Модуль 1. Производная функции

1.1. Вводные замечания к теме

Понятие производной очень широко используется в физике. Каждый раз, когда описывается изменение одной величины в зависимости от изменения другой величины, используется производная в качестве характеристики скорости изменения величины. Исследованию производной и связанных с ней понятий и концепций посвящён раздел математического анализа, называемый дифференциальным исчислением.

В этих лекциях речь пойдёт только о вещественных функциях одной переменной. Несколько сложнее строится дифференциальное исчисление функций нескольких вещественных переменных. Распространение на случай комплексных переменных также связано с существенным усложнением теории.

Мы будем обсуждать только самые основные понятия и утверждения, как правило, приводя не строгие доказательства, а наводящие соображения, из которых следует требуемое утверждение, или доводы, «на физическом уровне строгости» подтверждающие сделанные утверждения.

Хотелось бы отметить, что существуют и другие, более общие подходы к введению дифференцирования, которые во многих отношениях лучше, чем представленный здесь традиционный подход. Однако нашей целью является получение общего представления о производной для возможности проведения вычислений, встречающихся на первых семестрах в рамках курса общей физики.

Для лучшего усвоения материала рекомендуется не только внимательно следить за проводимыми выкладками, но и проделывать их самостоятельно. Когда предлагается проделать то или иное вычисление, желательно последовать этой рекомендации. Кроме того, для закрепления материала к лекциям прилагаются тестовые задания. Вместе с тем можно посоветовать прорабатывать эти лекции параллельно с решением задач из соответствующих разделов задачника по высшей математике.

1.2. Предварительные соображения к введению производной

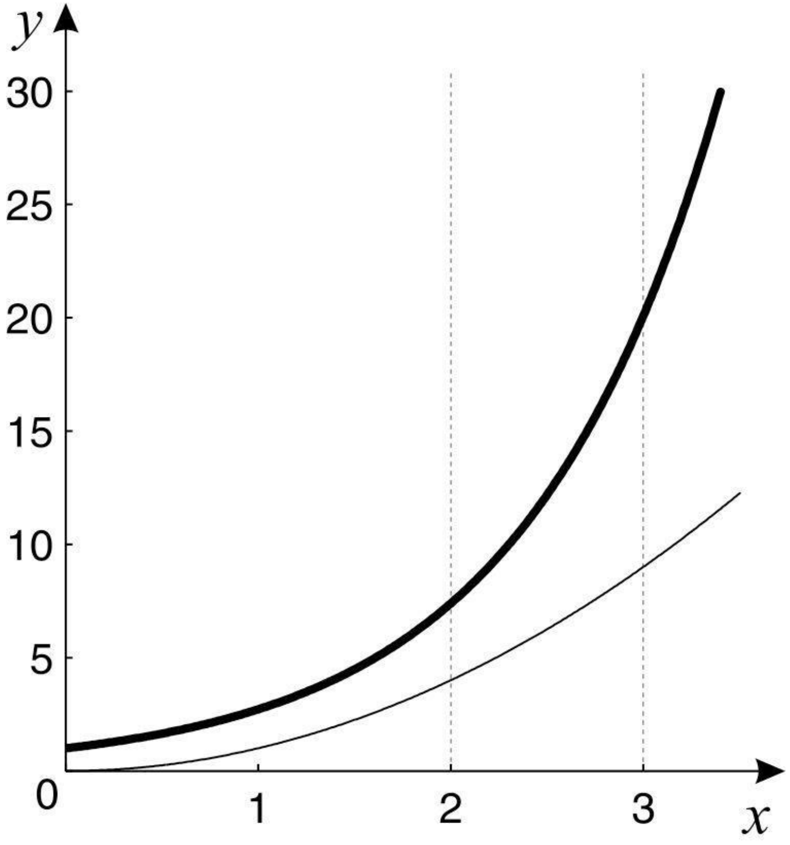

Рис. 1.1

Первоначально можно прийти к понятию производной функции, сравнивая скорость изменения разных функций в какой-либо точке. Начнём с рассмотрения скорости изменения функции на отрезке, в дальнейшем уменьшая длину отрезка. В качестве примера сравните, например, поведение функций $y = x^2$ и $y = e^x$ на отрезке $[2,3]$ (их графики показаны на рис. 1.1 – более тонкая кривая соответствует функции $y = x^2$). Обе функции на этом отрезке растут, но экспонента получает значительно большее приращение, чем квадратичная функция. Способом описания подобного различия в поведении функций, в конечном счёте, служит производная.

Рассмотрим отрезок $[x_0, x_0 + \Delta x]$ и определённую на нём всюду функцию $y = f(x)$. На этом отрезке функция получает приращение

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

Зависимость $y = f(x)$ может быть представлена графически. В общем случае график функции – некоторая кривая. Рассмотрим в качестве примера линейную функцию

$$y = kx + b$$

Её график представляет собой прямую. Найдём приращение этой функции на отрезке $[x_0, x_0 + \Delta x]$:

$$\Delta y = k(x_0 + \Delta x) + b - (kx_0 + b) = k\Delta x \quad (1.1)$$

Видно, что приращение функции в данном случае пропорционально приращению аргумента, и коэффициент пропорциональности — константа, равная угловому коэффициенту прямой, являющейся графиком этой функции: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = k$. Таким образом, скорость изменения линейной функции можно характеризовать отношением ${\Delta y}/{\Delta x}$. Подчеркнём, что зависимости от точки x_0 не осталось, то есть, скорость изменения функции в данном случае одна и та же при всех значениях x.

Обратимся снова к общему случаю. При выборе «достаточно малого» значения Δx кривая-график функции будет «мало» отличаться от прямой на рассматриваемом отрезке. Математически это утверждение плохо тем, что в нём присутствуют нечётко определенные термины (они взяты в кавычки). Зато становится ясен смысл дальнейших действий. Предлагается для «малых» Δx (эта неточность в определении слова «малый» позже будет устранена) записать не только для линейной, а для любой функции

$$\Delta y \approx A\Delta x \text{, где } A = \text{const} \quad (1.2)$$

Эта запись делается по аналогии с выражением (1.1), исходя из высказанного предположения, что на отрезках малой длины график функции с некоторой точностью может быть заменён прямой. Чем меньше Δx, тем точнее выполняется соотношение (1.2). Строго говоря, соотношение (1.2) возможно написать не для любой функции и не в любой точке. В третьей лекции мы оговорим, какие условия должны для этого выполняться.

Запишем (1.2) подробнее

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx A\Delta x \text{ или } \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\approx A \quad (1.3)$$

Величина A даёт скорость изменения функции $y=f(x)$ на отрезке $\left[x_0, x_0+\Delta x\right]$, длина которого считается малой. Заметим, что, в отличие от случая линейной функции, величина A будет зависеть от точки x_0.

Плохо в формуле (1.3) то, что она приближённая. Связано это с тем, что кривая всё-таки остаётся кривой на рассматриваемом отрезке, пока мы берём величину Δx *конечной*. Выход заключается в том, чтобы взять величину Δx *бесконечно малой* или, как говорят, устремить её к нулю. Тогда получится скорость изменения функции в точке x_0, и формула (1.3) станет точной.

Вопрос теперь только в корректном определении «стремления к нулю». Для этого в математическом анализе есть понятие предела функции в точке. Этим вопросом мы займёмся в следующей лекции.