算法分析与设计第五次作业

黄丛宇 2010212439

October 27, 2010

1 实验环境

- CPU: Intel(R) Core(TM)2 Duo CPU T5870 2.00GHz
- MEM: 1GB
- OS : Debian 5.0 （1GB swap）
- Java: java version "1.6.0_21"

2 Exercise 15.5-4

由于$root[i, j-1] \leq root[i, j] \leq root[i+1, j]$，因此，算法的最内层循环不需要从i循环到j，而只需从root[i, j-1]循环到root[i+1, j]。算法如下：

```
Optimal-Adv-BST(p,q,n)
    for i <- 1 to n+1
    do
        e[i, i-1] <- qi-1
        w[i, i-1] <- qi-1
    for i <- 1 to n
        do
            root[i,i] <- i
    for k <- 1 to n
        do
            for i <- 1 to n-k+1
                do
                    j <- i+k-1
                    e[i,j] <- ∞
                    w[i,j] <- w[i,j-1]+pj+qj
                    for r <- root[i,j-1] to root[i+1, j]
                            do
                                t <- e[i, r-1]+e[r+1,j]+w[i,j]
                                if t < e[i,j]
```

```
                                then
                                    e[i,j] <- t
                                    root[i,j] <- r
    return e and root
```

对于上面的算法，时间复杂度为：

$$n\sum_{k\leq j\leq n, i=j-k}(root[i+1,j]-root[i,j-1]+1)$$
$$=n(root[n-k+1,n]-root[0,k-1]+n-d+1)\leq 2n^2=O(n^2)$$

所以，改进后的算法复杂度为$O(n^2)$。

3 Exercise 16.2-2 knapsack

对于物品i，要么放入包中，要么不放。记物品i的重量为w[i]，价值为v[i]，包的容量为W。

- 如果物品i放入包中，那么，包的容量相当于变成了W-w[i]。因此，问题转换成除去物品i 之外的其他物品，放到容量为W-w[i]的包中，得到最大的价值。
- 如果物品i不放入包中，那么相当于没有物品i。问题转换成计算除物品i之外的其他物品放入容量为W的包中，得到最大价值。

用p[i,j]表示背包容量为j，物品为前i个时，所能得到的最大容量。那么：

$$p[i][j]=max(p[i-1][j],p[i-1][j-w[i]]+v[i])$$

如果p[i][j]是最优解，那么构造p[i][j]的p[i-1][j]和p[i-1][j-w[[i]]也是最优解。如果不是，那么这两个子问题必然还有一个最优解，那么用这两个最优解通过上面递推式可以构造出p[i][j]比当前的最优解还优。这和当前的p[i][j]是最优解矛盾。

通过观察上面的递推式可以得出。每次计算p[i][j]的时候仅仅使用了p[i-1]行，因此，可以将p压缩成一个一维数组。压缩后的递推式为：

$$p[j]=max(p[j],p[j-w[i]]+v[i])$$

使用一个pre的二维数组来构造最优解，pre[i][j]表示背包容量为j是，物品i是否放入包中。

算法的核心代码如下：

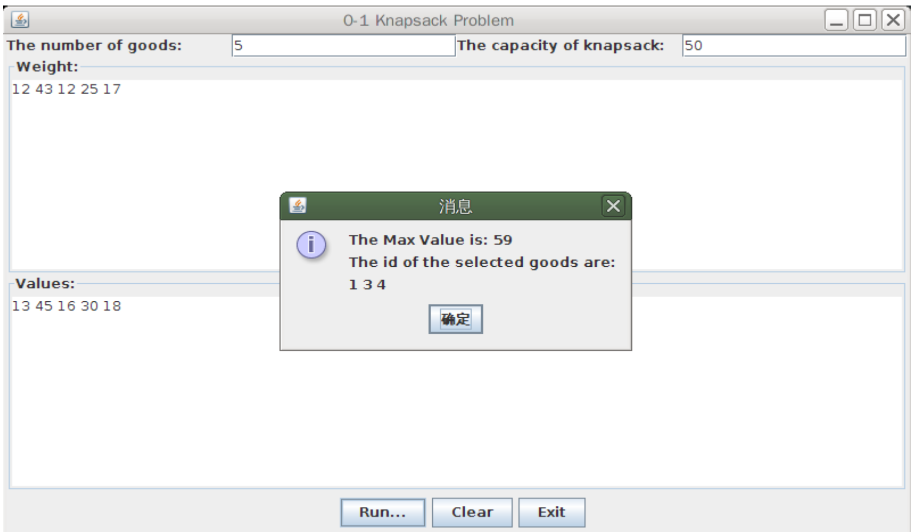
```
public static int run(final int[] w, final int[] v, int pc
    )
{
  int[] p = new int[pc + 1];
```

```
        pre = new int[w.length + 1][pc + 1];

        //初始化只有一个物品的情况。
        for(int i = w[0];i <= pc; ++i){
            p[i] = v[0];
            pre[1][i] = 1;
        }
        for(int i = 2; i <= w.length; ++i){
            for(int j = pc; j > 0; --j){
                if(j >= w[i - 1]
                    && p[j - w[i - 1]] + v[i - 1]
                              > p[j]){
                    p[j] = p[j - w[i - 1]]
                             + v[i - 1];
                    pre[i][j] = 1;
                }else{
                    pre[i][j] = 0;
                }
            }
        }
        return p[pc];
    }
```

算法的外循环循环n次，内循环W次。因此算法的时间复杂度为$O(nW)$
运行命令 java -jar knapsack.jar 。运行结果如图1：

Figure 1 运行结果



4 Exercise 16.2-6

可以将物品分成单位重量大小，然后按照分好的物品的价值，使用线性选择，选出前W（背包容量）大（价值大）的物品。这就得到了最优解。但是，这种算法的时间复杂度为$O(\sum_{i=1}^{n} w[i])$。

分析上面的算法。对于前W大的物品，其中必然是包含若干个单位价值最大的物品的全部分块。还可能包含一个物品的若干分块。因此，可以不对物品进行预先分成单位质量。只需要直到这个可能存在的需要分割的物品即可。

- 首先，计算所有物品的价值密度（单位质量的价值）。
- 使用9.3节中的线性选择算法按照物品的价值密度进行选择，但事先并不确定所要选择的是第几大的元素。
- 在划分的同时，计算划分到前半部的物品的总质量。划分的时间复杂度保持不变。
- 按照前半部的总质量，决定下面的步骤：
  - 如果前半部分的总质量大于背包容量，则继续对前半部进行查找。
  - 如果前半部分的总质量小于背包容量，则对后半部进行查找，但背包的容量变成原来的容量减去前半部分的总质量。
  - 如果前半部分的总质量等于背包容量，那么算法结束。找到最优解。
- 如果算法最后停止在某一个物品上，但没有找到上面第三小步的情况。那么这个物品需要被分割。计算此物品前的所有物品的质量，得到所要分割的大小。进而得到最优解。

计算所有物品的价值密度需要$\Theta(n)$的时间，中间的选择和原算法的时间复杂度一样，为 $O(n)$。最后可能出现的分割需要$\Theta(n)$。因此，算法的时间复杂度为$2\Theta(n) + O(n) = O(n)$

5 Exercise 16.3-6

定理 1. C是一个字母集合，对于字母$c \in C$，有一个对应的频率f[c]。设x, y, z是C中三个频率最低的字母。那么，存在C的一种最优字符编码形式，使得x, y, z的编码长度一样且只有最后一位不同。

定理 2. C是一个字母集合，对于字母$c \in C$，有一个对应的频率f[c]。设x, y, z是C中三个频率最低的字母。令$C' = C - \{x, y, z\} \cup \{r\}, f[r] = f[x] + f[y] + f[z]$。$T'$表示$C'$ 的一个最优前缀编码树。那么，从T'中用以x, y, z为子节点的节点代替r，得到数T，那么 T是C的一棵最优前缀编码树。

首先，可以通过类似Huffman编码的方式构造最优前缀编码树。只是，每次选择频率最小的三个节点。构造出来的树是一棵三叉树。

对于定理1，可以使用课本中同样的方法证明。选择一棵最优前缀编码树T的最低的三个节点，依次替换成x, y, x，得到的三棵树用T',T'',T'''表示。根据课本中的方法，可以得到:

$$\begin{aligned}&B(T) - B(T') \geq 0\\&B(T') - B(T'') \geq 0\\&B(T'') - B(T''') \geq 0\end{aligned}$$

并且$B(T) \leq B(T')$。因此，可以得到$B(T) = B(T') = B(T'') = B(T''')$。因此，最后得到的 T'''也是一棵最优前缀编码树。因此得证。

对于定理2。同样使用课本中的证明方法。依据课本中的方法，有：

$$\begin{aligned}f[x]d_T(x) + f[y]d_T(y) + f[z]d_T(z) \quad &= (f[x] + f[y] + f[z])(d_{T'}(z) + 1)\\&= f[r]d_{T'}(r) + (f[x] + f[y] + f[z])\end{aligned}$$

可以得到：

$$B(T') = B(T) - f[x] - f[y] - f[z]$$

假设T不是C的最优前缀编码树，那么，存在树T''是C的最优前缀编码树，$B(T'') < B(T)$。不失一般性，T''有节点x, y, z并且是兄弟节点。设树T'''是从树T''替换x, y, z为r得到的， $f[r] = f[x] + f[y] + f[z]$。那么：

$$\begin{aligned}B(T''') \quad &= B(T'') - f[x] - f[y] - f[z]\\&< B(T) - f[x] - f[y] - f[z]\\&= B(T')\end{aligned}$$

这和T'是C'的最优前缀编码树矛盾。因此，T一定是C的最优前缀编码树。