Модуль 8. Вычисление некоторых неопределённых интегралов. Гамма-функция

8.1. Вводные замечания к теме

Операция интегрирования технически сложнее, нежели дифференцирование. Если про функцию известно, что она дифференцируема, то сколь бы сложной она ни была, её производную можно найти. Что касается интегрирования, то вычислить можно далеко не любой интеграл. Бывают, например, случаи, когда неопределённый интеграл от функции вычислить не удаётся, а определённый интеграл от той же функции вычисляется (не в любых пределах, конечно!). Бывает, что не вычисляется и определённый интеграл. Эта лекция посвящена простейшим случаям и методикам вычисления неопределённых интегралов.

Прежде всего, необходимо знать следующие табличные интегралы (константа интегрирования далее не пишется, хотя всюду предполагается):

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1};\ n \neq -1,\ \int \frac{dx}{x} = \ln|x|$$

$$\int \cos x dx = \sin x,\ \int \sin x dx = -\cos x$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x\,,\ \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a};\ a \neq 0$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a}\,,\ \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$$

Дальше будем разбирать методики вычисления интегралов на конкретных примерах.

8.2. Простейшие методы интегрирования

Пример 1.

Вычислить

$$I_1 = \int (ax+b)^n dx$$

Раскрывать подынтегральное выражение, разумеется, не нужно. Здесь нужна *замена переменной интегрирования*. Делать замену можно по-разному. Наиболее наглядный метод (к сожалению, работает не всегда) – подвести под дифференциал некоторые функции, после чего вид замены станет очевиден. Например, в интеграле I_1 можно получить под дифференциалом выражение в скобках. Цель этого действия ясна: мы знаем интеграл от функции x^n, поэтому к нему и нужно свести вычисление данного интеграла. Для начала умножим переменную интегрирования под дифференциалом на константу a, но тогда весь интеграл нужно разделить на эту же константу:

$$I_1 = \frac{1}{a} \int (ax+b)^n d(ax)$$

Дифференциал константы равен нулю, поэтому можно записать

$$I_1 = \frac{1}{a} \int (ax+b)^n d(ax+b)$$

И вот теперь уже вводим новую переменную $y = ax + b$, получая табличный интеграл:

$$I_1 = \frac{1}{a}\int y^n dy = \frac{1}{a}\cdot\frac{y^{n+1}}{n+1}$$

Осталось вернуться к старой переменной:

$$I_1 = \frac{1}{a}\cdot\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}$$

Сделанную замену можно было ввести сразу, но в более сложных случаях она может быть неочевидной.

Пример 2.

Вычислить

$$I_2 = \int\frac{xdx}{x+a}$$

На этом интеграле можно показать метод, нередко встречающийся и в других разделах математики, в том числе элементарной. Прибавим и вычтем a в числителе:

$$I_2 = \int\frac{(x+a)-a}{x+a}dx = \int dx - a\int\frac{dx}{x+a} = x - a\ln|x+a|$$

Пример 3.

Вычислить

$$I_3 = \int\frac{dx}{e^x+1}$$

В этом примере проявляется специфика экспоненты по отношению к дифференцированию и интегрированию. Сразу покажем нужную замену: $y = e^x$. Вычисляем дифференциал

$$dy = e^x dx \Rightarrow dx = \frac{dy}{y}$$

$$I_3 = \int \frac{dy}{y(y+1)}$$

Вообще говоря, существует общий метод разложения дробей на т.н. простейшие дроби, но мы здесь не будем на нём останавливаться, приведя требуемое разложение:

$$\frac{1}{y(y+1)} = \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}$$

$$I_3 = \int \frac{dy}{y} - \int \frac{dy}{y+1} = \ln|y| - \ln|y+1| = \ln\left|\frac{y}{y+1}\right|$$

Возвращаемся к прежней переменной, причём модуль можно снять: экспонента отрицательной не бывает.

$$I_3 = \ln \frac{e^x}{e^x + 1} = x - \ln(1 + e^x)$$

8.3. Вычисление простейших интегралов от тригонометрических функций

Отдельно рассмотрим вычисление интеграл от тригонометрических функций, так как они часто встречаются и в этих случаях тоже есть своя специфика.

Пример 4.

Вычислить

$$I_4 = \int \cos^2 x dx$$

Этот интеграл встречается очень часто в самых разных задачах, поэтому вычислять его нужно автоматически. Делается это с помощью известной из тригонометрии формулы понижения степени:

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

Таким образом,

$$I_4 = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x dx$$

Второй интеграл вычисляется аналогично тому, как это делалось в первом примере, так что его вычисление не показываем снова и приводим ответ: $\int \cos 2x dx = \frac{1}{2}\sin 2x$.

$$I_4 = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x$$

Пример 5.

Вычислить

$$I_5 = \int \sin x \cos x dx$$

Этот интеграл можно вычислить, по крайней мере, тремя способами. Способ первый: мы знаем, что $\cos x dx = d \sin x$. Подводим синус под дифференциал:

$$I_5 = \int \sin x d \sin x$$

и вводим замену $y = \sin x$.

$$I_5 = \int y dy = \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}\sin^2 x$$

Способ второй – очень похожий – подвести под дифференциал косинус:

$$I_5 = -\int \cos x d \cos x = -\frac{1}{2}\cos^2 x$$

Казалось бы, ответ получился другой. Но если принять во внимание основное тригонометрическое тождество, то получится, что найденные первообразные отличаются лишь на константу. Это, кстати, общее свойство первообразных – они могут отличаться только на константу. Между прочим, если бы мы не знали основного тригонометрического тождества, то мы его сейчас доказали бы этим двукратным вычислением одного и того же интеграла разными способами.

Наконец, третий способ, основанный на формуле синуса двойного угла:

$$I_5 = \frac{1}{2}\int \sin 2x dx$$

А дальше простой заменой получаем

$$I_5 = -\frac{1}{4}\cos 2x$$

Опять же ответ другой, но понятный в свете сделанного выше объяснения: косинус удвоенного угла связан с квадратом синуса или косинуса через константу:

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

Пример 6.

Вычислить

$$I_6 = \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$$

Это пример «на сообразительность». В таблице есть интеграл от дроби только с квадратом синуса в знаменателе или только с квадратом косинуса. Привести к такому виду данный интеграл поможет основное тригонометрическое тождество:

$$I_6 = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$$

Этот пример приведён главным образом для того, чтобы показать, сколь неожиданные методы иногда позволяют вычислить интеграл.

8.4. Тригонометрическая замена переменной

Интегралы от функций, содержащих выражения вида $\sqrt{a^2 \pm x^2}$ или $\sqrt{x^2 - a^2}$, часто можно вычислить с помощью тригонометрических подстановок. Продемонстрируем это на простом примере.

Пример 7.

Вычислить

$$I_7 = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

Первое, что хочется сделать – избавиться от корня. Сделать это можно, получив под корнем полный квадрат. Простыми алгебраическими преобразованиями этого не добиться, значит, нужна замена. Замену в таких случаях делают тригонометрическую:

$$x = a \sin t$$

Можно было взять и косинус – суть не изменилась бы. Вычислим дифференциал dx, который потом подставим под интеграл:

$$dx = a \cos t dt$$

Таким образом,

$$I_7 = a^2 \int \cos^2 t dt$$

Вот и возник интеграл из примера 4.

$$I_7 = \frac{1}{2} a^2 \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right)$$

Осталось лишь вернуться к старой переменной.

$$t = \arcsin\frac{x}{a};\ \sin 2t = 2\sin t\cos t = 2\frac{x}{a}\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

$$I_7 = \frac{1}{2}a^2\arcsin\frac{x}{a} + \frac{1}{2}x\cdot\sqrt{a^2-x^2}$$

Заметим, что подобным образом часто вычисляются интегралы, содержащие $\sqrt{a^2+x^2}$ (замена $x = a\,\mathrm{tg}\,t$) или $\sqrt{x^2-a^2}$ (замена $x = \frac{a}{\cos t}$). Продумайте, почему применяются именно такие замены.

8.5. Интегрирование по частям

Для продолжения этой серии примеров потребуется т.н. *формула интегрирования по частям*. Она позволяет вычислять интегралы, к которым сначала может быть трудно подступиться.

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Следует эта формула из правила дифференцирования произведения функций:

$$d(uv) = udv + vdu \Rightarrow udv = d(uv) - vdu$$

При вычислении определённого интеграла формула интегрирования по частям немного видоизменяется:

$$\int_a^b u dv = (u(b)v(b) - u(a)v(a)) - \int_a^b v du$$

Для скобки в правой части обычно используется сокращённое обозначение

$$u(b)v(b) - u(a)v(a) \equiv uv\Big|_a^b,$$

называемой подстановкой.

Пример 8.

Вычислить

$$I_8 = \int \arcsin x dx$$

Здесь $u = \arcsin x;\ v = x$. Переписываем интеграл по формуле интегрирования по частям:

$$I_8 = x \arcsin x - \int x d \arcsin x = x \arcsin x - \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Вычислим отдельно оставшийся интеграл. Для этого сделаем под дифференциалом подкоренное выражение:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$$

Ясно, что нужна замена $y = 1 - x^2$:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = -\sqrt{y} = -\sqrt{1-x^2}$$

Окончательно находим:

$$I_8 = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$$

Таким же способом можно вычислить, например, интеграл от логарифма и многие другие интегралы.

8.6. Гамма-функция

В завершение темы познакомимся с одним имеющим большое значение интегралом:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-y} y^{x-1} dy,\ x > 0$$

Как видно, в данном случае подынтегральная функция кроме переменной интегрирования y содержит ещё величину x, от которой в результате зависит значение интеграла. Таким образом, данный интеграл определяет функцию – она называется *гамма-функцией*.

Гамма-функция обладает многими важными свойствами. Мы остановимся на простейших из них.

Сначала проведём интегрирование по частям, предварительно подводя экспоненту под дифференциал:

$$\Gamma(x) = -\int_0^{+\infty} y^{x-1} de^{-y} = -\left(y^{x-1}e^{-y}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-y} dy^{x-1} \right)$$

Подстановка обращается в нуль на нижнем пределе интегрирования из-за обращения в нуль функции y^{x-1}. На верхнем пределе тоже происходит обращение в нуль, так как $\lim_{y\to+\infty} y^{x-1}e^{-y} = 0$ (экспонента быстро убывает к нулю при стремлении аргумента к бесконечности). Таким образом,

$$\Gamma(x) = (x-1)\int_0^{+\infty} e^{-y} y^{x-2} dy = (x-1)\Gamma(x-1)$$

Мы доказали соотношение, которое обычно записывается в виде

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

Теперь вычислим $\Gamma(1)$:

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-y} dy = -e^{-y}\Big|_0^{+\infty} = -\lim_{y\to+\infty} e^{-y} + 1 = 1$$

Этот простой расчёт позволяет с помощью формулы $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ вычислить значение гамма-функции для любого натурального значения аргумента. Действительно,

$$\Gamma(2) = \Gamma(1+1) = 1\cdot\Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(3) = \Gamma(2+1) = 2\cdot\Gamma(2) = 2$$

Продолжая эту цепочку, получим

$$\Gamma(n+1) = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 = n!$$

Аналитическому вычислению поддаётся $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-y}\,\frac{dy}{\sqrt{y}}$$

Введём замену переменной интегрирования $y = t^2$:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\frac{2tdt}{t} = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$$

Интеграл $\Im = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ называется интегралом Эйлера-Пуассона. Его значение нужно запомнить.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

С помощью этого значения можно вычислять значения гамма-функции от полуцелого аргумента, т.е. аргумента вида $n+\frac{1}{2}$, $n\in\mathbb{N}$ (убедитесь в этом!):

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 1}{2^n}\sqrt{\pi}$$