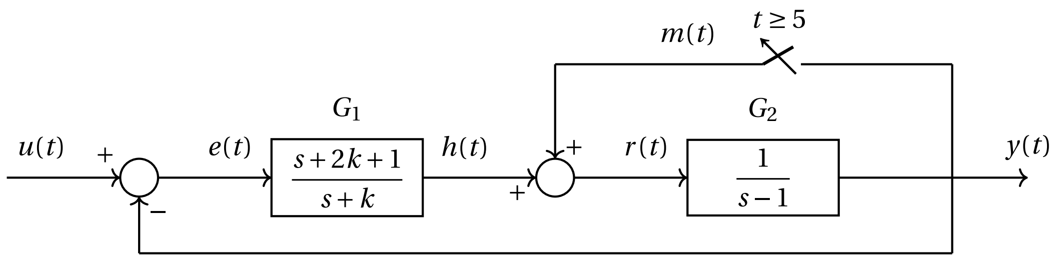
Voto	Traccia Matlab	Cognome, Nome e Matricola

CORSO: TEORIA DEI SISTEMI
DOCENTE: VINCENZO LIPPIELLO

Prova scritta del 17/07/2023

Leggere con attenzione
Il corretto svolgimento del compito prevede che lo studente risponda in maniera chiara ai quesiti proposti e, ove necessario, argomenti i diversi passaggi, espliciti le formule usate, motivi le scelte e non si limiti a riportare i soli risultati dei calcoli.
Alla consegna della prova scritta, l'allievo riceverà la traccia dell'elaborato tecnico da svolgere in ambiente Matlab/Simulink.
Non è consentito consultare appunti o altro materiale, così come è assolutamente vietata ogni forma di collaborazione, pena l'annullamento della prova e il non poter partecipare alla successiva seduta d'esame. Durante la seduta, si forniranno spiegazioni soltanto su quesiti inerenti la comprensione della traccia.
Durata della prova: 3 ore.



1. Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo rappresentato nello schema a blocchi in figura dove $u(t) = 1 - \sin(5t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, e $k \in \mathbb{R}$.
   a) Dopo aver calcolato la rappresentazione i-s-u del sistema prima e dopo l'apertura dell'interruttore, si calcoli l'intervallo di valori del parametro k affinché il sistema sia asintoticamente stabile $\forall t \in \mathbb{R}$. **[Punti: 4]**
   b) Si calcoli l'intervallo di valori del parametro k affinché il sistema sia in forma minima $\forall t \in \mathbb{R}$, preservando l'asintotica stabilità. **[Punti: 3]**
   c) Si calcoli l'intervallo di valori del parametro k affinché il sistema non presenti modi naturali oscillanti $\forall t \in \mathbb{R}$, preservando l'asintotica stabilità. **[Punti: 3]**
   d) Posto $k = 5$, si determini la risposta complessiva dell'uscita $y(t)$ del sistema $\forall t \in \mathbb{R}$. **[Punti: 7]**

2. Sia dato il sistema LTI a tempo continuo caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento

$$G(s) = 10^3 \frac{s^2 + 25s + 150}{(s^2 - 49s - 50)(s^2 - 200s + 10^4)}.$$

   a) Si disegnino i diagrammi asintotici di Bode, apportando le dovute correzioni. **[Punti: 5]**
   b) Si tracci il diagramma polare (di Nyquist). **[Punti: 3]**

3. Si consideri un sistema LTI a tempo continuo avente la seguente risposta impulsiva nell'uscita

$$g_y(t) = \delta(t) + \frac{109}{99}(e^{-0.1t} - e^{-10t})\delta_{-1}(t).$$

Si calcoli la rappresentazione i-s-u del sistema a dati campionati associata al sistema a tempo continuo di partenza, sapendo che il periodo di campionamento scelto è pari a $T_s = 1$ s, dopo aver verificato che esso sia un periodo di campionamento congruo. **[Punti: 5]**

Soluzione

1 Esercizio

Quesito a.
Si proceda per prima cosa a calcolare la rappresentazione i-s-u dei due sottosistemi applicando, ad esempio, la forma canonica di raggiungibilità

$$G_1 : \begin{cases} \dot{x}_1(t) &= -kx_1(t) + e(t), \\ h(t) &= (k+1)x_1(t) + e(t). \end{cases}$$

$$G_2 : \begin{cases} \dot{x}_2(t) &= x_2(t) + r(t), \\ y(t) &= x_2(t). \end{cases}$$

Per $t < 5$, è possibile ricavare le seguenti relazioni dalla topologie dello schema a blocchi $e(t) = u(t) - y(t)$, $m(t) = y(t)$, $r(t) = h(t) + m(t)$. Pertanto, la rappresentazione i-s-u del sistema per $t < 5$ risulta pari a

$$\dot{x}_1(t) = -kx_1(t) - x_2(t) + u(t), \tag{1.1a}$$
$$\dot{x}_2(t) = (k+1)x_1(t) + x_2(t) + u(t), \tag{1.1b}$$
$$y(t) = x_2(t). \tag{1.1c}$$

Le matrici corrispondenti della forma i-s-u trovata sono pari a

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} -k & -1 \\ k+1 & 1 \end{bmatrix}, \; \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \; \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \; d = 0.$$

Il polinomio caratteristico associato alla matrice dinamica $\boldsymbol{A}_1$ è

$$\varphi_1(\lambda) = \lambda^2 + (k-1)\lambda + 1.$$

Poiché il sistema è del secondo ordine, condizione necessaria e sufficiente affinché $\boldsymbol{A}_1$ abbia tutti autovalori a parte reale negativa è che il polinomio caratteristico associato abbia coefficienti tutti dello stesso segno: ciò avviene quando $k > 1$.
Per $t \geq 5$, invece, le relazioni ricavabili dalla topologia dello schema a blocchi sono $e(t) = u(t) - y(t)$, $m(t) = 0$, $r(t) = h(t)$. Pertanto, la rappresentazione i-s-u del sistema per $t \geq 5$ risulta pari a

$$\dot{x}_1(t) = -kx_1(t) - x_2(t) + u(t), \tag{1.2a}$$
$$\dot{x}_2(t) = (k+1)x_1(t) + u(t), \tag{1.2b}$$
$$y(t) = x_2(t). \tag{1.2c}$$

Le matrici corrispondenti della forma i-s-u trovata sono pari a

$$\boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} -k & -1 \\ k+1 & 0 \end{bmatrix}, \; \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \; \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \; d = 0.$$

Il polinomio caratteristico associato alla matrice dinamica $\boldsymbol{A}_2$ è

$$\varphi_2(\lambda) = \lambda^2 + k\lambda + k + 1.$$

Come nel caso precedente, affinché $\boldsymbol{A}_2$ abbia tutti autovalori a parte reale negativa, il polinomio caratteristico associato deve avere coefficienti tutti dello stesso segno: ciò avviene quando $k > -1 \wedge k > 0 \Rightarrow k > 0$.
In conclusione, mettendo a sistema i risultati trovati, il sistema sarà asintoticamente stabile $\forall\, t \in \mathbb{R}$ quando $k > 1$.

Quesito b.

La raggiungibilità del sistema per $t < 5$ si può studiare attraverso la seguente matrice

$$\boldsymbol{M}_{r,1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b} & \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -k-1 \\ 1 & k+2 \end{bmatrix}.$$

Il determinante di $\boldsymbol{M}_{r,1}$ è pari a $2k+3$, quindi il sistema è completamente raggiungibile quando $k \neq -\frac{3}{2}$.
L'osservabilità del sistema si può studiare attraverso la seguente matrice

$$\boldsymbol{M}_{o,1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}^T & \boldsymbol{A}_1^T\boldsymbol{c}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k+1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Il determinante di $\boldsymbol{M}_{o,1}$ è $-k-1$, quindi il sistema è completamente osservabile quando $k \neq -1$. Il sistema per $t < 5$ è in forma minima quando $k \neq -\frac{3}{2} \land k \neq -1$.
La raggiungibilità del sistema per $t \geq 5$ si può studiare attraverso la seguente matrice

$$\boldsymbol{M}_{r,2} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b} & \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -k-1 \\ 1 & k+1 \end{bmatrix}.$$

Il determinante di $\boldsymbol{M}_{r,2}$ è pari a $2k+2$, quindi il sistema è completamente raggiungibile quando $k \neq -1$.
L'osservabilità del sistema si può studiare attraverso la seguente matrice

$$\boldsymbol{M}_{o,2} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}^T & \boldsymbol{A}_1^T\boldsymbol{c}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k+1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il determinante di $\boldsymbol{M}_{o,2}$ è $-k-1$, quindi il sistema è completamente osservabile quando $k \neq -1$. Il sistema per $t \geq 5$ è in forma minima quando $k \neq -1$.
Mettendo assieme i risultati, il sistema è in forma minima $\forall t \in \mathbb{R}$ quando $k \neq -\frac{3}{2} \land k \neq -1$. Tuttavia, questo intervallo è al di fuori dei valori del parametro k che assicurano l'asintotica stabilità visto nel punto precedente. Quindi, il sistema è sia in forma minima che asintoticamente stabile quando $k > 1$.

Quesito c.
Affinché i modi naturali non abbino modi naturali oscillanti, essi non devono essere generati da autovalori complessi coniugati. Sia per $t < 5$ che per $t \geq 5$ i sistemi sono del secondo ordine. Occorrerà quindi assicurarsi che i valori del parametro k non rendano complesse coniugate le radici dei polinomi caratteristici $\varphi_1(\lambda)$ e $\varphi_2(\lambda)$ già trovati al quesito a). In particolare, occorrerà imporre il delta dell'equazione maggiore o uguale di zero.
Per $t < 5$, bisogna quindi imporre che $(k-1)^2 - 4 \geq 0$. Ciò avviene quando $k \leq -1 \land k \geq 3$.
Per $t \geq 5$, bisogna quindi imporre che $k^2 - 4k - 4 \geq 0$. Ciò avviene quando $k \leq 2 - 2\sqrt{2} \land k \geq 2 + 2\sqrt{2}$.
Mettendo i precedenti risultati a sistema anche con la condizione di asintotica stabilità vista al quesito a), otteniamo che i valori del parametro k affinché si ottenga sia l'asintotica stabilità e l'assenza di modi naturali oscillanti è $k \geq 2 + 2\sqrt{2}$.

Quesito d.
La risposta complessiva $y(t)$ si può suddividere come

$$y(t) = \begin{cases} y_1(t), & t < 5, \\ y_2(t), & t \geq 5. \end{cases}$$

Si cominci dal caso $t < 5$ e si provveda a calcolare $y_1(t)$. Il sistema modellato dalla forma i-s-u in (1.1), dopo aver sostituito il valore $k = 5$, è pari a

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix},\ d = 0.$$

Da $\varphi_1(\lambda)$, gli autovalori della matrice $\boldsymbol{A}_1$ sono pari a $\lambda_{1,1} = -2 - \sqrt{3}$ e $\lambda_{1,2} = \sqrt{3} - 2$. Il sistema è dunque asintoticamente stabile, coerentemente con quanto imposto con la scelta del parametro k al quesito a).

Poiché si presuppone che i segnali siano stati applicati ad un tempo $t = -\infty$, qualunque istante di tempo $t < 5$ si consideri, si può presupporre che le evoluzioni libere ed il transitorio si siano già estinti: il sistema è quindi a regime. Il legame fra l'uscita $y_1(t)$ e l'ingresso $u(t)$ è dato dalla seguente funzione di trasferimento

$$G_1(s) = \boldsymbol{c}(s\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{A}_1)^{-1}\boldsymbol{b} = \frac{s+11}{s^2+4s+1}.$$

Osservando che l'ingresso $u(t)$ è una costante più un seno, per il teorema della risposta allo scalino e alla risposta armonica si può scrivere

$$y_1(t) = G_1(0) - |G_1(5j)|\sin\left(5t + \arg\left(G_1(5j)\right)\right) \simeq 11 - 0.3868\sin(5t - 2.0202).$$

Per il prosieguo, sarà utile avere a disposizione anche l'evoluzione dello stato per $t < 5$ Pertanto, con considerazioni similari fatti per l'uscita, l'evoluzione per $t < 5$ potrà essere calcolata a partire dall'espressione

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[(s\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{A}_1)^{-1}\boldsymbol{b}_1 u(t)\right].$$

Chiamando $H(s) = (s\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{A}_1)^{-1}\boldsymbol{b}$ la matrice delle risposte impulsive nello stato, si ottiene

$$H(s) = \begin{bmatrix} H_1(s) \\ H_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{s-2}{s^2+4s+1} \\ \\ \dfrac{s+11}{s^2+4s+1} \end{bmatrix}.$$

Giacché per $t < 5$ anche lo stato sarà al suo andamento di regime, applicando nuovamente il teorema della risposta armonica si può concludere che

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1(0) - |H_1(5j)|\sin\left(5t + \arg\left(H_1(5j)\right)\right) \\ H_2(0) - |H_2(5j)|\sin\left(5t + \arg\left(H_2(5j)\right)\right) \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} -2 - 0.1724\sin(5t - 0.4956) \\ 11 - 0.3868\sin(5t - 2.0202) \end{bmatrix}.$$

Particolarizzando lo stato in $t = 5$ (istante di chiusura dell'interruttore) si ottiene $\boldsymbol{x}(5) = \begin{bmatrix} -1.8987 & 11.3231 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$. Per $t \geq 5$, invece, fissato $k = 5$, le matrici del sistema in forma i-s-u in (1.2) sono pari a

$$\boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix},\ d = 0.$$

Gli autovalori di $\boldsymbol{A}_2$ sono pari a $\lambda_{2,1} = -2$ e $\lambda_{2.2} = -3$. Il sistema è dunque asintoticamente stabile, coerentemente con la scelta del parametro k precedentemente fatta. Ricordando che il sistema è stazionario, l'uscita è ora calcolabile come se l'istante di inizio osservazione fosse $t_0 = 0$, ovvero

$$y_2(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\boldsymbol{c}\,(s\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{A}_2)^{-1}\boldsymbol{x}_0(5) + \boldsymbol{c}\,(s\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{A}_2)^{-1}\boldsymbol{b}U(s)\right], \tag{1.3}$$

salvo poi operare una traslazione temporale di 5 s per ottenere il caso in esame con $t_0 = 5$ s. Pertanto, essendo $U(s) = \dfrac{1}{s} - \dfrac{5}{s^2+25}$, sostituendo le matrici e la trasformata dell'ingresso in (**??**), si ottiene

$$y_2(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{11.3231s + 45.2233}{s^2+5s+6} + \frac{s^3+6s^2-30s+275}{(s^2+5s+6)(s^2+25)}\right] \simeq \frac{11}{6} + 16.5254e^{-2t} - 7.4109e^{-3t} - 0.3848\sin(5t - 1.794).$$

Applicando la traslazione nel tempo, la risposta complessiva del sistema $\forall\, t \in \mathbb{R}$ risulta pari a

$$y(t) \simeq \begin{cases} 11 - 0.3868\sin(5t - 2.0202),\ t < 5, \\ \\ \dfrac{11}{6} + 16.5254e^{-2(t-5)} - 7.4109e^{-3(t-5)} - 0.3848\sin(5(t-5) - 1.794),\ t \geq 5. \end{cases}$$

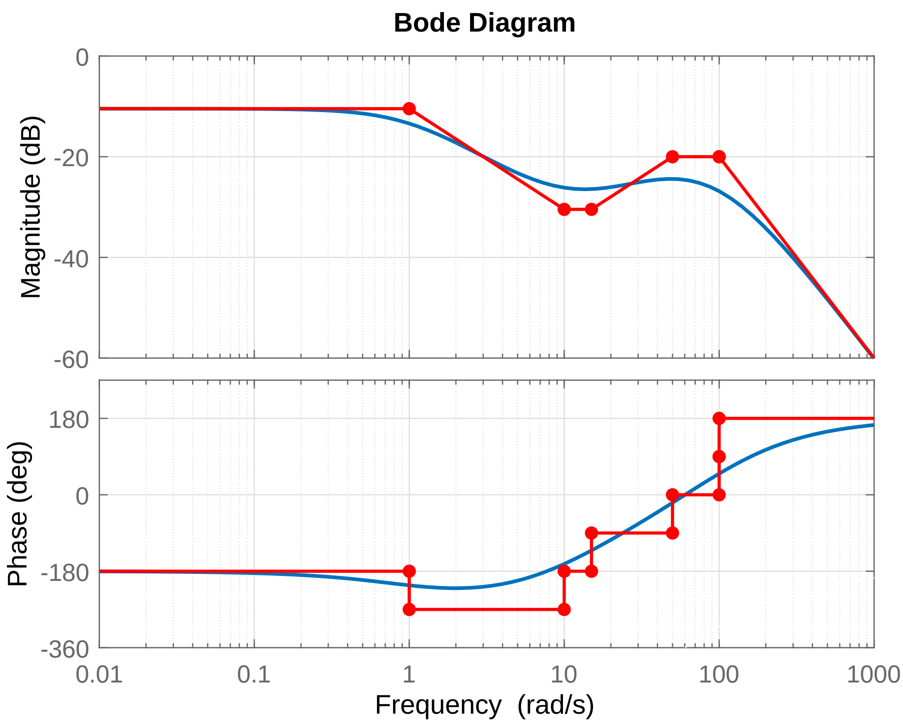


Figura 2.1: Diagramma di Bode della funzione di trasferimento $G(s)$.

2 Esercizio

Quesito a.

La forma ingegneristica di tale funzione di trasferimento è pari a

$$G(s) = -0.3\frac{(0.1s+1)\left(\frac{s}{15}+1\right)}{(s+1)\left(\frac{s}{50}-1\right)(-0.01s+1)^2}.$$

Si riconoscono al numeratore due termini binomio di molteplicità singola. Al denominatore, invece, vi sono due termini binomio di molteplicità singola ed uno di molteplicità doppia. I parametri riguardanti guadagno del sistema, tipo, costanti di tempo, smorzamenti e pulsazioni naturali sono pari a $\mu = -0.3$, $g = 0$, $\tau_1 = 0.1$ s, $\tau_2 = 1/15$ s, $T_1 = 1$ s, $T_2 = -0.02$ s e $T_3 = -0.01$ s. Le pulsazioni di rottura, in ordine crescente, sono quindi pari a $\omega_1 = 1/|T_1| = 1$ rad/, $\omega_2 = 1/|\tau_1| = 10$ rad/s, $\omega_3 = 1/|\tau_2| = 15$ rad/s, $\omega_4 = 1/|T_2| = 50$ rad/s, $\omega_5 = 1/|T_3| = 100$ rad/s.

Poiché il sistema è di tipo 0, il diagramma dei moduli partirà con un tratto piatto pari al valore $\mu_{dB} \simeq -10.5$ dB. La prima pulsazione di rottura è in ω_1 ad opera del termine binomio al denominatore di molteplicità singola. La variazione di pendenza relativa del diagramma asintotico è di -20 dB/decade. Il fattore correttivo in ω_1 è -3 dB. La seconda pulsazione di rottura è in ω_2 ad opera del termine binomio al numeratore di molteplicità singola. La correzione relativa è di 20 dB/decade. Il fattore correttivo in ω_2 è 3 dB, anche se molto vicino alla precedente pulsazione di rottura. Si noti che $\omega_2 = 15$ rad/s si trova a circa il 17% della relativa decade, quindi circa a 1/6 di decade, a metà tra 10 rad/s e 20 rad/s nella scala logaritmica delle ascisse. La terza pulsazione di rottura è in ω_3 ad opera del primo termine binomio al numeratore di molteplicità singola. La variazione di pendenza relativa del diagramma asintotico è di 20 dB/decade. Il fattore correttivo in ω_3 è 3 dB. La quarta pulsazione di rottura è in ω_4 ad opera del secondo termine binomio al denominatore di molteplicità singola. La variazione di pendenza relativa del diagramma asintotico è di -20 dB/decade. Il fattore correttivo in ω_4 è -3 dB. La quinta, e ultima, pulsazione di rottura è in ω_5 ad opera del terzo termine binomio al denominatore di molteplicità doppia. La variazione di pendenza relativa del diagramma asintotico è di -40 dB/decade. Il fattore correttivo in ω_4 è -6 dB.

Il diagramma delle fasi tiene conto delle solite tecniche di tracciamento. Quindi, il grafico parte da -180 deg siccome il guadagno $\mu < 0$ e il sistema è di tipo 0. Ogni termine binomio al numeratore, di molteplicità singola, apporta un salto relativo del diagramma asintotico di 90 deg alla relativa pulsazione di rottura. Il termine binomio al denominatore, di molteplicità singola, associato a T_1 apporta un salto relativo del diagramma asintotico di -90 deg alla relativa pulsazione di rottura. Il termine binomio al denominatore, di molteplicità singola, associato a $T_2 < 0$ apporta un salto relativo del diagramma asintotico di 90 deg alla relativa pulsazione di rottura. Il termine binomio al denominatore, di molteplicità doppia, associato a $T_3 < 0$ apporta un salto relativo del diagramma asintotico di 180 deg alla relativa pulsazione di rottura. Per effetto di questi contributi, il diagramma delle fasi termina con un tratto piatto pari a 180 deg.

Quesito b.

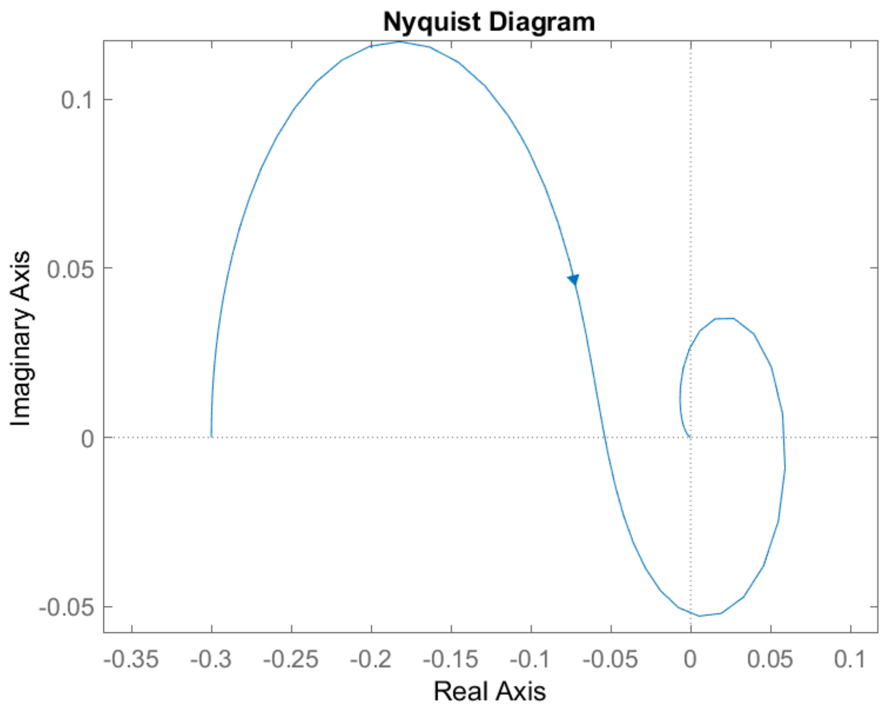


Figura 2.2: Diagramma polare della funzione di trasferimento $G(s)$.

Il tracciamento del diagramma polare (di Nyquist) può seguire il seguente procedimento. Il diagramma reale è rappresentato in Fig. **??**. Poiché il sistema è di tipo 0, il grafico polare parte dal valore del guadagno, quindi pari a -0.3. Inoltre, poiché il sistema è strettamente proprio, ossia il grado relativo è positivo, il diagramma polare terminerà di nuovo nell'origine.

Nel tratto iniziale, i diagrammi dei moduli e delle fasi indicano che il diagramma polare parte da μ con fase -180 deg. Nella prima fase, il valore del modulo rimane costante fino alla pulsazione ω_1, mentre la fase scende. Questo vuol dire che si deve disegnare un arco di circonferenza (modulo costante) nel secondo quadrante, appunto perché il sistema ha una fase sempre più negativa. Da ω_1 il sistema comincia ad avere un modulo sempre più piccolo, quindi il diagramma polare ha una distanza dall'origine che comincia a decrescere. Il diagramma delle fasi indica che a partire da ω_2 la fase comincia a crescere. In corrispondenza di $\omega = 5$ rad/s, la fase torna ad essere -180 deg, quindi si ha l'attraversamento del secondo quadrante verso il terzo. Da questo punto, la fase tende sempre a crescere fino a 180 deg, investendo tutti e quattro i quadranti (prima nel terzo, poi nel quarto, poi nel primo per concludersi nuovamente nel secondo. Il modulo, di contro, tende sempre a decrementare, tranne fra ω_3 e ω_4 dove è costante, disegnando quindi un arco di circonferenza nel diagramma polare. Quest'ultimo, come detto, si chiude nell'origine.

3 Esercizio

Per prima cosa, si calcola la funzione di trasferimento del sistema come

$$G(s) = \mathscr{L}[g_y(t)] = 1 + \frac{109}{99}\left(\frac{1}{s+0.1} - \frac{1}{s+10}\right) = \frac{s^2+10.1s+11.9}{s^2+10.1s+1}$$

La forma i-s-u associata è pari a

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}(t) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -10.1 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u(t), \\
y(t) &= \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(t) + du(t) = \begin{bmatrix} 10.9 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t) + u(t).
\end{aligned}$$

Gli autovalori del sistema sono pari a $\lambda_1 = -10$ e $\lambda_2 = -0.1$. Il sistema è quindi del secondo ordine dove λ_2 è dominante in quanto il modo naturale associato è il più lento e c'è più di ordine di grandezza con λ_1. Inoltre, gli zeri del sistema si trovano in -1.3618 e -8.7382 che sono alla sinistra del polo dominante, con oltre un ordine di grandezza di differenza, e quindi non alterano di molto le dinamiche del sistema. Il sistema si può quindi approssimare ad un sistema del primo ordine con costante di tempo pari a $1/|\lambda_2| = 10$ s. Il tempo di assestamento all'1% del sistema alla risposta allo salino è quindi pari a $t_{a1} \simeq 48$ s. Ricordando la formula pratica per la scelta del periodo di campionamento

$$\frac{t_{a1}}{10\alpha} \le T_s \le \frac{t_{a1}}{\alpha},$$

con $\alpha \in [5,10]$. Scegliendo $\alpha = 10$ si ottiene $0.48 \le T_s \le 4.8$. Da qui, si vede che la scelta di $T_s = 1$ s è accettabile.

Il determinante della matrice $\boldsymbol{A}$ è diverso da zero e la matrice è dunque invertibile. Le matrici della forma i-s-u del sistema a dati campionati associato sono pari a

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}^\star &= e^{\boldsymbol{A}T_s} = \mathscr{L}^{-1}[(s\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{A})^{-1}]|_{t=T_s} \simeq \begin{bmatrix} 1.0101e^{-0.1T_s} - 0.0101e^{-10T_s} & 0.1010(e^{-0.1T_s} - e^{-10T_s}) \\ 0.1010(e^{-10T_s} - e^{-0.1T_s}) & 1.0101e^{-10T_s} - 0.0101e^{-0.1T_s} \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{b}^\star &= \boldsymbol{A}^{-1}\left(\boldsymbol{A}^\star - \boldsymbol{I}_2\right)\boldsymbol{b}.
\end{aligned}$$

Svolgendo i conti si ottiene

$$\boldsymbol{A}^\star \simeq \begin{bmatrix} 0.9140 & 0.0914 \\ -0.0914 & -0.0091 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}^\star \simeq \begin{bmatrix} 0.086 \\ 0.0914 \end{bmatrix}.$$

La matrice dell'uscita e quella di accoppiamento diretto restano invariate.

ELABORATO TECNICO - TRACCIA N.1 (MATRICOLE PARI)

Risolvere il quesito di seguito riportato utilizzando unicamente lo strumento software Matlab e/o Simulink. Non calcolare cioé nulla a parte su supporti cartacei. Il file generato per risolvere la traccia assegnata va consegnato entro il giorno antecedente la prova orale tramite email all'indirizzo del docente con oggetto *[TSI-FSD][Elaborato tecnico]-Cognome Nome Matricola.* In caso non fosse possibile inviare un email, il discente deve portare un drive USB il giorno della seduta orale. In caso di piú files generati, compattare tutto in un file ZIP. ATTENZIONE: nel caso si utilizzi Simulink, salvare il file generato con compatibilitá per la *versione 10.2.* A scanso di equivoci, portare il proprio PC con la versione di Simulink utilizzata per risolvere, eventualmente, il quesito.

Si consideri il seguente sistema dinamico LTI a tempo continuo, con $k \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -kx_1(t) - x_2(t) + u(t), \\ \dot{x}_2(t) &= (k+1)x_1(t) + x_2(t) + u(t). \\ y(t) &= x_2(t). \end{aligned}$$

1. Far variare il parametro k in un intervallo di valore a piacere, purché significativo, e classificare automaticamente la proprietà di stabilità del sistema. Fare la stessa cosa per l'osservabilità e la raggiungibilità.

2. Posto $k = 5$, si disegni l'uscita forzata del sistema quando esso è sottoposto all'ingresso $u(t) = (1 - sin(5t))\delta_{-1}(t)$.

3. Posto $k = 5$, disegnare i diagrammi di Bode e di Nyquist del sistema in due finestre separate.

4. Posto $k = 5$, si disegni l'uscita forzata del sistema quando esso è sottoposto all'ingresso $u(t) = (1 - sin(5t))\delta_{-1}(-t)$, nell'intervallo $t \in [-10, 10]$ s.

ELABORATO TECNICO - TRACCIA N.2 (MATRICOLE DISPARI)

Risolvere il quesito di seguito riportato utilizzando unicamente lo strumento software Matlab e/o Simulink. Non calcolare cioé nulla a parte su supporti cartacei. Il file generato per risolvere la traccia assegnata va consegnato entro il giorno antecedente la prova orale tramite email all'indirizzo del docente con oggetto *[TSI-FSD][Elaborato tecnico]-Cognome Nome Matricola.* In caso non fosse possibile inviare un email, il discente deve portare un drive USB il giorno della seduta orale. In caso di piú files generati, compattare tutto in un file ZIP. ATTENZIONE: nel caso si utilizzi Simulink, salvare il file generato con compatibilitá per la *versione 10.2.* A scanso di equivoci, portare il proprio PC con la versione di Simulink utilizzata per risolvere, eventualmente, il quesito.

Si consideri il seguente sistema dinamico LTI a tempo discreto, con $T = 1$ s, le cui matrici sono

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0.9140 & 0.0914 \\ -0.0914 & -0.0091 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0.086 \\ 0.0914 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 10.9 & 0 \end{bmatrix}, \quad d = 1.$$

1. Progettare uno script automatico che determini l'asintotica stabilità e la forma minima o meno del sistema in esame. Progettare lo script in modo generico per sistemi di ordine 2.

2. Si disegni l'uscita forzata del sistema quando esso è sottoposto all'ingresso $u(k) = (10+2\sin(5k))\delta_{-1}(-k)$ nell'intervallo $k \in [-10, 10]$.

Sia dato il seguente sistema LTI a tempo continuo

$$G(s) = 10^3 \frac{s^2 + 25s + 150}{(s^2 - 49s - 50)(s^2 - 200s + 10^4)}.$$

Disegnare i diagrammi di Bode e di Nyquist del sistema in due finestre separate.