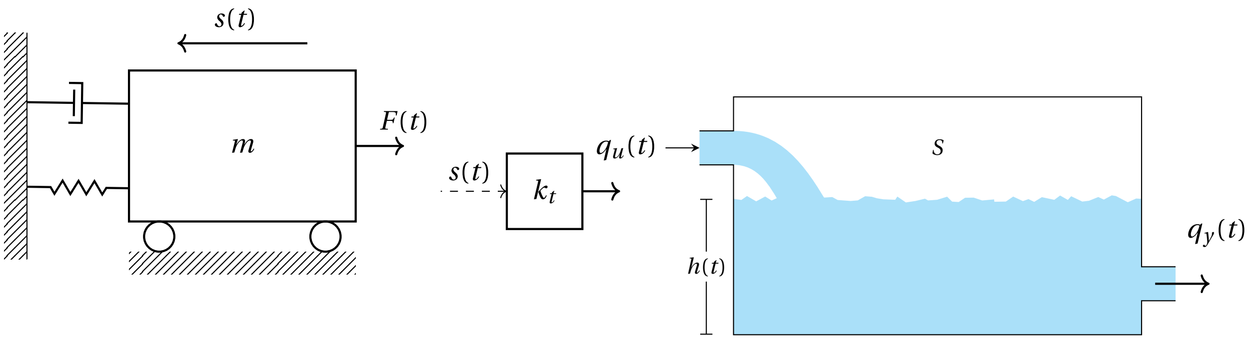
Voto | Traccia Matlab | Cognome, Nome e Matricola

CORSO: TEORIA DEI SISTEMI
DOCENTE: VINCENZO LIPPIELLO

Prova scritta del 19/06/2023

Leggere con attenzione
Il corretto svolgimento del compito prevede che lo studente risponda in maniera chiara ai quesiti proposti e, ove necessario, argomenti i diversi passaggi, espliciti le formule usate, motivi le scelte e non si limiti a riportare i soli risultati dei calcoli.
Alla consegna della prova scritta, l'allievo riceverà la traccia dell'elaborato tecnico da svolgere in ambiente Matlab/Simulink.
Non è consentito consultare appunti o altro materiale, così come è assolutamente vietata ogni forma di collaborazione, pena l'annullamento della prova e il non poter partecipare alla successiva seduta d'esame. Durante la seduta, si forniranno spiegazioni soltanto su quesiti inerenti la comprensione della traccia.
Durata della prova: 3 ore.



1. Si consideri lo schema a blocchi sopra rappresentato, per il quale si è scelto come ingresso la forza $u(t) = F(t)$ applicata al carrello e come uscita l'altezza del serbatoio, $y(t) = h(t)$, la cui portata di uscita, $q_y(t)$, è autoregolata dal coefficiente di deflusso $a > 0$. I componenti del sistema meccanico sono $k > 0$, costante elastica, e $b > 0$, costante di smorzamento viscoso. Per il serbatoio, $S > 0$ è la sua sezione. La posizione $s(t)$ del carrello è trasformata nella portata di ingresso del serbatoio, $q_u(t)$, attraverso un guadagno $k_t > 0$. Si scriva e si classifichi il modello i-s-u del sistema complessivo. **[Punti: 5]**

2. Si consideri il seguente sistema dinamico LTI a tempo continuo, con $h, k \in \mathbb{R}$,
$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t) = \begin{bmatrix} h & -k \\ -1 & k \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u(t),$$
$$y(t) = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(t) + du(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + u(t).$$
   a) Trovare i valori di h e k per cui il sistema è asintoticamente stabile. **[Punti: 2]**
   b) Posto $h = k = 1$, si studi al raggiungibilità e l'osservabilità del sistema. Laddove il sistema non fosse in forma minima, trovare la matrice di trasformazione che porti il sistema in forma canonica di Kalman. **[Punti: 4]**
   c) Posto $k = 0$, si calcolino gli stati di equilibrio del sistema e si classifichino al variare di h come nodo, sella, fuoco, etc. **[Punti: 3]**
   d) Posto $h = -1$ e $k = 0$, si trovi la condizione iniziale che non mostri nell'uscita del sistema, con ingresso $u(t) = 2\sin(t)\delta_{-1}(t)$, modi naturali semplicemente stabili o instabili. **[Punti: 6]**

3. Sia dato il sistema LTI a tempo continuo caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento
$$G(s) = -25 \cdot 10^4 \frac{(s-0.1)(s^2+1)}{s(s^2+10s+25)(s^2+20s+100)}.$$
Si disegnino i diagrammi asintotici di Bode, apportando le dovute correzioni. **[Punti: 5]**

4. Si consideri un sistema LTI a tempo discreto descritto dall'equazione alle differenze $y(k) = -0.2y(k-1) + u(k-1)$. Si fornisca una rappresentazione i-s-u del sistema e la sua funzione di trasferimento **[Punti: 2]** Calcolare, poi, la risposta forzata dell'uscita corrispondente ad un ingresso pari a $u(k) = -5\delta(k) + \delta_{-1}(k-1)$. **[Punti: 3]**

Soluzione

1 Esercizio

Il primo blocco è un sistema massa-molla-smorzatore. Il sistema ha un grado di libertà in quanto la posizione del carrello descrive in maniera univoca il sottosistema. Ricordando le relazioni costitutive per l'elemento elastico e l'elemento smorzatore, è possibile scrivere le seguenti relazioni per le forze agenti sulle singole masse: $F_s(t) = b(\dot{s}(t) - 0)$, $F_e(t) = k(s(t) - 0)$. Scrivendo la seconda legge di Newton l'elemento inerziale di massa m lungo l'unica direzione di moto lungo la quale si esplica l'accelerazione, e con riferimento per quanto concerne i segni delle varie componenti, si può ottenere quanto segue

$$m\ddot{s}(t) = F_e(t) + F_s(t) - F(t)$$

Con semplici manipolazioni è possibile quindi ricavare il modello del sistema meccanico

$$m\ddot{s}(t) - b\dot{s}(t) - ks(t) = -F(t).$$

Dal secondo blocco risulta banalmente la relazione statica

$$q_u(t) = k_t s(t). \tag{1.1}$$

Il terzo blocco dello schema è infine costituito da un serbatoio la cui equazione dinamica è

$$S\dot{h}(t) = q_u(t) - q_y(t). \tag{1.2}$$

La portata di uscita del serbatoio è autoregolata, quindi $q_y(t) = a\sqrt{h(t)}$.
Seguendo la traccia del quesito, si ponga come variabile di ingresso la forza applicata al carrell, $u(t) = F(t)$, come uscita lo portata di uscita del serbatoio, $y(t) = q_y(t)$, e si scelgano come variabili di stato $x_1(t) = s(t)$, $x_2(t) = \dot{s}(t)$, $x_3(t) = h(t)$. Con queste scelte, a partire da (**??**), (**??**) e (**??**), è possibile pervenire al seguente sistema i-s-u dell'intero schema a blocchi

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \tag{1.3a}$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{k}{m}x_1(t) + \frac{b}{m}x_2(t) - \frac{1}{m}u(t), \tag{1.3b}$$

$$\dot{x}_3(t) = \frac{k_t}{S}x_1(t) - \frac{a}{S}\sqrt{x_3(t)}, \tag{1.3c}$$

$$y(t) = x_3(t). \tag{1.3d}$$

Il sistema è di ordine 3, tempo continuo, SISO, strettamente proprio, non lineare e tempo invariante. Dunque, non è possibile scrivere il sistema in forma matriciale.

2 Esercizio

Quesito a.
Il polinomio caratteristico della matrice della dinamica, $\boldsymbol{A}$, è pari a $\varphi(\lambda) = \lambda^2 - (k+h)\lambda + k(h-1)$. Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema del secondo ordine sia asintoticamente stabile è che tutti i coefficienti del polinomio caratteristico devono avere lo stesso segno. Occorre quindi imporre le condizioni $k + h < 0$ e $k(h-1) > 0$ che devono essere entrambe verificare contemporaneamente. Ciò accade quando $k > 0 \wedge h > 1 \wedge k + h < 0$ oppure $k < 0 \wedge h < 1 \wedge k + h < 0$. Tuttavia, l'intersezione della prima soluzione è nulla. La seconda soluzione ha invece intersezione come da grafico.

Quesito b.
Con i valori indicati, la matrice della dinamica assume la seguente espressione

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

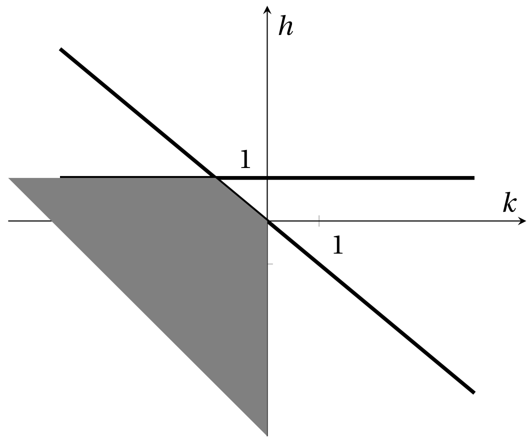


Figura 2.1: Rappresentazione grafica nel dominio dei parametri (la parte in grigio è la parte che verifica l'asintotica stabilità del sistema.

La raggiungibilità del sistema si può studiare attraverso la seguente matrice

$$\boldsymbol{M}_r = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b} & \boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Il determinante di $\boldsymbol{M}_r$ è nullo, quindi il sistema non è completamente raggiungibile. Il rango di $\boldsymbol{M}_r$ è pari a 1.
L'osservabilità del sistema si può studiare attraverso la seguente matrice

$$\boldsymbol{M}_o = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}^T & \boldsymbol{A}_1^T \boldsymbol{c}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Il determinante di $\boldsymbol{M}_o$ è nullo, quindi il sistema non è completamente osservabile. Il rango di $\boldsymbol{M}_o$ è pari a 1.
Per la procedura della scomposizione canonica di Kalman, prendiamo le colonne linearmente indipendenti di $\boldsymbol{M}_r$, ossia

$$X_r :< \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} > .$$

Prendiamo anche una colonna linearmente indipendente di $\boldsymbol{M}_o$ che è

$$X_o :< \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} > .$$

Si nota che X_r è identico a X_o perché le matrici di raggiungibilità e di osservabilità sono uguali fra loro. Calcoliamo ora il nullo di $\boldsymbol{M}_r^T$ pari a

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow z_1 = z_2 \Rightarrow X_{n,r} :< \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} > .$$

Infine, è inutile calcolare esplicitamente il nullo di $\boldsymbol{M}_o^T$ in quanto esso è identico a prima, quindi $X_{n,r}$ risulta identico a $X_{n,o}$.
Si prendano ora le colonne $X_1 = X_r \cap X_{n,o}$. Questo insieme è vuoto perché i vettori sono ortogonali fra loro.
Si prendano ore le colonne $X_2 = X_r \cap \left(X_{n,r} \cup X_o\right)$. Questo darà proprio X_r in quanto $X_{n,r}$ è ortogonale a X_o in quale è uguale a X_r. Quindi, $X_2 =< \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} >$.
Si prendano ora le colonne $X_3 = X_{n,o} \cap \left(X_{n,r} \cup X_o\right)$. Questo darà proprio $X_{n,r}$ in quanto è uguale a $X_{n,r}$ in quale è ortogonale a X_o. Qundi, $X_2 =< \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.
Si prendano ora le colonne $X_4 = X_{n,r} \cap X_o$. Questo insieme è vuoto perché i vettori sono ortogonali fra loro.

Dunque, la matrice di trasformazione di Kalman sarà data da

$$\boldsymbol{T}_k^{-1} = \begin{bmatrix} X_2 & X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Quesito c.
Con i valori indicati, la matrice della dinamica assume la seguente espressione

$$\boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} h & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

I due autovalori del sistema sono, in questo caso, $\lambda_{1,2} = h$ e $\lambda_{2,2} = 0$. La matrice $\boldsymbol{A}_2$ non è quindi invertibile e vi possono essere infiniti stati di equilibrio o nessuno. Essi sono calcolabili come soluzioni $\bar{\boldsymbol{x}}$ del problema $\boldsymbol{A}_2\bar{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{b}\bar{u} = \boldsymbol{0}_2$. Infatti, si ottiene

$$\begin{bmatrix} h & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \bar{u}.$$

Il sistema ammette soluzioni se e solo se $h = 1$. Infatti, il sistema ha equazioni

$$\begin{cases} h\bar{x}_1 = -\bar{u} \\ \bar{x}_1 = -\bar{u} \end{cases}$$

Se $h \neq 1$ non vi sono stati di equilibrio, ed è quindi inutile fare la classificazione. Se $h = 1$ si ottengono infiniti stati di equilibrio della forma $\bar{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -\bar{u} \\ \alpha \end{bmatrix}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$.

Dunque, la matrice della dinamica si particolarizza in $\boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Gli autovalori del sistema sono ora $\lambda_{1,2} = 1$ e $\lambda_{2,2} = 0$. I modi naturali associati sono e^t e 1, indipendentemente dal valore di α dello stato di equilibrio. Quindi, gli stati di equilibrio, $\bar{\boldsymbol{x}}$, sopra trovati sono tutti classificabili come equilibrium set instabile.

Quesito d.
Con i valori indicati, la matrice della dinamica assume la seguente espressione

$$\boldsymbol{A}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

I due autovalori del sistema sono, in questo caso, $\lambda_{1,3} = -1$ e $\lambda_{2,3} = 0$. Il sistema è semplicemente stabile. La risposta complessiva del sistema è pari a

$$y(t) = \boldsymbol{c}e^{\boldsymbol{A}_3 t}\boldsymbol{x}_0 + \mathscr{L}^{-1}[G(s)U(s)],$$

con $\boldsymbol{x}_o = \begin{bmatrix} x_{0,1} & x_{0,2} \end{bmatrix}^T$.
La matrice esponenziale può calcolarsi come

$$e^{\boldsymbol{A}_3 t} = \mathscr{L}^{-1}[(s\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{A}_3)^{-1}] = \mathscr{L}^{-1}\left[\begin{bmatrix} \dfrac{s}{s+1} & 0 \\ -\dfrac{1}{s(s+1)} & \dfrac{1}{s} \end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ e^{-t} - 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

La funzione di trasferimento è pari a

$$G(s) = \boldsymbol{c}\,(s\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{A}_3)^{-1}\,\boldsymbol{b} + d = \frac{s+2}{s}.$$

La trasformata dell'ingresso è pari a

$$U(s) = \mathscr{L}[u(t)] = \frac{2}{s^2+1}.$$

La risposta forzata è quindi pari a

$$y_f(t) = \mathscr{L}^{-1}[G(s)U(s)] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2(s+2)}{s(s^2+1)}\right] = 4 + 4.4722\sin(t - 1.1071).$$

La risposta complessiva assume quindi l'espressione

$$y(t) = \boldsymbol{c}e^{\boldsymbol{A}_3 t}\boldsymbol{x}_0 + \mathscr{L}^{-1}[G(s)U(s)] = x_{0,1} - x_{0,2} + 4 + 4.4722\sin(t - 1.1071).$$

Si vede che non sono presenti termini instabili, mentre vi sono dei termini costanti (si noti che il termine sinusoidale non è un modo naturale ma l'effetto dell'ingresso applicato). Basta porre $x_{0,1} - x_{0,2} + 4 = 0 \Rightarrow x_{0,2} = x_{0,1} + 4$ per rispettare le condizioni richieste. Le condizioni iniziali devono quindi essere nella forma $\boldsymbol{x}_o = \begin{bmatrix}\alpha & \alpha+4\end{bmatrix}^T$, con $\alpha \in \mathbb{R}$.

3 Esercizio

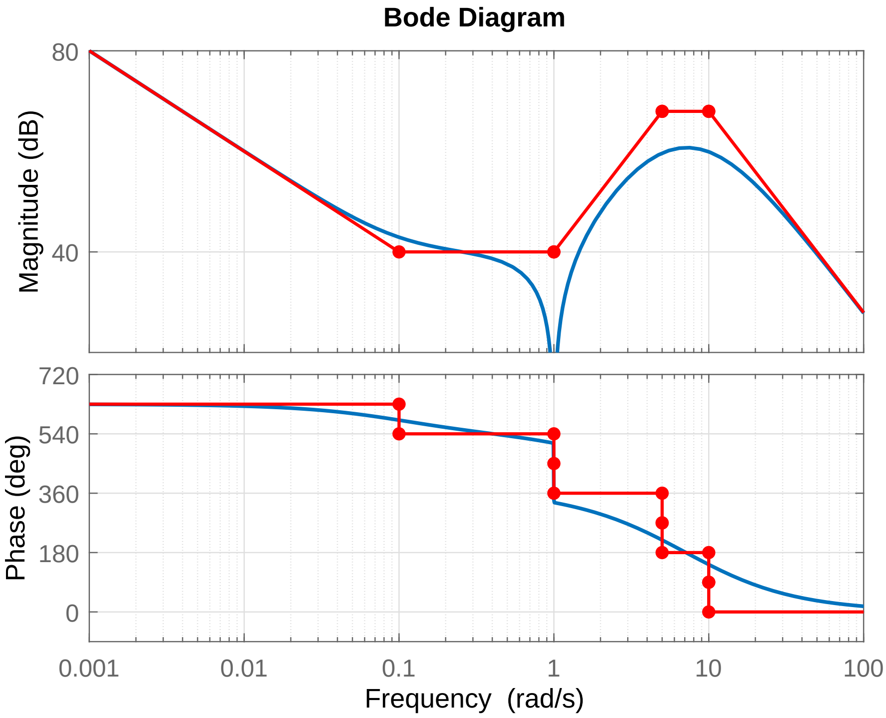


Figura 3.1: Diagramma di Bode della funzione di trasferimento $G(s)$.

La forma ingegneristica di tale funzione di trasferimento è pari a

$$G(s) = 10\frac{(-10s+1)(1+s^2)}{s\left(1+\frac{1}{5}s\right)^2\left(1+\frac{1}{10}s\right)^2}.$$

Si riconosce al numeratore un termine binomio di molteplicità singola e un termine trinomio. Al denominatore, invece, vi è un termine monomio di molteplicità singola e due termini binomio entrambi di molteplicità doppia. I parametri riguardanti guadagno del sistema, tipo, costanti di tempo, smorzamenti e pulsazioni naturali sono pari a $\mu = 10$, $g = 1$, $\tau = -10$ s, $\alpha_n = 1$ rad/s, $\zeta = 0$, $T_1 = 0.2$ s, $T_2 = 0.1$ s. Le pulsazioni di rottura, in ordine crescente, sono quindi pari a $\omega_1 = 1/|\tau| = 0.1$ rad/s, $\omega_2 = \alpha_n = 1$ rad/s, $\omega_3 = 1/|T_1| = 5$ rad/s e $\omega_4 = 1/|T_2| = 10$ rad/s.

Poiché il sistema è di tipo 1, il diagramma dei moduli partirà con un tratto pendente -20 db/decade che intercetterà l'asse delle ordinate in $\omega = 1$ rad/s al valore pari a $\mu_{dB} = 20$ dB. La prima pulsazione di rottura è in ω_1 ad opera del termine binomio al numeratore di molteplicità singola. La variazione di pendenza

relativa del diagramma asintotico è di 20 dB/decade. Il fattore correttivo in ω_1 è +3 dB. La seconda pulsazione di rottura è in ω_2 ad opera del termine trinomio al numeratore di molteplicità singola. La correzione relativa è di 40 dB/decade. Poiché lo smorzamento è pari a $\zeta = 0$ vi sarà un'asintoto verticale verso $-\infty$ dB. La terza pulsazione di rottura è in ω_3 ad opera del primo termine binomio al denominatore di molteplicità doppia. La variazione di pendenza relativa del diagramma asintotico è di −40 dB/decade. Il fattore correttivo in ω_3 è −6 dB. La quarta, e ultima, pulsazione di rottura è in ω_4 ad opera del secondo termine binomio al denominatore di molteplicità doppia. La variazione di pendenza relativa del diagramma asintotico è di −40 dB/decade. Il fattore correttivo in ω_4 è −6 dB.
Il diagramma delle fasi tiene conto delle solite tecniche di tracciamento. Quindi, il grafico parte da $-90 + k360$ deg, con $k \in \mathcal{Z}$, siccome il guadagno $\mu > 0$ e il sistema è di tipo 1. Il termine binomio al numeratore, di molteplicità singola, apporta un salto relativo del diagramma asintotico di −90 deg alla relativa pulsazione di rottura (si noti che $\tau < 0$). Il termine trinomio al numeratore, di molteplicità singola, apporta un salto relativo del diagramma asintotico di −180 deg alla relativa pulsazione di rottura. Poiché $\zeta = 0$, vi è una variazione istantanea di ±180 deg in ω_2. Infine, ognuno dei due termini binomio al denominatore, di molteplicità doppia, apporta un salto relativo del diagramma asintotico di −180 deg alla relativa pulsazione di rottura. Per effetto di questi contributi, il diagramma delle fasi termina con un tratto piatto pari a −360 deg.

4 Esercizio

sistema pari a

$$G(z) = \frac{1}{z + 0.2}.$$

Da questa, è facile ricavare una rappresentazione i-s-u attraverso, ad esempio, la forma canonica di raggiungibilità

$$\begin{aligned} x(k+1) &= -0.2x(k) + u(k), \\ y(k) &= x(k). \end{aligned}$$

La trasformata dell'ingresso è pari a

$$U(z) = -5 + \frac{1}{z}\frac{z}{z-1} = \frac{-5z+6}{z-1}.$$

La risposta forzata dell'uscita è pari a

$$y_f(k) = \mathcal{Z}^{-1}[G(z)U(z)] = \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{-5z+6}{(z-1)(z+0.2)}\right] = -30\delta(k) + \frac{175}{6}\left(\frac{1}{5}\right)^k \delta_{-1}(k) + \frac{5}{6}\delta_{-1}(k).$$

ELABORATO TECNICO - TRACCIA N.1 (MATRICOLE PARI)

Risolvere il quesito di seguito riportato utilizzando unicamente lo strumento software Matlab e/o Simulink. Non calcolare cioé nulla a parte su supporti cartacei. Il file generato per risolvere la traccia assegnata va consegnato entro il giorno antecedente la prova orale tramite email all'indirizzo del docente con oggetto *[TSI-FSD][Elaborato tecnico]-Cognome Nome Matricola*. In caso non fosse possibile inviare un email, il discente deve portare un drive USB il giorno della seduta orale. In caso di piú files generati, compattare tutto in un file ZIP. ATTENZIONE: nel caso si utilizzi Simulink, salvare il file generato con compatibilitá per la *versione 10.2*. A scanso di equivoci, portare il proprio PC con la versione di Simulink utilizzata per risolvere, eventualmente, il quesito.

Si consideri il seguente sistema dinamico LTI a tempo continuo, con $h, k \in \mathbb{R}$,

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t) = \begin{bmatrix} h & -k \\ -1 & k \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u(t),$$
$$y(t) = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(t) + du(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + u(t).$$

1. Far variare i parametri h e k in un intervallo di valore a piacere, purché significativo, e classificare automaticamente la proprietà di stabilità del sistema. Fare la stessa cosa per l'osservabilità e la raggiungibilità.
2. Posto $h = -1$ e $k = 0$, si disegni l'uscita forzata del sistema quando esso è sottoposto all'ingresso $u(t) = 2\sin(t)\delta_{-1}(t)$.
3. Posto $h = k = 1$, disegnare i diagrammi di Bode e di Nyquist del sistema in due finestre separate.
4. Posto di nuovo $h = -1$ e $k = 0$, graficare la risposta dell'uscita all'ingresso $u(t) = (1 - \cos(t))\delta_{-1}(-t)$, in un intervallo $t \in [-10, 10]$ s.

ELABORATO TECNICO - TRACCIA N.2 (MATRICOLE DISPARI)

Risolvere il quesito di seguito riportato utilizzando unicamente lo strumento software Matlab e/o Simulink. Non calcolare cioé nulla a parte su supporti cartacei. Il file generato per risolvere la traccia assegnata va consegnato entro il giorno antecedente la prova orale tramite email all'indirizzo del docente con oggetto *[TSI-FSD][Elaborato tecnico]-Cognome Nome Matricola*. In caso non fosse possibile inviare un email, il discente deve portare un drive USB il giorno della seduta orale. In caso di piú files generati, compattare tutto in un file ZIP. ATTENZIONE: nel caso si utilizzi Simulink, salvare il file generato con compatibilitá per la *versione 10.2*. A scanso di equivoci, portare il proprio PC con la versione di Simulink utilizzata per risolvere, eventualmente, il quesito.

Sia dato il sistema LTI a tempo continuo caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento

$$G(s) = -25 \cdot 10^4 \frac{(s - 0.1)(s^2 + 1)}{s(s^2 + 10s + 25)(s^2 + 20s + 100)}.$$

Rappresentare su due finestre separate i diagrammi di Bode e il grafico di Nyquist. Ricavare la forma i-s-u del sistema e studiarne la stabilità, l'osservabilità e la raggiungibilità.

Sia dato il seguente sistema LTI a tempo discreto (passo $T = 1$)

$$G(z) = \frac{1}{z + 0.2}.$$

Si disegni la risposta forzata dell'uscita corrispondente ad un ingresso pari a $u(k) = -5\delta(k) + \delta_{-1}(k - 1)$.