Модуль 6. Применение формулы Тейлора в физике

В предыдущей лекции было рассказано о формуле Тейлора с чисто абстрактных позиций. Также была приведения геометрическая иллюстрация. Однако формула Тейлора применяется и в физических приложениях очень часто. Как правило, она требуется, когда нужно выделить поведение функции при тех или иных значениях аргумента. Рассмотрим два примера, иллюстрирующих эту общую идею.

6.1. Релятивистское выражение для энергии частицы

Рассмотрим выражение для энергии частицы, используемое в специальной теории относительности:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

где m – масса частицы, v – скорость частицы, c – скорость света.

В повседневной жизни мы имеем дело со скоростями, значительно меньшими скорости света. Поэтому отношение $\frac{v^2}{c^2}$ можно считать стремящимся к нулю. Получим первое приближение точной формулы для энергии по квадрату скорости частицы (также говорят о проведении разложения). Потребуется формула $(1+x)^\alpha \approx 1+\alpha x$, где $\alpha = -\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1-\frac{1}{2}x$$

Подставляем сюда $x=-\frac{v^2}{c^2}$ и находим:

$$E \approx mc^2\left(1+\frac{v^2}{2c^2}\right)=mc^2+\frac{mv^2}{2}$$

Во втором слагаемом узнаём обычную кинетическую энергию тела.

6.2. Малые колебания математического маятника

Можно привести ещё один пример – исследование колебаний математического маятника. Напомним, что так называется подвешенная на длинной невесомой нерастяжимой нити материальная точка. При всей простоте этой системы описание её поведения не так уж тривиально. Чтобы это стало лучше видно, начнём с маятника, представляющего собой тело с массой m, подвешенное на пружине с жёсткостью k. Пусть колебания совершаются вдоль оси X, тогда энергия этого маятника

$$E=\frac{mv^2}{2}+\frac{kx^2}{2}=\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}kx^2$$

Зависимость координаты тела от времени $x=x(t)$ может быть определена из этого уравнения. Неизвестная функция $x(t)$ фигурирует в данном уравнении под знаком производной. Такие уравнения называются дифференциальными. Просто приведём его решение (его получение не слишком сложно, но это тема отдельного разговора):

$$x(t)=\sqrt{\frac{2E}{k}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\varphi_0\right)$$, где φ_0 – произвольная константа

Можно ещё преобразовать это выражение. Пусть координата $x=0$ отвечает положению равновесия маятника. Когда отклонение маятника от положения равновесия максимально (обозначим его a), то его скорость равна нулю.

Следовательно, в крайнем положении

$$E=\frac{1}{2}ka^2$$

А так как энергия сохраняется, то это значение энергии не меняется со временем.

$$x(t)=a\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\varphi_0\right)$$

Отсюда легко найти частоту колебаний маятника:

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

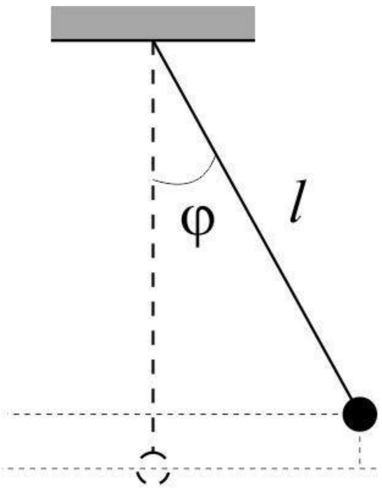

Рис. 6.1

Вернёмся к математическому маятнику. Для него более естественно выбрать в качестве координаты угол отклонения от вертикали φ. Запишем энергию маятника. При колебаниях материальная точка движется по дуге окружности. Как известно, при движении точки по окружности радиуса r её линейная скорость v связана с угловой скоростью ω простым соотношением $v=\omega r$. Между тем $\omega=\frac{d\varphi}{dt}$, поэтому кинетическая энергия маятника

$$T=\frac{mv^2}{2}=\frac{m}{2}(\omega l)^2=\frac{ml^2}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2,$$ где l – длина нити

Чтобы записать потенциальную энергию, следует выбрать уровень, на котором она будет равна нулю (потенциальная энергия определена с точностью до константы). Пусть это будет уровень положения равновесия маятника. Потенциальная энергия в поле тяжести определяется высотой тела над выбранным «нулевым» уровнем.

$$U = mg(l - l\cos\varphi) = mgl(1-\cos\varphi) =$$
$$= mgl\left(1-\cos^2\frac{\varphi}{2}+\sin^2\frac{\varphi}{2}\right) = 2mgl\sin^2\frac{\varphi}{2}$$

Полная энергия

$$E = \frac{ml^2}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + 2mgl\sin^2\frac{\varphi}{2}$$

Если попробовать решить это дифференциальное уравнение, то такое простое решение, как в случае пружинного маятника, не получится. Однако возможны упрощения, если предположить, что совершаемые колебания малы, т.е. угол отклонения маятника от положения равновесия $\varphi \ll 1$. Тогда можно приближённо положить $\sin\frac{\varphi}{2} \simeq \frac{\varphi}{2}$. Выражение для энергии принимает вид

$$E = \frac{1}{2}ml^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}mgl\varphi^2$$

Если сравнить это выражение с энергией пружинного маятника, то можно сразу написать зависимость $\varphi = \varphi(t)$ по аналогии:

$$\varphi(t) = \varphi_{\max}\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \alpha_0\right)$$, где α_0 – произвольная константа

Частота колебаний $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Точная зависимость $\varphi = \varphi(t)$, как и частота колебаний, записывается при помощи значительно более сложной функции.