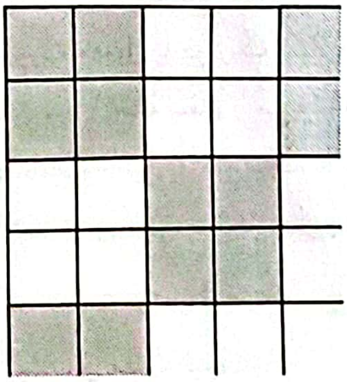
۵.۲.۱ قطاعها را به‌طور متناوب سیاه و سفید کنید و مجموع اعداد در قطاعهای سیاه را برابر با a و مجموع اعداد در قطاعهای سفید را برابر با b بگیرید و حاصل $a - b$ را در هر مرحله درنظر بگیرید.

۶.۲.۱ اگر صفحهٔ شطرنج را به‌صورت متداول رنگ کنیم، آنگاه در هر مستطیل با مساحت ۲۰، ۱۰ خانهٔ سفید و ۱۰ خانهٔ سیاه وجود دارد. از ۵ موزاییک شکل ۶.۱، ۴ عدد هر یک ۲ خانهٔ سفید را می‌پوشانند و موزاییک باقی‌مانده یا ۳ خانهٔ سفید و یا ۱ خانهٔ سفید را می‌پوشاند. پس ممکن نیست این ۵ موزاییک دقیقاً ۱۰ خانهٔ سفید را بپوشانند.

۷.۲.۱ زمین مستطیل شکل را همانند صفحهٔ شطرنج به رنگ سیاه و سفید درآورید. دراین‌صورت اختلاف تعداد خانه‌های سیاه و سفید این زمین برابر با ۱ است. از طرف دیگر، به هر طریق موزاییکهای شکل ۷.۱ در این زمین قرار گیرند، اختلاف تعداد خانه‌های سیاه و سفیدی که می‌پوشانند یا ۰ است یا ۳. اگر عمل موردنظر ممکن باشد، آنگاه اختلاف تعداد خانه‌های سیاه و سفید زمین باید مضرب ۳ باشد.

۸.۲.۱ روش اول. صفحهٔ شطرنجی را به بلوکهای ۲ × ۲ افراز و این بلوکها را به‌طور متناوب سیاه و سفید کنید.

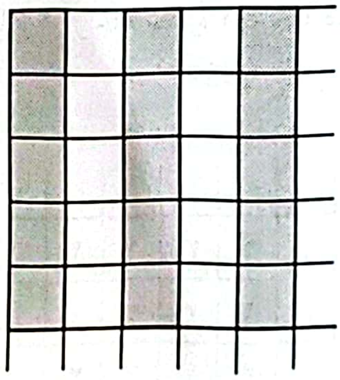


روش دوم. صفحهٔ شطرنجی را با ۴ رنگ طوری رنگ کنید که موزاییک ۴ × ۱ به هر نحو در این صفحه قرارگیرد دقیقاً یک خانه از هر رنگ را بپوشاند. سپس تعداد خانه‌های از هر رنگ را بشمارید.

۱	۲	۳	۴	۱	
۲	۳	۴	۱	۲	
۳	۴	۱	۲	۳	
۴	۱	۲	۳	۴	
۱	۲	۳	۴	۱	

۹.۲.۱ به راحتی می‌توانید ببینید که به‌ازای nهای فرد می‌توان صفحه را پوشاند. اگر n زوج باشد، صفحهٔ شطرنجی را همانند شکل روش دوم حل مسئلهٔ ۸.۲.۱ با ۴ رنگ رنگ‌آمیزی کنید و نتیجه بگیرید که نمی‌توان صفحه را با موزاییکهای موردنظر پوشاند. روش دیگر استفاده از رنگ‌آمیزی مسئلهٔ بعد است. با استفاده از این رنگ‌آمیزی ثابت کنید که تعداد موزاییکهای ۴ × ۱ افقی و همچنین عمودی باید فرد باشند.

۱۰.۲.۱ ستونهای صفحهٔ شطرنجی را به‌طور متناوب سیاه و سفید کنید. ادامه کار مشابه راه‌حل مسئلهٔ ۱.۲.۱ است.



۱۱.۲.۱ ستونهای شکل باقی‌مانده را به‌طور متناوب سیاه و سفید کنید.

۱۲.۲.۱ خانه‌های شکل باقی‌مانده را با ۳ رنگ، رنگ‌آمیزی کنید و تعداد خانه‌های از هر رنگ را بشمارید.

	۲	۳	۱	۲	
۲	۳	۱	۲	۳	
۳	۱	۲	۳	۱	
۱	۲	۳	۱	۲	
۲	۳	۱	۲	۳	

۱۳.۲.۱ از رنگ‌آمیزی با ۳ رنگ استفاده کنید. موزاییک ۱ × ۱ باید در خانه‌ای به رنگ ۲ قرار گیرد که خانه‌های متقارن این خانه نیز به رنگ ۲ هستند.

۱	۲	۳	۱	۲
۲	۳	۱	۲	۳
۳	۱	۲	۳	۱
۱	۲	۳	۱	۲
۲	۳	۱	۲	۳

۱۴.۲.۱ صفحهٔ شطرنجی را با ۳ رنگ ۱، ۲ و ۳ طوری رنگ کنید که مهره از خانه شمارهٔ ۱ با هر نوع حرکتی به خانهٔ شمارهٔ ۲، از خانهٔ شمارهٔ ۲ به خانهٔ شمارهٔ ۳، و از خانهٔ شمارهٔ ۳ به خانهٔ شمارهٔ ۱ برود.

۱	۲	۳	۱	۲	
۳	۱	۳	۳	۱	
۲	۳	۱	۲	۳	
۱	۲	۳	۱	۲	

۱۵.۲.۱ پوستهٔ خارجی مکعب ۱۱ × ۱۱ × ۱۱ را به بلوکهای ۱ × ۱ × ۱ تجزیه و این بلوکها را به‌طور متناوب سیاه و سفید و ثابت کنید تعداد بلوکهای سیاه و سفید با هم برابر نیستند.

۳.۱

۵.۳.۱ ثابت کنید عبارت سمت چپ همواره عددی زوج است.

۶.۳.۱ ثابت کنید اعداد هر یک از ستونهای پنجم و هفتم دقیقاً اعدادی هستند که در تعداد فردی از ستونهای اول، دوم و سوم آمده‌اند.

تذکر. راه‌حل این مسئله درواقع اثبات شرکت‌پذیری عمل تفاضل متقارن در مجموعه‌هاست

$$(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$$

۷.۳.۱ در جدول بازیها، مجموع تعداد بازیهای تیمها با دو برابر تعداد بازیهای انجام شده برابر است و درنتیجه باید عددی زوج باشد.

۱۲.۳.۱ در هر حرکت، رنگ خانه‌ای که اسب در آن قرار دارد عوض می‌شود.

۱۳.۳.۱ در دنباله، از جملهٔ پنجم به بعد متناوباً ۴ جمله فردند و یک جمله زوج است.

۱۴.۳.۱ تعداد مهره‌های سیاه داخل کیسه همواره عددی فرد است.

۱۵.۳.۱ مجموع اعداد روی تخته همواره عددی فرد است.

۱۶.۳.۱ فرض کنید بتوان اعداد را در یک ردیف طوری قرار داد که ویژگی مورد نظر برقرار باشد و دو عدد k در مکانهای a_k و $a_k + k + ۱$ در این ردیف قرار داشته باشند، $k = ۱, ۲, \ldots, ۵۰$. دراین صورت

$$۱ + ۲ + \cdots + ۱۰۰ = a_۱ + (a_۱ + ۲) + a_۲ + (a_۲ + ۳)$$
$$+ \cdots + a_{۵۰} + (a_{۵۰} + ۵۱)$$

سمت چپ این تساوی عددی زوج و سمت راست آن عددی فرد است.

۱۷.۳.۱ توپها را با a، b و c نشان می‌دهیم. فرض کنید توپها در ابتدا به‌صورت a, b, c قرار گرفته باشند. ثابت کنید اگر عمل موردنظر را k مرتبه تکرارکنیم، که k عددی فرد است، ترتیب توپها به یکی از سه صورت a, c, b، b, a, c و c, b, a است.

۱۸.۳.۱ فرض کنید تعداد روزها در یک سال مریخ برابر ۱۰۰ باشد و $۱ \leq k \leq ۱۰۰$. روز kام هر یک از سالهای تمدن مریخ را درنظر بگیرید. مجموع تعداد مریخیهایی که در این روزها زنده بوده‌اند برابر با تعداد کل مریخیهای تاریخ تمدن مریخ است که عددی فرد است. درنتیجه در روز kام یکی از این سالها، تعداد ساکنان مریخ عددی فرد بوده است.

۱۹.۳.۱ یکی از افراد را درنظر بگیرید. تعداد شبهایی که این فرد باید نگهبانی دهد برابر است با $\frac{۹۹}{۲}$!

۲۰.۳.۱ زوجیت تعداد مهره‌های سیاه و سبز داخل جعبه همواره یکسان است.

۲۱.۳.۱ ثابت کنید اگر چنین عددی وجود داشته باشد، آنگاه بین ۱ و ۳، ۱ و ۴، ... و ۱ و ۹ تعداد فردی رقم وجود دارد.

۲۲.۳.۱ اگر چنین کاری ممکن باشد، تعداد یکها برابر با $\frac{۱۰۱}{۲}$ می‌شود!

۲۳.۳.۱ سطرها و ستونها را به ترتیب با اعداد ۱ تا ۸ شماره‌گذاری کنید. رنگ خانهٔ واقع در سطر i و ستون j سفید است اگر و فقط اگر $i + j$ زوج باشد. فرض کنید ۸ رخ در خانه‌های $(i_۱, j_۱)$، ... و $(i_۸, j_۸)$ قرار گرفته باشند. ثابت کنید

$$i_۱ + j_۱ + i_۲ + j_۲ + \cdots + i_۸ + j_۸ = ۲(۱ + ۲ + \cdots + ۸)$$

و حکم را نتیجه بگیرید.

۲۴.۳.۱ ثابت کنید اگر حکم درست نباشد با برش صفحه روی هر خط افقی و عمودی حداقل دو دومینو لطمه می‌بینند و نتیجه بگیرید حداقل ۲۰ دومینو در صفحهٔ شطرنجی قرار دارد.