Модуль 2. Предел функции одной вещественной переменной

2.1. Вводные замечания к теме

Понятие предела функции в точке является одним из центральных в курсе математического анализа. Оно используется для определения таких важных понятий, как непрерывность функции в точке, производная функции в точке и др. Мы не станем приводить строгое определение предела функции в точке, ограничиваясь иллюстрацией этого понятия несколькими характерными примерами. Кроме того, сформулируем основную идею, лежащую в основе подхода к определению предела.

Интуитивно понятное представление о том, что означает стремление величины к тому или иному значению, конечно, лишено какой-либо математической строгости. Попробуем формализовать это представление. Пусть дана некоторая функция $y = f(x)$. Значения аргумента – как независимой переменной – мы можем выбирать сами по своему желанию. Если нас интересует предел функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$, то мы должны взять некоторое произвольное значение аргумента, отличное от $x = x_0$ (в котором функция определена, конечно!), отметить значение функции в этой точке, а затем выбирать значения аргумента, постепенно приближаясь к точке $x = x_0$ и отслеживая поведение функции. Что означает с формальной точки зрения «постепенное приближение»?

Нужно задать некоторое положительное число δ и образовать окрестность точки $x = x_0$:

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Условимся считать, что значение аргумента приблизилось к точке $x = x_0$, если сначала оно не принадлежало этой окрестности, а потом – оказалось в ней. Чтобы описать неограниченное приближение значения аргумента к точке $x = x_0$, нужно уменьшать величину δ (разумеется, оставляя её положительной).

Теперь обратимся к тому, что происходит с функцией. Допустим, что предел в точке $x = x_0$ существует. Тогда при стремлении аргумента к этой точке значение функции будет стремиться к некоторому числу a, которое и будет пределом. Если со стремлением аргумента мы разобрались, то про стремление функции – ещё нет. Но нового здесь уже ничего не будет. Снова выбирается положительное число – только теперь другое, его традиционно обозначают ε. Строится окрестность точки a:

$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

А дальше мы говорим, что значение функции приблизилось к числу a, если оно сначала не принадлежало этой окрестности, а потом при изменении аргумента попало в эту окрестность.

Есть, правда, тонкость: при дальнейшем изменении аргумента значение функции (которое мы контролировать не можем – в отличие от аргумента) может выйти за пределы ε-окрестности. Чтобы исключить этот вариант, нужно сделать уточнение. А именно, нужно сказать, что если мы находимся в пределах достаточно маленькой окрестности точки $x = x_0$, то значение функции гарантированно окажется в пределах некоторой ε-окрестности точки a – тогда это число и будет пределом функции. Естественно, числа ε и δ в последнем рассуждении должны быть связаны между собой.

Проследим полностью логику построения понятия предела. Задаёмся ε-окрестностью точки a и говорим, что это число является пределом данной функции в точке $x = x_0$, если для ε-окрестности любого размера (т.е. для любого сколь угодно малого положительного числа ε) найдётся δ-окрестность точки $x = x_0$ (т.е. зависящее от ε положительное число δ), такая что при нахождении аргумента внутри этой δ -окрестности значение функции окажется внутри выбранной ε -окрестности. Обычно это определение записывают компактно, используя т.н. язык $\varepsilon - \delta$. По сути эта запись является формальным выражением вышесказанного.

Перейдём к конкретным примерам, которые прояснят описанную конструкцию.

2.2. Предел функции, непрерывной в рассматриваемой точке

Пример 1.

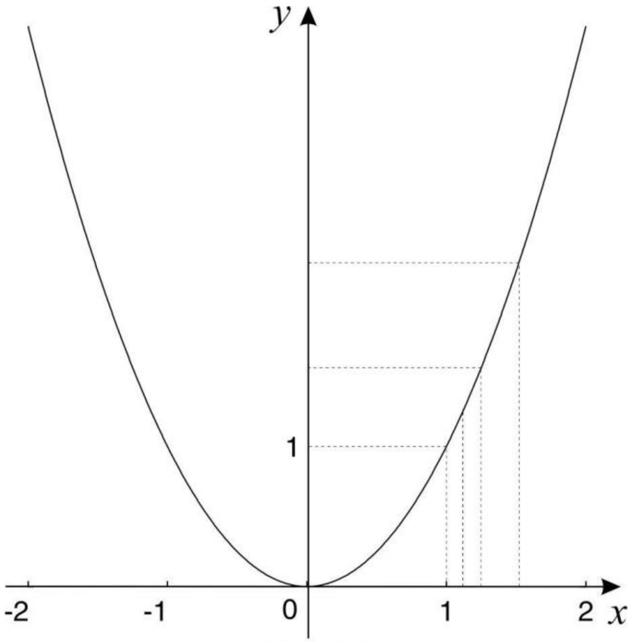

Рис. 2.1

Пусть дана функция $y = x^2$ (см. график на рис. 2.1). Будем, постепенно приближаясь к значению $x = 1$, следить за изменением функции.

x	1,5	1,1	1,05	1,01	1,001	1
y	2,25	1,21	1,1025	1,0201	1,002001	1

Как видно, чем ближе мы подходим к значению $x = 1$, тем с большей точностью функция становится равной единице – функция стремится к этому значению. Что немаловажно – если приближаться к значению $x = 1$ со стороны меньших значений, то функция всё равно будет стремиться к единице. На возражение «что мешало просто подставить в функцию $x = 1$ и получить $y = 1$?» можно ответить, что в данной ситуации ничто не мешало. Однако нередко встречаются не такие «хорошие» функции. Кроме того, важно заметить, что в этом примере не имело значения, с какой стороны подходить к рассматриваемой точке. Значение функции, к которому она стремится при стремлении аргумента к определённой точке (при условии, что нет зависимости от того, с какой стороны аргумент стремится к этой точке), называется пределом функции в этой точке. В данном примере можно записать $\lim\limits_{x \to 1} x^2 = 1$.

2.3. Предел функции, терпящей в рассматриваемой точке разрыв второго рода

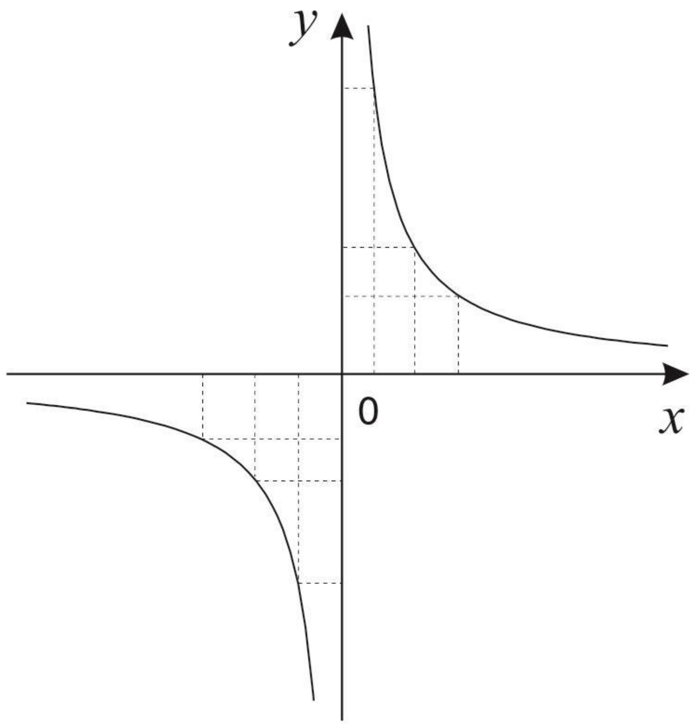

Рис. 2.2

Теперь рассмотрим функцию $y = \frac{1}{x}$ (см. график на рис. 2.2). Сначала будем приближаться к точке $x = 0$ со стороны бо̀льших значений аргумента.

x	1	0,5	0,1	0,05	0,01	0,001	0,0001
y	1	2	10	20	100	1000	10000

Несложно заметить, что при дальнейшем приближении к нулю значения функции будут продолжать неограниченно расти.

Составим аналогичную таблицу для приближения к точке $x = 0$ со стороны меньших значений аргумента.

x	-1	-0,5	-0,1	-0,05	-0,01	-0,001	-0,0001
y	-1	-2	-10	-20	-100	-1000	-10000

Теперь чем ближе подходим к значению $x = 0$, тем меньше становится значение функции. Это уменьшение значений функции опять ничем не ограничено.

Итак, если подходить к одной и той же точке с разных сторон, то получаются разные значения пределов. Такие пределы называются односторонними. «Обычный» – «двусторонний» – предел в таком случае не существует. Когда же он существует, то оба односторонних предела равны – мы это видели в первом примере.

Во втором примере оба односторонних предела будут бесконечными, причем знаки бесконечностей будут различны. Результат этих рассуждений записывают следующим образом:

$$\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}=+\infty,\ \lim_{x\to 0-}\frac{1}{x}=-\infty$$

Запись « $x\to 0+$ » означает, что мы приближаемся к значению $x=0$ со стороны бо̀льших значений аргумента – получается правосторонний предел функции. Аналогично « $x\to 0-$ » означает, что мы приближаемся к значению $x=0$ со стороны меньших значений – получается левосторонний предел функции.

Можно рассмотреть неограниченное увеличение аргумента – формально это записывается « $x\to+\infty$ » (см. рис. 2.3).

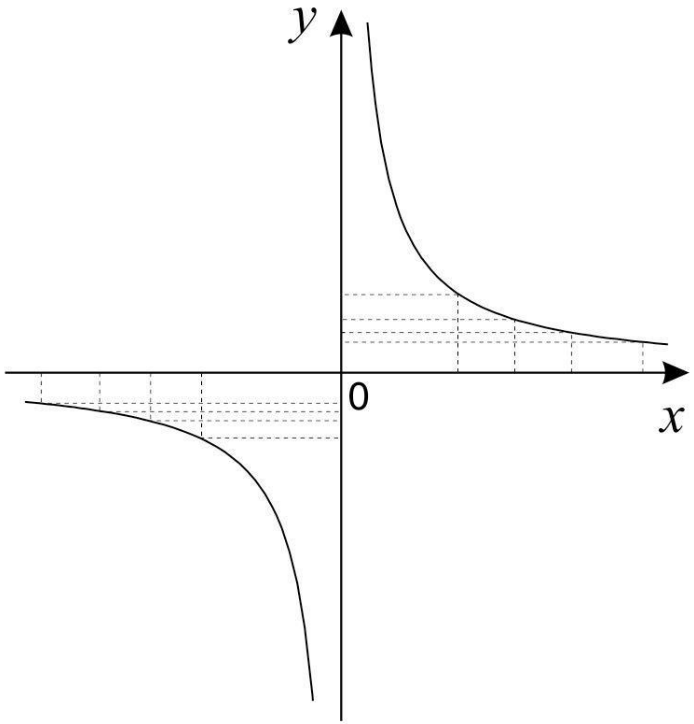

Рис. 2.3

x	1	5	10	50	100	1000	10000
y	1	0,2	0,1	0,02	0,01	0,001	0,0001

Видно, что функция стремится к нулю:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

Аналогично убеждаемся, что такой же предел функция имеет при неограниченном уменьшении аргумента:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

2.4. Предел функции, терпящей в рассматриваемой точке разрыв первого рода

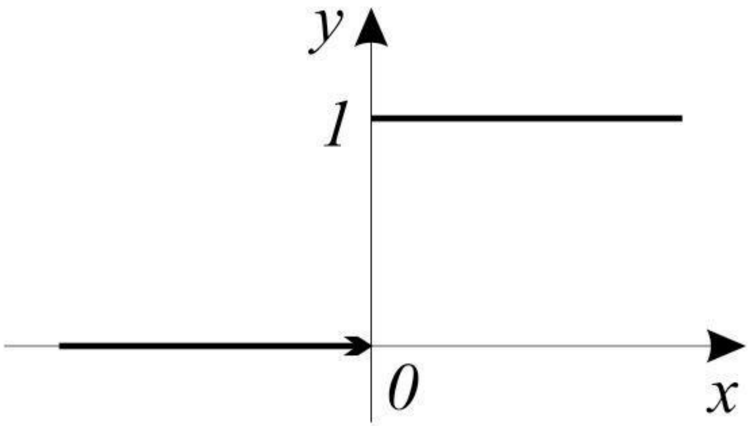

Рис. 2.4

В качестве последнего примера рассмотрим часто используемую в математике и физике функцию Хевисайда (см. график на рис. 2.4):

$$\eta(x)=\begin{cases}1, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

Это своеобразная «ступенька». Её обычно используют для выделения из функций их положительно определённых частей. Иногда полагают $\eta(0)=0$ или даже $\eta(0)=0{,}5$. В разбираемом примере, однако, точное определение функции Хевисайда в нуле несущественно.

Так вот, предела в точке $x=0$ у функции Хевисайда нет. Зато есть односторонние пределы, конечные на этот раз:

$$\lim_{x\to 0+}\eta(x)=1;\ \lim_{x\to 0-}\eta(x)=0$$

Именно из-за несовпадения односторонних пределов в точке $x=0$ не существует предела «двустороннего» в этой точке. Говорят, что функция испытывает в точке $x=0$ конечный разрыв и имеет скачок. Величина скачка определяется разностью односторонних пределов:

$$\lim_{x\to 0+}\eta(x)-\lim_{x\to 0-}\eta(x)=1$$

Чтобы не возникло мнение, что в физических приложениях односторонние пределы не встречаются, приведём пример. Пусть имеется поток газа. Выберем в нём некоторую поверхность. Величины, характеризующие течение газа, будет отмечать индексом 1, если они относятся к газу в области 1, и индексом 2, если они относятся к газу в области 2. Нет ничего необычного, если проекция скорости газа на ось абсцисс v_x слева и справа от выбранной поверхности будет различной:

$$v_{1x} \neq v_{2x}$$

Такая ситуация отвечает распространению в газе ударной волны. Выбранная поверхность является фронтом ударной волны.

Можно привести и другие примеры, например, из электростатики. Рассмотрим находящийся в вакууме диэлектрик. Создадим электростатическое поле в данной области пространства. Поле будет существовать как внутри диэлектрика, так и вне его. Однако на границе тела напряжённость поля будет испытывать скачок. Точнее, скачок имеет проекция вектора напряжённости на нормаль к поверхности диэлектрика в рассматриваемой точке. Величина скачка определяется диэлектрической проницаемостью диэлектрика.