Неопределенный интеграл и его свойства

1. **Производная неопределенного интеграла** равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$$

2. **Интеграл суммы функций** равен сумме интегралов:

$$\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

3. **Интеграл разности функций** равен разности интегралов:

$$\int (f(x)-g(x))\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$$

4. **Постоянный коэффициент** можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$$

Методы интегрирования

1. Метод подстановки (замена переменной интегрирования)

$$\int f(x)\,dx = \int f(u(t))\,u'(t)dt, \text{ если } x = u(t)$$

2. Метод интегрирования по частям

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du,$$

где $u(x)$, $v(x)$ − дифференцируемые функции.

Основные первообразные функций

Подынтегральная функция	**Первообразная**
$f(x) = k$	$F(x) = kx + C$
$f(x) = x^a$, $a \neq -1$	$F(x) = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$F(x) = \ln\lvert x\rvert + C$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + C$
$f(x) = a^x$	$F(x) = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + C$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + C$
$f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x}$	$F(x) = -\mathrm{ctg}\, x + C$
$f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$F(x) = \mathrm{tg}\, x + C$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$F(x) = \arcsin x + C$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$F(x) = \mathrm{arctg}\, x + C$

Формулы вычисления определенных интегралов

Формула Ньютона–Лейбница

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(a) - F(b)$$

Площадь криволинейной трапеции – части плоскости, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$, где $a < b$, кривой $y = f(x)$ и осью Ox, находится по формуле

$$S = \int_a^b f(x)\,dx = F(a) - F(b) = F(x)\Big|_a^b$$

Если фигура ограничена сверху кривой $y = f_1(x)$, а снизу — кривой $y = f_2(x)$ для всех $x \in [a,b]$, то ее **площадь** вычисляется по формуле:

$$S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))\,dx$$

Объем тела вращения, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции $a \le x \le b$, $0 \le y \le f(x)$, равен

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$$