Модуль 3. Определение производной функции в точке. Дифференциал

3.1. Определение производной. Вычисление производных по определению

Вернёмся к вопросу о скорости изменения функции в точке. Мы остановились в первой лекции на том, что нам потребовалось уточнить понятие «стремление длины рассматриваемого отрезка к нулю». После предыдущего параграфа можно сразу уточнить формулу (1.3):

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \qquad (3.1)$$

Сравните это выражение с предыдущим его вариантом.

Величина A называется производной функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ и обозначается $f'(x_0)$. Так как производная в общем случае зависит от точки x_0, то производная может рассматриваться как функция точки.

Разберём несколько простых примеров, демонстрирующих технику вычисления производной по определению.

Пример 1.

Вычислим производную функции $f(x) = x^2$.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x$$

Пример 2.

Вычислим производную функции $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{-\Delta x}{x(x + \Delta x)}\right) = -\frac{1}{x^2}$$

3.2. Случаи, когда производная функции в точке не существует. Дифференцируемость функции

Производная функции в некоторой точке может и не существовать из-за того, что предел (3.1) в этой точке не существует.

Пример 1.

Функция $y = |x|$ не имеет производной в точке $x = 0$. В этой точке существуют односторонние пределы вида (3.1), но они отличаются знаком. Действительно,

$$\lim_{\Delta x \to 0+} \frac{y(\Delta x) - y(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta x - 0}{\Delta x} = 1$$

$$\lim_{\Delta x \to 0-} \frac{y(\Delta x) - y(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{-\Delta x - 0}{\Delta x} = -1$$

Поэтому предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(\Delta x) - y(0)}{\Delta x}$$

не существует.

Вообще, если функция имеет в некоторой точке излом, то в этой точке производная не существует.

Пример 2.

Функция $y = \sqrt{x}$ не имеет производной в точке $x = 0$. Здесь это ещё проще увидеть: мы не можем устремить аргумент к нулю слева. Т.е. предел в определении производной может быть только правосторонним.

Пример 3.

Функция Хевисайда (см. лекцию 2) не имеет производной в точке $x = 0$.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\eta(\Delta x) - \eta(0)}{\Delta x}$$

Видно, что величина $\eta(\Delta x)$ по определению функции Хевисайда зависит от того, какой знак имеет приращение аргумента Δx. Т.е. есть зависимость от того, с какой стороны аргумент стремится к точке $x = 0$.

Существует пример, принадлежащий Вейерштрассу, в котором функция в каждой точке своей области определения непрерывна, но не имеет ни в одной точке производной.

Упомянем об одной тонкости. Часто вместо того, чтобы сказать «функция имеет производную», говорят «функция дифференцируема». Может показаться, что это определение понятия «дифференцируемая функция». Однако это неверно. Функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой в точке $x = x_0$, если её приращение в данной точке можно представить в виде

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + \omega \text{, где } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\omega}{\Delta x} = 0$$

Несложно показать, что если функция дифференцируема в некоторой точке, то в этой точке существует производная, и обратно. Т.е. существование в точке производной и дифференцируемость функции в точке жёстко связаны, но определяются по-разному.

3.3. Правила дифференцирования

Нахождение производной (*дифференцирование*) проводится при помощи следующих правил:

$$(af(x) + bg(x))' = af'(x) + bg'(x) \text{, где } a, b = const$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Эти правила можно доказать, исходя из определения производной.

Следует помнить легко проверяемые формулы

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$(\sin x)' = \cos x; \ (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\mathrm{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x}; \ (\mathrm{ctg}x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(\mathrm{sh}x)' = \mathrm{ch}x; \ (\mathrm{ch}x)' = \mathrm{sh}x$$

$$(\text{th}\,x)' = \frac{1}{\text{ch}^2 x};\ (\text{cth}\,x)' = -\frac{1}{\text{sh}^2 x}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a,\ \text{где}\ a = const;\ (e^x)' = e^x$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a};\ (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};\ (\text{arctg}\,x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

3.4. Дифференциал функции

Помимо производной вводится понятие дифференциала функции. Если вернуться к определению дифференцируемости функции, то можно увидеть, что приращение функции представляется в виде двух слагаемых — первого, линейного по приращению аргумента Δx, и второго, стремящегося к нулю при $\Delta x \to 0$ быстрее, чем первое. В этом случае говорят, что второе слагаемое имеет более высокий порядок малости, чем первое слагаемое.

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \omega$$

Первое слагаемое называется дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$:

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$$

При малом приращении Δx дифференциал функции – малая величина, которую в линейном приближении можно считать совпадающей с приращением функции в рассматриваемой точке. Если выбрать в качестве дифференцируемой функции $f(x) = x$, то по этой формуле получится $dx = \Delta x$. Т.е. дифференциал независимой переменной – её бесконечно малое приращение.

$$df(x_0) = f'(x_0)dx$$

Дифференциал функции – то приращение, которое функция получает при бесконечно малом приращении аргумента.

Такая запись позволяет ввести ещё один способ обозначения производной (принадлежащий Лейбницу)

$$y'(x) = \frac{dy}{dx}$$

3.5. Геометрический смысл производной

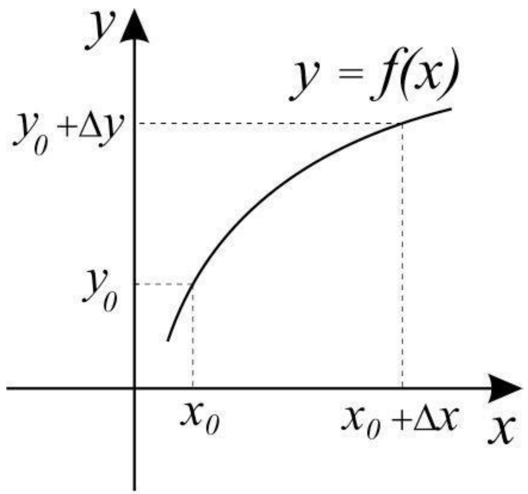

Рис. 3.1

Выясним геометрический смысл производной. Для этого рассмотрим некоторую функцию $y = f(x)$. Отметим на графике две точки с координатами $(x_0, y_0 = f(x_0))$ и $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y = f(x_0 + \Delta x))$ - см. рис. 3.1. Прямую, соединяющую эти две точки, принято называть секущей. Напишем уравнение секущей. Как любая прямая, она задаётся уравнением вида $y = kx + b$. При этом

$$\begin{cases} y_0 = kx_0 + b \\ y_0 + \Delta y = k(x_0 + \Delta x) + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \\ b = y_0 - \dfrac{\Delta y}{\Delta x} x_0 \end{cases}$$

Таким образом, уравнение секущей

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta x} x + y_0 - \frac{\Delta y}{\Delta x} x_0$$

Теперь устремим Δx к нулю. Угловой коэффициент прямой

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

Вместе с тем обращаем внимание на то, что переход к пределу при $\Delta x \to 0$ означает неограниченное сближение точек кривой, через которые проводится секущая. Секущая переходит в касательную к кривой в рассматриваемой точке x_0 (процесс примерно показан на рис. 3.2). Как мы только что выяснили, угловой коэффициент касательной, проведённой к графику функции в некоторой точке, равен производной функции в этой точке. В этом и заключается геометрический смысл производной.

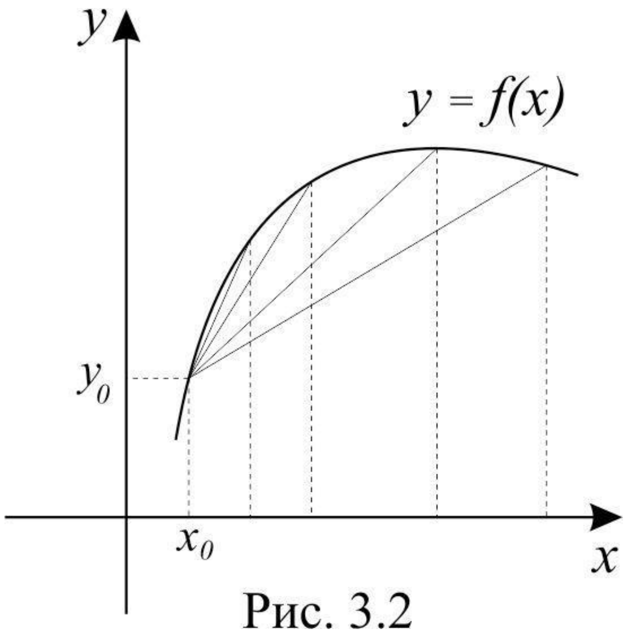

Рис. 3.2