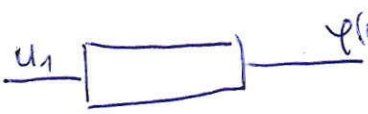
# Rendszerelmélet ZH

## 1, Példa

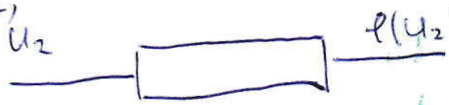
1/a,




$u_1 \rightarrow \varphi(u_1) = 12e^{-t}\cdot\varepsilon(t)$

$3u_1 \rightarrow \varphi(3u_1) = ?$ $\quad \underbrace{\varphi(3u_1) = 3\cdot\varphi(u_1)}_{\text{HOMOGENITÁS}} = 3\cdot($
$= 36e$

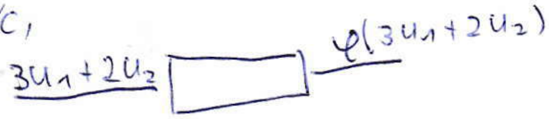
1/b,




$u_2 \rightarrow \varphi(u_2) = 4{,}5\cdot e^{-5t}\cdot\varepsilon(t)$

$2u_2 \rightarrow \varphi(2u_2) = ?$ $\quad \varphi(2u_2) = 2\varphi(u_2) = 2\cdot(4{,}5e^{-5t}$
$= 9e^{-5t}\cdot\varepsilon($

1/c,




$\varphi(3u_1+2u_2)$? $\quad \underbrace{\varphi(3u_1+2u_2) = \varphi(3u_1) + \varphi(2u}_{\text{ADDITIVIT}}$

$= 36e^{-t}\cdot\varepsilon(t) + 9e^{-5t}\cdot\varepsilon(t)$

## 2, Példa

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 5x_1 + 2x_3 + 3u \\ \dot{x}_2 &= -3x_2 + 2{,}3x_3 \\ \dot{x}_3 &= -5x_1 - 2x_3 + u \\ y &= 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 4u \end{aligned}}$$

0. fel: Általános alak felírása: (Nem lesz számon

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}\right\}$$

2/a, Mátrixok megadása:

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 2{,}3 \\ -5 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} u \\ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{array}$$

Tehát az $x_1$ 5x szerepel $\dot{x}_1$ egyenletében.

Hányszor szerepel u az egyenletében.

$$C = \begin{array}{cc} \text{eh.}(x_1) & \text{eh.}(x_2) \\ (2 & -1 \end{array}$$

$$D = \begin{array}{c} \text{eh}(u) \\ (-4) \end{array}\, y$$

↳ u együttható y egyenletben.

2/b: Van-e szakadás a rendszer ugrásválaszában?

↳ Van, mert $D \neq 0$. Ált.: Ha $D = 0 \Rightarrow \emptyset$ szakadás, különben van

## 3. Példa

$$\boxed{\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \overset{A}{\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \overset{B}{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}} u \qquad y = \overset{C}{(1 \;\; 2)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}$$

$(\dot{x}_1 = Ax + B)$

$(y = Cx + Du)$

Ez az ált. alak $\Rightarrow D = 0$, mer
nem szerepel az egyenletben
(D az u eh.-ja)

3/a, Mik a rendszer sajátértékei?

$\det(sI - A) = 0$ (Ez ekvivalens a matematikában használatos $\det(\lambda I -$
megoldással)

$$\det\left|\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\right| = \det\begin{vmatrix} s+1 & -5 \\ 0 & s+3 \end{vmatrix} = (s+1)(s+3) - (0\cdot -5) =$$

$$= (s+1)(s+3) = 0$$

$s_1 = -1 \qquad s_2 = -3$

3/b, Stabil a rendszer? Igen, mert a sajátértékek valós része $\ominus$!

3/C, Bemenet $u^*$ => $x_1^*, x_2^*, y^*$?

$\dot{x}_1 = -1x_1 + 5x_2 + 0u$
$\dot{x}_2 = 0x_1 - 3x_2 + 2u$
} a és b mátrix oszlopból olvasható ki

$y = x_1 + 2x_2 + 0u$ ← C mátrixból olvasható ki

↓

D=0!

Megoldás: Ezeket ($\dot{x}_1, \dot{x}_2$) tegyük 0-val egyenlővé, $x_1, x_2, u$-t cseréljük $x_1^*$ változókra.

$$\boxed{\begin{aligned} 0 &= -1x_1^* + 5x_2^* \\ 0 &= -3x_2^* + 2u^* \\ y^* &= x_1^* + 2x_2^* \end{aligned}}$$

→ $5x_2^* = 1x_1^*$, $x_2^* = \frac{1}{5}x_1^*$

→ $3x_2^* = 2u^*$ → $x_2^* = \frac{2}{3}u^*$

→ $y^* = x_1^* + 2x_2^* = 5\cdot\frac{2}{3}u^* + 2\cdot\frac{2}{3}u^* = \frac{14}{3}$

$x_1^* = 5x_2^* = 5\cdot\frac{2}{3}u^*$, $2x_2^* = 2\cdot\frac{2}{3}u^*$

Tehát $u^*$ bemenet esetén kimenet $\frac{14}{3}u^*$

3/d, Van-e szakadás az ugrásválaszban?

↳ Nincs, mert $D=0$ (y egyenletében ∅ ott az u)

4. Példa

1. Rendszer sajátértékei: (−10, −9,0909, −1)
2. Rendszer sajátértékei: (−0,1, −0,0667, −0,05)

4/a, Stabilak?

↳ Igen, mert a sajátértékek ⊖ valósak.

4/b, Melyik rendszer a gyorsabb?

1, (−10, −9,0909, −1)

Időállandók (−1. reciprok): $+\frac{1}{10}s - \frac{1}{-9{,}0909} = \frac{1}{9{,}0909}s - \frac{1}{-1} = 1s$

A leglassabb kell (abs. értékben a legnagyobb), az adja a rendszer sebességét (szűk keresztmetszet).

+ Megjegyzés: Komplex szám esetén csak a valós részt vizsgáljuk!

2. Rendszer (−0,1, −0,0667, −0,05)

↓ 10, ↓ $\frac{1}{0{,}0667}$, ↓ $\frac{100}{5} = 20s$

20 > 1 => Az első rendszer gyorsabb, 20x.

4. Példa: + Példák gyakorlás képp

a) 1, $(-10-5j,\ -10+5j,\ -15)$ => Stabil, minden valós rész ⊖ !

2, $(-0{,}1,\ +0{,}2,\ -15)$ => Instabil, mert ⊕ valós van benne !

b,

① : Gyorsaság: Valós részt nézni csak !

$-10 \Rightarrow -\frac{1}{-10} = \frac{1}{10} = \boxed{0{,}1}$

$-15 \Rightarrow -\frac{1}{-15} = \frac{1}{15} = 0{,}066$

② $-0{,}1 \Rightarrow -\frac{1}{-0{,}1} = \frac{1}{0{,}1} = \frac{1}{\frac{1}{10}} = \boxed{10}$

$0{,}2 \Rightarrow -\frac{1}{0{,}2} = -\frac{1}{0{,}2} = -\frac{1}{\frac{2}{10}} = 5.$

$\frac{10}{0{,}1} = 100$ => 100x Gyorsabb a első rendszer.

⇓

Egy osztás-ból könnyen megcsinálható, mennyivel nagyobb az egyik a másiknál !

5. Példa (1. lehetőség)

Rendszer átvitele: $W(j\omega) = \frac{10}{2j\omega+1}$

5/a) Mekkora a rendszer statikus erősítése?

↳ „Statikus" => akkor $\omega = 0$, ebből adódóan tehát:

$\lim_{\omega \to 0} |W(j\omega)| = \lim_{\omega \to 0} \frac{10}{\underbrace{2j\omega}_{0}+\underbrace{1}_{1}} = \underline{\underline{10}}$ => A rendszer erősítése 10x-es.

5/b, Mekkora a fázistolása? ? :(

↳ 0, mert ⊕ valós. Ha ⊖ lenne, akkor $-180° = -\pi$.

5/a / Kiegészítés:

$$\text{Ha a } \lim_{\omega \to 0} |W(\omega j)| = \begin{cases} +\infty \Rightarrow \text{ Koreráősítésről beszélünk} \\ 0 \Rightarrow \quad -||- \\ \text{Különben: statikus erősítés.} \end{cases}$$

!!!

5. Példa (2. lehetőség)

$$W = \frac{100(0{,}1j\omega+1)}{(0{,}5j\omega+1)(10j\omega+1)}$$

5/a: Pólusok? Zérusok? → 1 változónak tekintendő Pl. X.

↳ Zérusok: $0{,}1\overbrace{j\omega}^{X} + 1 = 0 \Rightarrow X = -10 \Rightarrow j\omega = \ldots \Rightarrow Z_1 = -\ldots$

Pólusok:

↳ $(0{,}5j\omega+1) = 0 \Rightarrow 0{,}5j\omega = -1 \Rightarrow j\omega = -\frac{1}{0{,}5}$

$\Rightarrow P_1 = \underline{\underline{-2}}$

↳ $(10j\omega+1) = 0 \quad 10j\omega = -1 \Rightarrow j\omega = -\frac{1}{10} = P_2$

5/b, Pólusok/Zérusok időállandói:

Zérus:

$T_1 = -\frac{1}{Z_1} = -\frac{1}{-10} = 0{,}1\ \text{sec}$

Pólus:

$T_1 = -\frac{1}{P_1} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}\ \text{sec} \qquad T_2 = -\frac{1}{P_2} = -\frac{1}{-\frac{1}{10}} = 10\ \text{sec}.$

Megjegyzés: Törésponti frekvencia = az adott zérus vagy pólus absz. értékével.

5/c, A rendszer statikus erősítése?

$$K = \lim_{\omega \to 0} |W(\omega j)| = \lim_{\omega \to 0} \frac{100(0{,}1j\omega + 1)}{(0{,}5j\omega+1)(10j\omega+1)} = \frac{100 \cdot 1}{1 \cdot 1} = 100$$

Stat. erősítés jele

5/d, Töréspontí frekvenciák? (Ez már csak vizsgán lesz.)

$$\omega_{Z_1} = |Z_1| = |-10| = 10 \ \frac{rad}{sec}$$

$$\omega_{P_1} = |P_1| = |-2| = 2 \ \frac{rad}{sec}$$

$$\omega_{P_2} = |P_2| = -\frac{1}{10} = \frac{1}{10} = 0{,}1 \ \frac{rad}{sec}$$

A számlálóban lévő (+)!

$$W(\omega j) = \frac{100(0{,}1\omega j + 1)}{(0{,}5\omega j+1)(10\omega j+1)}$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}(0{,}1\omega) - \operatorname{arctg}(0{,}5\omega) - \operatorname{arctg}(10\omega)$$

A nevezőben lévő (−).