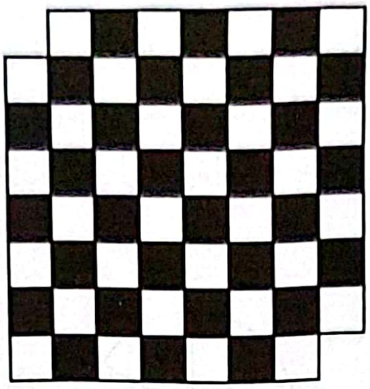
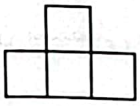


شکل۲.۱

مسائل

۱.۲.۱ ثابت کنید صفحهٔ شطرنجی ۱۰ × ۱۰ را نمی‌توان با ۲۵ موزاییک مانند شکل ۳.۱ پوشاند.

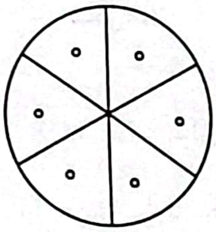


شکل۳.۱

۲.۲.۱ در هر یک از خانه‌های صفحهٔ شطرنجی ۷ × ۷ یک مهره قرار دارد. تصمیم می‌گیریم که در یک لحظه هر یک از مهره‌ها را برداریم و به خانه‌ای مجاور خانهٔ قبلی منتقل کنیم و در ضمن در هیچ خانه‌ای بیش از یک مهره قرار نگیرد. آیا قادر به انجام این کار هستیم؟

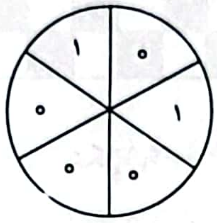
*۳.۲.۱ قرینهٔ مثلث متساوی‌الاضلاعی را نسبت به یکی از اضلاع آن رسم کرده‌ایم. قرینهٔ مثلث جدید را هم نسبت به یکی از اضلاع خودش رسم کرده‌ایم. این عمل را چند بار تکرار کرده‌ایم. در پایان معلوم شد که آخرین مثلث بر مثلث اصلی منطبق است. ثابت کنید تعداد عملهای قرینه کردن عددی زوج است (المپیاد ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۸).

*۴.۲.۱ دایره‌ای را به شش قطاع تقسیم کرده‌ایم و در هر قطاع مهره‌ای قرار داده‌ایم. در هر گام می‌توانیم دو مهره را انتخاب و هر یک را به قطاعی مجاور منتقل کنیم. آیا با تکرار این عمل می‌توانیم هر شش مهره را در یک قطاع جمع کنیم؟



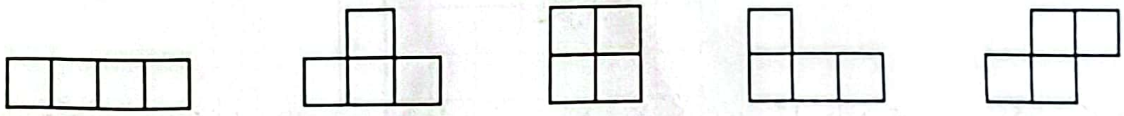
شکل۴.۱

۵.۲.۱* دایره‌ای را به شش قطاع تقسیم کرده‌ایم و در هر یک یکی از اعداد ۰ و ۱ را همانند شکل ۵.۱ قرار داده‌ایم. در هر حرکت می‌توانیم دو قطاع مجاور را انتخاب و به عدد واقع در هر یک، یک واحد اضافه کنیم. ثابت کنید با تکرار این عمل نمی‌توانیم به حالتی برسیم که اعداد واقع در قطاعها با هم برابر باشند.



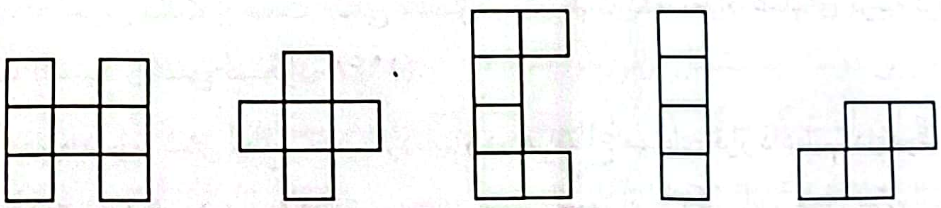
شکل ۵.۱

۶.۲.۱ آیا با ۵ موزاییک شکل ۶.۱ می‌توان مستطیلی به مساحت ۲۰ ساخت (از هر نوع موزاییک یک عدد در اختیار داریم)؟



شکل ۶.۱

۷.۲.۱* می‌خواهیم زمینی مستطیل شکل به ابعاد ۱۳۷ × ۵ را با موزاییکهای شکل ۷.۱ فرش کنیم. ثابت کنید این عمل ممکن نیست. (المپیاد ریاضی ایران، ۱۳۶۹).

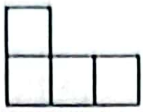


شکل ۷.۱

۸.۲.۱* ثابت کنید صفحهٔ شطرنجی ۱۰ × ۱۰ را نمی‌توان با ۲۵ عدد موزاییک ۴ × ۱ پوشاند.

۹.۲.۱* می‌خواهیم صفحهٔ شطرنجی ۲n × ۲n را با یک عدد موزاییک ۲ × ۲ و $n^{۲}$ − ۱ عدد موزاییک ۴ × ۱ بپوشانیم. به‌ازای چه n هایی این کار ممکن است؟ (المپیاد ریاضی ایران، ۱۳۷۸).

*۱۰.۲.۱ ثابت کنید صفحهٔ شطرنجی ۱۰ × ۱۰ را نمی‌توان با ۲۵ عدد موزاییک شکل ۸.۱ پوشاند.



شکل ۸.۱

*۱۱.۲.۱ چهار گوشهٔ صفحهٔ شطرنجی ۱۶ × ۱۶ را حذف کرده‌ایم. آیا می‌توان شکل باقی‌مانده را با ۶۵ موزاییک شکل ۸.۱ پوشاند؟

*۱۲.۲.۱ یک گوشه از صفحهٔ شطرنجی ۸ × ۸ حذف شده است. آیا می‌توان شکل باقی‌مانده را با ۲۱ عدد موزاییک ۳ × ۱ پوشاند؟

*۱۳.۲.۱ می‌خواهیم صفحهٔ شطرنجی ۵ × ۵ را با ۸ عدد موزاییک ۳ × ۱ و یک عدد موزاییک ۱ × ۱ بپوشانیم. ثابت کنید موزاییک ۱ × ۱ باید در مرکز این صفحهٔ شطرنجی قرار گیرد.

*۱۴.۲.۱ روی صفحهٔ شطرنجی ۸ × ۸ می‌توانیم یک مهره را یک خانه به طرف بالا، یک خانه به طرف راست و یا یک خانه در جهت قطری به سمت چپ و پایین حرکت دهیم. آیا می‌توانیم از خانهٔ گوشهٔ پایین سمت چپ شروع به حرکت کنیم و از همهٔ خانه‌های صفحهٔ شطرنجی دقیقاً یک بار عبور کنیم.

*۱۵.۲.۱ آیا با $\frac{۱۱^۳ - ۹^۳}{۲}$ عدد آجر ۲ × ۱ × ۱ می‌توان پوستهٔ خارجی یک مکعب ۱۱ × ۱۱ × ۱۱ را ساخت؟

۳.۱ مسئله‌ای از زوجیت

در ترکیبیات مسئله‌های مربوط به بخش‌پذیری، به‌ویژه بخش‌پذیری بر ۲، و اعداد زوج و فرد بسیارند. در این بخش یکی از این مسائل را مطرح می‌کنیم.

مسئله این است که ۸ سکه طوری در یک ردیف قرار دارند که به غیر از سکهٔ اول که به رو قرار دارد بقیهٔ سکه‌ها به پشت‌اند (شکل ۹.۱ را ببینید). در هر گام می‌توانیم یکی از سکه‌ها را انتخاب کنیم و این سکه را به همراه دو سکهٔ مجاورش (در صورت وجود) برگردانیم (توجه کنید اگر یکی از دو سکهٔ انتهایی انتخاب شوند، دو سکه و در غیراین صورت سه سکه برگردانده می‌شود). آیا با تکرار این عمل می‌توانیم همهٔ سکه‌ها را به پشت برگردانیم؟

خوب است قبل از مطالعه ادامهٔ متن سعی کنید این مسئله را حل کنید.

فرض کنید بتوانیم پس از چند گام همهٔ سکه‌ها را به پشت برگردانیم. فرض کنید در طول این گامها a_1 بار سکهٔ اول، a_2 بار سکهٔ دوم، ... و a_8 بار سکهٔ هشتم را انتخاب کرده باشیم. دراین صورت سکهٔ

۳.۳.۱ ۱۰ کارت در اختیار داریم. روی هر یک از این کارتها یکی از اعداد ۱، ۳ و ۵ نوشته شده است. آیا ممکن است مجموع اعداد روی این ۱۰ کارت برابر ۲۵ شود؟

۴.۳.۱ یک هفت‌ضلعی محورتقارن دارد. ثابت‌کنید این محورتقارن از یکی از رأسهای هفت‌ضلعی می‌گذرد.

*۵.۳.۱ آیا می‌توان علامتهای + و − را طوری انتخاب کرد که

$$\pm۱\pm۲\pm\ldots\pm۱۰۰ = ۱۰۱$$

*۶.۳.۱ روی تخته‌سیاه سه ستون عدد نوشته شده است، به‌طوری‌که در هر ستون هیچ عددی بیش از یک‌بار نیامده است. در ستون چهارم همهٔ عددهایی را می‌نویسیم که درست یک‌بار در ستونهای اول و دوم آمده‌اند. در ستون پنجم همهٔ عددهایی را می‌نویسیم که درست یک‌بار در ستونهای سوم و چهارم آمده‌اند. در ستون ششم همهٔ عددهایی را می‌نویسیم که درست یک‌بار در ستونهای دوم و سوم آمده‌اند و در ستون هفتم همهٔ عددهایی را می‌نویسیم که درست یک‌بار در ستونهای اول و ششم آمده‌اند. ثابت کنید اعداد نوشته شده در ستونهای پنجم و هفتم یکسان‌اند.

۷.۳.۱ کلاسی ۷ تیم فوتبال دارد. آیا می‌توان طوری برنامه‌ریزی کرد که این تیمها در زنگ ورزش به‌ترتیب ۵، ۳، ۴، ۴، ۳، ۶ و ۴ بازی انجام دهند؟ (دو تیم می‌توانند بیش از یک‌بار با هم بازی کنند.)

۸.۳.۱ در هر یک از خانه‌های جدول $n \times ۲$ یکی از دو عدد ۰ و ۱ نوشته شده است. در هر سطر تعداد صفرها با تعداد یکها برابر است و در ضمن تعداد ستونهایی از جدول که دو عدد برابر دارند برابر تعداد ستونهایی است که دو عدد مختلف دارند. ثابت کنید n بر ۴ بخش‌پذیر است.

۹.۳.۱ ۱۰۰ توپ در یک ردیف به ترتیب با شماره‌های ۱ تا ۱۰۰ از چپ به راست قرار داده شده‌اند. در هر گام می‌توانیم جای دو توپ را که فقط یک توپ بین آنها قرار دارد عوض کنیم. آیا می‌توانیم با تکرار این عمل توپها را به ردیف عکس درآوریم؟

۱۰.۳.۱ ثابت کنید معادلهٔ

$$\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}+\frac{۱}{d}=۱$$

در مجموعهٔ اعداد فرد جواب ندارد.

۱۱.۳.۱ در هر یک از خانه‌های جدول ۴ × ۴ عدد صفر قرار داده شده است. در هر گام می‌توانیم ۵ خانهٔ دلخواه از جدول را انتخاب و به عدد هر خانه یک واحد اضافه کنیم. آیا با تکرار این عمل می‌توانیم به جدولی برسیم که در هر خانهٔ آن عدد ۹ نوشته شده است؟

۱۲.۳.۱ در یک خانه از صفحهٔ شطرنجی ۸ × ۸ یک مهرهٔ اسب قرار دارد. ۱۲۳ بار این مهره را در صفحه حرکت داده‌ایم. آیا ممکن است که اسب در سر جای اولش باشد؟

*۱۳.۳.۱ دنبالهٔ

۱, ۳, ۷, ۸, ۹, ۹, ۷, ۱, ۵, ۲, ۵, ۳, ۵, ۵, ۸, ۱, ۹, ...

را درنظر بگیرید. در این دنباله از جمله پنجم به بعد، هر جمله برابر رقم یکان مجموع چهار جملهٔ قبل از خود است. آیا در این دنباله ۱, ۲, ۳, ۴، با همین ترتیب، ظاهر می‌شود؟

*۱۴.۳.۱ در یک کیسه ۵۰ مهرهٔ سفید و ۲۵ مهرهٔ سیاه وجود دارد. در بیرون کیسه نیز به اندازهٔ کافی از این مهره‌ها داریم. هر بار از داخل کیسه دو مهره بیرون می‌آوریم. اگر دو مهره همرنگ بودند یک مهرهٔ سفید و اگر دو مهره غیرهمرنگ بودند یک مهرهٔ سیاه درکیسه می‌اندازیم. این عمل را ۷۴ بار تکرار می‌کنیم تا در نهایت یک مهره درکیسه بماند. رنگ این مهره چیست؟

*۱۵.۳.۱ روی تخته سیاه عددهای ۱ تا ۵۰ را نوشته‌ایم. هر بار دو عدد دلخواه را پاک می‌کنیم و تفاضل آن دو عدد را روی تخته سیاه می‌نویسیم. این کار را ادامه می‌دهیم تا فقط یک عدد روی تخته باقی بماند. آیا ممکن است این عدد برابر صفر باشد؟

*۱۶.۳.۱ آیا ممکن است اعداد ۱، ۱، ۲، ۲، ...، ۵۰ و ۵۰ را در یک ردیف طوری بنویسیم که بین هر دو عدد مانند k دقیقاً k عدد قرار داشته باشند ($k = ۱, ۲, ..., ۵۰$)؟

*۱۷.۳.۱ سه توپ در یک ردیف قرار دارند. در هرگام می‌توانیم جای دو توپ را با یکدیگر عوض کنیم. این عمل را ۷۵ بار تکرار می‌کنیم. آیا ممکن است توپها به همان ترتیب اولیه باشند؟

*۱۸.۳.۱ مریخی در نیمه شب متولد می‌شود و درست ۱۰۰ شبانه‌روز زندگی می‌کند. می‌دانیم در طول تاریخ تمدن مریخ روی هم به تعداد فردی مریخی به دنیا آمده است. ثابت کنید حداقل ۱۰۰ روز وجود دارد که تعداد ساکنان مریخ در هر یک از این روزها عددی فرد بوده است (المپیاد ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۶).

*۱۹.۳.۱ در یک گروه ملی ۱۰۰ نفر عضویت دارند و هر شب سه نفر نگهبانی می‌دهند. ثابت کنید نمی‌توان برنامهٔ نگهبانیها را طوری تنظیم کرد که هر دو نفر دقیقاً یک‌بار با هم نگهبانی بدهند (المپیاد ریاضی شوروی، ۱۹۶۵).

*۲۰.۳.۱ در یک جعبه ۱۲ مهرهٔ سفید، ۱۵ مهرهٔ سیاه و ۱۷ مهرهٔ سبز وجود دارد. بیرون جعبه نیز به تعداد کافی از این مهره‌ها در اختیار داریم. در هر مرحله دو مهرهٔ غیرهمرنگ از جعبه خارج می‌کنیم و یک مهره از رنگ دیگر در جعبه می‌اندازیم. این عمل را تکرار می‌کنیم. اگر فقط یک مهره در جعبه باقی‌مانده باشد رنگ این مهره چیست؟

*۲۱.۳.۱ آیا عددی ۹ رقمی با رقمهای ۱ تا ۹ می‌توان نوشت که بین ۱ و ۲ تعداد فردی رقم، بین ۲ و ۳ تعداد فردی رقم، ... و بین ۸ و ۹ نیز تعداد فردی رقم وجود داشته باشد؟

۲۲.۳.۱* ۱۰۱ خط راست روی صفحه چنان‌اند که هیچ دوتایی موازی نیستند و هیچ سه‌تایی از یک نقطه نمی‌گذرند. آیا می‌توان در نقطه برخورد هر دو خط یکی از اعداد ۱ تا ۱۰۰ را طوری قرار داد که روی هر خط راست همهٔ اعداد ۱ تا ۱۰۰ دیده شوند؟

۲۳.۳.۱* ۸ رخ در صفحهٔ شطرنج 8×8 طوری قرار دارند که هیچ دوتایی یکدیگر را تهدید نمی‌کنند. ثابت کنید تعداد رخهایی که در خانه سیاه قرار دارند عددی زوج است (المپیاد ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۹).

۲۴.۳.۱* صفحهٔ شطرنج 6×6 را با ۱۸ دومینو پوشانده‌ایم. ثابت کنید می‌توان این صفحهٔ شطرنج را با یک خط راست افقی یا عمودی به دو قسمت تقسیم کرد به‌طوری‌که به هیچ‌یک از دومینوها لطمه‌ای وارد نشود (المپیاد ریاضی شوروی، ۱۹۶۳).

۴.۱ مسئله‌ای مقدماتی

فرض کنید در هر خانه از یک جدول $r \times s$ یک عدد نوشته شده باشد. بزرگترین عدد از هر سطر را انتخاب می‌کنیم و کوچکترین عدد در میان آنها را m می‌نامیم. همچنین کوچکترین عدد از هر ستون را انتخاب می‌کنیم و بزرگترین عدد در میان آنها را M می‌نامیم. به‌عنوان مثال در جدول 3×4 شکل۱۰.۱ بزرگترین عدد سطرهای اول، دوم و سوم به ترتیب برابر ۷، ۱۵ و ۱۴ است و درنتیجه $m = 7$. همچنین کوچکترین عدد ستونهای اول، دوم، سوم و چهارم به ترتیب برابر ۵ ،۴، ۱ و ۳ است و درنتیجه $M = 5$. ثابت کنید اعداد جدول به هر صورت که باشند $m \geq M$.

۵	۷	۱	۳
۱۱	۱۵	۹	۸
۶	۴	۱۴	۷

شکل۱۰.۱

برای اثبات این مطلب توجه کنید که عدد m بزرگترین عدد در سطر خود و عدد M کوچکترین عدد در ستون خود است. اکنون فرض کنید عدد واقع در محل برخورد سطر شامل m و ستون شامل M برابر با a باشد (شکل ۱۱.۱ را ببینید). دراین‌صورت، چون m و a در یک سطر قرار دارند و m بزرگترین عدد در سطر خود است، پس $m \geq a$. با استدلالی مشابه معلوم می‌شود $a \geq M$. پس $m \geq M$.