Infiniti infiniti

Gianfranco Arrigo, Bruno D'Amore e Silvia Sbaragli
NRD, Dipartimento di Matematica, Università di Bologna
ASP Locarno (Svizzera)

1. Premessa

Lo spunto per questo seminario è dato dalla recente pubblicazione del libro omonimo; nel 1992 fu pubblicato un primo testo sul tema dell'infinito matematico (D'Amore, Arrigo, 1992), che in poco tempo si esaurì. L'editore non considerò conveniente ristampare l'opera.
Il titolo del nuovo libro a tre voci può essere interpretato come indicatore di un prolungamento, di uno sviluppo del testo del 1992, oppure come omaggio alla creazione dei numeri transfiniti di Cantor o ancora in altri modi che ogni lettore vorrà assegnargli.

2. Il tema dell'infinito

Nella prefazione del testo del 1992, Francesco Speranza scriveva:
«L'infinito: difficile immaginare un tema più affascinante per la scienza. Possiamo avere esperienza diretta, concreta, solo del "finito": all'infinito possiamo arrivare solo con un atto d'ardimento della mente, un volo della fantasia».
Ecco racchiuso in queste poche parole il significato profondo del fascino che ha sempre esercitato sull'uomo questo concetto filosofico, del quale agli autori interessa particolarmente l'aspetto matematico, con tutte le implicazioni che da esso derivano nella costruzione della conoscenza matematica. L'infinito, in matematica, si incontra ovunque: che si tratti della cardinalità degli insiemi numerici o dei punti di una figura geometrica, oppure nascosto nei concetti basilari dell'analisi. E non manca mai di stupire e di preoccupare, come è successo ai filosofi e matematici della Grecia antica e a tutti quelli che sono seguiti nei secoli fino alla sistemazione teorica, messa a punto dai matematici tedeschi nella seconda parte del XIX secolo. Ma, se entriamo nella scuola odierna, possiamo facilmente constatare come i dubbi, le difficoltà, le perplessità, gli ostacoli epistemologici che concernono l'apprendimento di concetti che implicano l'infinità in atto siano ancora presenti e rivivano nella mente degli studenti. Così, anche i nostri allievi, seppur inseriti in una società complessa e tecnologicamente avanzata, seppur abituati a non stupirsi più di nulla, davanti alla questione se vi sono più numeri naturali o più numeri pari -interrogativo che interessò anche il grande Galileo- difficilmente sanno rispondere in modo corretto. Pensano che, dal momento che i numeri pari costituiscono solo una "parte" dei numeri naturali, questi ultimi sono più

numerosi dei numeri pari. Anche quando l'insegnante li porta a rendersi conto che i due insiemi (dei pari e dei naturali) possono essere messi in corrispondenza biunivoca, quindi che gli elementi dei due insiemi possono essere legati a due a due, in modo che ogni elemento di un insieme sia associato a un determinato elemento dell'altro insieme, e che di conseguenza esistono tanti numeri pari quanti sono i numeri naturali, anche quando ciò è chiarito… rimane sempre, nel profondo dell'animo, un dubbio, una perplessità. È questo un aspetto peculiare del fascino che circonda l'infinità: nell'infinito, il tutto non sempre è maggiore di una sua parte propria, ed il pensiero corre ad Euclide, ai suoi magici *Elementi*.

3. I contenuti dell'opera

Il libro si divide in due parti, seguite da due appendici.

3.1 Prima parte: capitolo 1

Il primo capitolo presenta un approccio storico-critico al tema dell'infinito.
Si fa cenno ai primi passi compiuti dai pensatori Greci per cercare di dare forma a immagini mentali del concetto di infinito: dalla scuola pitagorica a quella eleatica -della quale si ricorda Zenone e in particolare i suoi paradossi-, da Parmenide visto come un ribelle, all'autoritario Aristotele che mette all'indice il concetto di infinito in atto, all'ubbidiente Euclide che si guarda bene dal contravvenire all'ingiunzione aristotelica -quindi, secondo lui, una retta è un segmento indefinitamente prolungabile-, fino a giungere alla singolare grande figura di Archimede che, con spirito euristico, "vede", per esempio, uno scaloide trasformarsi in piramide dopo infiniti passi. L'influenza di Aristotele sopravvive per molti secoli, durante i quali si incontrano importanti personaggi che si occupano dell'infinito; essi lavorano però a margine rispetto alla matematica ufficiale accademica, perché spesso si rende necessario considerare l'infinità in atto, contro il famoso diktat. Il dibattito sull'infinito riprende con vigore nel primo Rinascimento. Il libro ci mostra come personaggi del calibro di Luca Valerio, Bonaventura Cavalieri, Evangelista Torricelli, Paul Guldin e, non da ultimo, Galileo Galilei riprendono a riflettere seriamente sull'infinito in atto. Ai primi tre è legato il cosiddetto "metodo degli indivisibili", una maniera di calcolare aree e volumi, molto simile ai modi impiegati da Archimede, in gran parte dimenticati. L'avvento della simbologia algebrica e della geometria analitica spiana la strada alla costruzione del nuovo calcolo, detto poi calcolo infinitesimale, oggi analisi matematica. Siamo a cavallo tra il XVII e il XVIII secolo: diventano protagonisti del racconto Gottfried Wilhelm Leibniz e Isaac Newton. Matematico il primo, fisico il secondo, entrambi, separatamente, giungono al concetto di funzione derivata: il primo per via geometrica, il secondo nell'ambito della cinematica. Il successo dei due è storico, così come l'inutile

contesa tra il mondo germanofono e quello inglese intesa a stabilire chi dei due potesse essere identificato come il fondatore del nuovo calcolo.
Il successo di questa conquista spinge finalmente molti matematici a produrre una serie di risultati eclatanti, raggiunti grazie all'impiego del calcolo infinitesimale: fra i più prolifici applicatori e sviluppatori delle nuove idee, il testo ci fa conoscere, fra gli altri, Leonhard Euler, i fratelli Bernoulli (soprattutto Jakob e Johann) e Karl Friedrich Gauss. In mezzo a tanto successo, non mancano gli oppositori, fra i quali spiccano George Berkeley e Immanuel Kant.
Che il nuovo calcolo fosse una sorta di "gigante dai piedi di argilla" lo si sapeva, ma i risultati davano ragione alla bontà dei nuovi metodi: «Perseverate: col tempo tutto andrà a posto», era la parola d'ordine contro le perplessità dei teorici. Nel XIX secolo, grazie soprattutto all'opera di Georg Cantor, Karl Weierstrass, Augustin Louis Cauchy, Julius Wilhelm Richard Dedekind, l'analisi matematica trova il suo fondamento rigoroso. Al centro di questo lavoro sta la fondazione dell'insieme dei numeri reali, resa possibile dal postulato della continuità dovuto a Dedekind. D'altra parte, Georg Cantor si spinge più in là, mostrando che, oltre alle riconosciute cardinalità infinite del numerabile e del continuo, esistono… infinite altre cardinalità che chiama numeri transfiniti: ecco gli *infiniti infiniti*.

3.2 Seconda parte: capitoli 2, 3 e 4

L'iter storico-critico proposto nella prima parte del testo ha uno scopo culturale e professionale. Culturale, perché sappiamo come le competenze storica ed epistemologica aiutano a costruire un sapere personale che avvicina al Sapere (accademico) e che rende più consapevole il docente di ogni sua azione, non solo esplicita. Professionale, perché conoscere l'evoluzione storica di un tema fornisce maggiori strumenti critici a chi deve valutare percorsi di apprendimento che, in certo qual senso e in certa qual misura, possono ripercorrere quelli dell'umanità. Detto in altre parole, gli "errori" dei nostri studenti a volte non sono errori, ma tentativi di far… quadrare concezioni precedenti in situazioni nuove. Conoscere la ventura storica umana di una creazione così delicata dà criteri per riconoscere situazioni che, troppo banalmente a volte, sono stigmatizzate come errori.
Il libro prosegue quindi con una seconda parte, nella quale vengono presentati lavori di ricerca che hanno trattato il tema dell'infinito dal punto di vista della didattica e che sono stati importanti per il concepimento stesso del testo. Essi analizzano come soggetti di ricerca sia gli insegnanti che gli studenti.
Il terzo e quarto capitolo, dedicati alla riflessione didattica, si sono avvalsi delle argomentazioni presentate nelle prime due, per dare la possibilità al Lettore di capire ciò che sta alla base degli ostacoli epistemologici e didattici relativi al tema dell'infinito; ostacoli che giustificano e spiegano, dando loro un senso, le convinzioni errate degli insegnanti e degli allievi che sono state

messe in evidenza. Per trattare questo argomento, oltre agli ostacoli epistemologici è necessario riconoscere anche gli ostacoli didattici, certamente ancora più influenti e determinanti nella formazione individuale, dato che condizionano e determinano gli apprendimenti degli allievi.

3.3 Le appendici

Scopo delle appendici è di evitare al Lettore di dover ricorrere a consultazioni bibliografiche o elettroniche, permettendo così un non trascurabile guadagno di tempo. La prima propone le biografie e le opere dei personaggi più importanti che si incontrano nel capitolo 1. Nella seconda si trovano le descrizioni sintetiche delle correnti filosofiche citate nel testo.

4. Brevi conclusioni

Riteniamo, nostro malgrado, che le bellezze culturali dell'infinito sono riservate a pochi intellettuali, mentre dovrebbero invece far parte del bagaglio professionale degli insegnanti, di ogni livello; non per fare dell'infinito ulteriore materia specifica di studio, ma per evitare di bloccare quelle menti che vorrebbero volare alto, ma non trovano le spinte adatte. Questo libro ha la pretesa di proporre riflessioni molto elementari sull'infinito matematico a tutti coloro che vorranno farle proprie e la speranza di fornire materiale professionalmente utile agli insegnanti di qualsiasi livello scolastico.

Bibliografia

D'Amore B., Arrigo G. (1992). *Infiniti*. Milano: Franco Angeli.
D'Amore B., Arrigo G., Sbaragli S. (2009). *Infiniti infiniti*. In corso di stampa.

Parole chiave: infinito matematico; storia della matematica; didattica della matematica; biografie; correnti filosofiche.