Proseminar Diskrete Mathematik

1 Der Nullstellensatz in der Diskreten Mathematik

Institut für Mathematik
Alpen-Adria Universität Klagenfurt

SS 2016

Inhalt

Definition 1.1

Die k-Färbung eines Graphen ist eine Abbildung $f : V(G) \to S$ mit $xy \in E(G) : f(x) \neq f(y)$, wobei S Menge der Farben und $|S| = k$.

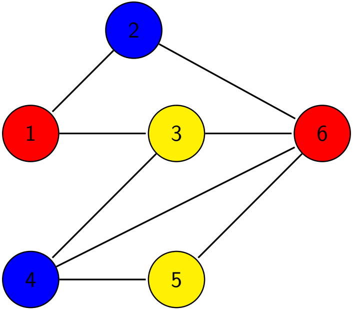

Abbildung 1.1: 3-Färbung

Einleitung II

Sei $G = (V, E)$ ein Graph

$$x_i^k - 1 = 0 \quad \forall i \in V,$$
$$\sum_{s=0}^{k-1} x_i^{k-1-s} x_j^s = 0 \quad \forall (i,j) \in E.$$

Theorem 1.1

Graph G ist k-färbbar $\Leftrightarrow$ System besitzt eine komplexe Lösung

Theorem 1.2

G ist k-färbbar und k ungerade $\Leftrightarrow$ System besitzt gemeinsame Nullstelle über $\overline{\mathbb{F}_2}$, wobei $\overline{\mathbb{F}_2}$ algebraische Abschluss über dem endlichen Körper mit zwei Elementen

Einleitung III

Beweis.

Angenommen die Aussage ist wahr über den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$.
„$\Rightarrow$" Sei G k-färbbar, ordne jeder Farbe die k-te Einheitswurzel zu. Sei die j-te Farbe $\beta_j = e^{2\Pi j/k}$; substituiere alle x_l mit der zugehörigen Einheitswurzel der Farbe des l-ten Knotens. Also haben wir eine Lösung des Systems: Die Gleichungen $x_i^k - 1 = 0$ sind trivialerweise erfüllt.
Wir betrachten nun die Kantengleichungen: Wir nehmen eine Kante ij, da x_i und x_j durch Einheitswurzeln substituiert wurden, gilt $x_i^k - x_j^k = 0$. Des Weiteren gilt:

$$x_i^k - x_j^k = (x_i - x_j)(x_i^{k-1} + x_i^{k-2}x_j + x_i^{k-3}x_j^2 + \ldots + x_j^{k-1}) = 0;$$

Durch die Substitution mit unterschiedlichen Einheitswurzeln gilt $x_i - x_j \neq 0$, also muss der andere Faktor, der den Kantengleichungen entspricht, 0 sein. $\square$

Beweis.

„$\Leftarrow$“ Angenommen die Gleichungen seien erfüllt, d.h. der Lösungspunkt muss aus k-ten Einheitswurzeln bestehen. Den benachbarten Knoten müssen verschiedene Einheitswurzeln zugeordnet werden, da:
Angenommen einem Paar benachbarter Knoten ij wird die selbe Einheitswurzel zugewiesen. Die Gleichung
$x_i^{k-1} + x_i^{k-2}x_j + x_i^{k-3}x_j^2 + \ldots + x_j^{k-1} = 0$ wird dann zu
$\beta^{k-1} + \beta^{k-1} + \ldots + \beta^{k-1} = k\beta^{k-1} = 0$, jedoch $\beta \neq 0$ ↯ $\square$

Problemdarstellung

Gegeben: $f_1, \ldots, f_m \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$
Gesucht: Lösung x für das System $f_1(x) = 0, f_2(x) = 0, \ldots f_m(x) = 0$ (wird auch geschrieben als $F(x) = 0$)
Ziel ist es eine Lösung zu diesem System zu finden beziehungsweise zu zeigen, dass es keine Lösung gibt.

Theorem 1.2 (Fredholm's Alternativtheorem)

Das Lineare Gleichungssystem $Ax = b$ besitzt genau dann eine Lösung, wenn ein Vektor y mit der Eigenschaft $y^T A = 0^T$ und $y^T b \neq 0^T$ existiert.

Hilberts Nullstellensatz II

Theorem 1.3 (Hilbert's Nullstellensatz)

Sei $F = \{f_1, \ldots, f_m\} \subseteq \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$.
Die Varietät $\{x \in \overline{\mathbb{K}^n} : f_1(x) = 0, \ldots, f_s(x) = 0\}$ *ist genau dann leer, wenn 1 zum Ideal* $\langle F \rangle$*, das aus F generiert wurde, gehört. Man beachte* $1 \in \langle F \rangle$ *bedeutet, dass Polynome* $\beta_1, \ldots, \beta_m$ *im Ring* $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ *existieren, sodass* $1 = \sum_{i=1}^{m} \beta_i f_i$*. Diese polynomielle Identität ist ein Zertifikat für die Unlösbarkeit von* $F(x) = 0$*.*

Literatur

[Die06] R. Diestel.
Graphentheorie.
Springer, 2006.

[KM13] C. Karpfinger and K. Meyberg.
Algebra. Gruppen - Ringe - Körper.
Springer, 2013.

[LLHK13] J. a. Loera, J. Lee, R. Hemmecke, and M. Köppe.
Algebraic and Geometric Ideas in the Theory of Discrete Optimization.
Society for Industriell and Applied Mathematics, 2013.

[LLMM11] J. a. Loera, J. Lee, P. N. Malkin, and S. Margulies.
Computing infeasibility certificates for combinatorial problems through hilbert's nullstellensatz.
Journal of Symbolic Computation, 2011.

[LLMO09] J. a. Loera, J. Lee, S. Margulies, and S. Onn.