Модуль 5. Формула Тейлора

5.1. Наводящие соображения к формуле Тейлора

Геометрический смысл производной может подсказать идею обобщения, приводящую к одной из важнейших формул математического анализа – формуле Тейлора. Итак, ещё раз повторимся, что в основе дифференциального исчисления функций одной вещественной переменной лежит идея о замене функции на бесконечно малом участке отрезком прямой. На графике это хорошо видно. Рассмотрим функцию $y = f(x)$ и попробуем заменить её на отрезке $[x_0, x_0 + \Delta x]$, где величина Δx предполагается малой, отрезком прямой $y = kx + b$. Чтобы установить коэффициенты k и b, нужны два уравнения. Потребуем, чтобы значения функции $y = f(x)$ совпадали со значениями функции $y = kx + b$ на концах данного отрезка, определим коэффициенты k и b, а затем выполним предельный переход при $\Delta x \to 0$:

$$\begin{cases} f(x_0) = kx_0 + b \\ f(x_0 + \Delta x) = k(x_0 + \Delta x) + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = f(x_0) - kx_0 \\ k = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \end{cases}$$

В пределе $\Delta x \to 0$ для углового коэффициента получаем $k = f'(x_0)$ (в чём нет ничего нового). Таким образом,

$$\begin{cases} b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 \\ k = f'(x_0) \end{cases}$$

И, подставляя в уравнение прямой эти коэффициенты, находим

$$y = f'(x_0)\cdot x + f(x_0) - f'(x_0)\cdot x_0 \text{ или } y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$$

Следовательно, в окрестности точки $x = x_0$ имеет место приближённое равенство

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$$

Если подставить сюда $x = x_0 + \Delta x$, то получится *формула конечных приращений*. Т.е. проделанные операции привели нас к уже полученным раньше результатам.

Теперь сделаем следующий шаг: попробуем заменить функцию $y = f(x)$ на бесконечно малом участке дугой параболы, которая, как известно, задаётся уже уравнением второй степени $y = ax^2 + bx + c$. Здесь подлежат определению уже три коэффициента, а потому нужны три уравнения. Потребуем, чтобы значения функций $y = f(x)$ и $y = ax^2 + bx + c$ совпадали в трёх точках: $x = x_0 - \Delta x$, $x = x_0$ и $x = x_0 + \Delta x$:

$$\begin{cases} f(x_0 - \Delta x) = a(x_0 - \Delta x)^2 + b(x_0 - \Delta x) + c \\ f(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c \\ f(x_0 + \Delta x) = a(x_0 + \Delta x)^2 + b(x_0 + \Delta x) + c \end{cases} \qquad (2.1)$$

Вычитая из третьего уравнения первое, получаем

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x} = 2ax_0 + b \qquad (2.2)$$

Раскрываем скобки в третьем уравнении и с помощью второго уравнения имеем

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + (2ax_0 + b)\Delta x + a(\Delta x)^2 \qquad (2.3)$$

Из уравнения (2.2) выражаем коэффициент b, подставляем в (2.3) и определяем коэффициент a:

$$a = \frac{f(x_0 + \Delta x) - 2f(x_0) + f(x_0 - \Delta x)}{2(\Delta x)^2}$$

Чтобы удобнее было переходить к пределу, преобразуем это выражение:

$$a = \frac{1}{2} \cdot \frac{\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - \dfrac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x}}{\Delta x}$$

Видно, что в числителе в пределе $\Delta x \to 0$ получается разность производных функции $y = f(x)$ в точках $x = x_0$ и $x = x_0 - \Delta x$. И эту разность нужно ещё разделить на Δx, а затем перейти к пределу. Фактически, это получится производная от функции $y = f'(x)$ в точке $x = x_0$, т.е.

$$a = \frac{1}{2} f''(x_0)$$

Предельный переход в уравнении (2.2) даёт

$$b = f'(x_0) - f''(x_0) \cdot x_0$$

Наконец, третий коэффициент в уравнении параболы

$$c = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 + \frac{1}{2} f''(x_0) \cdot x_0^2$$

Если теперь подставить найденные коэффициенты в уравнение параболы, то получится

$$y = \frac{1}{2} f''(x_0) \cdot x^2 + (f'(x_0) - f''(x_0) \cdot x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 + \frac{1}{2} f''(x_0) \cdot x_0^2$$

или

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0) \cdot (x - x_0)^2$$

Значит, в окрестности точки $x = x_0$ можно записать приближённое равенство

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0) \cdot (x - x_0)^2 \qquad (2.4)$$

Уже можно догадаться, что эту формулу можно ещё уточнить, заменяя функцию $y = f(x)$ в окрестности точки $x = x_0$ кубической функцией, и при этом в формуле появится слагаемое, содержащее $f'''(x_0)\cdot(x-x_0)^3$. Вопрос заключается в том, с каким коэффициентом получится это слагаемое? Читатель самостоятельно может убедиться в том, что коэффициент равен $1/6 = 1/3!$.

5.2. Общий вид формулы Тейлора

Следующее предположение приводит нас к выводу, что уточнять формулу (2.4) можно и дальше. А точной она станет, если добавить к ней в общем случае бесконечно много слагаемых:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)\cdot(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)\cdot(x-x_0)^n + \ldots$$

Это и есть *формула Тейлора* (также говорят о разложении функции в ряд Тейлора). Оставляя справа конечное число слагаемых, получим приближённую формулу для вычисления значений заданной функции. Тут, правда, возникает вопрос о точности приближения. Допустим, что мы хотим оставить в формуле Тейлора n слагаемых. Запишем

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)\cdot(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)\cdot(x-x_0)^n + R_n(x),$$

где функция $R_n(x)$ объединяет слагаемые, которые мы намерены отбросить. Эта функция называется *остаточным членом*. Именно она и определяет точность вычислений. В курсах математического анализа выводится несколько различных форм остаточного члена. Мы здесь на этом не останавливаемся.

Не всегда разложение по формуле Тейлора должно содержать бесконечно много слагаемых. У многочленов все производные, начиная с некоторой, тождественно равны нулю. Т.е. для многочлена $y = P_n(x)$ остаточный член формулы Тейлора $R_n(x)$ тождественно равен нулю.

Желательно помнить следующие простые формулы:

$$\sin x \approx x;\ x \to 0$$

$$\cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2;\ x \to 0$$

$$(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2;\ x \to 0$$

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{1}{2}x^2;\ x \to 0$$

$$e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2;\ x \to 0$$

В следующей лекции мы рассмотрим применение этих формул в физике.

В ходе рассуждений, которые привели нас к формуле Тейлора, мы установили геометрический смысл второй производной рассматриваемой функции в некоторой точке – он равен старшему коэффициенту в уравнении параболы, касающейся графика функции в данной точке. Ценность это утверждение приобретает, если в данной точке у функции равна нулю первая производная: в этом случае величина второй производной даёт представление о форме графика, так как именно старший коэффициент в уравнении параболы определяет её форму. При наличии ненулевой первой производной вторая производная лишь уточняет поведение функции в окрестности рассматриваемой точки, приводя к отклонению графика от касательной к нему. Аналогично можно приписать геометрический смысл высшим производным.

5.3. Графическая интерпретация

Наконец, осталось посмотреть, как выглядят графики приближений функции по формуле Тейлора. Пусть имеется функция $y=\cos x$, обсудим её поведение в окрестности точки $x={}^{\pi}\!/_{4}$. Запишем несколько первых слагаемых формулы Тейлора:

$$\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+\ldots\right)$$

В нулевом приближении получается функция $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$, имеющая, конечно с косинусом общую точку (и не одну, но нас интересует только окрестность точки $x={}^{\pi}\!/_{4}$), но не более того. В первом приближении получается прямая, описываемая уравнением $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)$. Эта прямая касается графика косинуса в точке $x={}^{\pi}\!/_{4}$. Во втором приближении получается касающаяся графика косинуса парабола, в третьем приближении – кубическая парабола. На рис. 5.1 видно, что каждое следующее приближение в окрестности точки $x={}^{\pi}\!/_{4}$ всё точнее описывает косинус. Сплошной кривой показан график функции $y=\cos x$, тонкая прямая – нулевое приближение, первое приближение – штрих-пунктирная кривая, второе приближение – пунктирная кривая. Третье приближение не показано, так как его было бы уже тяжело различить.

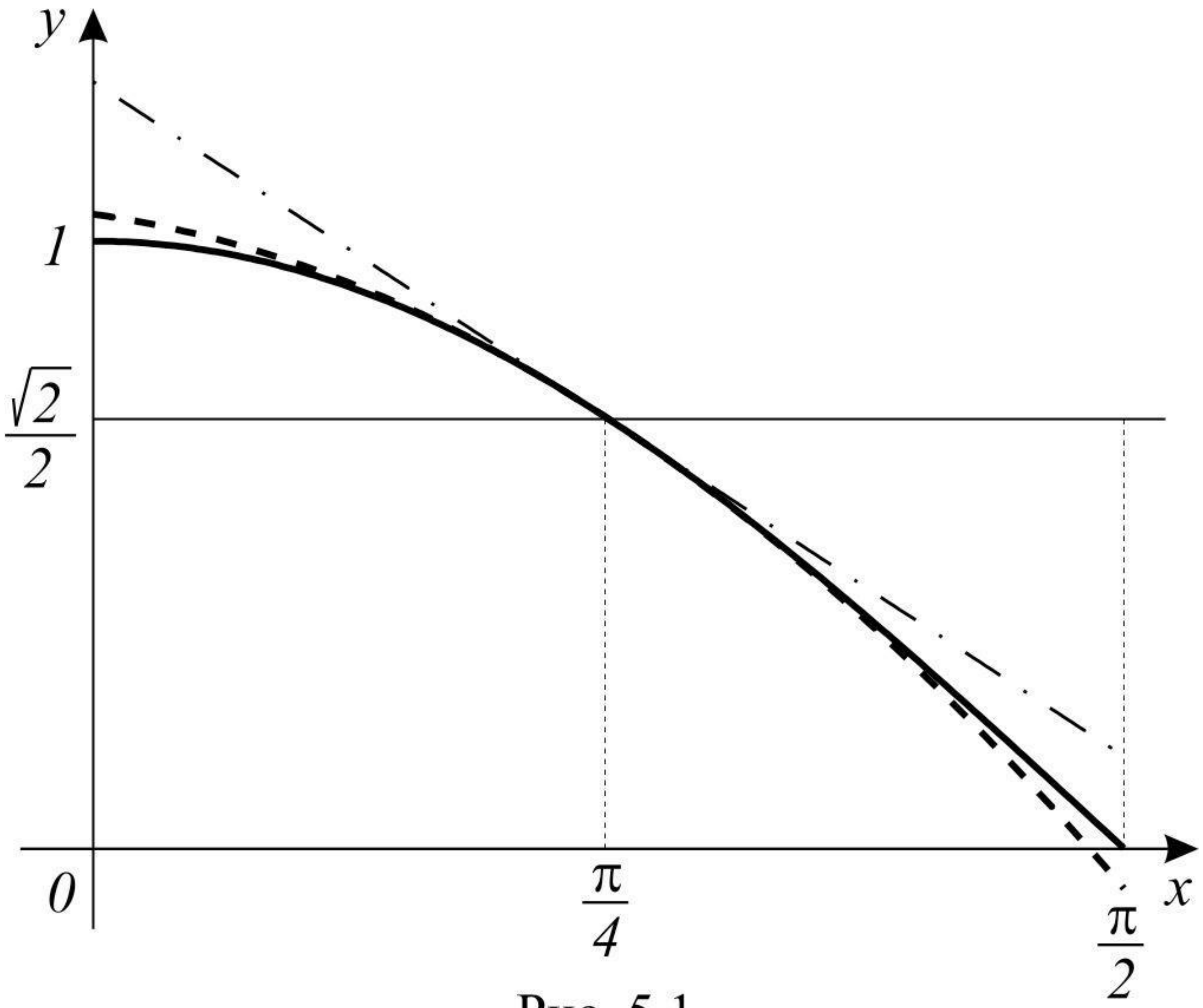

Рис. 5.1