Модуль 4. Физический смысл производной. Примеры применения производной в физике

Коснёмся физических приложений производной. Из построения понятия производной видно, что она необходима, например, при описании процессов, связанных с изменениями физических величин во времени (или в зависимости от каких-либо других величин). Всякий раз, когда речь идёт об изменении какой-либо физической величины в зависимости от какой-либо другой физической величины, важнейшей характеристикой этого изменения является производная.

4.1. Скорость материальной точки

Пусть материальная точка движется по известной траектории. Предполагается, что движение описывается координатным способом, т.е. задана зависимость радиус-вектора точки от времени $\vec{r}=\vec{r}(t)$. Конец радиус-вектора как раз и описывает траекторию, по которой точка двигается.

Перемещением точки за время Δt называется разность радиус-векторов точки в моменты времени $t_0+\Delta t$ и t_0:

$$\Delta\vec{r}=\vec{r}(t_0+\Delta t)-\vec{r}(t_0)$$

Иначе можно сказать, что это приращение радиус-вектора за время Δt.

Посмотрим геометрическую интерпретацию этого определения (см. рис. 4.1). А именно, нас будет интересовать, что происходит с перемещением при уменьшении рассматриваемого промежутка времени Δt. На рис. 4.2 изображены перемещения для некоторых значений

Δt. В пределе бесконечно малой величины Δt перемещение будет направлено по касательной к траектории в точке, отвечающей моменту времени t_0.

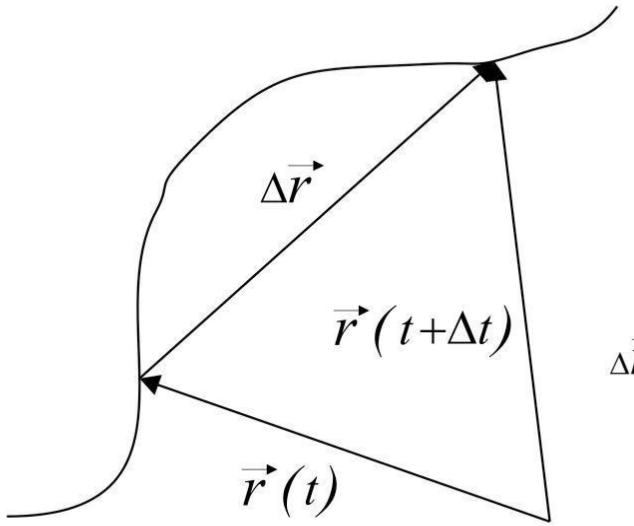

Рис. 4.1

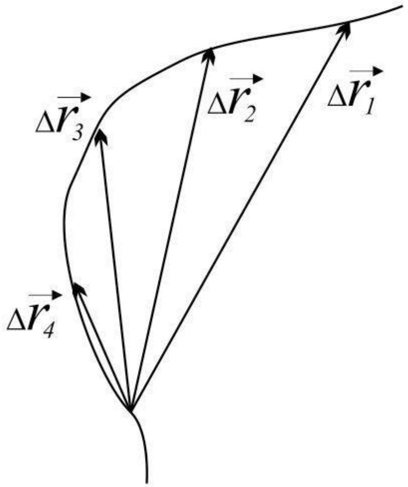

Рис. 4.2

Построим величину

$$\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{\vec{r}(t_0+\Delta t)-\vec{r}(t_0)}{\Delta t} \quad (4.1)$$

В пределе $\Delta t \to 0$ в правой части получается производная радиус-вектора точки по времени. Отметим, что с математической точки зрения радиус-вектор – векторная функция скалярного аргумента. Мы фактически только что построили производную такой функции по её скалярному аргументу. Видно, что эта производная — вектор, компоненты которого получаются дифференцированием компонент исходного вектора:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \cdot \vec{e_x} + \frac{dy}{dt} \cdot \vec{e_y} + \frac{dz}{dt} \cdot \vec{e_z}$$

Итак, (4.1) приобретает вид

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Здесь $\vec{v} \stackrel{def}{=} \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ – эта величина называется скоростью точки (точнее, мгновенной скоростью). Направлен вектор скорости по касательной к траектории – это было выяснено в процессе построения перемещений, отвечающих всё меньшим промежуткам времени. Следовательно, можно записать в любой точке траектории

$$\vec{v} = v_\tau \vec{\tau} \,,$$

где v_τ – проекция вектора скорости на направление касательной к траектории в данной точке (т.н. тангенциальная составляющая скорости), $\vec{\tau}$ – единичный вектор касательной к траектории в рассматриваемой точке.

Переходим к поиску модуля скорости. Из определения вектора скорости следует, что

$$v = \left|\vec{v}\right| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left|\Delta \vec{r}\right|}{\Delta t}$$

В пределе $\Delta t \to 0$ можно считать пройденный участок кривой прямолинейным, тогда модуль вектора перемещения совпадёт с пройденным путём Δs. Значит,

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

Таким образом, модуль скорости – производная пути, пройденного точкой, по времени. Если модуль скорости не зависит от времени, то движение точки называется равномерным. Направление вектора скорости может при этом в процессе движения изменяться, как это происходит, например, при равномерном движении точки по окружности.

Следующий шаг связан с рассмотрением изменения скорости (по модулю или направлению, или сразу и по модулю, и по направлению) и введением ускорения. Определение ускорения несколько сложнее, так как оно имеет в общем случае две компоненты. Однако общая идея использования производной остаётся прежней.

Разберёмся, как работает эта теория в конкретном случае, на достаточно простом примере. Пусть частица совершает гармонические колебания вдоль некоторой оси (назовём её осью x), тогда координата частицы запишется через гармоническую функцию, скажем, синус:

$$x(t) = a_0 \sin \omega t \, ,$$

где ω – частота колебаний.

При учёте сопротивления среды, которое будем предполагать пропорциональным скорости частицы, зависимость изменяется введением затухающего множителя:

$$x(t) = a_0 e^{-\beta t} \sin \omega t$$

Величина β называется коэффициентом затухания. Такая зависимость описывает колебания с затухающей амплитудой. Найдём моменты времени, в которые точка достигает крайних положений при совершении колебаний. Для этого заметим, что в крайних положениях скорость частицы обращается в нуль. Проекция скорости частицы на выбранную ось – производная соответствующей координаты по времени:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = a_0 e^{-\beta t} (\omega \cos \omega t - \beta \sin \omega t)$$

Скорость обращается в нуль, когда в нуль обращается скобка (экспонента в нуль не обращается):

$$\omega \cos \omega t - \beta \sin \omega t = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}\, \omega t = \frac{\omega}{\beta}$$

Получающееся уравнение имеет решения

$$t_n = \frac{1}{\omega}\left(\operatorname{arctg}\frac{\omega}{\beta} + \pi n\right), \text{ где } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Поставим ещё один вопрос: найдём отношение скоростей, с которыми тело проходит положение равновесия два последовательных раза. Понятно, что из-за затухания скорость будет уменьшаться – выясним, во сколько раз. Положению равновесия отвечает значение координаты $x = 0$. Такое значение координата имеет в моменты времени $\tau_n = \dfrac{\pi n}{\omega}$. Найдём отношение $\left|\dfrac{v_x^{(n+1)}}{v_x^{(n)}}\right|$.

$$\left|\frac{v_x^{(n+1)}}{v_x^{(n)}}\right| = \left|\frac{a_0 e^{-\beta\tau_{n+1}}(\omega\cos\omega\tau_{n+1} - \beta\sin\omega\tau_{n+1})}{a_0 e^{-\beta\tau_n}(\omega\cos\omega\tau_n - \beta\sin\omega\tau_n)}\right| = e^{-\beta(\tau_{n+1}-\tau_n)}\left|\frac{\cos\omega\tau_{n+1}}{\cos\omega\tau_n}\right| = e^{-\beta(\tau_{n+1}-\tau_n)} = e^{-\pi\frac{\beta}{\omega}}$$

Итак, между двумя последовательными прохождениями частицей положения равновесия скорость уменьшается в одно и то же число раз.

4.2. Движение материальной точки по окружности

Рассмотрим движение материальной точки по окружности радиуса R. Предположим, что при этом радиус-вектор точки зависит от времени по некоторому закону $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Понятно, что главным образом нас интересует изменение полярного угла φ материальной точки со временем, т.е. изменение положения радиус-вектора $\vec{r}$. Иными словами, можно выбрать некоторое начальное положение радиус-вектора $\vec{r}_0$ и характеризовать положение материальной точки на траектории углом поворота φ относительно начального положения (см. рис. 4.3).

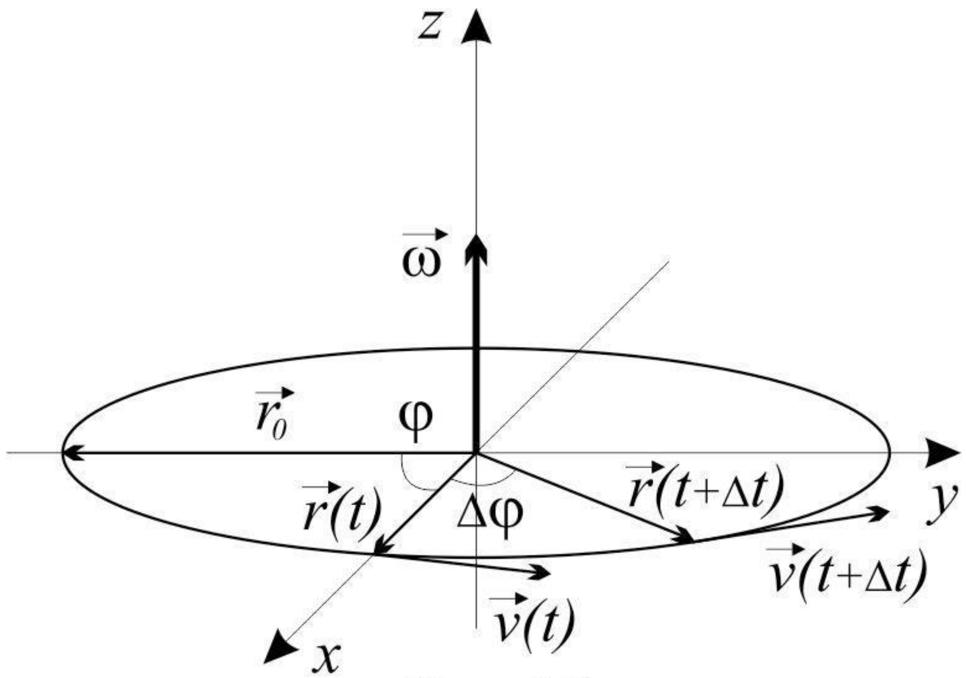

Рис. 4.3

Составим величину, аналогичную скорости движения, которая бы описывала быстроту изменения угла поворота вокруг рассматриваемой оси (назовём её для определённости осью z).

$$\omega_z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\varphi(t+\Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} \quad (4.2)$$

Здесь $\varphi(t)$ – угол поворота материальной точки вокруг оси z в момент времени t. Индекс в левой части указывает на ось вращения. Введённая величина ω_z называется мгновенной угловой скоростью вращения.

Удобно приписывать угловой скорости направление, делая её векторной величиной. По определению, вектор угловой скорости имеет модуль, определяемый формулой (5.2), а его направление согласуется с направлением вращения следующим образом: вектор $\vec{\omega}$ коллинеарен оси, вокруг которой движется материальная точка; при этом, если смотреть вслед вектору $\vec{\omega}$, то вращение должно происходить по часовой стрелке (обычное правило правого винта).

Как видно, угловая скорость становится вектором по нашему желанию. Учитывая данное определение угловой скорости, его можно несколько видоизменить:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$$

Здесь использован вектор $d\vec{\varphi}$, модуль которого равен величине угла поворота, а направление определяется аналогично направлению вектора $\vec{\omega}$. В принципе, мы могли быть начать именно с введения такого вектора бесконечно малого поворота $d\vec{\varphi}$.

Укажем связь между «обычной» – линейной – скоростью и угловой скоростью материальной точки:

$$\vec{v} = \left[\vec{\omega}, \vec{r}\right]$$

Покажем это. Необходимо выбрать начало координат. Выберем его на оси вращения (необязательно помещать начало координат в центр окружности). Радиус-вектор $\vec{r}$ можно представить в виде суммы (см. рис. 4.4)

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{\rho}$$

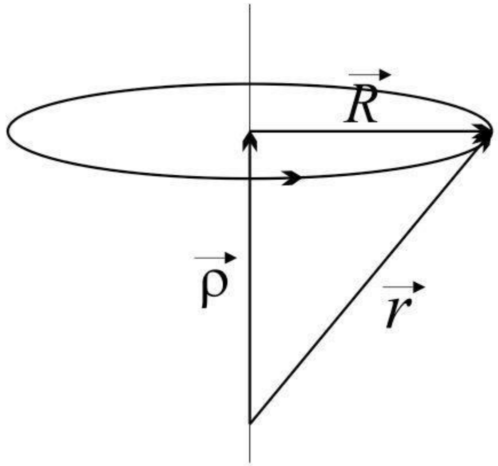

Рис. 4.4

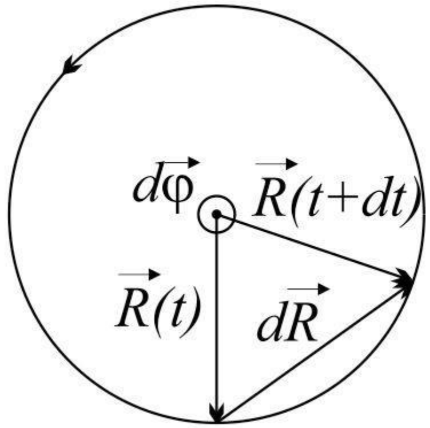

Рис. 4.5

Заметим, что при движении точки по окружности вектор $\vec{\rho}$ не меняется, а вектор $\vec{R}$ поворачивается. За промежуток времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ вектор $\vec{R}$ получит приращение $\Delta\vec{R}$. В пределе $\Delta t \to 0$ вектор $\Delta\vec{R}$ становится ортогонален вектору $\vec{R}(t_0)$. Мы уже видели подобное при рассмотрении вектора скорости. При этом вектор $\Delta\vec{R}$ лежит в плоскости движения материальной точки. Это значит, что вектор $\Delta\vec{R}$ ортогонален вектору малого поворота $\Delta\vec{\varphi}$. Теперь запишем связь дифференциалов (переход к пределу $\Delta t \to 0$ считаем совершённым) $d\vec{R}$ и $d\vec{\varphi}$ (бесконечно малый угол поворота).

$$d\vec{R} = \left[d\vec{\varphi}, \vec{R} \right]$$

Убедиться в этом просто. Проверим, выполняется ли это соотношение для модулей векторов слева и справа:

$$\left| \left[d\vec{\varphi}, \vec{R} \right] \right| = \left| d\vec{\varphi} \right| \cdot \left| \vec{R} \right| \cdot \sin\frac{\pi}{2} = R d\varphi = dR$$

Из чертежа (см. рис. 4.5) видно, что направления векторов в левой и правой части одинаковое.

Наконец, так как $\vec{\rho} = \mathrm{const}$, то $d\vec{r} = d\vec{R}$, поэтому

$$d\vec{r} = \left[d\vec{\varphi}, \vec{R}\right] = \left[d\vec{\varphi}, \vec{r} - \vec{\rho}\right] = \left[d\vec{\varphi}, \vec{r}\right] - \left[d\vec{\varphi}, \vec{\rho}\right]$$

Векторы $d\vec{\varphi}$ и $\vec{\rho}$ коллинеарны, поэтому последнее векторное произведение равно нулю.

$$d\vec{r} = \left[d\vec{\varphi}, \vec{r}\right] \Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = \left[\frac{d\vec{\varphi}}{dt}, \vec{r}\right] \Rightarrow \vec{v} = \left[\vec{\omega}, \vec{r}\right]$$

4.3. Обратная задача динамики

Основным законом динамики является второй закон Ньютона. Он связывает силу $\vec{F}$ (а точнее, равнодействующую всех приложенных к телу сил), действующую на тело, с ускорением $\vec{w}$, сообщаемым телу этой силой:

$$m\vec{w} = \vec{F}\text{, где } m \text{ – масса тела}$$

Ускорение тела можно представить в виде второй производной (т.е. производной от производной) радиус-вектора:

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) \equiv \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

В динамике ставят две основные задачи: прямую и обратную. Прямая задача заключается в том, чтобы по известному положению тела в начальный момент времени и известной скорости тела в этот момент определить траекторию движения тела под действием заданных сил, т.е. зависимость $\vec{r} = \vec{r}(t)$. К этой задаче мы вернёмся позже. Обратная задача динамики заключается в определении по известной зависимости $\vec{r} = \vec{r}(t)$ силы, действующей на тело.

Рассмотрим пример, ограничиваясь для простоты одномерным случаем. Пусть частица движется вдоль оси X так, что её координата меняется со временем по закону

$$x(t) = \alpha t^2 - \beta t^3,$$

где α, β – положительные константы. В начальный момент времени $t = 0$ сила, действующая на частицу, равна F_0. Найдём силу, действующую на частицу в точках поворота и в тот момент, когда частица снова окажется в начале координат.

Согласно второму закону Ньютона

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x$$

Индекс x означает, что справа стоит проекция силы на ось X, вдоль которой происходит движение. Подставляем в левую часть заданную зависимость $x = x(t)$:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = m(\alpha t^2 - \beta t^3)'' = m(2\alpha t - 3\beta t^2)' = 2m(\alpha - 3\beta t) = F_x$$

Масса частицы неизвестна, но известна сила, действующая на частицу в начальный момент времени, т.е.

$$F_x(t=0) = 2m\alpha = F_0 \Rightarrow m = \frac{F_0}{2\alpha}$$

Таким образом,

$$F_x = \frac{F_0}{\alpha}(\alpha - 3\beta t)$$

Точка поворота определяется тем, что в ней частица изменяет направление движения на противоположное. Т.е. при подходе к точке поворота скорость частицы должна уменьшаться до обращения в нуль в точке поворота. Затем скорость начнёт расти, а частица двигаться в направлении, противоположном изначальному. Значит, нужно найти зависимость скорости частицы от времени и найти моменты, когда скорость обращается в нуль:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = (\alpha t^2 - \beta t^3)' = t(2\alpha - 3\beta t)$$

Видно, что $v_x = 0$ при $t = 0$ или $t = \frac{2\alpha}{3\beta}$. Первое значение нас не интересует: это начальный момент времени.

$$F_x\left(t = \frac{2\alpha}{3\beta}\right) = -F_0$$

Проекция силы на ось X получилась отрицательной, т.е. сила и ось X направлены в противоположные стороны.

Чтобы ответить на второй вопрос задачи, определим момент времени, когда частица снова окажется в начале координат. Уравнение

$$x(t) = \alpha t^2 - \beta t^3 = 0$$

Имеет три корня: один из них – двукратно вырожденный – представляет собой начальный момент времени $t = 0$. Оставшийся корень

$$t = \frac{\alpha}{\beta}$$

Определяем силу, действующую на частицу в этот момент времени:

$$F_x\left(t = \frac{\alpha}{\beta}\right) = -2F_0$$

4.4. Сила электрического тока

Следующий пример – определение силы электрического тока. Напомним, что электрическим током называют упорядоченное движение зарядов. Одной из основных характеристик тока является скорость переноса заряда через поперечное сечение проводника.

Здесь нужно понимать, что непрерывного течения заряда через сечение проводника нет. Перенос заряда обеспечивается движением в проводнике носителей заряда, например, электронов. Если выбрать некоторое поперечное сечение проводника и следить за ним, то при наличии тока в проводнике будет наблюдаться примерно следующая картина. В некоторый промежуток времени через сечение проходит электрон (для простоты пусть будет один). Заряд, перенесённый через сечение за этот промежуток времени, равен заряду электрона. А потом наступает промежуток времени, когда один электрон уже ушёл от рассматриваемого сечения, а другой ещё не подошёл. Формально получается, что в это время тока нет.

Однако такое детальное рассмотрение тока в проводнике для расчётов неудобно, поэтому обычно считают, что ток всё-таки течёт непрерывно. Математически это оформляется так, что используется усреднённый по времени ток. Усреднение проводится по промежутку времени, достаточно большому по сравнению со временем между прохождениями двух электронов сечения проводника. Тогда можно оперировать зарядом как непрерывной величиной и определить силу тока следующим образом:

$$I = \frac{dq}{dt}$$

Здесь dq – заряд, который переносится за время dt через поперечное сечение проводника.

В этих рассуждениях нигде не учитывалось происхождение тока. Оно, как известно, может быть различным. Чтобы не углубляться в электродинамику, рассмотрим ток, возникающий из-за чисто механического переноса заряда. Пусть имеется равномерно заряженный по поверхности прямой круговой цилиндр радиуса R, который движется вдоль своей оси с постоянной скоростью v. Ток в обычном понимании по цилиндру не течёт, но из-за движения цилиндра они участвуют в упорядоченном движении в пространстве. Следовательно, можно определить силу возникающего электрического тока.

Уточним условие в части, касающейся заряда на цилиндре. Когда говорят о поверхностном заряде, то используют в качестве его характеристики т.н. поверхностную плотность заряда – заряд единицы поверхности:

$$\sigma = \frac{dq}{dS}$$

Если поверхность заряжена равномерно, то $\sigma = \mathrm{const}$ на всей поверхности. Для нахождения поверхностной плотности заряда в этом случае нужно просто разделить полный заряд поверхности на площадь этой поверхности. Однако нам в задаче удобнее использовать как раз величину σ. Будем считать, что она известна.

Выберем плоскость, перпендикулярную оси цилиндра. За малый промежуток времени dt через эту плоскость проходит кольцо малой ширины, которую обозначим dl. Кольцо несёт заряд, равный произведению плотности заряда на площадь поверхности кольца:

$$dq = \sigma \cdot 2\pi R dl$$

Соответственно, сила тока по определению

$$I = \frac{dq}{dt} = \sigma \cdot 2\pi R \frac{dl}{dt}$$

Производная $\frac{dl}{dt}$ представляет собой скорость движения кольца, т.е., в конечном счёте, всего цилиндра. Поэтому

$$I = \sigma \cdot 2\pi R v$$

Определение силы тока как производной используется ещё, например, при расчёте переменного тока в цепи. Этот пример мы рассматривать не будем.