| Voto | Traccia Matlab | Cognome, Nome e Matricola |
| --- | --- | --- |
| | | |

CORSO: TEORIA DEI SISTEMI
DOCENTE: VINCENZO LIPPIELLO

# Prova scritta del 15/01/2024

**Leggere con attenzione**
Il corretto svolgimento del compito prevede che lo studente risponda in maniera chiara ai quesiti proposti e, ove necessario, argomenti i diversi passaggi, espliciti le formule usate, motivi le scelte e non si limiti a riportare i soli risultati dei calcoli.
Alla consegna della prova scritta, l'allievo riceverà la traccia dell'elaborato tecnico da svolgere in ambiente Matlab/Simulink.
Non è consentito consultare appunti o altro materiale, così come è assolutamente vietata ogni forma di collaborazione, pena l'annullamento della prova e il non poter partecipare alla successiva seduta d'esame. Durante la seduta, si forniranno spiegazioni soltanto su quesiti inerenti la comprensione della traccia.
Durata della prova: 3 ore.

1. Dato il sistema LTI a tempo continuo descritto dal seguente sistema i-s-u, con $h, k \in \mathbb{R}$,

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t) = \begin{bmatrix} 1-h & 0 \\ h+k-1 & k \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} u(t),$$
$$y(t) = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(t) + du(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) - u(t).$$

   a) Studiare tutti i casi di stabilità al variare dei parametri $h$ e $k$. **[Punti: 3]**
   b) Determinare le condizioni al variare di $h$ e $k$ per cui il sistema è in forma minima. **[Punti: 2]**
   c) Posto $h = 2$, calcolare gli stati di equilibrio del sistema (ingresso costante $u(t) = \bar{u}$) e classificarli come nodo, fuoco, sella, etc., al variare di $k$. **[Punti: 3]**
   d) Posto $h = 4$ e $k = -1 - \delta_{-1}(t)$, calcolare la risposta complessiva dell'uscita $y(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, quando il sistema è sottoposto all'ingresso $u(t) = 2 + \cos(5t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. **[Punti: 7]**

2. Dato il sistema LTI a tempo continuo descritto da

$$G(s) = \frac{8}{5} \frac{(s^2+100)(s^2-100s+2500)}{(s^2+2s+1)(s^2+40000)},$$

   tracciare i diagrammi asintotici di Bode, apportando le opportune correzioni. **[Punti: 5]** Se possibile, classificare il sistema come filtro e motivare la risposta. **[Punti: 2]**

3. Sia dato il sistema LTI a tempo continuo caratterizzato dalla seguente risposta impulsiva $g_y(t) = 2e^{-2t} - 6e^{-3t} + \delta(t)$. Si calcoli la risposta a regime del sistema quando è posto in ingresso $u(t) = (3 + 2e^{-5t} + \cos(5t + \pi/2))\delta_{-1}(t)$. **[Punti: 3]**

4. Si consideri un sistema LTI a tempo discreto descritto dall'equazione alle differenze $y(k) = 0.9y(k-1) - 0.2y(k-2) + u(k) - u(k-1)$. Si fornisca una rappresentazione i-s-u del sistema e la funzione di trasferimento. **[Punti: 2]** Calcolare poi la risposta forzata dell'uscita corrispondente ad un ingresso pari a $u(k) = -\delta(k) + (3^k + 1)\delta_{-1}(k)$. **[Punti: 3]**

# Soluzione

## 1 Esercizio

**Quesito a.**
La matrice della dinamica $\boldsymbol{A}$ è triangolare inferiore, dunque gli autovalori sono gli elementi sulla diagonale principale, ossi $\lambda_1 = 1-h$ e $\lambda_2 = k$. Essendo il sistema LTI a tempo continuo, il sistema è asintoticamente stabile quando entrambi gli autovalori sono a parte reale minore di zero, ossia $h > 1 \wedge k < 0$. Quando $h < 1 \vee k > 0$ il sistema risulta instabile perché almeno uno degli autovalori è a parte reale maggiore di zero. Quando $(h > 1 \wedge k = 0) \vee (h = 1 \wedge k < 0)$ il sistema è semplicemente stabile perché un autovalore è nullo e l'altro è a parte reale minore di zero. Infine, quando $h = 1 \wedge k = 0$ il sistema presenta due autovalori nulli. Va discriminata la stabilità semplice dall'instabilità osservando se la matrice è diagonalizzaibile o meno. Nel caso in esame la matrice della dinamica diventa identicamente nulla. Essendo la matrice identicamente nulla una matrice diagonale, allora il sistema per i valori sopra citati è semplicemente stabile.

**Quesito b.**
La raggiungibilità del sistema per si può studiare attraverso la seguente matrice

$$\boldsymbol{M}_r = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & h-1 \\ -1 & 1-2k-h \end{bmatrix}.$$

Il determinante di $\boldsymbol{M}_r$ è pari a $2(h+k-1)$, quindi il sistema è completamente raggiungibile quando $k \neq 1-h$.
L'osservabilità del sistema si può studiare attraverso la seguente matrice

$$\boldsymbol{M}_o = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}^T & \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{c}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2-k-2h \\ -1 & -k \end{bmatrix}$$

Il determinante di $\boldsymbol{M}_o$ è $2(1-k-h)$, quindi il sistema è completamente osservabile quando $k \neq 1-h$.
Il sistema è quindi in forma minima quando $k \neq 1-h$.

**Quesito c.**
Con $h = 2$ la matrice della dinamica assume la forma

$$\bar{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ k+1 & k \end{bmatrix}.$$

Il determinante di $\bar{\boldsymbol{A}}$ è $\Delta = -k$, mentre la sua traccia è $\tau = k-1$. La matrice $\bar{\boldsymbol{A}}$ è invertibile se e solo se $k \neq 0$. Nel caso $k = 0$ vi possono essere infiniti stati di equilibrio costituenti un equilibirum set stabili perché l'altro autovalore è reale negativo (si nota anche che con $k = 0$ si ottiene $\tau = -1 < 0$.
Quando $k \neq 0$ è possibile calcolare gli stati di equilibrio come

$$\bar{\boldsymbol{x}} = -\bar{\boldsymbol{A}}^{-1}\boldsymbol{b}\bar{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ \\ \dfrac{1}{k} + \dfrac{k+1}{k} \end{bmatrix} \bar{u}.$$

In questo caso, se $k > 0$, allora $\Delta < 0$ e si ottiene uno stato di equilibrio classificabile come sella (un autovalore reale positivo e l'altro reale negativo). Se, invece, $k < 0$, allora $\Delta > 0$ e si verifica che $\tau^2 - 4\Delta = (k+1)^2 > 0$. Inoltre, essendo $k < 0$ allora anche $\tau < 0$ per ogni valore di $k$. Quindi, in questo caso, lo stato di equilibrio è classificabile come un nodo stabile (entrambi gli autovalori sono reali negativi).

**Quesito d**.
Con $h = 2$ la matrice della dinamica assume la forma

$$\bar{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ k+1 & k \end{bmatrix}.$$

Il determinante di $\bar{\boldsymbol{A}}$ è $\Delta = -k$, mentre la sua traccia è $\tau = k-1$. La matrice $\bar{\boldsymbol{A}}$ è invertibile se e solo se $k \neq 0$. Nel caso $k=0$ vi possono essere infiniti stati di equilibrio costituenti un equilibirum set stabili perché l'altro autovalore è reale negativo (si nota anche che con $k=0$ si ottiene $\tau = -1 < 0$.
Quando $k \neq 0$ è possibile calcolare gli stati di equilibrio come

$$\bar{\boldsymbol{x}} = -\bar{\boldsymbol{A}}^{-1}\boldsymbol{b}\bar{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ \\ \frac{1}{k} + \frac{k+1}{k} \end{bmatrix} \bar{u}.$$

In questo caso, se $k > 0$, allora $\Delta < 0$ e si ottiene uno stato di equilibrio classificabile come sella (un autovalore reale positivo e l'altro reale negativo). Se, invece, $k < 0$, allora $\Delta > 0$ e si verifica che $\tau^2 - 4\Delta = (k+1)^2 > 0$. Inoltre, essendo $k < 0$ allora anche $\tau < 0$ per ogni valore di $k$. Quindi, in questo caso, lo stato di equilibrio è classificabile come un nodo stabile (entrambi gli autovalori sono reali negativi).

**Quesito d**.
Dati i valori del testo, la matrice della dinamica assume la seguente forma

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 2-\delta_{-1}(t) & -1-\delta_{-1}(t) \end{bmatrix}.$$

La risposta complessiva $y(t)$ si può suddividere come

$$y(t) = \begin{cases} y_1(t), & t < 0, \\ y_2(t), & t \geq 0. \end{cases}$$

Si cominci dal caso $t < 0$ e si provveda a calcolare $y_1(t)$. In questo caso si ha la seguente espressione per la matrice della dinamica

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Il sistema è asintoticamente stabile per quanto visto al quesito *a)*. Gli autovalori sono pari a $\lambda_1 = -3$ e $\lambda_2 = -1$. Poiché si presuppone che i segnali siano stati applicati ad un tempo $t = -\infty$, qualunque istante di tempo $t < 0$ si consideri, si può presupporre che le evoluzioni libere ed il transitorio si siano già estinti: il sistema è quindi a regime. Il legame fra l'uscita $y_1(t)$ e l'ingresso $u(t)$ è dato dalla seguente funzione di trasferimento

$$\boldsymbol{W}_1(s) = \boldsymbol{c}(s\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{A}_1)^{-1}\boldsymbol{b} + d = -\frac{s^2+4s-1}{(s+3)(s+1)}.$$

Sapendo che $Y_1(s) = W_1(s)U(s)$, per il teorema della risposta armonica si può scrivere

$$y_1(t) = 2W_1(0) + |W_1(5j)|\cos(5t + \arg(W_1(5j))) \simeq \frac{2}{3} + 1.1033\cos(5t - 3.0595).$$

Per il prosieguo, sarà utile avere a disposizione anche l'evoluzione dello stato per $t < 0$ Pertanto, con considerazioni similari fatti per l'uscita, l'evoluzione per $t < 0$ potrà essere calcolata a partire dall'espressione

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[(s\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{A}_1)^{-1}\boldsymbol{b}U(s)\right].$$

Chiamando $\boldsymbol{H}_1(s) = (s\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{A}_1)^{-1}\boldsymbol{b}$ la matrice delle risposte impulsive nello stato, si ottiene

$$\boldsymbol{H}_1(s) = \begin{bmatrix} H_{1,1}(s) \\ H_{1,2}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{s+3} \\ \\ -\frac{s+5}{(s+1)(s+3)} \end{bmatrix}.$$

Giacché per $t < 0$ anche lo stato sarà al suo andamento di regime, applicando nuovamente il teorema della risposta armonica si può concludere che

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2H_{1,1}(0) - |H_{1,1}(5j)|\cos(5t + \arg(H_{1,1}(5j))) \\ 2H_{1,2}(0) - |H_{1,2}(5j)|\cos(5t + \arg(H_{1,2}(5j))) \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} + 0.1715\cos(5t + 2.1112) \\ -\frac{10}{3} + 0.2378\cos(5t + 1.5232) \end{bmatrix}.$$

Particolarizzando lo stato in $t = 0$ (istante di apertura dell'interruttore) si ottiene $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \simeq \begin{bmatrix} -0.7549 \\ -3.322 \end{bmatrix}$.
Per $t \geq 0$, invece, la matrice della dinamica assume la seguente espressione

$$\boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Anche in questo caso, il sistema è asintoticamente stabile per quanto visto nel quesito precedente. L'uscita $y_2(t)$ a partire dal tempo $t = 0$ è calcolabile come

$$y_2(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\boldsymbol{c}\,(s\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{A}_2)^{-1}\boldsymbol{x}_0 + (\boldsymbol{c}\,(s\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{A}_2)^{-1}\boldsymbol{b} + d)U(s)\right], \tag{1.1}$$

con

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{c}\,(s\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{A}_2)^{-1} &= \begin{bmatrix} \dfrac{s+1}{(s+2)(s+3)} & -\dfrac{1}{s+2} \end{bmatrix}, \\
W_2(s) = \boldsymbol{c}\,(s\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{A}_2)^{-1}\boldsymbol{b} + d &= -\frac{s^2+5s+4}{(s+2)(s+3)}, \\
U(s) &= \frac{2}{s} + \frac{s}{s^2+25}.
\end{aligned}$$

Sostituendo le precedenti nella (1.1), si ottiene

$$y_2(t) \simeq 1.939e^{-2t} - \frac{4}{3} + 1.0398\cos(5t - 3.0928).$$

La risposta complessiva del sistema $\forall\, t \in \mathbb{R}$ risulta dunque pari a

$$y(t) \simeq \begin{cases} \dfrac{2}{3} + 1.1033\cos(5t - 3.0595), & t < 0, \\ 1.939e^{-2t} - \dfrac{4}{3} + 1.0398\cos(5t - 3.0928), & t \geq 0. \end{cases}$$

# 2 Esercizio

I diagrammi di Bode della funzione di trasferimento $G(s)$ data nel testo dell'esercizio sono rappresentati in Fig. 2.1. Per prima cosa, occorre portare la funzione di trasferimento nella sua forma ingegneristica

$$G(s) = \frac{8}{5}\frac{(s^2+100)(s^2-100s+2500)}{(s^2+2s+1)(s^2+40000)} = 10\frac{\left(1+\dfrac{s^2}{100}\right)\left(1-\dfrac{s}{50}\right)^2}{(1+s)^2\left(1+\dfrac{s^2}{40000}\right)}.$$

Si riconosce al numeratore un termine binomio di moltiplicità doppia e un trinomio di molteplicità singola. Al denominatore, invece, vi è un termine binomio di molteplicità doppia e un termine trinomio di molteplicità singola. I parametri riguardanti guadagno del sistema, tipo, costanti di tempo, smorzamenti e pulsazioni naturali sono pari a $\mu = 10$, $g = 0$, $\alpha_n = 10$ rad/s, $\xi = 0$, $\tau = -0.02$ s, $T = 1$ s, $\omega_n = 200$ rad/s, $\zeta = 0$. Le pulsazioni di rottura sono quindi uguali a $\omega_1 = 1/|T| = 1$ rad/s, $\omega_2 = \alpha_n = 10$ rad/s, $\omega_3 = 1/|\tau| = 50$ rad/s, $\omega_4 = \omega_n = 200$ rad/s.
Poiché il sistema è di tipo 0, il diagramma dei moduli partirà con un tratto costante di valore $|\mu|_{dB} = 20$ dB. La prima pulsazione di rottura è in $\omega_1$ ad opera del termine binomio al denominatore di molteplicità doppia. La variazione di pendenza relativa del diagramma asintotico è di $-40$ dB/decade. La correzione del diagramma reale è di $-6$ dB in $\omega_1$. La seconda pulsazione di rottura è in $\omega_2$ ad opera del termine trinomio al numeratore di molteplicità singola. La variazione di pendenza relativa al diagramma asintotico è di 40 dB/decade. Poiché $\xi = 0$, il diagramma reale avrà un asintoto verticale che tende a $-\infty$ in $\omega_2$. La terza pulsazione di rottura è in $\omega_3$ ad opera del termine binomio al numeratore di molteplicità doppia. La variazione di pendenza relativa al diagramma asintotico è di 40 dB/decade. La correzione del diagramma reale è

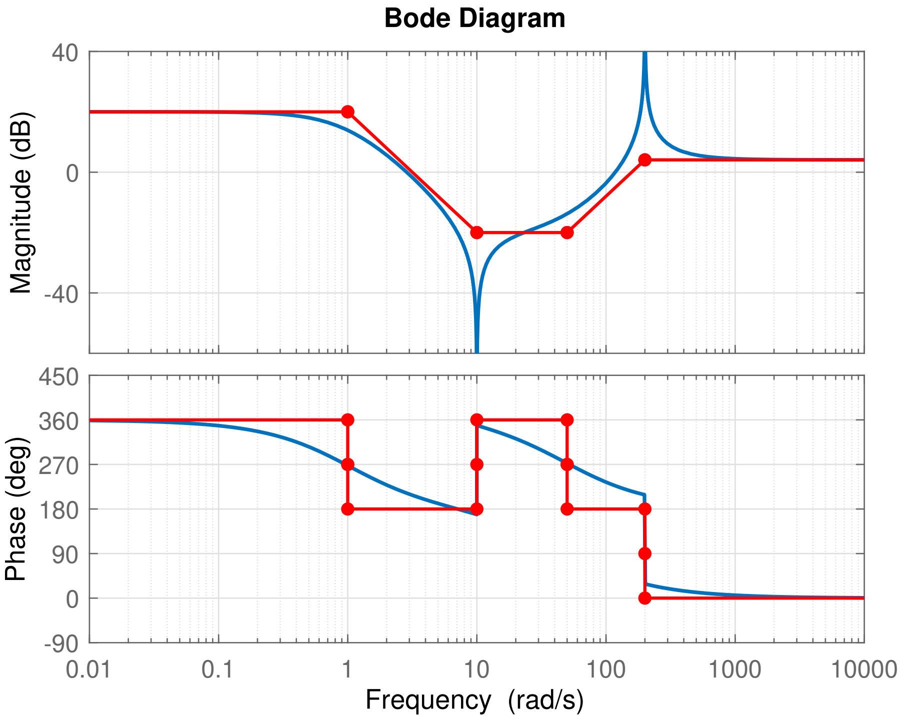


Figura 2.1: Diagramma di Bode della funzione di trasferimento $G(s)$.

di 6 dB in $\omega_3$. La quarta pulsazione di rottura è in $\omega_4$ ad opera del termine trinomio al denominatore di molteplicità singola. La variazione di pendenza relativa al diagramma asintotico è di $-40$ dB/decade. Poiché $\zeta = 0$, il diagramma reale avrà un asintoto verticale che tende a $\infty$ in $\omega_4$.
Il diagramma delle fasi tiene conto delle solite tecniche di tracciamento. Quindi, il grafico parte da 360 deg siccome il guadagno $\mu > 0$ e il sistema è di tipo 0 (o equivalentemente da 0 deg, traslando verso il basso l'intero diagramma illustrato in figura). Il termine binomio al numeratore, di molteplicità doppia, apporta un salto relativo del diagramma asintotico di $-180$ deg alla relativa pulsazione di rottura (si noti che $\tau < 0$). Il termine binomio al denominatore, di molteplicità doppia, apporta un salto relativo del diagramma asintotico di $-180$ deg alla relativa pulsazione di rottura. Il termine trinomio al numeratore, di molteplicità singola, apporta un salto relativo del diagramma asintotico di 180 deg alla relativa pulsazione di rottura. Il termine trinomio al denominatore, di molteplicità singola, apporta un salto relativa del diagramma asintotico di $-180$ deg alla relativa pulsazione di rottura. Per effetto di questi contributi, il diagramma delle fasi termina con un tratto piatto pari a 0 deg.
Il sistema in esame rispetta le condizioni necessarie per essere sia un filtro passa-alto che passa-basso. Tuttavia, le definizioni non sono mai rispettate. Infatti, il sistema non è un filtro passa-basso perché il diagramma reale dei moduli non è mai sempre sotto $-17$ dB a partire da una certa pulsazione in avanti, soprattutto a causa dell'asintoto verticale in $\omega_4$. Inoltre, il sistema non è un filtro passa-alto perché il diagramma reale dei moduli non è mai sempre sotto $\simeq 1$ dB prima di una certa pulsazione, ancora una volta a causa dell'asintoto verticale in $\omega_4$.

## 3 Esercizio

La funzione di trasferimento del sistema è pari a

$$G(s) = \mathscr{L}[g_y(t)] = \frac{s(s+1)}{(s+2)(s+3)}.$$

Il sistema è asintoticamente stabile, quindi ammette risposta a regime. Dato il segnale di ingresso, si nota che la proprietà bloccante degli zeri farà annullare la risposta a regime del termine costante ($G(0) = 0$).

Pertanto, si ha

$$y_r(t) = 2G(-5)e^{-5t} - G(5j)\cos(5t + \pi/2 + \arg(G(5j))) \simeq \frac{20}{3}e^{-5t} - 0.8119\cos(5t + \pi/2 + 0.7235).$$

## 4 Esercizio

Dall'equazione alle differenze è immediato scrivere la funzione di trasferimento del sistema

$$G(z) = \frac{z(z-1)}{z^2 - 0.9z + 0.2}.$$

Da questa, è facile ricavare una rappresentazione i-s-u del sistema, attraverso ad esempio la forma canonica di raggiungibilità

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_2(k), \\ x_2(k+1) &= -0.2x_1(k) + 0.9x_2(k) + u(k), \\ y(k) &= -0.2x_1(k) - 0.1x_2(k) + u(k). \end{aligned}$$

La trasformata dell'ingresso è pari a

$$U(z) = \mathcal{Z}[u(k)] = -1 + \frac{z}{z-3} + \frac{z}{z-1}.$$

La risposta forzata dell'uscita è pari a

$$y_f(k) = \mathcal{Z}^{-1}[G(z)U(z)] = \mathcal{Z}^{-1}\left[-\frac{z(z-1)}{z^2+0.9z-0.2} + \frac{z^2(z-1)}{(z-3)(z^2+0.9z-0.2)} + \frac{z^2}{z^2+0.9z-0.2}\right].$$

Svolgendo i conti si ottiene

$$y_f(k) = 11(0.5)^k + \frac{12}{13}3^k - \frac{142}{13}\left(\frac{2}{5}\right)^k.$$

**ELABORATO TECNICO - TRACCIA N.1 (MATRICOLE PARI)**

Risolvere il quesito di seguito riportato utilizzando unicamente lo strumento software Matlab e/o Simulink. Non calcolare nulla a parte su supporti cartacei. Il file generato va consegnato entro il giorno antecedente la prova orale tramite email all'indirizzo del docente con oggetto *[TSI-FSD][Elaborato tecnico]- Cognome Nome Matricola*. In caso di problemi, il discente deve portare un drive USB il giorno della seduta orale. In caso di più files generati, compattare tutto in un file ZIP. ATTENZIONE: nel caso si utilizzi Simulink, salvare il file con compatibilità per la *versione 10.7*. A scanso di equivoci, portare il proprio PC con la versione di Simulink utilizzata.

Sia dato il sistema LTI a tempo continuo dato dalle equazioni

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t) = \begin{bmatrix} 1-h & 0 \\ h+k-1 & k \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} u(t),$$
$$y(t) = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(t) + du(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) - u(t).$$

Far variare $h, k$ nell'intervallo $[-10, 10]$, con passo significativo, e classificare automaticamente la proprietà di stabilità, raggiungibilità e osservabilità del sistema.
Posti d'ora in avanti $h = 4$ e $k = -1$, si calcolino gli stati di equilibrio del sistema. si disegni l'uscita totale del sistema quando esso è sottoposto all'ingresso $u(t) = 2 + \cos(5t)$, in un intervallo $t \in [0, 15]$.

**ELABORATO TECNICO - TRACCIA N.2 (MATRICOLE DISPARI)**

Risolvere il quesito di seguito riportato utilizzando unicamente lo strumento software Matlab e/o Simulink. Non calcolare nulla a parte su supporti cartacei. Il file generato va consegnato entro il giorno antecedente la prova orale tramite email all'indirizzo del docente con oggetto *[TSI-FSD][Elaborato tecnico]- Cognome Nome Matricola*. In caso di problemi, il discente deve portare un drive USB il giorno della seduta orale. In caso di più files generati, compattare tutto in un file ZIP. ATTENZIONE: nel caso si utilizzi Simulink, salvare il file con compatibilità per la *versione 10.7*. A scanso di equivoci, portare il proprio PC con la versione di Simulink utilizzata.

Sia dato il seguente sistema LTI a tempo continuo

$$G(s) = \frac{8}{5} \frac{(s^2+100)(s^2-100s+2500)}{(s^2+2s+1)(s^2+40000)}.$$

Disegnare i diagrammi di Bode e di Nyquist del sistema in due finestre separate.

Sia dato il seguente sistema LTI a tempo discreto

$$W(z) = \frac{z(z-1)}{z^2 - 0.9z + k}.$$

Far variare $k$ nell'intervallo $[-10, 10]$, con passo significativo, e classificare automaticamente la proprietà di stabilità, raggiungibilità e osservabilità del sistema.
Posti d'ora in avanti $k = 0.2$, si calcoli una rappresentazione i-s-u del sistema. Si disegni l'uscita totale del sistema quando esso è sottoposto all'ingresso $u(k) = -\delta(k) + (3^k + 1)\delta_{-1}(k)$, in un intervallo $k \in [0, 15]$.