Universidad Autónoma del Estado de México

Centro Universitario UAEM Zumpango

Ingeniería en Computación

Graficación computacional

Periodo 2022B

presentan:

Keren Mitsue Ramírez Vergara

Profesor:

Manuel Almeida Vázquez

Zumpango, Estado de México a 08 de Noviembre del 2022

Resumen

Las superficies mínimas son aquellas que tienen área mínima y una curvatura media igual a cero en cada punto, poseen una curva cerrada como contorno. Actualmente, su desarrollo juega un papel importante para las matemáticas, consiguiéndose en los últimos años grandes avances en el campo, algunos de ellos relacionados con los Catenoides y Helicoides Resultan ser de gran utilidad para la innovación de estructuras de un diseño de forma simple y ligero, resaltando la característica de forma debido a que estas superficies están ligadas a lo orgánico en la arquitectura.

Estas superficies se encuentran directamente relacionadas con las superficies regladas, se cambia el grado de inclinación de una recta, que se mueve encima de una curva y la resultante deriva en estructuras simples, además de que son muy ligeras, por ello se puede aplicar su uso en la arquitectura. En este trabajo, se determina si una esfera, un helicoide, un toroide, la banda de morbious, un catenoide y la superficie de Ennerper, son superficies minimales.

Contenido

Lista de Figuras

Capítulo 1

Introducción

En la obtención de la ecuación de Laplace-Young podemos elegir los bordes del entorno rectangular utilizando las direcciones principales que, como ya comentamos, son perpendiculares. En un entorno lo suficientemente pequeño estas curvas son arcos de circunferencias de radios R1 y R2. Así, la fórmula siguiente fórmula puede ser reescrita en términos de la curvatura media H.

$$p = \sigma(k_1 + k_2) = \sigma 2H$$

En el caso de una superficie jabonosa delimitada por una curva, la presión que ejerce el aire sobre la película es cero. Así

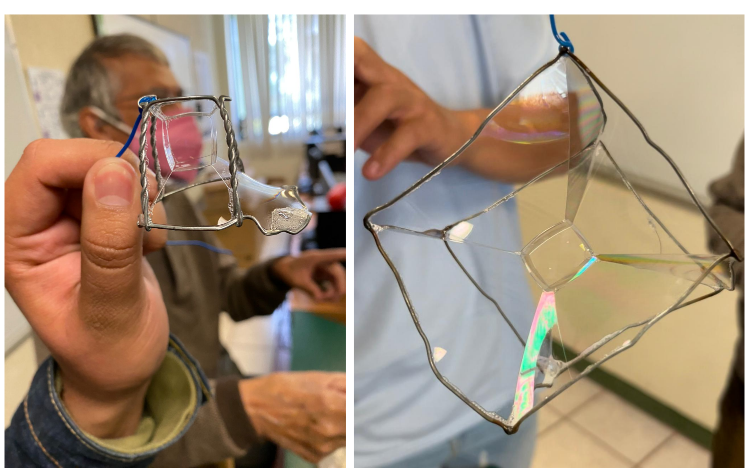
$$p = 0 \leftrightarrow H = 0$$

Si una película de jabón encierra un volumen formando una burbuja, esto generaría una presión constante de dentro a fuera, por lo que se tiene que H es constante y positiva.

El comportamiento de las películas de jabón en relación con la presión del ambiente sugiere la siguiente definición.

Una superficie regular M se dirá que es minimal si su curvatura media es idénticamente cero.

El objetivo de realizar superficies mínimas con películas de jábon es comprobar que basta con una simple disolución jabonosa para que podamos llegar a la comprobación visual y experimental de problemas como el cálculo de recorridos mínimos y las superficies mínimas que a la física y a las matemáticas les ha llevado tanto tiempo dar respuesta y que todavía hoy en día no son definitivos.



(a) (b)

Figura 1.1: Superficies de jabón

Se dice que una superficie regular es mínima si su curvatura media se anula en todos los puntos. Una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ es mínima si cada una de sus parametrizaciones es mínima, lo anterior equivale a que $H = 0$ para todo punto de S.El adjetivo minimal es dado, pues en definitiva, las superficies minimales son aquellas que, de alguna manera, "minimizan" el área. El problema de minimizar el área se aborda también desde el punto de vista del Cálculo Variacional, rama de las Matemáticas desarrollada principalmente por Lagrange en 1760. Lagrange estudia grafos, esto es, superficies que globalmente pueden expresarse como gráfica de una función diferenciable $Z = f(x.y)$, e introduce una nueva definición de superficial minimal.

La superficie como la silla de montar tiene curvatura media cero, ya que en cada punto la superficie se curva suavemente tanto hacia arriba como hacia abajo. El concepto de curvatura auxilia a caracterizar superficies minimales. Dado que un punto sobre una superficie minimal deberá tener una curvatura medial igual a cero. Tales superficies deben ser ser planos, cílindros o como sillas de montar. Euler estableció que una característcia de las superficies minimales es que su forma debería de ser como la silla de montar, y que su curvatura promedio debería ser igual a cero.

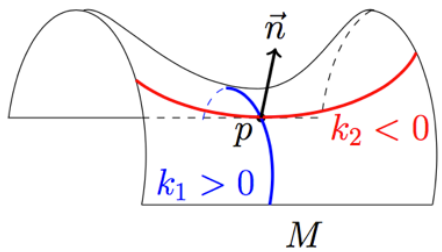


Figura 1.2: Silla de montar

Para calcular la curvatura media de una superficie, se realiza lo siguiente:

Sea una superficie S con una parametrización $r(u, v)$ regular simple en $\mathbb{R}^3$. Llamaremos primera forma fundamental a la expresión:

$$I = (r_u \bullet r_v)du^2 + 2(r_u \bullet r_v)dudv + (r_u \bullet r_v)dvu^2$$

Se acostumbra descomponer para el cálculo en

$$E = r_u \bullet r_u = ||r_u||^2$$

$$F = r_v \bullet r_u$$

$$G = r_v \bullet r_v = ||r_v||^2$$

De esta manera la primera forma fundamental quedaría

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

Para obtener H, se necesita calcular el vector normal unitario $N = (r_u \times r_v)/|r_u \times r_v|$ y las cantidades $I = r_{uu} \bullet N$, $m = r_{uv} \bullet N$ y $n = r_{vv} \bullet N$.

Finalmente, calculamos H con la siguiente fórmula:

$$H = \frac{GI - En - 2Fm}{2(EG - F^2)}$$

Capítulo 2

Desarrollo

2.1 Esfera

La esfera puede definirse como el conjunto de puntos del espacio que equidista de un punto dado (que denominamos centro de la esfera). A la distancia r que separa a los puntos de la esfera del centro se le llama radio de la esfera, como se muestra en la figura 2.1

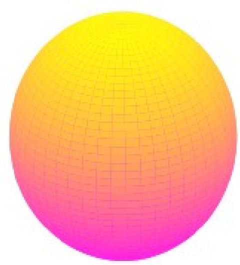


Figura 2.1: Esfera

Una esfera está definida por la siguiente parametrización

$x = \cos(u)\cos(v)$
$y = \sin(u)\cos(v)$
$z = \sin(v)$

$r(u.v) = \langle \cos(u)\cos(v), \sin(u)\cos(v), \sin(v)\rangle \; u \in [0, 2\pi], \; v \in [0, \pi]$

Determinando si la esfera es una superficie minimal, inicialmente se obtienen sus derivadas parciales

$r_u = \langle -\sin(u)\cos(v), \cos(u)\cos(v), 0\rangle$
$r_v = \langle -\sin(v)\cos(u), -\sin(u)\sin(v), \cos(u)\rangle$

En primer lugar se calculan los valores de la primera forma fundamental, E, F y G.

$E = r_u \bullet r_u = \sin^2(u)\cos^2(v) + \cos^2(u)\cos^2(v) = \cos^2(v)\left(\sin^2(u) + \cos^2(u)\right)$
$\because E = \cos^2(v)$

$F = r_u \bullet r_v = \sin(u)\cos(u)\sin(v)\cos(v) - \sin(u)\cos(u)\sin(v)\cos(v) = 0$
$\because F = 0$

$G = r_v \bullet r_v = \sin^2(v)\cos^2(u) + \sin^2(u)\sin^2(v) + \cos^2(v) = \sin^2(v)\left(\sin^2(u) + \cos^2(u)\right) + \cos^2(v)$
$\because G = 1$

Para obtener H necesitamos $N = (r_u \times r_v)/|r_u \times r_v|$

$$r_u \times r_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sin(u)\cos(v) & \cos(u)\cos(v) & 0 \\ -\cos(u)\sin(v) & -\sin(u)\sin(v) & \cos(v) \end{vmatrix} = \left\langle \cos(u)\cos^2(v), \sin(u)\cos^2(v), \sin(v)\cos(v) \right\rangle$$

$|r_u \times r_v| = \sqrt{(\cos(u)\cos^2(v))^2 + (\sin(u)\cos^2(v))^2 + (\sin(v)\cos(v))^2} = \sqrt{\cos^2(v)} = \cos(v)$

$N = \left\langle \frac{\cos(u)\cos^2(v), \sin(u)\cos^2(v), \sin(v)\cos(v)}{\cos(v)} \right\rangle = \langle \cos(v)\cos(u), \cos(v)\sin(u), \sin(v) \rangle$

Obteniendo las segundas derivadas

$r_{uu} = \langle -\cos(v)\cos(u), -\cos(v)\sin(u), 0 \rangle$
$r_{uv} = \langle \sin(v)\sin(u), -\sin(v)\cos(u), 0 \rangle$
$r_{vv} = \langle -\cos(u)\cos(v), -\cos(v)\sin(u), -\sin(v) \rangle$

Obteniendo los valores de I, m y n.

$$\begin{array}{rcc} I = r_{uu} \bullet N & = & \langle -\cos(v)\cos(u), -\cos(v)\sin(u), 0 \rangle \bullet \langle \cos(v)\cos(u), \cos(v)\sin(u), \sin(v) \rangle \\ I & = & -\cos^2(v)\cos^2(u) - sin^2(u)\cos^2(v) \\ I & = & -\cos^2(v) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcc} m = r_{uv} \bullet N & = & \langle \sin(v)\sin(u), -\sin(v)\cos(u), 0 \rangle \bullet \langle \cos(v)\cos(u), \cos(v)\sin(u), \sin(v) \rangle \\ m & = & \sin(u)\sin(v)\cos(v)\cos(u) - \sin(u)\sin(v)\cos(v)\cos(u) \\ m & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcc} n = r_{vv} \bullet N & = & \langle -\cos(u)\cos(v), -\cos(v)\sin(u), -\sin(v) \rangle \bullet \langle \cos(v)\cos(u), \cos(v)\sin(u), \sin(v) \rangle \\ n & = & -\cos^2(u)\cos^2(v) - \sin^2(v)\cos^2(v) - \sin^2(v) \\ n & = & -1 \end{array}$$

Finalmente calculamos H

$H = \frac{GI - En - 2Fm}{2(EG - F^2)} = \frac{(-1)(-\cos^2(v)) + (\cos^2(v))(-1) - 2(0)(0)}{2(\cos^2(v)(1) - 0)} = -1$

Como $H \neq 0$, la esfera no es una superficie minimal.

2.2 Catenoide

El catenoide definido por las siguientes ecuaciones paramétricas
$x = u$
$y = \cosh(u)\cos(v)$
$z = \cosh(u)\sin(v)$

$r(u.v) = \langle u, \cosh(u)\cos(v), \cosh(u)\sin(v) \rangle$ $0 < u < 2\pi$, $-\infty <$ v $< \infty$.

Es la superficie generada al rotar la curva catenaria alrededor de uno de los ejes coordenados (Ver Figura2.2).

Figura 2.2: Catenoide

Determinando si es una superficie minimal, inicialmente se obtienen las derivadas parciales de la superficie.

$r_u = \langle 1, \sinh(u)\cos(v), \sinh(u)\sin(v)\rangle$
$r_v = \langle 0, -\cosh(u)\sin(v), \cosh(u)\cos(v)\rangle$

En primer lugar se calculan los valores de la primera forma fundamental, E, F y G.

$E = r_u \bullet r_u = 1{+}\sinh^2(u)\cos^2(v) + \sinh^2(u)\sin^2(v) = 1 + \sinh(u) = \cosh(u)$
$\because E = \cosh(u)$

$F = r_u \bullet r_v = -\sinh(u)\cosh(u)\cos(v)\sin(v) + \sinh(u)\cosh(u)\cos(v)\sin(v) = 0$
$\because F = 0$

$G = r_v \bullet r_v = \cosh^2(u)\sin^2(v) + \cosh^2(u)\cos^2(v) = \cosh^2(u)$
$\because G = \cosh^2(u)$

Para calcular el vector normal utilizamos la fórmula $N = (r_u \times r_v)/|r_u \times r_v|$

$$r_u \times r_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & \sinh(u)\cos(v) & \sinh(u)\sin(v) \\ 0 & -\cosh(u)\sin(v) & \cosh(u)\cos(v) \end{vmatrix} = \langle \sinh(u)\cosh(u), -\cosh(u)\cos(v), \cosh(u)\sin(v)\rangle$$

$$|r_u \times r_v| = \sqrt{(\sinh(u)\cosh(u))^2 + (-\cosh(u)\cos(v))^2 + (\cosh(u)\sin(v))^2} = \sqrt{\cosh^4(u)} = \cosh^2(u)$$

$$N = \frac{\langle \sinh(u)\cosh(u), -\cosh(u)\cos(v), \cosh(u)\sin(v)\rangle}{\cosh^2(u)} = \left\langle \frac{\sinh(u)}{\cosh(u)}, \frac{-\cos(v)}{\cosh(u)}, \frac{-\sin(v)}{\cosh(u)} \right\rangle$$

Obteniendo las segundas derivadas

$r_{uu} = \langle 0, \cosh(u)\cos(v), \cosh(u)\sin(v)\rangle$
$r_{uv} = \langle 0, -\sinh(u)\sin(v), \sinh(u)\cos(v)\rangle$
$r_{vv} = \langle 0, -\cosh(u)\cos(v), -\cosh(u)\sin(v)\rangle$

Obteniendo los valores de I, m y n.

$$\begin{aligned} I = r_{uu} \bullet N &= \langle 0, \cosh(u)\cos(v), \cosh(u)\sin(v)\rangle \bullet \left\langle \frac{\sinh(u)}{\cosh(u)}, \frac{-\cos(v)}{\cosh(u)}, \frac{-\sin(v)}{\cosh(u)} \right\rangle \\ I &= -\cos^2(v) - \sin^2(v) = -1 \\ I &= -1 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
m = r_{uv} \bullet N &= \langle 0, -\sinh(u)\sin(v), \sinh(u)\cos(v)\rangle \bullet \left\langle \frac{\sinh(u)}{\cosh(u)}, \frac{-\cos(v)}{\cosh(u)}, \frac{-\sin(v)}{\cosh(u)} \right\rangle \\
m &= \frac{\sinh(u)\sin(v)\cos(v)}{\cosh(u)} - \frac{\sinh(u)\sin(v)\cos(v)}{\cosh(u)} \\
m &= 0 \\
n = r_{vv} \bullet N &= \langle 0, -\cosh(u)\cos(v), -\cosh(u)\sin(v)\rangle \bullet \left\langle \frac{\sinh(u)}{\cosh(u)}, \frac{-\cos(v)}{\cosh(u)}, \frac{-\sin(v)}{\cosh(u)} \right\rangle \\
n &= \frac{\cosh(u)\cos^2(v)}{\cosh(u)} + \frac{\cosh(u)\sin^2(v)}{\cosh(u)} = \cos^2(v) + \sin^2(v) \\
n &= 1
\end{aligned}
$$

Finalmente calculamos H

$$
H = \frac{GI - En - 2Fm}{2(EG - F^2)} \quad \frac{\cosh^2(u)(-1) + \cosh^2(u)(1) - 2(0)(0)}{2\cosh^4(u)} = \frac{2\cosh^2(u)}{2\cosh^4(u)} = 0
$$

Como $H = 0$, un catenoide es una superficie minimal.

2.3 Toroide

La superficie de un Toroide es la superficie parametrizada

$r(u,v) = \langle (R + rcos(u))cos(v), (R + rcos(u))sin(v), rsin(u) \rangle$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ y $R = r = 1$

$r(u,v) = \langle (1 + cos(u))cos(v), (1 + cos(u))sin(v), sin(u) \rangle$

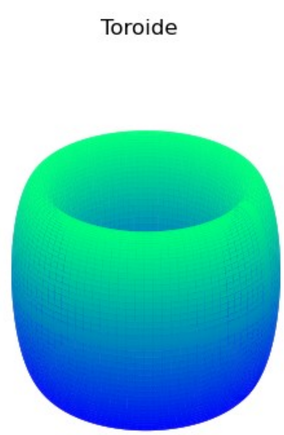


Figura 2.3: Toroide

Determinando si una superficie de de un Toroide es una superficie minimal, inicialmente se obtienen sus derivadas parciales

$r_u = \langle -sin(u)cos(v), -sin(u)sin(v), cos(u) \rangle$
$r_v = \langle -sin(v) - cos(u)sin(v), cos(v) + cos(u)cos(v), 0 \rangle$

En primer lugar se calculan los valores de la primera forma fundamental, E, F y G.

$E = r_u \bullet r_u = (-sin(u)cos(v))^2 + (-sin(u)sin(v))^2 + (cos(u))^2 = sin^2(u)cos^2(v) + sin^2(u)sin^2(v) + cos^2(u)$
$\because E = 1$

$F = r_u \bullet r_v = sin(u)cos(v)sin(v) + cos(u)sin(u)cos(v)sen(v) - sin(u)cos(v)sin(v) - cos(u)sin(u)cos(v)sin(v)$

$\because F = 0$

$G = r_v \bullet r_v = (-sin(v) - cos(u)sin(v))^2 + (cos(v) + cos(u)cos(v))^2 + (0)^2$
$\because G = cos^2(u) + 2cos(u) + 1$

Para obtener H necesitamos $N = (r_u \times r_v)/|r_u \times r_v|$

$$r_u \times r_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -sin(u)cos(v) & -sin(u)sin(v) & cos(u) \\ -sin(v) - cos(u)sin(v) & cos(v) + cos(u)cos(v) & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} r_u \times r_v = \; & (-cos(u)cos(v) - cos^2(u)cos(v))i \\ & -(cos(u)sin(v) + cos^2(u)sin(v))j \\ & +(-sin(u)cos(v)(cos(v) + cos(u)cos(v)) - (-sin(u)sin(v)(-sin(v) - cos(u)sin(v)))k \end{aligned}$$

$$r_u \times r_v = \left\langle -cos(u)cos(v) - cos^2(u)cos(v), -cos(u)sin(v) - cos^2(u)sin(v), -sin(u) - cos(u)sin(u) \right\rangle$$

$$|r_u \times r_v|^2 = \left(-cos(u)cos(v) - cos^2(u)cos(v)\right)^2 + \left(-cos(u)sin(v) - cos^2(u)sin(v)\right)^2 + (-sin(u) - cos(u)sin(u))^2$$

Considerando que $w = |r_u \times r_v|^2$, el vector normal de la superficie de Enneper es

$$N = \left\langle \frac{-cos(u)cos(v) - cos^2(u)cos(v), -cos(u)sin(v) - cos^2(u)sin(v), -sin(u) - cos(u)sin(u)}{\sqrt{w}} \right\rangle$$

$$N = \left\langle \frac{-cos(u)cos(v) - cos^2(u)cos(v)}{\sqrt{w}}, \frac{-cos(u)sin(v) - cos^2(u)sin(v)}{\sqrt{w}}, \frac{-sin(u) - cos(u)sin(u)}{\sqrt{w}} \right\rangle$$

Obteniendo las segundas derivadas

$r_{uu} = \langle -cos(u)cos(v), -cos(u)sin(v), -sin(u) \rangle$
$r_{uv} = \langle sin(u)sin(v), -sin(u)cos(v), 0 \rangle$
$r_{vv} = \langle -cos(v) - cos(u)cos(v), -sin(v) - cos(u)sin(v), 0 \rangle$

$$I = r_{uu} \bullet N = \langle -cos(u)cos(v), -cos(u)sin(v), -sin(u) \rangle \bullet N$$

$$I = \frac{cos^2(u)cos^2(v) + cos^3(u)cos^2(v)}{\sqrt{w}} + \frac{cos^2(u)sin^2(v) + cos^3(u)sin^2(v)}{\sqrt{w}} + \frac{sin^2(u) + cos(u)sin^2(u)}{\sqrt{w}}$$

$$I = \frac{1 + cos(u)}{\sqrt{w}}$$

$$m = r_{uv} \bullet N = \langle sin(u)sin(v), -sin(u)cos(v), 0 \rangle \bullet N$$

$$m = \frac{sin(u)sin(v)(-cos(u)cos(v) - cos^2(u)cos(v))}{\sqrt{w}} + \frac{-sin(u)cos(v)(-cos(u)sin(v) - cos^2(u)sin(v))}{\sqrt{w}}$$

$$m = 0$$

$$n = r_{vv} \bullet N = \langle -cos(v) - cos(u)cos(v), -sin(v) - cos(u)sin(v), 0 \rangle \bullet N$$

$$n = \frac{cos(u)cos^2(v) + 2cos^2(u)cos^2(v) + cos^3(u)cos^2(v)}{\sqrt{w}} + \frac{cos(u)sin^2(v) + 2cos^2(u)sin^2(v) + cos^3(u)sin^2(v)}{\sqrt{w}}$$

$$n = \frac{cos(u) - 2cos^2(u) + cos^3(u)}{\sqrt{w}}$$

Finalmente calculamos H, considerando que $F = m = 0$.

$$H = \frac{GI - En - 2Fm}{2(EG - F^2)} = \frac{GI - (1)n - 2(0)(0)}{2((1)G - (0)^2)} = \frac{GI - n}{2G} = \frac{(I - n)}{2G} = \frac{4cos(u) + 5cos^2(u)2cos^3(u) + 1}{2\sqrt{w}(cos^2(u) + 2cos(u) + 1)}$$

Como $H \neq 0$ el Toroide no es una superficie minimal.

2.4 Banda de Moëbius

La superficie de una banda de Moëbius es la superficie parametrizada

$r(u,v) = \left\langle (1 + vsin(\frac{u}{2}))sin(u), (1 + vsin(\frac{u}{2}))cos(u), vcos(\frac{u}{2}) \right\rangle$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ y $R = r = 1$

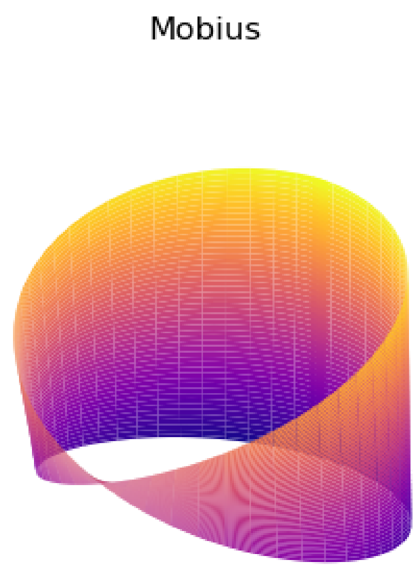


Figura 2.4: Banda de Moëbius

Determinando si una superficie de una banda de Moëbius es una superficie minimal, inicialmente se obtienen sus derivadas parciales

$r_u = \left\langle \frac{vcos(\frac{u}{2})sin(u)}{2} + (vsin(\frac{u}{2}) + 1)cos(u), \frac{vcos(\frac{u}{2})cos(u)}{2} + (vsin(\frac{u}{2}) + 1)sin(u), -\frac{vsen(\frac{u}{2})}{2} \right\rangle$
$r_v = \left\langle sin(\frac{u}{2})sin(u), sin(\frac{u}{2})cos(u), cos(\frac{u}{2}) \right\rangle$

En primer lugar se calculan los valores de la primera forma fundamental, E, F y G.

$E = r_u \bullet r_u = \frac{v^2}{4} + v^2 sin^2(\frac{u}{2}) + 2vsin(\frac{u}{2}) + 1$
$\because E = \frac{v^2}{4} + (vsin(\frac{u}{2}) + 1)^2$

$F = r_u \bullet r_v = \frac{vcos(\frac{u}{2})sin(\frac{u}{2})sin^2(u)}{2} + \frac{vcos(\frac{u}{2})sin(\frac{u}{2})}{2}$
$\because F = vcos(\frac{u}{2})sin(\frac{u}{2})$

$G = r_v \bullet r_v = (sin(\frac{u}{2})sin(u))^2 + (sin(\frac{u}{2})cos(u))^2 + (cos(\frac{u}{2}))^2 = sin^2(\frac{u}{2})sin^2(u) + sin^2(\frac{u}{2})cos^2(u) + cos^2(\frac{u}{2})$
$\because G = 1$

Para obtener H necesitamos $N = (r_u \times r_v)/|r_u \times r_v|$

$$r_u \times r_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{vcos(\frac{u}{2})sin(u)}{2} + (vsin(\frac{u}{2})+1)cos(u) & (vsin(\frac{u}{2})+1)cos(u), \frac{vcos(\frac{u}{2})cos(u)}{2} & -\frac{vsen(\frac{u}{2})}{2} \\ sin(\frac{u}{2})sin(u) & sin(\frac{u}{2})cos(u) & cos(\frac{u}{2}) \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} r_u \times r_v \quad = \quad & (\tfrac{vcos(u)}{2} + vcos(\tfrac{u}{2})sin(\tfrac{u}{2})sin(u) - cos(\tfrac{u}{2})sin(u))i \\ & -(\tfrac{vsin(u)}{2} + vcos(\tfrac{u}{2})sin(\tfrac{u}{2})cos(u) + cos(\tfrac{u}{2})cos(u))j \\ & +(vsin^2(\tfrac{u}{2}) + sin(\tfrac{u}{2}))k \end{aligned}$$

$|r_u \times r_v|^2 = \left(\frac{vcos(u)}{2} + vcos(\frac{u}{2})sin(\frac{u}{2})sin(u) - cos(\frac{u}{2})sin(u)\right)^2 + \left(-\frac{vsin(u)}{2} - vcos(\frac{u}{2})sin(\frac{u}{2})cos(u) - cos(\frac{u}{2})cos(u)\right)^2 + \left(vsin^2(\frac{u}{2}) + sin(\frac{u}{2})\right)^2$

Considerando que $w = |r_u \times r_v|^2$, el vector normal de la superficie de Enneper es

$$N = \left\langle \frac{\frac{vcos(u)}{2}+vcos(\frac{u}{2})sin(\frac{u}{2})sin(u)-cos(\frac{u}{2})sin(u), -\frac{vsin(u)}{2}-vcos(\frac{u}{2})sin(\frac{u}{2})cos(u)-cos(\frac{u}{2})cos(u), vsin^2(\frac{u}{2})+sin(\frac{u}{2})}{\sqrt{w}} \right\rangle$$

$$N = \left\langle \frac{\frac{vcos(u)}{2}+vcos(\frac{u}{2})sin(\frac{u}{2})sin(u)-cos(\frac{u}{2})sin(u)}{\sqrt{w}}, \frac{-\frac{vsin(u)}{2}-vcos(\frac{u}{2})sin(\frac{u}{2})cos(u)-cos(\frac{u}{2})cos(u)}{\sqrt{w}}, \frac{vsin^2(\frac{u}{2})+sin(\frac{u}{2})}{\sqrt{w}} \right\rangle$$

Obteniendo las segundas derivadas

$$r_{uu} = \left\langle -\frac{(5vsin(\frac{u}{2})+4)sin(u)-4vcos(\frac{u}{2})cos(u)}{4}, -\frac{(5vsin(\frac{u}{2})+4)cos(u)-4vcos(\frac{u}{2})sin(u)}{4}, -\frac{vcos(\frac{u}{2})}{4} \right\rangle$$

$$r_{uv} = \left\langle \frac{cos(\frac{u}{2})sin(u)}{2} + sin(\frac{u}{2})cos(u), \frac{cos(\frac{u}{2})cos(u)}{2} + sin(\frac{u}{2})sin(u), -\frac{sen(\frac{u}{2})}{2} \right\rangle$$

$$r_{vv} = \langle 0,0,0 \rangle$$

$$I = r_{uu} \bullet N = \quad \langle -cos(u)cos(v), -cos(u)sin(v), -sin(u) \rangle \bullet N$$

$$I = \quad \frac{2v^2cos(\frac{u}{2})+\frac{19}{4}v^2cos(\frac{u}{2})sin^2(\frac{u}{2})+\frac{35}{4}vcos(\frac{u}{2})sin(\frac{u}{2})+4cos(\frac{u}{2})}{4\sqrt{w}}$$

$$m = r_{uv} \bullet N \quad = \quad \left\langle \frac{cos(\frac{u}{2})sin(u)}{2} + sin(\frac{u}{2})cos(u), \frac{cos(\frac{u}{2})cos(u)}{2} + sin(\frac{u}{2})sin(u), -\frac{sen(\frac{u}{2})}{2} \right\rangle \bullet N$$

$$m \quad = \quad -\frac{1}{8\sqrt{w}}$$

$$n = r_{vv} \bullet N \quad = \quad \langle 0,0,0 \rangle \bullet N$$

$$n \quad = \quad 0$$

Finalmente calculamos H, considerando que $F = m = 0$.

$$H = \frac{GI-En-2Fm}{2(EG-F^2)} = \frac{(1)I-E(0)-2Fm}{2(E(1)-F^2)} = \frac{I-2Fm}{2(E-F^2)}$$

$$H = \frac{\frac{2v^2cos(\frac{u}{2})+\frac{19}{4}v^2cos(\frac{u}{2})sin^2(\frac{u}{2})+\frac{35}{4}vcos(\frac{u}{2})sin(\frac{u}{2})+4cos(\frac{u}{2})}{4\sqrt{a}} - 2(vcos(\frac{u}{2})sin(\frac{u}{2}))(-\frac{1}{8\sqrt{a}})}{2(\frac{v^2}{4}+(vsin(\frac{u}{2})+1)^2+(vcos(\frac{u}{2})sin(\frac{u}{2}))^2)}$$

Como $H \neq 0$, la banda de Moëbius no es una superficie minimal.

2.5 Helicoide

Un helicoide es una superficie reglada barrida por una línea recta que gira a velocidad constante alrededor de un eje perpendicular a la línea mientras que se mueve al mismo tiempo a una velocidad constante a lo largo del eje, como se ilustra en la imagen 2.5.

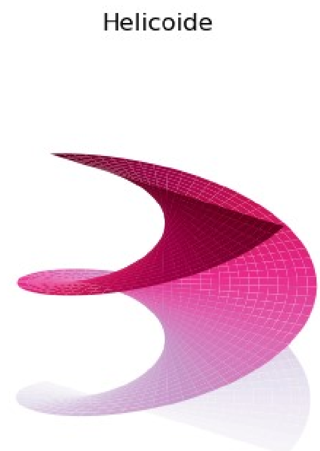


Figura 2.5: Helicoide

Un helicoide está formado por la siguiente parametrización.
$x = v\cos(u)$
$y = v\sin(u)$
$z = bu$

$r(u.v) = \langle v\cos(u), v\sin(u), bu\rangle \; 0 < u < 2\pi, -\infty < \text{v} < \infty.$

Determinando si un helicoide es una superficie minimal, inicialmente se obtienen sus derivadas parciales

$r_u = \langle -v\sin(u), v\cos(u), b\rangle$
$r_v = \langle \cos(u), \sin(u), 0\rangle$

En primer lugar se calculan los valores de la primera forma fundamental, E, F y G.

$E = r_u \bullet r_u = v^2\sin^2(u) + v^2\cos^2(u) + b^2 = v^2(\sin^2(u) + \cos^2(u)) + b^2$
$\because E = v^2 + b^2$

$F = r_u \bullet r_v = v\sin(u)\cos(u) - \sin(u)\cos(u) = 0$
$\because F = 0$

$G = r_v \bullet r_v = \sin^2(u) + \cos^2(u)$
$\because G = 1$

Para obtener H necesitamos $N = (r_u \times r_v)/|r_u \times r_v|$

$$r_v \times r_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -v\sin(u) & v\cos(u) & b \\ \cos(u) & \sin(u) & 0 \end{vmatrix} = \langle -b\sin(u), b\cos(u), -v\rangle$$

$|r_u \times r_v| = \sqrt{(-b\sin(u))^2 + (b\cos(u))^2 + (-v)^2} = \sqrt{b^2 + v^2}$

$N = \left\langle \frac{-b\sin(u), b\cos(u), -v}{\sqrt{b^2+v^2}} \right\rangle = \left\langle \frac{-b\sin(u)}{\sqrt{b^2+v^2}}, \frac{b\cos(u)}{\sqrt{b^2+v^2}}, \frac{-v}{\sqrt{b^2+v^2}} \right\rangle$

Obteniendo las segundas derivadas

$r_{uu} = \langle -v\cos(u), -v\sin(u), 0 \rangle$
$r_{uv} = \langle -\sin(u), \cos(u), 0 \rangle$
$r_{vv} = \langle 0, 0, 0 \rangle$

Obteniendo los valores de I, m y n.

$$\begin{aligned}
I = r_{uu} \bullet N &= \langle -v\cos(u), -v\sin(u), 0 \rangle \bullet \left\langle \frac{-b\sin(u)}{\sqrt{b^2+v^2}}, \frac{b\cos(u)}{\sqrt{b^2+v^2}}, \frac{-v}{\sqrt{b^2+v^2}} \right\rangle \\
I &= \frac{bv\sin(u)\cos(u)}{\sqrt{b^2+v^2}} - \frac{bv\sin(u)\cos(u)}{\sqrt{b^2+v^2}} \\
I &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m = r_{uv} \bullet N &= \langle -\sin(u), \cos(u), 0 \rangle \bullet \left\langle \frac{-b\sin(u)}{\sqrt{b^2+v^2}}, \frac{b\cos(u)}{\sqrt{b^2+v^2}}, \frac{-v}{\sqrt{b^2+v^2}} \right\rangle \\
m &= \frac{b\sin^2(u)}{\sqrt{b^2+v^2}} + \frac{b\cos^2(u)}{\sqrt{b^2+v^2}} \\
m &= \frac{b}{\sqrt{b^2+v^2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n = r_{vv} \bullet N &= \langle 0, 0, 0 \rangle \bullet \left\langle \frac{-b\sin(u)}{\sqrt{b^2+v^2}}, \frac{b\cos(u)}{\sqrt{b^2+v^2}}, \frac{-v}{\sqrt{b^2+v^2}} \right\rangle \\
n &= 0
\end{aligned}$$

Finalmente calculamos H

$$H = \frac{GI - En - 2Fm}{2(EG - F^2)} = \frac{(1)(0) + (v^2+b^2)(0) - 2(0)\left(\frac{b}{\sqrt{b^2+v^2}}\right)}{2((v^2+b^2)(1) - 0)} = 0$$

Como $H = 0$, la helicoide es una superficie minimal.

2.6 Superficie de Enneper

La superficie de Enneper fue introducido por Alfred Ennerper en relación con la teoría de superficies mínimas.

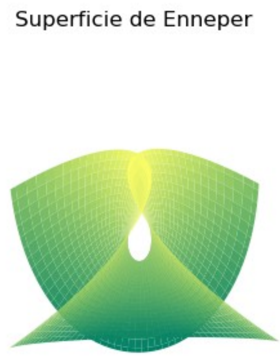


Figura 2.6: Superficie de Enneper

La superficie de Enneper es la superficie parametrizada

$r(u.v) = \left\langle u - \frac{1}{3}u^3 + uv^2, v - \frac{1}{3}v^3 + vu^2, u^2 - v^2 \right\rangle \ (u, v) \in \mathbb{R}^2$

Determinando si una superficie de Enneper es una superficie minimal, inicialmente se obtienen sus derivadas parciales

$r_u = \left\langle 1 - u^2 + v^2, 2uv, 2u \right\rangle$
$r_v = \left\langle 2uv, 1 - v^2 + u^2, -2v \right\rangle$

En primer lugar se calculan los valores de la primera forma fundamental, E, F y G.

$E = r_u \bullet r_u = \left(1 - u^2 + v^2\right)^2 + (2uv)^2 + (2u)^2 = v^4 + u^4 + 2v^2 + 2u^2 + 2u^2v^2 + 1$
$\because E = v^4 + u^4 + 2v^2 + 2u^2 + 2u^2v^2 + 1$

$F = r_u \bullet r_v = 2uv\left(1 - u^2 + v^2\right) + 2uv\left(1 + u^2 - v^2\right) - 4uv$
$\because F = 0$

$G = r_v \bullet r_v = \left(1 - v^2 + u^2\right)^2 + 4u^2v^2 + 4v^2 = v^4 + u^4 + 2u^2 + 2v^2 + 2u^2v^2 + 1$
$\because G = v^4 + u^4 + 2u^2 + 2v^2 + 2u^2v^2 + 1$
Por lo que, $E = G = v^4 + u^4 + 2v^2 + 2u^2 + 2u^2v^2 + 1$.

Para obtener H necesitamos $N = (r_u \times r_v)/|r_u \times r_v|$

$$r_u \times r_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 - u^2 + v^2 & 2uv & 2u \\ 2uv & 1 + u^2 - v^2 & -2v \end{vmatrix}$$

$r_u \times r_v = \left\langle -4uv^2 - 2u(1 + u^2 - v^2), -(-2v(1 - u^2 + v^2) - 4u^2v), (1 - u^2 + v^2)(1 + u^2 - v^2) - 4u^2v^2 \right\rangle$

$r_u \times r_v = \left\langle -2uv^2 - 2u - 2u^3, 2u^2v + 2v + 2v^3, -v^4 - u^4 - 2u^2v^2 + 1 \right\rangle$

$|r_u \times r_v|^2 = \left(-2uv^2 - 2u - 2u^3\right)^2 + \left(2u^2v + 2v + 2v^3\right)^2 + \left(-v^4 - u^4 - 2u^2v^2 + 1\right)^2$

Considerando que $a = |r_u \times r_v|^2$, el vector normal de la superficie de Enneper es

$N = \left\langle \frac{-2uv^2 - 2u - 2u^3, 2u^2v + 2v + 2v^3, -v^4 - u^4 - 2u^2v^2 + 1}{\sqrt{a}} \right\rangle$

$N = \left\langle \frac{-2uv^2-2u-2u^3}{\sqrt{a}}, \frac{2u^2v+2v+2v^3}{\sqrt{a}}, \frac{-v^4-u^4-2u^2v^2+1}{\sqrt{a}} \right\rangle$

Obteniendo las segundas derivadas

$r_{uu} = \langle -2u, 2v, 2 \rangle$
$r_{uv} = \langle 2v, 2u, 0 \rangle$
$r_{vv} = \langle 2u, -2v, -2 \rangle$

$$\begin{aligned}
I = r_{uu} \bullet N &= \langle -2u, 2v, 2 \rangle \bullet \left\langle \frac{-2uv^2-2u-2u^3}{\sqrt{a}}, \frac{2u^2v+2v+2v^3}{\sqrt{a}}, \frac{-v^4-u^4-2u^2v^2+1}{\sqrt{a}} \right\rangle \\
I &= \frac{4u^2v^2+4u^2+4u^4}{\sqrt{a}} + \frac{4u^2v^2+4v^2+4v^4}{\sqrt{a}} + \frac{-2v^4-2u^4-4u^2v^2+2}{\sqrt{a}} \\
I &= \frac{2v^4+2u^4+4v^2+4u^2+4u^2v^2+2}{\sqrt{a}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m = r_{uv} \bullet N &= \langle 2v, 2u, 0 \rangle \bullet \left\langle \frac{-2uv^2-2u-2u^3}{\sqrt{a}}, \frac{2u^2v+2v+2v^3}{\sqrt{a}}, \frac{-v^4-u^4-2u^2v^2+1}{\sqrt{a}} \right\rangle \\
m &= \frac{-4uv^3-4uv-4u^3v}{\sqrt{a}} + \frac{4uv^3+4uv+4u^3v}{\sqrt{a}} \\
m &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n = r_{vv} \bullet N &= \langle 2u, -2v, -2 \rangle \bullet \left\langle \frac{-2uv^2-2u-2u^3}{\sqrt{a}}, \frac{2u^2v+2v+2v^3}{\sqrt{a}}, \frac{-v^4-u^4-2u^2v^2+1}{\sqrt{a}} \right\rangle \\
n &= \frac{-4u^2v^2-4u^2-4u^4}{\sqrt{a}} + \frac{-4u^2v^2-4v^2-4v^4}{\sqrt{a}} + \frac{2v^4+2u^4+4u^2v^2-2}{\sqrt{a}} \\
n &= \frac{-2v^4-2u^4-4v^2-4u^2-4u^2v^2-2}{\sqrt{a}}
\end{aligned}$$

Finalmente calculamos H, considerando que $G = E$ y $F = 0$.

$H = \frac{GI-En-2Fm}{2(EG-F^2)} = \frac{(E)I-En-2(0)m}{2((E)(E)-(0)^2)} = \frac{E(I-n)}{2(E)(E)} = \frac{(I-n)}{2(E)} = 0$

Además se puede comprobar aplicando la siguiente definición. Sea $x(u,v) = (x(u,v), y(u,v).z(u,v))$ una superficie parametrizada regular y admitamos que x es isoterma. Entonces x es mínima si y sólo si sus funciones coordenadas x, y, z son armónicas.

$r_{uu} + r_{vv} = 0$

$\langle -2u, 2v, 2 \rangle + \langle 2u, -2v, -2 \rangle = 0$

Como $H = 0$, una superficie Enneper es una superficie minimal.

Capítulo 3

Conclusiones

Una superficie minimal es aquella superficie que de alguna manera, “minimiza” el área. El problema de minimizar el área aborda en el área del cálculo varacional, la rama de las matemáticas. Para determinar si una figura es minimal o no, se debe realizar el cálcilo de la curvatura media de la superficie H. Si la curvatura media es constantemente cero, es una superficie mínima.
Se ha obtando por utilizar tanto lo analítico como las superficies con disolución jabonosa para su comprobación.
Las superficies minimales juegan un papel importante en la Física, Química, Biología e Ingeniería.

En este trabajo se concluye que las superficies minimales son: el helicoide, el catenoide y la superficie de Enneper, ya que su curvatura media es constantemente cero. Por otro lado, se demostró que la esfera, la banda de moebious y el toroide no son superficies minimales, ya que su curvatura media es diferente de cero, por lo que el área de la superficie no es mínima.

Referencias

[1] (2011). Ugarte, Francisco & Azabache, Haydee. Superficies mínimas : caso del complejo olímpico de Munich. Pontificia Universidad católica del perú.