [0,n]$ (ce qui impose que $0 \le \frac{x_n}{n} \le 1$ tel que $h_n'(x_n) = 0$, rien n'est moins sûr, il se peut que ce x_n n'existe pas (par exemple si $h_n'(x)$ garde un signe constant) soit que ce x_n soit supérieur à n, mais peu importe.

$$h_n'(x_n) = 0 \Leftrightarrow -e_n^{-x_n} + \left(1-\frac{x_n}{n}\right)^{n-1} = 0 \Leftrightarrow e_n^{-x_n} = \left(1-\frac{x_n}{n}\right)^{n-1}$$

Puis calculons $h_n(x_n)$

$$h_n(x_n) = f(x_n) - f_n(x_n) = e_n^{-x_n} - \left(1-\frac{x_n}{n}\right)^n = \left(1-\frac{x_n}{n}\right)^{n-1} - \left(1-\frac{x_n}{n}\right)^n$$
$$= \left(1-\frac{x_n}{n}\right)^{n-1}\left(1-\left(1-\frac{x_n}{n}\right)\right) = \frac{x_n}{n}\left(1-\frac{x_n}{n}\right)^{n-1}$$

Deux cas se présentent

- Soit

$$0 \le 1 - \frac{x_n}{n} \le M < 1 \Leftrightarrow 1 - M < \frac{x_n}{n} < M$$

Dans ce cas

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{x_n}{n}\right)^{n-1} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} h_n(x_n) = 0$$

- Soit

$$1 - \frac{x_n}{n} \to 1 \Leftrightarrow \frac{x_n}{n} \to 0$$

Dans ce cas

$$\lim_{n\to+\infty} h_n(x_n) = \lim_{n\to+\infty}\frac{x_n}{n}\left(1-\frac{x_n}{n}\right)^{n-1} = 0$$

Dans tous les cas, que x_n existe ou pas le maximum éventuel tend vers 0

Et pour tout $x \ge n$, comme $f_n(x) = 0$

$$|f(x) - f_n(x)| = e^{-x} \le e^{-n}$$

Finalement

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^+}|f(x) - f_n(x)| = \max(h_n(x_n), e^{-n}) \to 0$$

Allez à : Exercice 14

Séries de fonctions

Exercice 1.

On considère la série de fonctions

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$$

1. Etudier la convergence simple de cette série sur $[0,1[$.
2. Etudier la convergence uniforme de cette série sur $[0,a]$ où $a \in]0,1[$.
3. Etudier la convergence uniforme de cette série sur $[0,1[$.

Allez à : Correction exercice 1

Exercice 2.

On considère la série de fonctions

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}\sin(nx)}{\ln(n+1)}$$

1. Etudier la convergence simple de cette série sur $]0,+\infty[$.
2. Etudier la convergence uniforme de cette série sur $[a,+\infty[$ où $a > 0$.

Allez à : Correction exercice 2

Exercice 3. Etudier la convergence simple et la convergence normale de la série de fonction $\sum f_n$ dans les cas suivants :

1. $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$ sur $[0,+\infty[$, puis sur $[0,1]$, puis sur $[0,a]$ avec $a \in]0,1[$.
2. $f_n(x) = \frac{x^2}{n^3+x^3}$ sur $[0,+\infty[$, puis sur $[0,a]$ avec $a > 0$.
3. $f_n(x) = \frac{x}{n^3+x^3}$ sur $[0,+\infty[$.

Allez à : Correction exercice 3

Exercice 4. On considère la série de fonctions

$$\sum_{n\geq 1} f_n \quad \text{avec} \quad f_n(x) = \frac{(-1)^n x^2}{x^4+n}$$

1. Etudier la convergence simple de la série sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que cette série est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer qu'il n'existe aucune partie de $\mathbb{R}^*$ sur laquelle cette série est normalement convergente.
4. Montrer que cette série est continue.

Allez à : Correction exercice 4

Exercice 5. Montrer que la série de fonctions de terme général

$$u_n(x) = (-1)^n \frac{e^{-nx^2}}{(n+1)^3}$$

est continue sur $\mathbb{R}$.

Allez à : Correction exercice 5

Exercice 6.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(x^2+n^2)^2}$ converge uniformément sur tout intervalle $[-a,a]$ où $a > 0$.
2. Montrer que cette série est continue sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Allez à : Correction exercice 6

Exercice 7. Montrer que la série de fonctions

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} \sin(n^2 x)$$

Est dérivable.

Allez à : Correction exercice 7

Exercice 8. On considère la série de fonction $\sum_{n\geq 1} f_n$ avec

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^3}$$

1. Montrer que cette série converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que $f(x) = \sum_{n\geq 1} f_n(x)$ est une fonction continue.
3. Montrer que

$$\int_0^{\pi} f(x)dx = 2\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(2n-1)^4}$$

4. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

5.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$$

Allez à : Correction exercice 8

Exercice 9. Soit une suite de fonctions réelles définies sur $[0,1]$ par $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{(n+1)(x+1)}$.

1. Montrer que la série de fonctions associée converge simplement vers une fonction f.
2. Montrer que cette série de converge uniformément sur $[0,1]$.
3. La série converge-t-elle normalement ?

Allez à : Correction exercice 9

Exercice 10.

1. Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{ke^{-kx}}{k^2+1}$$

   Déterminer le domaine de définition D de f et montrer que f est continue sur D.

2. Soit g la fonction définie par :

$$g(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{e^{-kx}}{k^2+1}$$

   Déterminer le domaine de définition D' de g et montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D'.

Allez à : Correction exercice 10

Exercice 11.

Soit $f_n(x) = (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}$ pour x un réel positif.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction f sur $[0,+\infty[$.
2. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[a,+\infty[$, $a>0$. Ce résultat reste-t-il vrai sur $[0,+\infty[$ ou sur $]0,+\infty[$.
3. Montrer que $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0,+\infty[$.

Allez à : Correction exercice 11

Exercice 12. Continuité

Montrer que les fonctions suivantes sont définies et continues :

$$f: x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2+\sin(nx)} \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

$$g: x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

$$h: x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{nx+1} \quad \text{sur } \mathbb{R}^{+*}$$

Allez à : Correction exercice 12

Exercice 13. Dérivation

Soit $f_n(x)=\frac{(-1)^n}{n+x}$ avec $]0,+\infty[$.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction f.
2. Montrer que

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$$

Allez à : Correction exercice 13

Exercice 14. Limite

On fixe $\alpha>0$ et on pose

$$f_n(x)=e^{-n^\alpha x} \quad \text{et} \quad f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

1. Quel est le domaine de définition de f.
2. Continuité de f.
3. Etudier

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

Allez à : Correction exercice 14

Exercice 15.

Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{e^x-1}dx=\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

On pourra faire intervenir la série de fonctions (f_n) avec $f_n(x)=e^{-(n+1)x}\sin(x)$

Allez à : Correction exercice 15

Corrections

Correction exercice 1.

1. Pour tout $x \in [0,1[$, $x^2 \neq 1$

$$\sum_{n=0}^{N} x^{2n} = \sum_{n=0}^{N} (x^2)^n = \frac{1-(x^2)^{N+1}}{1-x^2} \to \frac{1}{1-x^2}$$

Cette série de fonctions converge simplement vers la fonction $S: x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$.

2. $\forall x \in [0,1[, |x^{2n}| \leq a^{2n}$, or la série de terme général a^{2n} converge (voir 1.) donc la série de fonction de terme général x^{2n} est normalement convergente sur $[0, a]$ par conséquent elle converge uniformément sur $[0, a]$.

3. Supposons que cette série de fonctions converge uniformément sur $[0,1[$ alors elle converge uniformément vers sa limite simple $S: x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} - \sum_{n=0}^{N} x^{2n}\right| = \left|\frac{1}{1-x^2} - \sum_{n=0}^{N} x^{2n}\right| = \left|\frac{1}{1-x^2} - \frac{1-(x^2)^{N+1}}{1-x^2}\right| = \frac{x^{2N+2}}{1-x^2}$$

On considère la suite de terme général

$$x_N = 1 - \frac{1}{N}$$

$$\frac{\left(1-\frac{1}{N}\right)^{2N+2}}{1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^2} = \frac{e^{(2N+2)\ln\left(1-\frac{1}{N}\right)}}{1-\left(1-\frac{2}{N}+\frac{1}{N^2}\right)} = \frac{e^{(2N+2)\left(-\frac{1}{N}+o\left(\frac{1}{N}\right)\right)}}{\frac{2}{N}-\frac{1}{N^2}} = N^2\frac{e^{-2+o(1)}}{2N-1} \sim \frac{N}{2e} \to +\infty$$

Donc

$$\sup_{x\in[0,1[}\left|\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} - \sum_{n=0}^{N} x^{2n}\right| = \sup_{x\in[0,1[}\left|\frac{x^{2N+2}}{1-x^2}\right| \geq \frac{\left(1-\frac{1}{N}\right)^{2N+2}}{1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^2} \to +\infty$$

Ce qui montre qu'il n'y a pas convergence uniforme de la série de fonction de terme général x^{2n}.

Allez à : Exercice 1

Correction exercice 2.

1. On va appliquer les règles de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$

$$n^2 \frac{e^{-nx}\sin(nx)}{\ln(n+1)} \to 0$$

Donc la série (numérique) de terme général $\frac{e^{-nx}\sin(nx)}{\ln(n+1)}$ converge, autrement dit la série de fonction de terme général $f_n: x \mapsto \frac{e^{-nx}\sin(nx)}{\ln(n+1)}$ converge simplement.

2.

$$\left|\frac{e^{-nx}\sin(nx)}{\ln(n+1)}\right| < \frac{e^{-na}|\sin(nx)|}{\ln(n+1)} \leq \frac{e^{-na}}{\ln(n+1)}$$

On applique les règles de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$

$$n^2\frac{e^{-na}}{\ln(n+1)} \to 0$$

Donc la série numérique de terme général $\frac{e^{-na}}{\ln(n+1)}$ converge, par conséquent la série fonctions de terme général f_n converge normalement sur $[a, +\infty[$, ce qui entraine que la série fonctions de terme général f_n converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

Allez à : Exercice 2

Correction exercice 3.

1. Sur $[0,1[$, $x^n \to 0$ donc $f_n(x) \to 0$
   Si $x = 1$, $f_n(1) = \frac{1}{2}$
   Si $x \in]1, +\infty[$, $x^n \to +\infty$ donc $f_n(x) \to 1$
   Revenons à la série de fonctions de terme général f_n :
   - Sur $[0, +\infty[$, il y a des valeurs pour lesquelles $f_n(x)$ ne tend pas vers 0 donc la série ne converge pas simplement sur $[0, +\infty[$,, donc elle ne converge pas normalement sur $[0, +\infty[$.
   - Sur $[0,1]$, il y a un problème en $x = 1$, $f_n(1) = \frac{1}{2}$ ne tend pas vers 0 donc la série ne converge pas simplement sur $[0,1]$,, donc elle ne converge pas normalement sur $[0,1]$.
   - Sur $[0, a]$, pour tout $x \in [0, a]$ $f_n(x) \to 0$ mais cela ne suffit pas à assurer la converge simple de la série de fonctions de terme général f_n (avec $f_n(x) > 0$)
   $$f_n(x) = \frac{x^n}{1 + x^n} \sim x^n$$
   x^n est le terme général d'une série géométrique de raison dans $]-1,1[$ donc convergente, ce qui entraine que la série numérique de terme général converge, autrement dit la série de fonctions de terme général f_n converge simplement sur $[0, a]$.
   $$\forall x \in [0, a], \left|\frac{x^n}{1 + x^n}\right| \leq \frac{a^n}{1 + 0} = a^n$$
   a^n est le terme général d'une série géométrique convergente car $a \in]0,1[$ donc la série de fonction de terme général f_n converge normalement.
2. Si $x = 0$, $f_n(0) = 0 \to 0$, la série nulle converge.
   Si $x > 0$, $f_n(x) = \frac{x^2}{n^3+x^3} \sim \frac{x^2}{n^3}$, ce qui est le terme général d'une série numérique de Riemann convergente avec $\alpha = 3 > 1$
   Donc la série de fonction f_n converge simplement sur $[0, +\infty[$.
   $$f_n'(x) = \frac{2x(n^3 + x^3) - x^2 \times 3x^2}{(n^3 + x^3)^2} = \frac{2nx^3 - x^4}{(n^3 + x^3)^2} = \frac{x^3(2n - x)}{(n^3 + x^3)^2}$$
   Manifestement les fonctions f_n admettent un maximum en $x = 2n$ (il faut faire un tableau de variation)
   $$f_n(2n) = \frac{(2n)^2}{n^3 + (2n)^3} = \frac{4n^2}{9n^3} = \frac{4}{9n}$$
   On a donc
   $$\sup_{x \in [0, +\infty[} |f_n(x)| = f_n(2n) = \frac{4}{9n}$$
   Il s'agit d'une série de Riemann divergente ($\alpha = 1 \leq 1$)
   Donc la série ne converge pas normalement sur $[0, +\infty[$.
   Sur $[0, a]$ le maximum est en $f_n(a)$ (au moins pour n assez grand)
   $$f_n(a) = \frac{a^2}{n^3 + a^3} \sim \frac{a^2}{n^3}$$
   ce qui est le terme général d'une série numérique de Riemann convergente avec $\alpha = 3 > 1$, par conséquent elle converge normalement sur $[0, a]$.
3. Si $x = 0$, $f_n(0) = 0 \to 0$, la série nulle converge.
   Si $x > 0$, $f_n(x) = \frac{x}{n^3+x^3} \sim \frac{x}{n^3}$, ce qui est le terme général d'une série numérique de Riemann convergente avec $\alpha = 3 > 1$
   Donc la série de fonction f_n converge simplement sur $[0, +\infty[$.
   $$f_n'(x) = \frac{n^3 + x^3 - x \times 3x^2}{(n^3 + x^3)^2} = \frac{n^3 - 2x^3}{(n^3 + x^3)^2}$$
   Il est à peu près clair que les fonctions f_n atteignent leur maximum là où la dérivée s'annule, c'est-à-dire pour

$$x^3=\frac{n^3}{2}\Leftrightarrow x=2^{-\frac{1}{3}}n$$
$$f_n\left(2^{-\frac{1}{3}}n\right)=\frac{2^{-\frac{1}{3}}n}{n^3+\left(2^{-\frac{1}{3}}n\right)^3}=\frac{2^{-\frac{1}{3}}n}{\frac{3}{2}n^3}=\frac{2^{-\frac{4}{3}}}{3n^2}$$
$$\sup_{x\in[0,+\infty[}|f_n(x)|=\frac{2^{-\frac{4}{3}}}{3n^2}$$
Il s'agit d'une série de Riemann convergente avec $\alpha=2>1$, donc la série de fonction de terme général f_n converge normalement sur $[0,+\infty[$.

Allez à : Exercice 3

Correction exercice 4.

1. Si $x\neq 0$

$$|f_n(x)|\sim\frac{x^2}{n}$$

c'est insuffisant pour la convergence de la série, mais il s'agit d'une série alternée.

On pose $g_n(x)=\frac{x^2}{x^4+n}\to 0$ lorsque $n\to+\infty$, pour un x fixé, cette suite est décroissante, d'après le TSSA, la suite numérique de terme général $\frac{x^2}{x^4+n}$ converge, au moins pour $x\neq 0$, mais pour $x=0$, tout est nul, il y a convergence aussi.

2. Il faut utiliser le théorème du TSSA sur la majoration du reste

$$R_n(x)\le|f_n(x)|=g_{n+1}(x)=\frac{x^2}{x^4+n+1}$$

Il suffit de montrer que cette expression tend vers 0 indépendamment de x.

$$g'_{n+1}(x)=\frac{2x(x^4+n+1)-x^2\times 4x^3}{(x^4+n+1)^2}=\frac{2x(-2x^4+n+1)}{(x^4+n+1)^2}$$

Les fonctions g_n sont positives, donc elles atteignent leur max quand la dérivée s'annule.

$$g'_n(x)=0\Leftrightarrow x^4=\frac{n+1}{2}\Leftrightarrow x=\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$g_{n+1}\left(\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}\right)=\frac{\left(\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2}{\frac{n+1}{2}+n+1}=\frac{\sqrt{\frac{n+1}{2}}}{\frac{3}{2}(n+1)}=\frac{\sqrt{2}}{3}\times\frac{1}{\sqrt{n+1}}\to 0$$

Ce qui entraine que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}R_n(x)=\frac{\sqrt{2}}{3}\times\frac{1}{\sqrt{n+1}}\to 0$$

Cela montre la convergence uniforme de la série de fonctions f_n.

3. Examinons la convergence normale sur un intervalle $[a,+\infty[$ avec $a>0$

Etudions la suite de fonctions

$$|f_n(x)|=g_n(x)=\frac{x^2}{x^4+n}$$

L'étude de cette fonction a déjà été faite au 2. en remplaçant $n+1$ par n

Sur $[a,b]$, le maximun est

soit

$$\frac{\sqrt{2}}{3}\times\frac{1}{\sqrt{n+1}}\sim\frac{\sqrt{2}}{3}\times\frac{1}{\sqrt{n}}$$

Soit

$$\frac{a^2}{a^4+n} \sim \frac{a^2}{n}$$

Soit

$$\frac{b^2}{b^4+n} \sim \frac{b^2}{n}$$

Qui sont les termes généraux de séries divergentes avec $\alpha = \frac{1}{2} \leq 1$ et $\alpha = 1 \leq 1$, ce qui montre que la série de fonctions de terme général f_n n'est pas absolument convergente, sur un intervalle $[a, b]$.

Pour les intervalles du même type dans $\mathbb{R}^-$ cela ne change rien puisque les fonctions f_n sont paires.

4. Les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}$, la convergente est uniforme sur $\mathbb{R}$ donc la somme est continue sur $\mathbb{R}$.

Allez à : Exercice 4

Correction exercice 5.

Il s'agit d'une série alternée mais le « $(n+1)^3$ » au dénominateur va permettre de montrer la convergence normal sur $\mathbb{R}$

$$|u(x)| = \frac{e^{-nx^2}}{(n+1)^3} \leq \frac{1}{(n+1)^3} < \frac{1}{n^3}$$

$\frac{1}{n^3}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente avec $\alpha = 3 > 1$ donc la série de fonctions de terme général u_n converge normalement sur $\mathbb{R}$, donc uniformément sur $\mathbb{R}$, comme les fonctions u_n sont continues la fonction somme est continue.

Allez à : Exercice 5

Correction exercice 6.

1.

$$\forall x \in [-a, a], \left|\frac{x}{(x^2+n^2)^2}\right| \leq \frac{a}{(x^2+n^2)^2} \leq \frac{a}{n^4}$$

$\frac{1}{n^4}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente avec $\alpha = 3 > 1$ donc la série de fonctions de terme général u_n converge normalement sur $[-a, a]$, donc uniformément sur $[-a, a]$.

2. Les fonctions $x \mapsto \frac{x}{(x^2+n^2)^2}$ sont continues, la série converge uniformément donc la somme est continue.

3. On appelle f_n les fonctions

$$f_n(x) = \frac{1}{x^2+n^2}$$

$$f_n'(x) = -2 \times \frac{x}{(x^2+n^2)^2}$$

Les fonctions f_n sont dérivables

La série de fonctions f_n' converge uniformément sur tout intervalle $[-a, a]$ (voir 1.)

La série numérique $f_n(0) = \frac{1}{n^2}$ converge (c'est une série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$)

Donc la série est dérivable en tout point de $[-a, a]$ (donc sur $\mathbb{R}$) et

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{x^2+n^2}\right)' = -2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x}{(x^2+n^2)^2}$$

Allez à : Exercice 6

Correction exercice 7.

On pose $f_n(x) = e^{-n} \sin(n^2 x)$, ces fonctions sont dérivable et $f_n'(x) = n^2 e^{-n} \cos(n^2 x)$

La série numérique de terme général $f_n(0) = 0$ converge et enfin

$$|f_n'(x)| \leq n^2 e^{-n}$$

$$n^2(n^2 e^{-n}) = n^4 e^{-n} \to 0$$

La suite numérique de terme général n^2e^{-n} converge grâce aux règles de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$

Cela montre que la série de fonctions f_n' converge normalement sur $\mathbb{R}$ donc uniformément sur $\mathbb{R}$.

Les trois conditions qui entrainent que la série de fonction de terme général f_n est dérivable sont réunies.

Allez à : Exercice 7

Correction exercice 8.

1.
$$\forall x \in \mathbb{R}, \left|\frac{\sin(nx)}{n^3}\right| \leq \frac{1}{n^3}$$
Comme $\frac{1}{n^3}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente avec $\alpha = 3 > 1$, on vient de montrer que la série de fonctions de terme général f_n converge normalement sur $\mathbb{R}$ donc uniformément sur $\mathbb{R}$ et par conséquent simplement sur $\mathbb{R}$

2. Les fonctions f_n sont continues, elles convergent uniformément sur $\mathbb{R}$ donc f est une fonctions continue.

3. La convergence étant uniforme sur $[0,\pi] \subset \mathbb{R}$ et les fonctions f_n étant continues donc intégrables on a
$$\int_0^\pi f(x)dx = \int_0^\pi \sum_{n\geq 1} f_n(x)\,dx = \sum_{n\geq 1}\int_0^\pi f_n(x)dx = \sum_{n\geq 1}\int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{n^3}dx$$
On calcule
$$\int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{n^3}dx = \frac{1}{n^3}\int_0^\pi \sin(nx)\,dx = \frac{1}{n^3}\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^\pi = \frac{1}{n^4}(-\cos(n\pi)+1) = \frac{1}{n^4}(1-(-1)^n)$$
Selon que n est pair ou impair $1-(-1)^n$ est nul ou vaut 2, on va couper la somme en deux
$$\sum_{n\geq 1}\int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{n^3}dx = \sum_{n\geq 1}\frac{1-(-1)^n}{n^4} = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1-(-1)^{2p}}{(2p)^4} + \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1-(-1)^{2p+1}}{(2p+1)^4} = 0 + \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{2}{(2p+1)^4}$$
Puis on pose $n = p+1$, $p = 0 \Rightarrow n = 1$
$$\sum_{n\geq 1}\int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{n^3}dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{(2n-1)^4}$$
C'est bien l'égalité demandé.

4. Les fonctions f_n sont dérivables, $f_n'(x) = \frac{\cos(nx)}{n^2}$, la série de fonctions de terme général f_n converge simplement il reste à montrer que la série de fonction de terme général f_n' converge uniformément sur $\mathbb{R}$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \left|\frac{\cos(nx)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$$
La série de fonction de terme général f_n' converge normalement sur $\mathbb{R}$ donc converge uniformément sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer le théorème de dérivation des séries
$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(nx)}{n^2}$$
Remarque : il n'était pas nécessaire de montrer la convergence uniforme de la série de fonction de terme général f_n' sur $\mathbb{R}$, sur un intervalle $[a,b]$ cela suffit.

5. D'après la question précédente
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n^2} = f'(x)$$
Donc
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n^2}\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)dx = f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n^3}$$

Pour les valeurs paires $\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = 0$ donc on va distinguer les valeurs paires de valeurs impaires

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n^3} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(2p\frac{\pi}{2}\right)}{(2p)^3} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\sin\left((2p+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(2p+1)^3} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\sin(p\pi)}{(2p)^3} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\sin\left(p\pi + \frac{\pi}{2}\right)}{(2p+1)^3}$$
$$= 0 + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{(2p+1)^3} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3}$$

Puis on pose $n = p$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}\right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$$

Allez à : Exercice 8

Correction exercice 9.

1. On pose $g_n(x) = |f_n(x)| = \frac{1}{(n+1)(x+1)}$

   La série de fonctions de terme général f_n est une série alternée, on va appliquer le TSSA
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+1)(x+1)} = 0$$
   La suite $\left(\frac{1}{(n+1)(x+1)}\right)_n$ est décroissante, d'après le TSSA la série de fonctions f_n' converge simplement.

2. D'après le TSSA le reste de la série vérifie
$$\forall x \in [0,1], \qquad |R_n(x)| \leq g_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+2)(x+1)} \leq \frac{1}{(n+2)(1+1)} = \frac{1}{2(n+2)}$$
   Ce reste est majoré indépendamment de x et tend vers 0, cela montre que la série de fonctions f_n converge uniformément.

3.
$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = \sup_{x\in[0,1]} \frac{1}{(n+1)(x+1)} = \frac{1}{2(n+1)} \sim \frac{1}{2n}$$
   La valeur maximum est atteint pour $x = 1$

   $\frac{1}{n}$ est le terme général d'une série Riemann divergente avec $\alpha = 1 \leq 1$ donc la série ne converge pas normalement sur $[0,1]$.

Allez à : Exercice 9

Correction exercice 10.

1. Il s'agit de trouver le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ où la série converge simplement,

   Si $x < 0$ alors $\frac{ke^{-kx}}{k^2+1} \to +\infty$ lorsque $k \to +\infty$ il n'y a pas convergence.

   Si $x = 0$ alors $\left|(-1)^k \frac{k}{k^2+1}\right| \sim \frac{1}{k}$ qui est le terme général d'une série de Riemann divergente avec $\alpha = 1 \leq 1$, il n'y a pas de convergence absolue, mais la série est alternée
$$\left|(-1)^k \frac{k}{k^2+1}\right| = \frac{k}{k^2+1} \to 0$$
   Il faut voir si la suite $\left(\frac{k}{k^2+1}\right)$ est décroissante, on pose $a(x) = \frac{x}{x^2+1}$, $a'(x) = \frac{x^2+1-x\times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} < 0$ pour $x > 1$, cela montre que la suite $\left(\frac{k}{k^2+1}\right)$ est décroissante, d'après le TSSA la série numérique de terme général $(-1)^k \frac{k}{k^2+1}$ est convergente

   Si $x \geq 0$ alors
$$\left|(-1)^k \frac{ke^{-kx}}{k^2+1}\right| \leq \frac{ke^{-kx}}{k^2+1}$$

Avec les règles de Riemann et $\alpha = 2 > 1$

$$k^2 \times \frac{ke^{-kx}}{k^2+1} = \frac{k^3 e^{-kx}}{k^2+1} \to 0$$

Lorsque $k \to +\infty$, donc la série numérique de terme général $(-1)^k \frac{ke^{-kx}}{k^2+1}$ est absolument convergente pour $x > 0$, autrement dit la série de fonctions de terme général $(-1)^k \frac{ke^{-kx}}{k^2+1}$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

Conclusion : la série de fonctions de terme général $(-1)^k \frac{ke^{-kx}}{k^2+1}$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ et $D = [0, +\infty[$.

On tenter une méthode qui va échouée

Montrons que la convergence est normal sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$

$$\left|(-1)^k \frac{ke^{-kx}}{k^2+1}\right| \leq \frac{ke^{-ka}}{k^2+1}$$

Avec les règles de Riemann et $\alpha = 2 > 1$

$$k^2 \times \frac{ke^{-ka}}{k^2+1} = \frac{k^3 e^{-ka}}{k^2+1} \to 0$$

Lorsque $k \to +\infty$, donc la série numérique de terme général $\frac{ke^{-ka}}{k^2+1}$ est convergente ce qui montre que la série de fonctions de terme général $x \mapsto (-1)^k \frac{ke^{-kx}}{k^2+1}$ converge normalement sur $[a, +\infty[$, et donc uniformément sur $[a, +\infty[$, les fonctions $x \mapsto (-1)^k \frac{ke^{-kx}}{k^2+1}$ étant continues, la somme f est continue sur $[a, +\infty[$, par conséquent la somme est continue sur $]0, +\infty[$. L'ennui c'est que l'on n'a pas la continuité en 0.

Autre méthode en utilisant le TSSA, la série est alternée, il faut montrer que la suite $\left(\frac{ke^{-kx}}{k^2+1}\right)$ est décroissante et qu'elle tend vers 0

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{ke^{-kx}}{k^2+1} = 0$$

Ensuite on pose

$$b(x) = \frac{x}{x^2+1} e^{-kx}$$

$$b'(x) = \left(\frac{x}{x^2+1}\right)' e^{-kx} - k\frac{x}{x^2+1} e^{-kx} = \left(\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} - k\frac{x}{x^2+1}\right) e^{-kx}$$
$$= \frac{1 - x^2 - kx(x^2+1)}{(x^2+1)^2} e^{-kx} = \frac{-kx^3 - x^2 - kx + 1}{(x^2+1)^2} e^{-kx} < 0$$

Au moins dès que x est un peu grand, donc la série numérique de terme général $(-1)^k \frac{ke^{-kx}}{k^2+1}$ converge et le reste vérifie

$$|R_n(x)| \leq \frac{(k+1)e^{-(k+1)x}}{(k+1)^2+1} \leq \frac{(k+1)}{(k+1)^2+1} \to 0$$

On a majoré le reste par une expression indépendante de x et qui tend vers 0 donc la convergence de la série de fonctions de terme général $x \mapsto (-1)^k \frac{ke^{-kx}}{k^2+1}$ est uniforme sur $[0, +\infty[$.

Les fonctions $x \mapsto (-1)^k \frac{ke^{-kx}}{k^2+1}$ sont continues sur $[0, +\infty[$, la convergence est uniforme sur $[0, +\infty[$ donc la somme f est continue.

2. Il s'agit de trouver le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ où la série converge simplement. On pose

$$g_k : x \mapsto (-1)^k \frac{e^{-kx}}{k^2+1}$$

Si $x < 0$ alors $\frac{e^{-kx}}{k^2+1} \to +\infty$ lorsque $k \to +\infty$ il n'y a pas convergence.
Si $x \geq 0$ alors

$$\left|(-1)^k \frac{e^{-kx}}{k^2+1}\right| \leq \frac{1}{k^2+1} < \frac{1}{k^2}$$

$\frac{1}{k^2}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente, cela montre, la convergence normale, donc uniforme et par conséquent la converge simple de la série de fonctions de terme général g_k.

$$D' = \mathbb{R}^+$$

$$g_k'(x) = -(-1)^k \frac{ke^{-kx}}{k^2+1}$$

On a vu dans la première question 1. que la série de fonctions de terme général $x \to (-1)^k \frac{ke^{-kx}}{k^2+1}$ convergeait uniformément sur $[0,+\infty[$ donc la série de fonctions de terme général g_k' converge uniformément sur $[0,+\infty[$.
Résumons
Les fonctions g_k sont continues
La série de fonctions de terme général g_k converge simplement sur $[0,+\infty[$
La série de fonctions de terme général g_k' converge uniformément sur $[0,+\infty[$
Donc la somme g est dérivable, il reste à montrer que la dérivée est continue

$$g'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k'(x)$$

Les fonctions g_k' sont continues, la série de fonction de terme général g_k' converge uniformément sur $[0,+\infty[$ donc la somme g' est continue, par conséquent g est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$.

Allez à : Exercice 10

Correction exercice 11.

1. Si $x = 0$, $f_n(0) = \frac{(-1)^n}{n+1}$

   Il s'agit d'une série alternée, la suite $\left(\frac{1}{n+1}\right)$ tend vers 0 en décroissant donc la série numérique de terme général $\frac{(-1)^n}{n+1}$ converge.

   Si $x > 0$,

$$n^2|f_n(x)| = \frac{n^2 e^{-nx}}{n+1} \to 0$$

   La série numérique de terme général $f_n(x)$ converge absolument donc elle converge, autrement dit la série de fonctions de terme général f_n converge simplement.

   Conclusion : la série de fonctions de terme général f_n converge simplement sur $[0,+\infty[$.

2. $x \geq a$

$$|f_n(x)| = \frac{e^{-nx}}{n+1} \leq \frac{e^{-na}}{n+1} = \alpha_n$$

$$n^2 \frac{e^{-na}}{n+1} \to 0$$

   Avec les règles de Riemann avec $\alpha > 1$, cela montre que la série numérique de terme général α_n converge donc la série de fonction de terme général f_n converge normalement sur $[a,+\infty[$.

$$\sup_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x)| = \sup_{x\in[0,+\infty[} \frac{e^{-nx}}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

   Or $\frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n}$ est le terme général d'une série de Riemann divergente avec $\alpha = 1 \leq 1$, donc la série de fonctions de terme général f_n ne converge pas normalement sur $[0,+\infty[$.

$$\sup_{x\in]0,+\infty[}|f_n(x)| = \sup_{x\in]0,+\infty[}\frac{e^{-nx}}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

Cela ne change rien si on ouvre l'intervalle.

3. On va utiliser la majoration du reste du TSSA

$$|R_n(x)| \le |f_{n+1}(x)| = \frac{e^{-nx}}{n+1} < \frac{1}{n+1}$$

Donc

$$\sup_{x\in[0,+\infty[}\left|\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) - \sum_{n=0}^{N} f_n(x)\right| = \sup_{x\in[0,+\infty[}|R_N(x)| < \frac{1}{N+1} \to 0$$

La série de fonctions de terme général f_n converge uniformément sur $[0,+\infty[$.

Allez à : Exercice 11

Correction exercice 12.

- On pose

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2+\sin(nx)}$$

Pour $n \ge 2$

$$f_n(x) \le \frac{1}{n^2-1} \sim \frac{1}{n^2}$$

Or $\frac{1}{n^2}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente avec $\alpha = 2 > 1$.Cela montre que la série de fonctions de terme général f_n converge normalement sur $\mathbb{R}$, donc elle converge uniformément sur $\mathbb{R}$. D'autre part les fonctions f_n sont continues donc f est continue.

- On pose

$$g_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

Pour $n \ge 2$

$$|g_n(x)| \le \frac{1}{n^2}$$

Or $\frac{1}{n^2}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente avec $\alpha = 2 > 1$.Cela montre que la série de fonctions de terme général g_n converge normalement sur $\mathbb{R}$, donc elle converge uniformément sur $\mathbb{R}$. D'autre part les fonctions g_n sont continues donc g est continue.

- On pose

$$h_n(x) = \frac{(-1)^n}{nx+1}$$

Il s'agit d'une série alternée la suite $\left(\frac{1}{nx+1}\right)_n$ est décroissante et tend vers 0 car $x > 0$ donc la série de fonctions de terme général h_n converge simplement vers 0. Grâce aux TSSA nous allons montrer la convergence uniforme de cette série sur $[a,b]$ avec $a > 0$. Le reste vérifie

$$|R_n(x)| \le \frac{1}{(n+1)x+1} \le \frac{1}{(n+1)a+1}$$

Donc

$$\sup_{x\in[a,b]}\left|h(x) - \sum_{n=0}^{N} h_n(x)\right| \le \frac{1}{(n+1)a+1} \to 0$$

Lorsque $n \to +\infty$

Cela montre que la série de fonction de terme général h_n converge uniformément sur $[a,b]$.

En un point $x > 0$, on choisit a et b tels que $a < x < b$, la série de fonction de terme général h_n converge uniformément sur $[a,b]$ et les fonctions h_n sont continues donc h est continue en x et ceci pour tout $x > 0$

Allez à : Exercice 12

Correction exercice 13.

1. Il s'agit d'une série alternée, pour tout $x > 0$, $|f_n(x)| = \frac{1}{n+x}$ tend vers 0 en décroissant, d'après le TSSA, la série numérique de terme général $f_n(x)$ converge, autrement dit la série de fonction de terme général f_n converge simplement.
2. $f_n'(x) = -\frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$ donc
$$|f_n'(x)| \leq \frac{1}{(n+x)^2} < \frac{1}{n^2}$$
$\frac{1}{n^2}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente avec $\alpha = 2 > 1$ donc la série de fonctions de terme général f_n' converge normalement sur $]0,+\infty[$, donc uniformément sur $]0,+\infty[$, comme les fonctions f_n sont dérivable, le théorème de dérivation des série entraine que la somme est dérivable et que
$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$$

Allez à : Exercice 13

Correction exercice 14.

1. Pour $x \leq 0$, $e^{-n^\alpha x}$ ne tend pas vers 0 donc la série diverge.
Pour $x > 0$
D'après les règles de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$
$$\lim_{n\to+\infty} n^2 e^{-n^\alpha x} = 0$$
Entraine que la série numérique de terme général $e^{-n^\alpha x}$ converge, autrement dit la série de fonctions de terme général f_n converge simplement, donc l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Nous allons montrer la convergence uniforme de la série de fonctions de terme général f_n sur $[a,+\infty[$ avec $a > 0$.
$$|f_n(x)| \leq e^{-n^\alpha a}$$
D'après les règles de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$
$$\lim_{n\to+\infty} n^2 e^{-n^\alpha a} = 0$$
Entraine que la série numérique de terme général $e^{-n^\alpha a}$ converge, ce qui montre que la série de fonctions de terme général f_n converge normalement sur $[a,+\infty[$, donc uniformément sur $[a,+\infty[$.
Pour un $x > 0$ on choisit a tel que $0 < a < x$, il y a donc convergence uniforme sur $[a,+\infty[$ et les fonctions f_n sont continues en x donc la somme f est continue en x donc sur $]0,+\infty[$.
3. La série de fonctions de terme général f_n converge uniformément sur $[a,+\infty[$ et
$$\forall n \geq 1, \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f_0(x) = 1$$
Entraine que
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$$

Allez à : Exercice 14

Correction exercice 15.

Convergence de l'intégrale
$$\frac{\sin(x)}{e^x - 1} \sim_0 \frac{x}{x} = 1$$
Donc l'intégrale est convergente en 0

$$x^2\left|\frac{\sin(x)}{e^x-1}\right|\to 0 \quad \text{si} \quad x\to+\infty$$

Donc, d'après les règles de Riemann avec $\alpha>2$ l'intégrale est absolument convergente donc convergente.

Pour utiliser le théorème d'interversion des symboles $\int$ et $\sum$ on va se placer sur un intervalle $[\epsilon,X]$ et on pose

$$I(\epsilon,X)=\int_\epsilon^X\frac{\sin(x)}{e^x-1}dx$$

Autre part

$$\sum_{n=0}^N f_n(x)=\sum_{n=0}^N e^{-(n+1)x}\sin(x)=e^{-x}\sin(x)\sum_{n=0}^N e^{-nx}=e^{-x}\sin(x)\frac{1-e^{(N+1)x}}{1-e^{-x}}$$
$$=\sin(x)\frac{1-e^{(N+1)x}}{e^x(1-e^{-x})}=\sin(x)\frac{1-e^{(N+1)x}}{e^x-1}$$

Et

$$\forall x\in[\epsilon,X],\qquad \sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x)=\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^N f_n(x)=\frac{\sin(x)}{e^x-1}$$

Les fonctions f_n sont continues sur $[\epsilon,X]$, il suffit que la série de terme général f_n converge uniformément sur $[\epsilon,X]$.

$$|f_n(x)|=e^{-(n+1)x}|\sin(x)|<e^{-(n+1)\epsilon}$$

$e^{-(n+1)\epsilon}=\left(\frac{1}{e^\epsilon}\right)^{n+1}$ est le terme général d'une série géométrique convergente car $\frac{1}{e^\epsilon}\in\,]-1,1[$.

Cela montre que la série de terme général f_n converge normalement sur $[\epsilon,X]$ donc uniformément.

$$I(\epsilon,X)=\int_\epsilon^X\frac{\sin(x)}{e^x-1}dx=\int_\epsilon^X\left(\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x)\right)dx=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_\epsilon^X f_n(x)dx\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_\epsilon^X e^{-(n+1)x}\sin(x)\,dx\right)$$

Il existe une primitive de f_n de la forme

$$F_n(x)=(A_n\cos(x)+B_n\sin(x))e^{-(n+1)x}$$
$$F_n'(x)=\big((-(n+1)A_n+B_n)\cos(x)+(-A_n-(n+1)B_n)\sin(x)\big)e^{-(n+1)x}$$
$$F_n'(x)=e^{-(n+1)x}\sin(x)\Leftrightarrow\begin{cases}-(n+1)A_n+B_n=0\\-A_n-(n+1)B_n=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A_n=\dfrac{-1}{1+(n+1)^2}\\B_n=\dfrac{-n-1}{1+(n+1)^2}\end{cases}$$

$$\int_\epsilon^X e^{-(n+1)x}\sin(x)\,dx=\left[\left(\frac{-1}{1+(n+1)^2}\cos(x)+\frac{-n-1}{1+(n+1)^2}\sin(x)\right)e^{-(n+1)x}\right]_\epsilon^X$$
$$=\left(\frac{-1}{1+(n+1)^2}\cos(X)+\frac{-n-1}{1+(n+1)^2}\sin(X)\right)e^{-(n+1)X}$$
$$-\left(\left(\frac{-1}{1+(n+1)^2}\cos(\epsilon)+\frac{-n-1}{1+(n+1)^2}\sin(\epsilon)\right)e^{-(n+1)\epsilon}\right)$$

$$I(\epsilon,X)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\left(\frac{-1}{1+(n+1)^2}\cos(X)+\frac{-n-1}{1+(n+1)^2}\sin(X)\right)e^{-(n+1)X}\right.$$
$$\left.-\left(\left(\frac{-1}{1+(n+1)^2}\cos(\epsilon)+\frac{-n-1}{1+(n+1)^2}\sin(\epsilon)\right)e^{-(n+1)\epsilon}\right)\right)$$
$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{-1}{1+(n+1)^2}\cos(X)+\frac{-n-1}{1+(n+1)^2}\sin(X)\right)e^{-(n+1)X}$$
$$+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{1+(n+1)^2}\cos(\epsilon)+\frac{n+1}{1+(n+1)^2}\sin(\epsilon)\right)e^{-(n+1)\epsilon}$$

Maintenant il faut faire tendre X vers l'infini dans

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{-1}{1+(n+1)^2}\cos(X)+\frac{-n-1}{1+(n+1)^2}\sin(X)\right)e^{-(n+1)X}$$

Et ϵ vers 0 dans

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{1+(n+1)^2}\cos(\epsilon)+\frac{n+1}{1+(n+1)^2}\sin(\epsilon)\right)e^{-(n+1)\epsilon}$$

En faisant attention car il s'agit de somme infini

Pour la première limite, on se place sur $[a,+\infty[$, avec $a>0$.

$$\left|\left(\frac{-1}{1+(n+1)^2}\cos(X)+\frac{-n-1}{1+(n+1)^2}\sin(X)\right)e^{-(n+1)X}\right|\leq\left(\frac{1}{1+(n+1)^2}+\frac{n+1}{1+(n+1)^2}\right)e^{-(n+1)a}$$

Avec les règles de Riemann

$$n^2\left(\frac{1}{1+(n+1)^2}+\frac{n+1}{1+(n+1)^2}\right)e^{-(n+1)a}\to 0$$

Donc la série de terme général $\left(\frac{-1}{1+(n+1)^2}\cos(X)+\frac{-n-1}{1+(n+1)^2}\sin(X)\right)e^{-(n+1)X}$ converge normalement sur $[a,+\infty[$, donc uniformément sur $[a,+\infty[$, les fonctions $\left(\frac{-1}{1+(n+1)^2}\cos(X)+\frac{-n-1}{1+(n+1)^2}\sin(X)\right)e^{-(n+1)X}$ tendent les 0 lorsque X tend vers l'infini, d'après le théorème de la double limite et

$$\lim_{X\to+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{-1}{1+(n+1)^2}\cos(X)+\frac{-n-1}{1+(n+1)^2}\sin(X)\right)e^{-(n+1)X}$$
$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\lim_{X\to+\infty}\left(\frac{-1}{1+(n+1)^2}\cos(X)+\frac{-n-1}{1+(n+1)^2}\sin(X)\right)e^{-(n+1)X}\right)=0$$

Pour la seconde cela se complique un peu, et on prend $\epsilon\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ par exemple

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{1+(n+1)^2}\cos(\epsilon)+\frac{n+1}{1+(n+1)^2}\sin(\epsilon)\right)e^{-(n+1)\epsilon}$$
$$=\cos(\epsilon)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{1+(n+1)^2}e^{-(n+1)\epsilon}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{1+(n+1)^2}\sin(\epsilon)\,e^{-(n+1)\epsilon}$$

Pour la première série

$$\frac{1}{1+(n+1)^2}e^{-(n+1)\epsilon}<\frac{1}{1+(n+1)^2}\sim\frac{1}{n^2}$$

Cette série est normalement convergente sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, donc uniformément convergente, les fonctions « à l'intérieur » sont continue donc la somme est continue et

$$\lim_{\epsilon\to0}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{1+(n+1)^2}e^{-(n+1)\epsilon}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\lim_{\epsilon\to0}\frac{1}{1+(n+1)^2}e^{-(n+1)\epsilon}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{1+(n+1)^2}=\sum_{n'=1}^{+\infty}\frac{1}{1+n'^2}$$

Par conséquent

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left(\cos(\epsilon)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{1+(n+1)^2}e^{-(n+1)\epsilon}\right)=\sum_{n'=1}^{+\infty}\frac{1}{1+n'^2}$$

Pour la somme suivante, on va chercher un maximum des fonctions $g_n(x)=\sin(x)\,e^{-(n+1)x}$

$$g_n'(x)=\cos(x)\,e^{-(n+1)x}-(n+1)\sin(x)\,e^{-(n+1)x}=\cos(x)\,e^{-(n+1)x}(1-(n+1)\tan(x))$$

Cette dérivée est positive avant $x=\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)$ et négative après pour des petites valeurs de x, elles atteingnent leur maximum en $x=\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)$

Donc

$$0<\frac{n+1}{1+(n+1)^2}\sin(\epsilon)\,e^{-(n+1)\epsilon}\le\frac{n+1}{1+(n+1)^2}g_n\left(\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)$$
$$=\frac{n+1}{1+(n+1)^2}\sin\left(\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)e^{-(n+1)\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)}$$

On pose $n'=n+1$ pour simplifier

$$0<\frac{n+1}{1+(n+1)^2}\sin(\epsilon)\,e^{-(n+1)\epsilon}\le\frac{n'}{1+n'^2}\sin\left(\arctan\left(\frac{1}{n'}\right)\right)e^{-n'\arctan\left(\frac{1}{n'}\right)}$$
$$=\frac{n'}{1+n'^2}\sin\left(\frac{1}{n'}+o\left(\frac{1}{n'}\right)\right)e^{-n'\left(\frac{1}{n'}+o\left(\frac{1}{n'}\right)\right)}=\frac{n'}{1+n'^2}\left(\frac{1}{n'}+o\left(\frac{1}{n'}\right)\right)e^{-1+o(1)}\sim\frac{1}{n'^2}$$

La série de fonctions terme général $\frac{n+1}{1+(n+1)^2}\sin(\epsilon)\,e^{-(n+1)\epsilon}$ converge normalement sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ donc uniformément sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, ces fonctions sont continues donc la somme est continue et

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{1+(n+1)^2}\sin(\epsilon)\,e^{-(n+1)\epsilon}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\lim_{\epsilon\to 0}\frac{n+1}{1+(n+1)^2}\sin(\epsilon)\,e^{-(n+1)\epsilon}=\sum_{n=0}^{+\infty}0=0$$

Finalement

$$\lim_{\substack{X\to+\infty\\ \epsilon\to 0}}I(\epsilon,X)=\sum_{n'=1}^{+\infty}\frac{1}{1+n'^2}$$

Or l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x)}{e^x-1}dx$ est convergente donc

$$\lim_{\substack{X\to+\infty\\ \epsilon\to 0}}I(\epsilon,X)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x)}{e^x-1}dx$$

Donc

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x)}{e^x-1}dx=\sum_{n'=1}^{+\infty}\frac{1}{1+n'^2}$$

Allez à : Exercice 15

Séries entières

Exercice 1. Soit

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

Une série entière. On suppose qu'elle diverge pour $z = 3 + 4i$ et qu'elle converge pour $z = 5i$. Quel est son rayon de convergence ?

Allez à : Correction exercice 1

Exercice 2. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+3)!\, z^n\ ; \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^n z^n\ ; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n\ ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{\ln(n+1)} z^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n\ ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2} z^n\ ; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n+1} z^{3n+1}\ ; \quad \sum_{n=0}^{\infty} (1+i)^n z^n$$

Allez à : Correction exercice 2

Exercice 3. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (n-1) 2^n z^n\ ; \quad f_2(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+1}{3^n} z^n\ ; \quad f_3(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

$$f_4(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n^2} z^n\ ; \quad f_5(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n-1}{n^2+1} z^n\ ; \quad f_6(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n^2} z^{2n}$$

$$f_7(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} z^{2n+1}\ ; \quad f_8(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3} z^n\ ; \quad f_9(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^\alpha z^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Allez à : Correction exercice 3

Exercice 4.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R

Déterminer le rayon de convergence de la série entière suivante :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{2n}$$

Allez à : Correction exercice 4

Exercice 5.

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$$

1. Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.
2. Etudier la convergence en $-R$ et en R.

Allez à : Correction exercice 5

Exercice 6.

Développer les fonctions suivantes en séries entières de x :

1. $f : x \to \frac{1}{(1-x)(2+x)}$

2. $f : x \to \frac{1}{1+x+x^2}$
3. $f : x \to \ln(x^2 + x + 1)$

Allez à : Correction exercice 6

Exercice 7.

Soit f définie sur $]-1,1[$ par

$$f(x) = \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

1. Justifier que f est développable en série entière sur $]-1,1[$.
2. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $(1-x^2)y' - xy = 1$.
3. Déterminer le développement en série entière de f sur $]-1,1[$.

Allez à : Correction exercice 7

Exercice 8.

1. Déterminer f solution de l'équation différentielle $x^2y'' + 4xy' + (2-x^2)y - 1 = 0$
2. Reconnaitre f.

Allez à : Correction exercice 8

Exercice 9.

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière dont le rayon de convergence est strictement positif. On note f sa somme sur $]-R,R[$.

1. Trouver des conditions nécessaires et suffisantes portant sur les coefficients a_n pour que f satisfasse l'équation différentielle
$$xf''(x) + 2f'(x) + xf(x) = 0$$
2. On suppose ces conditions vérifiées. Déterminer les a_n lorsque $a_0 = 1$.
3. Quelle est la valeur de R ? Quelle est la fonction f obtenue ?

Allez à : Correction exercice 9

Exercice 10.

On considère la série complexe de somme

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$$

Où les a_n sont définis par :

$$a_0 = 1, a_1 = 3, \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2 \quad a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$$

1. Montrer que le rayon de convergence de cette série est supérieur ou égal à $\frac{1}{4}$.
2. Montrer que $\forall z \in \mathbb{C},\ |z| < R$
$$f(z) = \frac{1}{2z^2 - 3z + 1}$$
3. En déduire la valeur de, R, ainsi que l'expression de a_n en fonction de n.

Allez à : Correction exercice 10

Exercice 11.

On définit la suite (a_n) par $a_0 = 1$ et par la relation de récurrence

$$2a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k a_{n-k}$$

Et on pose $b_n = \frac{a_n}{n!}$

1. Montrer que $|a_n| \leq \frac{n!}{2^n}$, en déduire que le rayon de convergence de la série entière de terme général $b_n x^n$ n'est pas nul.
2. On appelle $S(x)$ la somme de cette série, calculer $S'(x)$ en fonction de $S(x)$.
3. En déduire $S(x)$

Allez à : Correction exercice 11

Exercice 12. Intégration

Montrer que :

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^2}$$

Allez à : Correction exercice 12

Corrections

Correction exercice 1.

La série entière diverge pour $z = 3 + 4i$ donc son rayon de converge $R \leq |3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

La série entière converge pour $z = 5i$ donc son rayon de converge $R \geq |5i| = 5$

Donc $R = 5$

Allez à : Exercice 1

Correction exercice 2.

- $a_n = (-1)^n (n+3)!$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+4)!}{(n+3)!} = n + 4 \to +\infty$$

Donc $R = 0$

Allez à : Exercice 2

- $a_n = n^n$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = n \to +\infty$$

Donc $R = 0$

Allez à : Exercice 2

- $a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\frac{\big(2(n+1)\big)!}{\big((n+1)!\big)^2}}{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} = \frac{(2n+2)!\,n!\,n!}{(n+1)!\,(n+1)!\,(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!\,n!\,n!}{(n+1)n!\,(n+1)n!\,(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} \to 4$$

Donc $R = \frac{1}{4}$

Allez à : Exercice 2

- $a_n = \frac{\ln(n)}{\ln(n+1)}$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\frac{\ln(n+1)}{\ln(n+2)}}{\frac{\ln(n)}{\ln(n+1)}} = \frac{(\ln(n+1))^2}{\ln(n)\ln(n+2)}$$

Il est presque évident que la limite est 1, on va quand même faire un effort

$$\ln(n+1)=\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)=\ln(n)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln(n)\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right)\sim\ln(n)$$

De même

$$\ln(n+2)\sim\ln(n)$$

Donc

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\sim\frac{(\ln(n))^2}{\ln(n)\ln(n)}=1\to 1$$

Donc $R=\frac{1}{1}=1$

Allez à : Exercice 2

- $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

$$\sqrt[n]{a_n}=\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=e^{n\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}=e^{1+o(1)}\to e$$

Donc $R=\frac{1}{e}$

Allez à : Exercice 2

- $a_n=\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2}$, notons que $1+\frac{(-1)^n}{n}\geq 0$

$$\sqrt[n]{a_n}=\left(\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}=\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^n=e^{n\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)}=e^{n\left(\frac{(-1)^n}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=e^{(-1)^n+o(1)}}$$

Cette expression n'a pas de limite, on voit bien qu'il va falloir séparer les n pairs et les n impairs

$$\sum_{n=1}^{+\infty}a_nx^n=\sum_{p=1}^{+\infty}a_{2p}x^{2p}+\sum_{p=0}^{+\infty}a_{2p+1}x^{2p+1}=\sum_{p=1}^{+\infty}a_{2p}(x^2)^p+x\sum_{p=0}^{+\infty}a_{2p+1}(x^2)^p$$

On pose

$$\alpha_p=a_{2p}=\left(1+\frac{(-1)^{2p}}{2p}\right)^{(2p)^2}=\left(1+\frac{1}{2p}\right)^{4p^2}$$

$$\beta_p=a_{2p+1}=\left(1+\frac{(-1)^{2p+1}}{2p+1}\right)^{(2p+1)^2}=\left(1-\frac{1}{2p+1}\right)^{4p^2+4p+1}=\left(1-\frac{1}{2p+1}\right)\left(1-\frac{1}{2p+1}\right)^{4p^2+4p}$$
$$=\frac{2p}{2p+1}\left(1-\frac{1}{2p+1}\right)^{4p^2+4p}$$

Cherchons les rayons de convergence de ces deux séries

$$\sqrt[n]{\alpha_p}=\left(1+\frac{1}{2p}\right)^{4p}=e^{4p\ln\left(1+\frac{1}{2p}\right)}=e^{4p\left(\frac{1}{2p}+o\left(\frac{1}{p}\right)\right)}=e^{2+o(1)}\to e^2$$

Le rayon de convergence de la série entière de terme général α_pX^p est $\frac{1}{e^2}$, donc le rayon de convergence de la série entière de terme général α_px^{2p} est $R_1=\frac{1}{e}$.

$$\sqrt[p]{\beta_p}=\left(\frac{2p}{2p+1}\left(1-\frac{1}{2p+1}\right)^{4p^2+4p}\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\frac{2p}{2p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(1-\frac{1}{2p+1}\right)^{4p+4}$$
$$=\left(\frac{2p}{2p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(1-\frac{1}{2p+1}\right)^4\left(1-\frac{1}{2p+1}\right)^{4p}$$

$$\lim_{p\to+\infty}\left(\frac{2p}{2p+1}\right)^{\frac{1}{p}}=1$$

$$\lim_{p\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2p+1}\right)^4=1$$

$$\left(1-\frac{1}{2p+1}\right)^{4p}=e^{4p\ln\left(1-\frac{1}{2p+1}\right)}=e^{4p\left(-\frac{1}{2p+1}+o\left(\frac{1}{p}\right)\right)}=e^{\frac{-4p}{2p+1}+o\left(\frac{1}{p}\right)}\to\frac{1}{e^2}$$

Donc $\sqrt[p]{\beta_p}\to\frac{1}{e^2}$

Le rayon de convergence de la série entière de terme général $\beta_p X^p$ est e^2, donc le rayon de convergence de la série entière de terme général $\alpha_p x^{2p}$ est $R_2=e$.

La série entière de terme général $a_n x^n$ est la somme de ces deux séries donc son rayon de convergence est

$$R=\min(R_1,R_2)=\frac{1}{e}$$

Allez à : Exercice 2

- $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n+1}z^{3n+1}=z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n+1}(z^3)^n$$

On va chercher le rayon de convergence de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n+1}X^n$$

$a_n=\frac{(-2)^n}{n+1}$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\frac{\left|\frac{(-2)^{n+1}}{n+2}\right|}{\left|\frac{(-2)^n}{n+1}\right|}=\frac{n+1}{n+2}\to 1$$

La série entière de terme général $a_n X^n$ a pour rayon de convergence $R=\frac{1}{1}=1$

La série

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n+1}(z^3)^n$$

Converge pour $|z^3|<1\Leftrightarrow|z|<1$ et diverge pour $|z^3|>1\Leftrightarrow|z|>1$

Son rayon de convergence est 1.

Allez à : Exercice 2

- $a_n=(1+i)^n$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\frac{|(1+i)^{n+1}|}{|(1+i)^n|}=|1+i|=\sqrt{2}\to\sqrt{2}$$

Le rayon de convergence de la série entière de terme général $(1+i)^n z^n$ est $R=\frac{1}{\sqrt{2}}$

Allez à : Exercice 2

Correction exercice 3.

1. Soit $a_n=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(n-1)2^n$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\frac{\left|(-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}n2^{n+1}\right|}{\left|(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(n-1)2^n\right|}=\frac{n2^{n+1}}{(n-1)2^n}=2\frac{n}{n-1}\to 2$$

Donc le rayon de convergence est $R=\frac{1}{2}$

Allez à : Exercice 3

2. Soit $a_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(n-1)2^n$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\left|(-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} n2^{n+1}\right|}{\left|(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(n-1)2^n\right|} = \frac{n2^{n+1}}{(n-1)2^n} = 2\frac{n}{n-1} \to 2$$

Donc le rayon de convergence est $R = \frac{1}{2}$.

Allez à : Exercice 3

3. Soit $a_n = \frac{1}{n!}$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{n+1} \to 0$$

Donc le rayon de convergence est $R = +\infty$

$$f_3(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n = e^z$$

Allez à : Exercice 3

4. Soit $a_n = e^{-n^2}$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{e^{-(n+1)^2}}{e^{-n^2}} = e^{n^2-(n+1)^2} = e^{-2n-1} \to 0$$

Donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.

Ou

$$\sqrt[n]{|a_n|} = e^{-n} \to 0$$

Allez à : Exercice 3

5. Soit $a_n = \frac{n-1}{n^2+1}$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\frac{n}{(n+1)^2+1}}{\frac{n-1}{n^2+1}} = \frac{n(n^2+1)}{((n+1)^2+1)(n-1)} \to 1$$

Donc le rayon de convergence est $R = 1$.

Allez à : Exercice 3

6. Soit $a_n = \frac{\ln(n)}{n^2}$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2}}{\frac{\ln(n)}{n^2}} = \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \times \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} \times \frac{n^2}{(n+1)^2}$$

$$= \frac{\ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \times \frac{n^2}{(n+1)^2} \to 1$$

Donc le rayon de convergence est $R = \frac{1}{1} = 1$.

Allez à : Exercice 3

7.

$$f_7(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} z^{2n+1} = z\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} z^{2n} = z\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} X^n$$

Avec $x = z^2$

Soit $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$

$$\frac{|a_{n+1}|}{[a_n|}=\frac{\left|\frac{(-1)^{n+2}}{n+2}\right|}{\left|\frac{(-1)^n}{n+1}\right|}=\frac{n+1}{n+2}\to 1$$

Donc le rayon de convergence de la série entière de terme général $\frac{(-1)^n}{n+1}X^n$ est $R=\frac{1}{1}$

Et le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}z^{2n}$ est $R'^2=R=1$, donc $R'=1$.

Allez à : Exercice 3

8. Soit $a_n=\frac{(3n)!}{(n!)^3}$

$$\frac{|a_{n+1}|}{[a_n|}=\frac{\left|\frac{(3(n+1))!}{((n+1)!)^3}\right|}{\left|\frac{(3n)!}{(n!)^3}\right|}=\frac{(3(n+1))!}{(3n)!}\times\frac{(n!)^3}{((n+1)!)^3}=\frac{(3n+3)!}{(3n)!}\times\frac{(n!)^3}{((n+1)n!)^3}=$$
$$=\frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)(3n)!}{(3n)!}\times\frac{(n!)^3}{(n+1)^3(n!)^3}=\frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^3}$$
$$\to 3^3=27$$

Donc

$$R=\frac{1}{27}$$

Allez à : Exercice 3

9. Soit $a_n=n^\alpha$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha\to 1$$

Donc le rayon de convergence est $R=\frac{1}{1}$.

Allez à : Exercice 3

Correction exercice 4.

$$\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^{2n}=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nX^n$$

Cette série entière converge pour $|X|<R$ et diverge pour $|X|>R$, autrement dit cette série converge pour $|z^2|<R$ et diverge pour $|z^2|>R$ donc le rayon de convergence est $\sqrt{R}$.

Allez à : Exercice 4

Correction exercice 5.

1. Si $|x|<1$

$$\left|\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n\right|\leq x^n$$

Et la série de terme général x^n converge.

Si $|x|>1$

$$\left|\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n\right|\sim\frac{1}{\sqrt{n}}|x|^n=\frac{1}{\sqrt{n}}e^{n\ln|x|}\to+\infty$$

Le terme général de la série ne tend pas vers 0 donc la série diverge

Donc le rayon de convergence de la série entière de terme général $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n$ a pour rayon de convergence $R=1$.

2. Si $x=1$

La série numérique de terme général $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ qui est le terme général d'une suite de Riemann diverge avec $\alpha = \frac{1}{2} \leq 1$, la série diverge.

Si $x = -1$

$(-1)^n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ est le terme général d'une série alternée, manifestement la suite $\left(\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$ est décroissante car si on pose

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \sin\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

Alors

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\cos\left(x^{-\frac{1}{2}}\right) < 0$$

De plus elle tend vers 0, d'après le TSSA, la série de terme général $(-1)^n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ est convergente.

Allez à : Exercice 5

Correction exercice 6.

Dans cet exercice on ne s'intéresse pas aux rayons de convergence (pourtant il y aurait à dire) donc les égalités seront à l'intérieur du rayon de convergence que l'on espérera non nul.

1.

$$\frac{1}{(1-x)(2+x)} = \frac{\frac{1}{3}}{1-x} + \frac{\frac{1}{3}}{2+x} = \frac{1}{3}\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{x}{2}} = \frac{1}{3}\times\frac{1}{1-x} + \frac{1}{6}\times\frac{1}{1+\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} x^n + \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\times\frac{1}{2^n}\right)x^n$$

2.

$$\frac{1}{1+x+x^2} = \frac{1}{(x-j)(x-j^2)} = \frac{a}{x-j} + \frac{\bar{a}}{x-j^2}$$

$$a = \left[\frac{1}{x-j^2}\right]_{x=j} = \frac{1}{j-j^2} = \frac{1}{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{1}{i\sqrt{3}} = -\frac{i\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{1}{1+x+x^2} = \frac{-\frac{i\sqrt{3}}{3}}{x-j} + \frac{\frac{i\sqrt{3}}{3}}{x-j^2} = -\frac{i\sqrt{3}}{3}\frac{1}{j(xj^2-1)} + \frac{i\sqrt{3}}{3}\frac{1}{j^2(xj-1)} = -\frac{ij^2\sqrt{3}}{3}\frac{1}{xj^2-1} + \frac{ij\sqrt{3}}{3}\frac{1}{xj-1}$$

$$= \frac{ij^2\sqrt{3}}{3}\frac{1}{1-xj^2} - \frac{ij\sqrt{3}}{3}\frac{1}{1-xj} = \frac{ij^2\sqrt{3}}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}(xj^2)^n - \frac{ij\sqrt{3}}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}(xj)^n$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}(ij^2(j^2)^n - ijj^n)x^n = \frac{\sqrt{3}}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}(i(j^2)^{n+1} - ij^{n+1})x^n$$

On peut arranger $i(j^2)^{n+1} - ij^{n+1}$

$$i(j^2)^{n+1} - ij^{n+1} = i((j^2)^n - j^n) = i\left(e^{-i\frac{2(n+1)\pi}{3}} - e^{i\frac{2(n+1)\pi}{3}}\right) = i\left(-2i\pi\sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{3}\right)\right)$$

$$= 2\pi\sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{3}\right)$$

$$\frac{1}{1+x+x^2} = 2\pi\frac{\sqrt{3}}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{3}\right)x^n$$

3. $f(x) = \ln(x^2+x+1)$ entraine que

$$f'(x)=\frac{2x+1}{x^2+x+1}=2\pi\frac{\sqrt{3}}{3}(2x+1)\sum_{n=0}^{+\infty}\sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{3}\right)x^n$$

D'après la question précédente, alors

$$f'(x)=2\pi\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}2\sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{3}\right)x^{n+1}+\sum_{n=0}^{+\infty}\sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{3}\right)x^n\right)$$

Dans la première somme on pose $n'=n+1$, $n=0\Rightarrow n'=1$,

$$f'(x)=2\pi\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\sum_{n'=1}^{+\infty}2\sin\left(\frac{2n'\pi}{3}\right)x^{n'}+\sum_{n=0}^{+\infty}\sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{3}\right)x^n\right)$$

Puis on change n' en n

$$f'(x)=2\pi\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}2\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)x^n+\sum_{n=0}^{+\infty}\sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{3}\right)x^n\right)$$
$$=2\pi\frac{\sqrt{3}}{3}\left(2\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)x+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(2\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{3}\right)\right)x^n\right)$$

On en déduit que

$$f(x)=f(0)+2\pi\frac{\sqrt{3}}{3}2\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)x+2\pi\frac{\sqrt{3}}{3}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(2\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{3}\right)\right)\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

On a $f(0)=0$ et on fait un changement de varible $n'=n+1$, puis on rechange n' par n

$$f(x)=-2\pi\frac{\sqrt{3}}{3}x+2\pi\frac{\sqrt{3}}{3}\sum_{n=2}^{+\infty}\left(2\sin\left(\frac{2(n-1)\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right)\frac{x^n}{n}$$

Allez à : Exercice 6

Correction exercice 7.

1.

$$X\to(1-X)^{-\frac{1}{2}}$$

Est une fonction qui admet un développement en série entière sur $|X|<1$, donc

$$x\to\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

Est une fonction qui admet un développement en série entière sur $|x^2|<1$, donc sur $|x|<1$

$$x\to\arcsin(x)$$

A pour dérivée $x\to\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ qui admet un développement en séries entières sur $|x|<1$ donc $\arcsin$ admet un développement en séries entières sur $|x|<1$, pour finir le produit de deux séries admettant des développements en séries entières sur $|x|<1$ admet un développement en séries entières sur $|x|<1$.

Allez à : Exercice 7

2.

$$f(x)=\arcsin(x)\times(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$
$$f'(x)=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\times(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}+\arcsin(x)\times\left(-\frac{1}{2}\right)(-2x)(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$$
$$=\frac{1}{1-x^2}+\arcsin(x)\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{1-x^2}+f(x)\frac{x}{1-x^2}$$

Par conséquent

$$(1-x^2)f'(x)=1+xf(x)$$

C'est bien ce que demandait de montrer l'énoncé.

Allez à : Exercice 7

3. On pose

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\Rightarrow f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$$

$$(1-x^2)f'(x)-xf(x)=1\Leftrightarrow f'(x)-x^2f'(x)+xf(x)=1$$

$$\Leftrightarrow\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n-x^2\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}-x\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=1$$

$$\Leftrightarrow\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}=1\quad(*)$$

Le but va être un « x » dans chaque somme

Dans la seconde somme on pose $n'=n+1$, $n=0\Rightarrow n'=1$

$$\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n+1}=\sum_{n'=1}^{\infty}(n'-1)a_{n'-1}x^{n'}$$

Puis on remplace n' par n

$$\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)a_{n-1}x^n$$

Dans la troisième somme on pose $n'=n+1$, $n=0\Rightarrow n'=1$

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}=\sum_{n'=1}^{\infty}a_{n'-1}x^{n'}$$

Puis on remplace n' par n

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n$$

On remplace tout cela dans $(*)$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)a_{n-1}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n=1$$

On réunit ces trois sommes à partir de $n=1$, pour cela on va séparer le terme $n=0$ de la première somme des autres termes

$$a_1+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)a_{n-1}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n=1$$

Donc

$$a_1+\sum_{n=1}^{\infty}\big((n+1)a_{n+1}-(n-1)a_{n-1}-a_{n-1}\big)x^n=1\Leftrightarrow a_1+\sum_{n=1}^{\infty}\big((n+1)a_{n+1}-na_{n-1}\big)x^n=1$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\forall n\geq 1,(n+1)a_{n+1}-na_{n-1}=0\\ a_1=1\end{cases}$$

$$n\geq 1,\qquad (n+1)a_{n+1}-na_{n-1}=0\Leftrightarrow n\geq 2,\qquad na_n-(n-1)a_{n-2}=0\quad(**)$$

On va distinguer n pair et n impair

- $n=2p$

$$(**)\Leftrightarrow 2pa_{2p}=(2p-1)a_{2(p-1)}$$

Comme $f(0)=0$ on a $a_0=0$, puis par une récurrence très simple, a_{2p} est nul.

- $n=2p+1$

$$(**)\Leftrightarrow(2p+1)a_{2p+1}=2pa_{2p-1}\Leftrightarrow a_{2p+1}=\frac{2p}{2p+1}a_{2p-1}$$

Comme on connait $a_1=1$, on peut en déduire $a_3=\frac{2\times 1}{2\times 1+1}a_{2\times 1-1}=\frac{2}{3}a_1$,etc…

Il reste à trouver la « formule » donnant a_{2p+1} pour tout $p \geq 0$

$$a_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} a_{2p-1}$$

Si on remplace p par $p-1$

$$a_{2p-1} = \frac{2(p-1)}{2p-1} a_{2p-3}$$

Puis par $p-2$

$$a_{2p-3} = \frac{2(p-2)}{2p-3} a_{2p-5}$$

Jusqu'à $p = 2$

$$a_5 = \frac{2 \times 2}{2 \times 2 + 1} a_3$$

Puis $p = 1$

$$a_3 = \frac{2 \times 1}{2 \times 1 + 1} a_1$$

On n'a plus qu'à multiplier toutes ces égalités, les termes en « a_{2p-k} » s'éliminent

$$a_{2p+1} = \frac{2^p p!}{(2p+1)(2p-1)\dots 5 \times 3} a_1$$

On peut améliorer ce résultat en multipliant en haut et en bas par

$$2p(2p-2)\dots 4 \times 2 = 2^p p!$$

De façon à « boucher » les trous en bas pour reconstituer $(2p+1)!$

$$a_{2p+1} = \frac{2^p p!\, 2^p p!}{(2p+1)2p(2p-1)(2p-2)\dots 5 \times 4 \times 3 \times 2} a_1 = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}$$

Il reste à écrire le développement en série entière

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p} x^{2p} + \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p+1} x^{2p+1} = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p+1} x^{2p+1} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!} x^{2p+1}$$

Il faut quand même vérifier que cette égalité est valable sur tout $]-1,1[$, pour cela il faut trouver le rayon de convergence de la série, reprendre $\frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}$, c'est assez maladroit, il vaut mieux reprendre l'égalité

$$a_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} a_{2p-1} \Leftrightarrow \frac{a_{2p+1}}{a_{2p-1}} = \frac{2p}{2p-1} \to 1$$

Donc $R = \frac{1}{1} = 1$.

Ce n'est pas exactement $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ mais pour une série lacunaire (qui a des trous, c'est-à-dire les a_{2p} ici) c'est bien ainsi que cela marche.

Allez à : Exercice 7

Correction exercice 8.

1. On pose

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$\Rightarrow f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

$$\Rightarrow f''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) n a_{n+1} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$$

Pour obtenir un x^n dans $x^2 f''(x)$ on va utiliser la première expression de la dérivée seconde.

Pour obtenir un x^n dans $xf'(x)$ on va utiliser la première expression de la dérivée.
Pour $f(x)$ on n'a pas le choix

$$x^2 f''(x) + 4xf'(x) - (2 - x^2)f(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 f''(x) + 4xf'(x) + 2f(x) - x^2 f(x) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 4x \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + 4\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} - 1 = 0$$

Pour les trois premières sommes tout va bien on a des « x^n », pour la dernière, c'est plus compliqué, on pose $n' = n + 2$, $n = 0 \Rightarrow n' = 2$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = \sum_{n'=2}^{\infty} a_{n'-2} x^{n'}$$

Puis on remplace n' par n

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n$$

On remplace

$$x^2 f''(x) + 4xf'(x) - (2 - x^2)f(x) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + 4\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n - 1 = 0$$

Pour réunir ces quatre sommes en une seule, il va falloir partir de $n = 2$, donc isoler les termes en $n = 0$ et $n = 1$ dans les trois premières sommes

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n = 0 \times (-1) \times a_0 x^0 + 1 \times 0 \times a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n = 0 \times a_0 x^0 + 1 \times a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n x^n = a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$$

On remplace

$$x^2 f''(x) + 4xf'(x) - (2 - x^2)f(x) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + 4\left(a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n x^n\right) + 2\left(a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n\right) - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=2}^{\infty} (n(n-1)a_n + 4na_n + 2a_n - a_{n-2})x^n + 4a_1 x + 2a_0 + 2a_1 x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \left((n^2 - n + 4n + 2)a_n - a_{n-2}\right)x^n + 6a_1 x + 2a_0 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \left((n^2 + 3n + 2)a_n - a_{n-2}\right)x^n + 6a_1 x + 2a_0 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \left((n+1)(n+2)a_n - a_{n-2}\right)x^n + 6a_1 x + 2a_0 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n \geq 2, (n+1)(n+2)a_n - a_{n-2} = 0 \quad (*) \\ 6a_1 = 0 \\ 2a_0 - 1 = 0 \end{cases}$$

On va distinguer deux cas, n pair et n impair

- $n = 2p + 1$

$$(*) \Leftrightarrow (2p+2)(2p+3)a_{2p+1} = a_{2p-1}$$

Comme $a_1 = 0$ tous les a_{2p+1} sont nuls.

- $n = 2p$

$$(*) \Leftrightarrow (2p+1)(2p+2)a_{2p} = a_{2(p-1)}$$

$$\Leftrightarrow a_{2p} = \frac{1}{(2p+2)(2p+1)} a_{2(p-1)}$$

Puis on remplace p par $p-1$

$$a_{2(p-1)} = \frac{1}{2p(2p-1)} a_{2(p-2)}$$

Puis par $p-2$

$$a_{2(p-2)} = \frac{1}{(2p-2)(2p-3)} a_{2(p-3)}$$

Jusqu'à $p = 2$

$$a_4 = \frac{1}{6 \times 5} a_2$$

Et enfin $p = 1$

$$a_2 = \frac{1}{4 \times 3} a_0 = \frac{1}{4 \times 3 \times 2}$$

On multiplie toutes ces lignes, les « $a_{2(p-k)}$ » se simplifient

$$a_{2p} = \frac{1}{(2p+2)!}$$

Il reste à écrire le développement en série entière

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p} x^{2p} + \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p+1} x^{2p+1} = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p} x^{2p} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+2)!} x^{2p}$$

Il faut quand même regarder où cette égalité est valable

$$a_{2p} = \frac{1}{(2p+2)(2p+1)} a_{2(p-1)} \Leftrightarrow \frac{a_{2p}}{a_{2(p-1)}} = \frac{1}{(2p+2)(2p+1)} \to 0$$

Donc $R = +\infty$.

Ce n'est pas exactement $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ mais pour une série lacunaire (qui a des trous, c'est-à-dire les a_{2p} ici) c'est bien ainsi que cela marche.

Allez à : Exercice 8

2. Si $x \neq 0$

$$f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+2)!} x^{2p} = \frac{1}{x^2} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+2)!} x^{2p+2} = \frac{1}{x^2} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{2p!} x^{2p}$$

En posant $p' = p + 1$, puis en renommant p' par p.

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{2p!} x^{2p} = \frac{1}{x^2} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2p!} x^{2p} - 1 \right) = \frac{\operatorname{ch}(x) - 1}{x^2}$$

Si $x = 0$

$$f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+2)!} 0^{2p} = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$$

Allez à : Exercice 8

Correction exercice 9.

1.

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

$$\Rightarrow f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$$

$$\Rightarrow f''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)na_{n+1}x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$$

Pour obtenir un « x^n » dans $f'(x)$ on va prendre la seconde expression

Pour obtenir un « x^n » dans $xf''(x)$ on va utiliser la seconde expression

$$xf''(x)=x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)na_{n+1}x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)na_{n+1}x^n$$

$$xf(x)=x\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}$$

On pose $n'=n+1$, $n=0\Rightarrow n'=1$

$$xf(x)=\sum_{n'=1}^{\infty}a_{n'-1}x^{n'}$$

Puis on change n' en n

$$xf(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n$$

On remplace cela dans

$$xf''(x)+2f'(x)+xf(x)=0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)na_{n+1}x^n+2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n=0$$

On va pouvoir regrouper ces trois sommes à partir de $n=1$, donc dans les deux premières on va isoler les termes pour $n=0$.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)na_{n+1}x^n=1\times 0\times a_1x^0+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)na_{n+1}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)na_{n+1}x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n=1\times a_1x^0+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n=a_1+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$$

On remplace

$$xf''(x)+2f'(x)+xf(x)=0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)na_{n+1}x^n+2a_1+2\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n=0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\big((n+1)na_{n+1}+2(n+1)a_{n+1}+a_{n-1}\big)x^n+2a_1=0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\big((n+1)(n+2)a_{n+1}+a_{n-1}\big)x^n+2a_1=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\forall n\geq 1, (n+1)(n+2)a_{n+1}+a_{n-1}=0\\ 2a_1=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall n \geq 1, a_{n+1} = -\dfrac{a_{n-1}}{(n+1)(n+2)} \\ 2a_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall n \geq 2, a_n = -\dfrac{a_{n-2}}{n(n+1)} \\ 2a_1 = 0 \end{cases}$$

On va distinguer le cas n pair et le cas n impair.

- Si $n = 2p + 1$, comme $a_1 = 0$ tous les termes $a_{2p+1} = 0$
- Si $n = 2p$

$$\forall n \geq 2, a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n+1)} \Leftrightarrow \forall p \geq 1, a_{2p} = -\frac{a_{2(p-1)}}{2p(2p+1)}$$

$$a_{2p} = -\frac{a_{2(p-1)}}{2p(2p+1)}$$

On change p en $p-1$

$$a_{2(p-1)} = -\frac{a_{2(p-2)}}{(2p-2)(2p-1)}$$

En $p-2$

$$a_{2(p-2)} = -\frac{a_{2(p-3)}}{(2p-4)(2p-3)}$$

$p = 2$

$$a_4 = -\frac{a_2}{4 \times 5}$$

$p = 1$

$$a_2 = -\frac{a_0}{2 \times 3} = -\frac{1}{2 \times 3}$$

On multiplie ces p lignes, les $a_{2(p-k)}$ s'éliminent

$$a_{2p} = \frac{(-1)^p}{(2p+1)!}$$

Il reste à écrire le développement en série entière

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p} x^{2p} + \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p+1} x^{2p+1} = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p} x^{2p} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^{2p}$$

Allez à : Exercice 9

2.

$$|a_{2p}| = \frac{|a_{2(p-1)}|}{2p(2p+1)} \Leftrightarrow \frac{|a_{2p}|}{|a_{2(p-1)}|} = \frac{1}{2p(2p+1)} \to 0$$

Donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.

Si $x \neq 0$

$$f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^{2p} = \frac{1}{x} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^{2p+1} = \frac{\sin(x)}{x}$$

Si $x = 0$,

$$f(0) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} 0^{2p} = \frac{(-1)^0}{(2 \times 0 + 1)!} = 1$$

Allez à : Exercice 9

Correction exercice 10.

1. Montrons par récurrence que $|a_n| < 4^n$

   L'inégalité est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$, supposons la vraie pour a_{n-2} et a_{n-1} alors

$$|a_n| = |3a_{n-1} - 2a_{n-2}| < 3|a_{n-1}| + 2|a_{n-2}| < 3 \times 4^{n-1} + 2 \times 4^{n-2} = 4^{n-2}(3 \times 4 + 2)$$
$$= 4^{n-2} \times 14 < 4^{n-2} \times 16 = 4^n$$

On pose $b_n = 4^n$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{4^{n+1}}{4^n} = 4 \to 4$$

Donc le rayon de converge de la série entière de terme général $b_n z^n$ est $\frac{1}{4}$, comme $|a_n| < b_n$ le rayon de converge de la série entière de terme général $a_n z^n$ est supérieur ou égal à $\frac{1}{4}$.

2.

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n = a_0 + a_1 z + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n z^n = 1 + 3z + \sum_{n=2}^{+\infty} (3a_{n-1} - 2a_{n-2}) z^n =$$
$$= 1 + 3z + 3\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-1} z^n - 2\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} z^n$$

Dans la première somme on pose $n' = n - 1$, $n = 2 \Rightarrow n' = 1$, dans la deuxième on pose $n'' = n - 2$, $n = 2 \Rightarrow n'' = 0$

$$f(z) = 1 + 3z + 3\sum_{n'=1}^{+\infty} a_{n'} z^{n'+1} - 2\sum_{n''=0}^{+\infty} a_{n''} z^{n''+2}$$

Puis on change n' et n'' en n

$$f(z) = 1 + 3z + 3\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^{n+1} - 2\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^{n+2} = 1 + 3z + 3z\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n - 2z^2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$
$$= 1 + 3z + 3z\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n - a_0\right) - 2z^2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n =$$
$$= 1 + 3z + 3z(f(z) - 1) - 2z^2 f(z) = 1 + 3zf(z) - 2z^2 f(z)$$

D'où l'on déduit que

$$f(z) - 3zf(z) + 2z^2 f(z) = 1$$

Ce qui équivaut à

$$f(z)(1 - 3z + 2z^2) = 1$$

Ou encore

$$f(z) = \frac{1}{2z^2 - 3z + 1}$$

3.

$$f(z) = \frac{1}{2z^2 - 3z + 1} = \frac{1}{2(z-1)\left(z - \frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{z-1} + \frac{-1}{z - \frac{1}{2}} = \frac{-1}{1-z} + \frac{2}{1-2z}$$
$$= -\sum_{n=0}^{+\infty} z^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n z^n$$

On pose $\alpha_n = 1$

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = 1 \to 1$$

Donc le rayon de convergence de la série de terme général z^n est $R_1 = \frac{1}{1} = 1$

On pose $\beta_n = 2^n$

$$\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2 \to 2$$

Donc le rayon de convergence de la série de terme général z^n est $R_2 = \frac{1}{2}$

$$f(z)=-\sum_{n=0}^{+\infty}z^n+2\sum_{n=0}^{+\infty}2^nz^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1+2^{n+1})z^n$$

On en déduit que le rayon de convergence de la série entière de terme général $(-1+2^{n+1})z^n$ est

$$R=\min(R_1,R_2)=\frac{1}{2}$$

Allez à : Exercice 10

Correction exercice 11.

1. $|a_n|\le\frac{n!}{2^n}$ est vraie pour $n=0$, supposons que l'inégalité est vraie pour tout $k'\in\{0,1,\dots,n\}$, alors

$$2a_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_ka_{n-k}\le\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{k!}{2^k}\frac{(n-k)!}{2^{n-k}}=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\frac{k!}{2^k}\frac{(n-k)!}{2^{n-k}}=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{2^n}=\frac{n!}{2^n}\sum_{k=0}^{n}1$$
$$=\frac{n!}{2^n}(n+1)=\frac{(n+1)!}{2^n}$$

Puis on divise par 2

$$a_{n+1}\le\frac{(n+1)!}{2^{n+1}}$$

Ce qui achève la récurrence.

$$|b_n|=\frac{|a_n|}{n!}\le\frac{\frac{(n+1)!}{2^{n+1}}}{n!}=\frac{n+1}{2^{n+1}}$$

On pose

$$\alpha_n=\frac{n+1}{2^{n+1}}$$

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}=\frac{\frac{n+2}{2^{n+2}}}{\frac{n+1}{2^{n+1}}}=\frac{n+2}{n+1}\times\frac{1}{2}\to\frac{1}{2}$$

Donc le rayon de convergence de la série entière de terme général α_nx^n est 2, comme $|b_n|\le\alpha_n$ le rayon de convergence de la série entière de terme général b_nx^n est supérieur ou égal à 2.

2.

$$S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}b_nx^n=b_0+\sum_{n=1}^{+\infty}b_nx^n$$

On pose $n'=n-1$ dans la somme, $n=1\Rightarrow n'=0$

$$S(x)=b_0+\sum_{n'=0}^{+\infty}b_{n'+1}x^{n'+1}$$

Puis on change n' en n

$$S(x)=b_0+\sum_{n=0}^{+\infty}b_{n+1}x^{n+1}$$

Cette petite manipulation permet de faire apparaitre $b_{n+1}=\frac{a_{n+1}}{n!}$ Ce qui est suggéré par l'énoncé puisque l'on a a_{n+1} en fonction d'autres « $a_{k'}$ »

$$S(x)=\frac{a_0}{0!}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_{n+1}}{(n+1)!}x^{n+1}=1+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_ka_{n-k}\,x^{n+1}\right)$$

Allons-y maintenant on peut dériver, on aurait pu le faire avant mais là, on est bien

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(n+1)\binom{n}{k}a_k a_{n-k}\,x^n\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n!}\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k a_{n-k}\,x^n\right)$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k a_{n-k}\,x^{n-k}x^k\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!\,(n-k)!}a_k a_{n-k}x^{n-k}x^k\right)$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k x^k}{k!}\frac{a_{n-k}x^{n-k}}{(n-k)!}\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}b_k x^k b_{n-k}x^{n-k}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}b_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}b_n x^n\right)=\frac{1}{2}\big(S(x)\big)^2$$

Car ces séries convergent absolument à l'intérieur du cercle de convergence.

3. Cela donne

$$\frac{S'(x)}{\big(S(x)\big)^2}=\frac{1}{2}\Rightarrow-\frac{1}{S(x)}=\frac{1}{2}x+K,\quad K\in\mathbb{R}$$

Soit

$$S(x)=-\frac{1}{\frac{1}{2}x+K}$$

Or

$$s(0)=\sum_{n=0}^{+\infty}b_n x^n=b_0=\frac{a_0}{0!}=1$$

Ce qui entraine que $K=-1$ et finalement

$$S(x)=\frac{-1}{\frac{1}{2}x-1}=\frac{1}{2-x}$$

Allez à : Exercice 11

Correction exercice 12.

Il faut faire attention au fait que l'intégrale est une intégrale généralisée en 0, avec les règles de Riemann en 0 avec $\alpha=\frac{1}{2}<1$

$$\sqrt{x}\frac{\ln(x)}{1+x^2}\to 0$$

Montre que l'intégrale est convergente

D'autre part

$$\forall x\in[0,1[,\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-x^2)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}$$

Pour pouvoir appliquer la formule qui permet d'invertir les symboles $\int$ et $\sum$ il faut se placer sur un intervalle borné où la fonction est continue et où on peut appliquer la formule ci-dessus, on pose

$$I(\epsilon,X)=\int_{\epsilon}^{X}\frac{\ln(x)}{1+x^2}dx=\int_{\epsilon}^{X}\left(\ln(x)\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}\right)dx=\int_{\epsilon}^{X}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}\ln(x)\right)dx$$

C'est faisable mais pas simple du tout, alors on va faire autrement en faisant une intégration par partie de

$\int_\epsilon^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2}dx$	
$u'(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$u(x) = \arctan(x)$
$v(x) = \ln(x)$	$v'(x) = \frac{1}{x}$
$\int_\epsilon^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2}dx = [\ln(x)\arctan(x)]_0^1 -$	$\int_\epsilon^1 \frac{\arctan(x)}{x}dx$

$$\int_\epsilon^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2}dx = [\ln(x)\arctan(x)]_\epsilon^1 - \int_\epsilon^1 \frac{\arctan(x)}{x}dx$$

On vérifie que ces trois termes sont bien convergents.

$$[\ln(x)\arctan(x)]_\epsilon^1 = \ln(1)\arctan(1) - \ln(\epsilon)\arctan(\epsilon) = -\ln(\epsilon)\arctan(\epsilon) \sim -\epsilon\ln(\epsilon) \to 0$$

On en déduit que

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{\arctan(x)}{x}dx$$

Le développement en série entière de $\arctan(x)$ est

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

On a un problème en $x = 1$, la série est alternée, $\frac{1}{2n+1}$ tend vers 0 en étant décroissante donc la série de terme général $\frac{(-1)^n}{2n+1}$ converge on a donc

$$\forall x \in]-1,1], \qquad \arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

Et

$$\forall x \in]-1,1], \frac{\arctan(x)}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1}$$

Il faut montrer la convergence uniforme de la série de fonction de terme général $\frac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1}$ sur $[0,1]$. Il s'agit d'une série alternée, on va utiliser la majoration du reste du TSSA

$$\forall x \in [0,1], \qquad |R_n(x)| \leq \frac{x^{2(n+1)}}{2n+3} \leq \frac{1}{2n+3} \to 0$$

Cela montre la convergence uniforme de la série de fonctions de terme général $\frac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1}$ sur $[0,1]$.

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{\arctan(x)}{x}dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1}dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\int_0^1 x^{2n}dx$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

Allez à : Exercice 12