Модуль 7. Интеграл. Приложения интеграла

7.1. Первообразная. Неопределённый интеграл

После изучения в школе самых элементарных основ анализа может остаться неверное мнение, что понятие определённого интеграла существенно опирается на понятие неопределённого интеграла, и одно без другого просто немыслимо. Действительно, связь между определённым и неопределённым интегралом есть. Однако определённый интеграл – гораздо более глубокое понятие, допускающее многочисленные обобщения. Поэтому здесь сконцентрируем внимание именно на нём.

Не обойдём, правда, вниманием и неопределённый интеграл. Вместе с производной вводится термин «первообразная». Это взаимно обратные понятия. Если $F'(x) = f(x)$, то функция $f(x)$ называется производной функции $F(x)$, а функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$. Производная определяется однозначно по функции (если производная существует), первообразная – нет. Например, для функции $y = 2x$ первообразными являются и функция $y = x^2$, и функция $y = x^2 + 1$. Понятно, что первообразных существует бесконечно много.

Неопределённым интегралом $\int f(x)dx$ называется множество всех первообразных функции $f(x)$. Легко убедиться в том, что первообразные функции могут отличаться только на константу. Действительно, пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ являются первообразными для функции $f(x)$. Составим функцию $F_1(x)-F_2(x)$ и найдём её производную:

$$(F_1(x)-F_2(x))' = F_1'(x)-F_2'(x) = f(x)-f(x) = 0$$

Производная функции равна нулю, только если эта функция является константой, т.е. $F_1(x) = F_2(x) + \text{const}$.

Как ни странно, иногда это простое свойство позволяет доказывать некоторые соотношения. Например, можно показать (читателю полезно это сделать), что

$$(\operatorname{arctg} x)' = \left(\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)'$$

Следовательно,

$$\operatorname{arctg} x = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C$$

Возьмём $x = 0$ и найдём, что $C = 0$. Мы доказали тригонометрическую формулу, не очевидную сразу.

Тот факт, что первообразные могут отличаться лишь на константу, позволяет найти одну первообразную, прибавить к ней произвольную константу (т.н. константу интегрирования) – и это будет неопределённый интеграл. Забывать писать эту константу нельзя ни в коем случае. Пример правильной записи:

$$\int 2xdx = x^2 + C,\ C = \text{const}$$

Без константы интегрирования это уже неверно.

7.2. Построение определённого интеграла

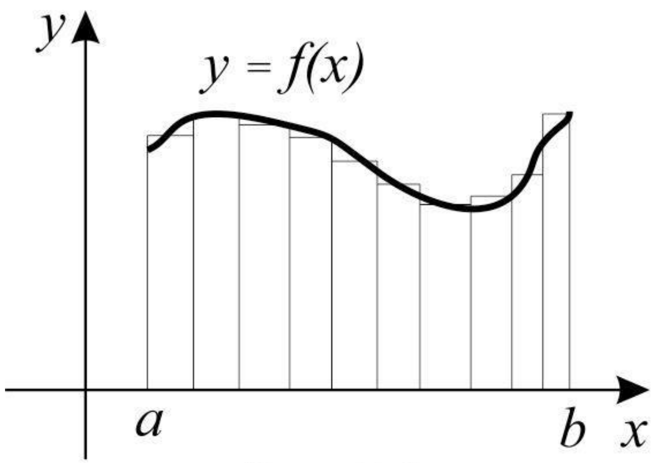

Рис. 7.1

Переходим к определённому интегралу. Не будем начинать с формального определения, а рассмотрим простой пример. Пусть имеется функция $f(x)$, которую мы рассматриваем при $x \in [a,b]$. Для определённости допустим, что на этом отрезке $f(x) > 0$, у неё нет разрывов, она не обращается в бесконечность. Найдём площадь фигуры, ограниченной с одной стороны отрезком оси абсцисс $[a,b]$, с другой – графиком функции $f(x)$, и с двух сторон – прямыми $x = a$ и $x = b$ (криволинейная трапеция). Если бы на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ была бы константой, то криволинейная трапеция была бы прямоугольником, площадь которого находится элементарно. Но у нас фигура ограничена сверху в общем случае некоторой гладкой кривой. Если разбить фигуру на тонкие полоски, то их площадь можно будет приближённо вычислять как площадь прямоугольника. Ошибка будет тем меньше, чем меньше будет ширина прямоугольника. Сложив площади всех полосок, получим приближённую площадь исходной фигуры (весь процесс в целом проиллюстрирован на рис. 7.1). Чтобы значение площади получилось точным, нужно брать прямоугольники бесконечно малой ширины. Оформим эту мысль математически. Разобьём отрезок $[a,b]$ на отрезки $[x_{k-1}, x_k]$, где $k = \overline{1,N}$, причём $x_0 = a;\ x_N = b$. Длины отрезков необязательно должны быть одинаковы. В каждом из отрезков выберем произвольную точку $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ и составим сумму

$$\sum_{k=1}^{N} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k \text{, где } \Delta x_k = x_k - x_{k-1}$$

Это площадь фигуры, найденная приближённо. Обозначим $\lambda = \max\limits_{k=\overline{1,N}} \Delta x_k$. Тогда бесконечно малая ширина полосок соответствует тому, что $\lambda \to 0$: $S = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{k=1}^{N} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$

В математическом анализе принято записывать это строже, но нам сейчас достаточно этого. Построенная величина и называется определённым интегралом функции $f(x)$ в пределах от a до b.

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

Уже отталкиваясь от такого определения, строится теория определённого интеграла, в рамках которой доказывается формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$.

Вообще говоря, пределы интегрирования a и b могут быть бесконечными (один из них или оба). Тогда в правой части формулы Ньютона-Лейбница предполагается вычисление пределов. Например,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(a)$$

Предел может и не существовать, тогда говорят, что интеграл расходится. В противном случае интеграл сходится.

Определённый интеграл иногда можно вычислять и от функций, терпящих конечный или бесконечный разрыв на промежутке интегрирования. Опять же интеграл в таких случаях может и расходиться.

7.3. Некоторые свойства интеграла

Интеграл (и определённый, и неопределённый) обладает свойством линейности, т.е.

$$\int(\alpha f(x)+\beta g(x))dx=\alpha\int f(x)dx+\beta\int g(x)dx$$

В интеграле можно делать замену переменной интегрирования. Этот метод часто используется для вычисления интегралов. Основная идея – введение такой переменной интегрирования, при которой подынтегральное выражение преобразуется к виду, в котором интеграл вычислять удобнее. Пишут $x=g(t)$, тогда $dx=g'(t)dt$. Интеграл принимает вид

$$\int f(x)dx=\int f(g(t))\cdot g'(t)dt$$

После выполнения интегрирования нужно вернуться к прежней переменной.

Если речь идёт об определённом интеграле, то нужно менять и пределы интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))\cdot g'(t)dt$$

Здесь $g^{-1}(x)$ – функция, обратная по отношению к функции $g(t)$. В этом случае ответом будет число, поэтому никаких возвращений к прежним переменным не требуется ни на каком этапе вычислений. Примеры будут приведены в следующем параграфе. Там также будут даны ещё некоторые сведения о свойствах интегралов. А вообще, нужно заметить, что не любая функция может быть использована для замены переменной. Об этом подробно говорится в курсе математического анализа. Мы на этом здесь не останавливаемся.

7.4. Примеры применения интегралов

Часто применение интеграла основано на том, что вычисление производной и неопределённого интеграла – взаимно обратные операции. Например, так как ускорение $w(t)$ тела – производная скорости $v(t)$ по времени, то

$$v(t)=\int w(t)dt$$

Часто в физике интегрирование используется в качестве альтернативы суммированию. Например, в математическом анализе доказывается, что многие суммы бесконечного числа слагаемых конечны. Вычисление таких сумм – нередко задача сложная. В качестве приближённого метода используется то, что интеграл – по сути, тоже сумма бесконечно большого числа слагаемых. Поэтому сумму заменяют интегралом. На высокую точность такое вычисление (если речь идёт о получении конкретного числа) не претендует. В аналитических расчётах такой метод применяется обычно в тех случаях, когда складывается много малых по величине слагаемых. Ясно, что в каждом конкретном случае нужно уточнять, что значит «много слагаемых» и что значит «малое слагаемое». Обоснование применимости такого приближения иногда становится весьма трудоёмким.

Наконец, с понятием интеграла связано усреднение физических величин. Почему-то при слове «усреднение» первая возникающая ассоциация у многих – среднее арифметическое. В физике есть много разных усреднений, связанных с определёнными задачами. Чтобы чрезмерно не углубляться в этот вопрос, ограничимся в этом параграфе интегральным средним.

Общее определение наиболее часто используемого в общей физике интегрального среднего гласит: средним значением функции $f(x)$, заданной на промежутке $x \in [x_1, x_2]$, называется величина

$$\langle f \rangle = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$$

Применим это определение следующей задаче. Тело прямолинейно двигалось в промежутке времени $[0, \tau_1]$ со скоростью $v_1(t) = a_1 t$, затем в промежутке времени $[\tau_1, \tau_2]$ с постоянной скоростью $v_2(t) = a_1 \tau_1$ и в промежутке времени $[\tau_2, \tau_3]$, где $\tau_3 = \frac{a_1}{a_2} \tau_1 + \tau_2$ – со скоростью $v_3(t) = a_1 \tau_1 - a_2 (t - \tau_2)$. Найдём среднюю скорость тела за всё время движения. График зависимости скорости от времени показан на рис. 7.2.

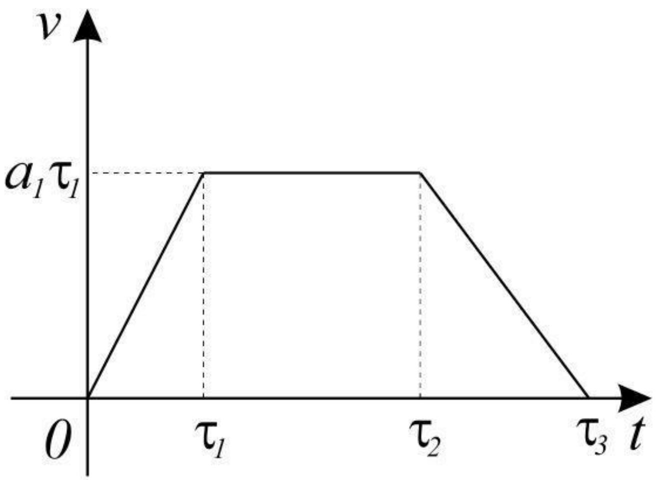

Рис. 7.2

$$\langle v \rangle = \frac{1}{\tau_3}\left\{\int_0^{\tau_1} a_1 t dt + \int_{\tau_1}^{\tau_2} a_1\tau_1 dt + \int_{\tau_2}^{\tau_3} (a_1\tau_1 - a_2(t-\tau_2))dt\right\} =$$

$$= \frac{a_1\tau_1}{a_1\tau_1 + a_2\tau_2}\left(a_2\tau_2 + \frac{1}{2}(a_1 - a_2)\tau_1\right)$$

Видимо, читатель в состоянии воспроизвести самостоятельно вычисление этих интегралов.