Voto

Traccia Matlab

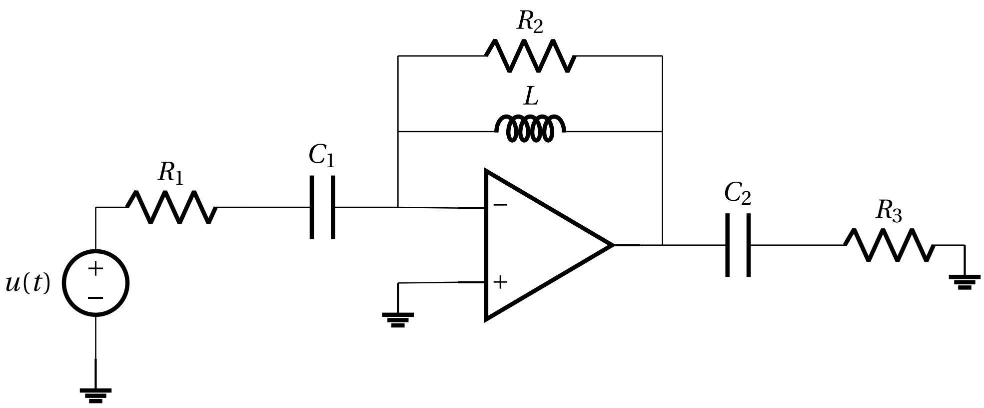
Cognome, Nome e Matricola

CORSO: TEORIA DEI SISTEMI

DOCENTE: VINCENZO LIPPIELLO

Prova scritta del 07/01/2025

Leggere con attenzione
Il corretto svolgimento del compito prevede che lo studente risponda in maniera chiara ai quesiti proposti e, ove necessario, argomenti i diversi passaggi, espliciti le formule usate, motivi le scelte e non si limiti a riportare i soli risultati dei calcoli.
Alla consegna della prova scritta, l'allievo riceverà la traccia dell'elaborato tecnico da svolgere in ambiente Matlab/Simulink.
Non è consentito consultare appunti o altro materiale, così come è assolutamente vietata ogni forma di collaborazione, pena l'annullamento della prova e il non poter partecipare alla successiva seduta d'esame. Durante la seduta, si forniranno spiegazioni soltanto su quesiti inerenti la comprensione della traccia.
Durata della prova: 3 ore.



1. Sia dato il circuito nello schema superiore. Si determini una rappresentazione i-s-u del sistema, l'uscita $y(t)$ è la tensione ai capi di R_3, e la relativa classificazione. **[Punti: 5]**

2. Si consideri un sistema LTI a tempo continuo avente la seguente forma i-s-u con $k \in \mathbb{R}$,

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t) = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 0 & -1 & k \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} k \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u(t),$$
$$y(t) = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(t) + du(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + u(t).$$

   a) Si discuta la stabilità, l'osservabilità e la raggiungibilità al variare dei parametri. **[Punti: 3]**
   b) Si trovi il valore del parametro k affinché il sistema ammetta uno ed un solo stato di equilibrio quando il sistema è sottoposto all'ingresso $u(t) = \bar{u}$ e calcolarne l'espressione. **[Punti: 3]**
   c) Posto $k = -1$, considerato $u(t) = -5 - \cos(t)\delta_{-1}(-t)$, si calcoli l'uscita del sistema, $y(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. **[Punti: 7]**

3. Sia dato il sistema LTI a tempo continuo caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento

$$G(s) = 300\frac{s^2 + 10.3s + 3}{s^4 + 33s^3 + 90s^2}.$$

   Si disegnino i diagrammi asintotici di Bode, apportando le dovute correzioni. **[Punti: 5]** Si determini se il sistema è un filtro, dandone opportuna giustificazione. **[Punti: 2]**

4. Si consideri il seguente sistema dinamico a tempo discreto

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_1(k) + x_2(k) + u_1(k), \\ x_2(k+1) &= x_1(k)x_3(k)^2 + x_2(k)u_2(k), \\ x_3(k+1) &= x_1(k)x_2(k)x_3(k) + u_1(k)u_2(k), \\ y(k) &= x_1(k) + x_2(k) + x_3(k). \end{aligned}$$

   Calcolare gli stati di equilibrio del sistema quando esso è sottoposto agli ingressi costanti $u_1(k) = \bar{u}_1 = u_2(k) = \bar{u}_2 = 1$, e determinare la stabilità di ognuno di essi. **[Punti: 5]**

Soluzione

1 Esercizio

Per prima cosa, in maniera del tutto arbitraria, si decidono i versi delle cadute di tensione ai morsetti dei vari componenti del circuito e, di conseguenza, il verso della corrente che li attraversa. In questo quesito si utilizza la convezione dell'utilizzatore. Dunque, le correnti vanno dal morsetto positivo a quello negativo del componente. In Fig. 1 sono evidenziati i versi delle correnti (e quindi delle tensioni) circolanti nel circuito, i nodi, le maglie e i versi di percorrenza delle stesse, scelti sempre in maniera arbitraria.

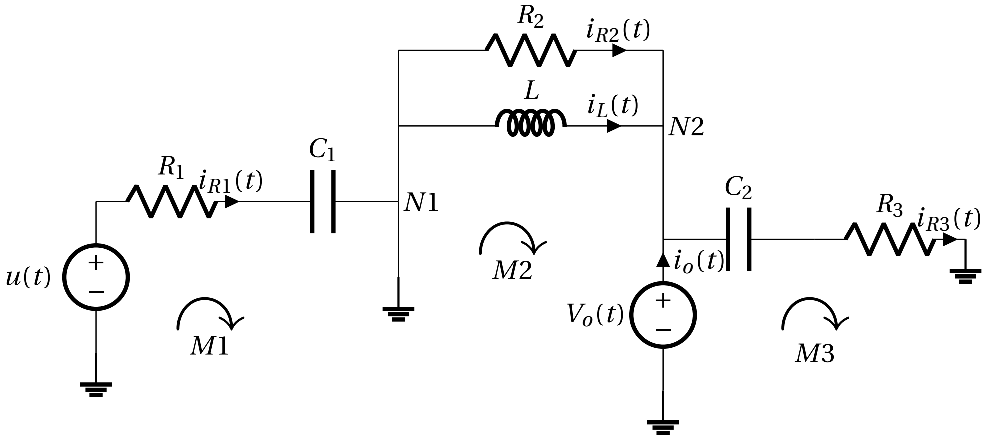


Figura 1.1: Schema circuitale con nodi e maglie.

Si ricorda che ogni amplificatore operazionale si comporta come un corto circuito virtuale in ingresso (corto circuito con corrente che l'attraversa pari a zero), e come un generatore ideale di tensione in uscita, $V_o(t)$, con corrente, $i_o(t)$, non determinabile a priori. Per quanto detto, ricordando che per elementi in serie passa la stessa corrente mentre elementi in parallelo sono sottoposti alla stessa tensione, è possibile notare che (i) la corrente che attraversa R_1 e C_1 è la stessa; (ii) la corrente che attraversa R_3 e C_2 è la stessa; (iii) la tensione ai capi di R_2 e L è la stessa. Dunque, si scrivono ora le relazioni costitutive di tutti i componenti del circuito

$$V_{R1}(t) = R_1 i_1(t), \tag{1.1a}$$
$$V_{R2}(t) = R_2 i_2(t), \tag{1.1b}$$
$$V_{R3}(t) = R_3 i_3(t), \tag{1.1c}$$
$$i_{R1}(t) = C_1 \dot{V}_{C1}(t), \tag{1.1d}$$
$$i_{R3}(t) = C_2 \dot{V}_{C2}(t), \tag{1.1e}$$
$$V_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}, \tag{1.1f}$$

e le leggi di Kirchhoff ai nodi $N1$ e $N2$ e alle maglie $M1$, $M2$ e $M3$

$$N1: \; i_{R1}(t) = i_{R2}(t) + i_L(t), \tag{1.2a}$$
$$N2: \; i_{R2}(t) + i_L(t) = i_{R3}(t) - i_o(t), \tag{1.2b}$$
$$M1: \; u(t) = V_{R1}(t) + V_{C1}(t), \tag{1.2c}$$
$$M2: \; V_L(t) = -V_o(t), \tag{1.2d}$$
$$M3: \; V_o(t) = V_{C2}(t) + V_{R3}(t). \tag{1.2e}$$

La tensione $y(t) = V_{R3}(t)$ è l'uscita dell'intero sistema. Nel circuito vi sono due elementi capacitivi ed uno induttivo. Pertanto, come variabili di stato si scelgono $x_1(t) = V_{C1}(t)$, $x_2(t) = i_L(t)$ e $x_3(t) = V_{C2}(t)$.
Sfruttando in ordine (1.1d), (1.1a) e (1.2c) si ottiene l'equazione differenziale rispetto alla variabile di stato $x_1(t)$:

$$\dot{x}_1(t) = -\frac{1}{R_1 C_1} x_1(t) + \frac{1}{R_1 C_1} u(t).$$

Sfruttando, invece, in ordine (1.1e), (1.1b), (1.2a),(1.1a) e (1.2c) si ottiene l'equazione differenziale rispetto alla variabile di stato $x_2(t)$:

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{R_2}{R_1 L}x_1(t) - \frac{R_2}{L}x_2(t) + \frac{R_2}{R_1 L}u(t). \tag{1.3}$$

Sfruttando, ora, in ordine (1.1f), (1.1c), (1.2e), (1.2d), (1.1f) e (1.3) si ottiene l'equazione differenziale rispetto alla variabile di stato $x_3(t)$:

$$\dot{x}_3(t) = \frac{R_2}{R_1 R_3 C_2}x_1(t) + \frac{R_2}{R_3 C_2}x_2(t) - \frac{1}{R_3 C_2}x_3(t) - \frac{R_2}{R_1 R_3 L}u(t).$$

Infine, per l'uscita si ottiene sfruttando in ordine (1.2e), (1.2d), (1.1f) e (1.3) la seguente equazione

$$y(t) = \frac{R_2}{R_1}x_1(t) + R_2 x_2(t) - x_3(t) - \frac{R_2}{R_1}u(t).$$

Le precedenti danno luogo all'equazioni i-s-u del circuito che sono ricapitolate di seguito

$$\dot{x}_1(t) = -\frac{1}{R_1 C_1}x_1(t) + \frac{1}{R_1 C_1}u(t), \tag{1.4a}$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{R_2}{R_1 L}x_1(t) - \frac{R_2}{L}x_2(t) + \frac{R_2}{R_1 L}u(t), \tag{1.4b}$$

$$\dot{x}_3(t) = \frac{R_2}{R_1 R_3 C_2}x_1(t) + \frac{R_2}{R_3 C_2}x_2(t) - \frac{1}{R_3 C_2}x_3(t) - \frac{R_2}{R_1 R_3 L}u(t), \tag{1.4c}$$

$$y(t) = \frac{R_2}{R_1}x_1(t) + R_2 x_2(t) - x_3(t) - \frac{R_2}{R_1}u(t). \tag{1.4d}$$

Il sistema ottenuto è dinamico, tempo continuo, LTI, SISO, proprio. Le matrici del sistema LTI sono date da

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C_1} & 0 & 0 \\ -\frac{R_2}{R_1 L} & -\frac{R_2}{L} & 0 \\ \frac{R_2}{R_1 R_3 C_2} & \frac{R_2}{R_3 C_2} & -\frac{1}{R_3 C_2} \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 C_1} \\ \frac{R_2}{R_1 L} \\ -\frac{R_2}{R_1 R_3 L} \end{bmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} \frac{R_2}{R_1} & R_2 & -1 \end{bmatrix}, d = -\frac{R_2}{R_1}.$$

Il sistema è lineare, stazionario, tempo continuo, SISO, proprio.

2 Esercizio

Quesito a.

Gli autovalori della matrice della dinamica $\boldsymbol{A}$ sono pari a $\lambda_1 = k$, $\lambda_{2,3} = k \pm j$. Il sistema è asintoticamente stabile quando tutti gli autovalori sono a parte reale negativa, e ciò avviene quando $k < 0$. Il sistema è instabile quando un solo autovalore ha parte reale positivo, e ciò accade quando $k > 0$. Il sistema è stabile quando un autovalore è nullo e gli altri a parte reale negativa. Ciò non accade mai. Quando $k = 0$ succede che un autovalore è nullo, λ_1, e gli altri sono immaginari puri. Gli autovalori sono tutti distinti e, quindi, la molteplicità algebrica di tutti è pari a quella geometrica. Questo comporta che il sistema è semplicamente stabile. Riassumendo, si ha asintotica stabilità per $k < 0$, instabilità per $k > 0$, stabilità per $k = 0$.

La raggiungibilità del sistema si può studiare attraverso la seguente matrice

$$\boldsymbol{M}_r = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{b} & \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & k^2 & k^3 \\ 0 & -1 & -2k \\ -1 & -k & 1-k^2 \end{bmatrix}.$$

Il determinante di $\boldsymbol{M}_r$ è pari a $-k$, quindi il sistema è completamente raggiungibile se e sole se $\forall k \neq 0$.

L'osservabilità del sistema si può studiare attraverso la seguente matrice

$$\boldsymbol{M}_o = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}^T & \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{c}^T & \boldsymbol{A}^{T^2}\boldsymbol{c}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k & k^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il determinante di $\boldsymbol{M}_o$ è 0 per tutti i valori di $k \in \mathbb{R}$. Quindi, non esiste valore del parametro k che rende il sistema completamente osservabile. Non esistono valori di k per cui il sistema risulta in forma minima.

Quesito b.
Essendo il sistema LTI, la condizione per cui il sistema ammette un solo stato di equilibrio, qualsiasi sia l'ingresso costante, è che la matrice della dinamica, $\boldsymbol{A}$, sia invertibile. Il determinante di $\boldsymbol{A}$ è pari a $k(k^2+1)$. Questo si annulla solo per $k=0$, essendo $k \in \mathbb{R}$. Dunque, il sistema ammette un unico stato di equilibrio quando $k \neq 0$. In tal caso, lo stato di equilibrio è

$$\bar{\boldsymbol{x}} = -\boldsymbol{c}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} + d = \begin{bmatrix} -1 \\ \dfrac{-1}{k^2+1} \\ \dfrac{k}{k^2+1} \end{bmatrix} \bar{u}.$$

Quesito c.
La risposta complessiva $y(t)$ si può suddividere come

$$y(t) = \begin{cases} y_1(t), & t < 0, \\ y_2(t), & t \geq 0, \end{cases}$$

questo a causa della modifica dell'ingresso che assume la forma

$$u(t) = \begin{cases} -5 - \cos(t), & t \leq 0, \\ -5, & t > 0. \end{cases}$$

Si cominci dal caso $t \leq 0$ e si provveda a calcolare $y_1(t)$. Le matrici della forma i-s-u, dopo aver sostituito il valore $k=-1$, è pari a

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Il sistema è asintoticamente stabile per i risultati visti precedentemente.
Poiché si presuppone che i segnali siano stati applicati ad un tempo $t = -\infty$, qualunque istante di tempo $t \leq 0$ si consideri, si può presupporre che le evoluzioni libere ed il transitorio si siano già estinti: il sistema è quindi a regime. Il legame fra l'uscita $y(t)$ e l'ingresso $u(t)$ è dato dalla seguente funzione di trasferimento

$$W_1(s) = \boldsymbol{c}(s\boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{A}_1)^{-1}\boldsymbol{b}_1 + d = -\frac{s}{s+1}.$$

Sapendo che $Y_1(s) = W_1(s)U(s)$, per il teorema della risposta armonica si può scrivere

$$y_1(t) = -5W_1(0) - |W_1(j)|\cos\big(2t + \arg\big(W_1(j)\big)\big) = 0.7071\cos(t+0.7854),$$

per $t \leq 0$.
Per il prosieguo, sarà utile avere a disposizione anche l'evoluzione dello stato per $t \leq 0$. Pertanto, considerando $\boldsymbol{H}(s) = (s\boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{A}_1)^{-1}\,\boldsymbol{b}_1$ la matrice delle risposte impulsive nello stato, si ottiene

$$\boldsymbol{H}(s) = \begin{bmatrix} H_1(s) \\ H_2(s) \\ H_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{s+1} \\ -\dfrac{1}{s^2+2s+2} \\ -\dfrac{s+1}{s^2+2s+2} \end{bmatrix}.$$

Giacché per $t \leq 0$ anche lo stato sarà al suo andamento di regime, applicando nuovamente il teorema della risposta armonica si può concludere che

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5H_1(0) - |H_1(j)|\cos(t + \arg(H_1(j))) \\ -5H_2(0) - |H_2(j)|\cos(2t + \arg(H_2(j))) \\ -5H_3(0) - |H_3(j)|\cos(t + \arg(H_3(j))) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 - 0.7071\cos(t+2.3562) \\ 2.5 - 0.4472\cos(t+2.0344) \\ 2.5 - 0.6325\cos(t+2.8198) \end{bmatrix}.$$

Particolarizzando lo stato in $t = 0$ si ottiene

$$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} x_{0,1} \\ x_{0,2} \\ x_{0,3} \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 5.5 \\ 2.7 \\ 3.1 \end{bmatrix}$$

.

L'uscita calcolabile, per $t > 0$, è pari a

$$y_2(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\boldsymbol{c}\,(s\boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{A}_1)^{-1}\boldsymbol{x}_0 + (\boldsymbol{c}\,(s\boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{A}_1)^{-1}\boldsymbol{b}_1 + d)U(s)\right], \tag{2.1}$$

con

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c}\,(s\boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{A}_2)^{-1} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{s+1} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{c}\,(s\boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{A}_2)^{-1}\boldsymbol{b} + d &= W_1(s), \end{aligned}$$

da cui, sostituendo nella (2.1), si ottiene

$$y_2(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[-\frac{1}{s+1}x_{0,1} - \frac{s}{s+1}U(s)\right].$$

Essendo, per $t > 0$, $U(s) = 5\frac{1}{s}$, e tenendo conto dei valori numerici delle condizioni iniziali, si ottiene

$$y_2(t) \simeq -\frac{21}{2}e^{-t},$$

per $t > 0$.

La risposta complessiva del sistema $\forall\, t \in \mathbb{R}$ risulta dunque pari a

$$y(t) \simeq \begin{cases} 0.7071\cos(t + 0.7854), & t \leq 0, \\ \frac{21}{2}e^{-t}, & t > 0. \end{cases}$$

3 Esercizio

La forma ingegneristica di tale funzione di trasferimento è pari a

$$G(s) = 10\frac{\left(1 + \frac{s}{10}\right)\left(1 + \frac{s}{0.3}\right)}{s^2\left(1 + \frac{s}{30}\right)\left(1 + \frac{s}{3}\right)}.$$

Si riconoscono al numeratore due termini binomio di molteplicità singola. Al denominatore, invece, vi è un termine monomio di molteplicità doppia e due termini binomio di molteplicità singola. I parametri riguardanti guadagno del sistema, tipo, costanti di tempo, smorzamenti e pulsazioni naturali sono pari a $\mu = 10$, $g = 2$, $\tau_1 = \frac{1}{10}$ s, $\tau_2 = \frac{1}{0.3}$ s, $T_1 = \frac{1}{30}$ s e $T_2 = \frac{1}{3}$ s. Le pulsazioni di rottura, in ordine crescente, sono quindi pari a $\omega_1 = 1/|\tau_2| = 0.3$ rad/s, $\omega_2 = 1/|T_2| = 3$ rad/s, $\omega_3 = 1/|\tau_1| = 10$ rad/s e $\omega_4 = 1/|T_1| = 30$ rad/s. Poiché il sistema è di tipo 2, il diagramma dei moduli partirà con un tratto con pendenza pari a -40 dB/decade che incontrerà la pulsazione $\omega = 1$ rad/s al valore di $\mu_{dB} = 20$ dB. La prima pulsazione di rottura è in ω_1 ad opera del termine binomio al numeratore di molteplicità singola. La variazione di pendenza relativa del diagramma asintotico è di 20 dB/decade. Il fattore correttivo in ω_1 è di 3 dB. La seconda pulsazione di rottura è in ω_2 ad opera del termine binomio al denominatore di molteplicità singola. La variazione di pendenza relativa del diagramma asintotico è di -20 dB/decade. Il fattore correttivo in ω_2 è di -3 dB. La terza pulsazione di rottura è in ω_3 ad opera del termine binomio al numeratore di molteplicità singola. La correzione relativa è di 20 dB/decade. Il fattore correttivo in ω_3 è di 3 dB. Infine, la quarta pulsazione di rottura è in ω_4 ad opera del termine binomio al denominatore di molteplicità singola. La correzione relativa è di -20 dB/decade. Il fattore correttivo in ω_4 è di -3 dB.

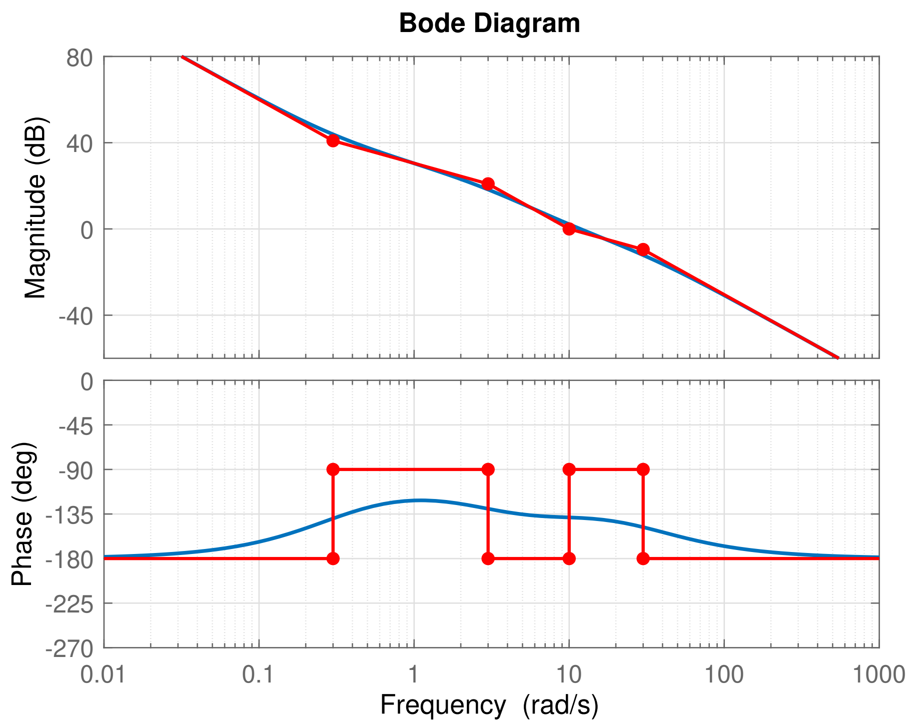


Figura 3.1: Diagramma di Bode della funzione di trasferimento $G(s)$.

Il diagramma delle fasi tiene conto delle solite tecniche di tracciamento. Quindi, il grafico parte da -180 ± 360 deg siccome il guadagno $\mu > 0$ e il sistema è di tipo 2. Il termine binomio al numeratore, di molteplicità singola, apporta un salto relativo del diagramma asintotico di 90 deg alla relativa pulsazione di rottura. Il termine binomio al denominatore, di molteplicità singola, apporta un salto relativo del diagramma asintotico di -90 deg alla relativa pulsazione di rottura. I raccordi corrispondenti sono disegnati come tratti di arcotangente.
Per effetto di questi contributi, il diagramma delle fasi termina con un tratto piatto a quota -180 deg (se si è scelta come pulsazione iniziale appunto questa quota).
Il sistema non è un filtro standard nelle definizioni date semplicemente perché non è né di tipo zero né proprio.

4 Esercizio

Si scriva in maniera compatta il sistema in esame come

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(k+1) &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(k), \boldsymbol{u}(k)), \\ y(k) &= g(\boldsymbol{x}(k)), \end{aligned}$$

con

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(k), \boldsymbol{u}(k)) = \begin{bmatrix} x_1(k) + x_2(k) + u_1(k) \\ x_1(k)x_3(k)^2 + x_2(k)u_2(k) \\ x_1(k)x_2(k)x_3(k) + u_1(k)u_2(k) \end{bmatrix}, \; g(\boldsymbol{x}(k)) = x_1(k) + x_2(k) + x_3(k).$$

Gli stati del equilibrio del sistema quando lo stesso è sottoposto agli ingressi costanti $u_1(k) = \bar{u}_1 = u_2(k) = \bar{u}_2 = 1$ sono pari a

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{u}}) \Rightarrow \begin{cases} \bar{x}_1 & = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + 1 \\ \bar{x}_2 & = \bar{x}_1 \bar{x}_3^2 + \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{x}_2 & = -1 \\ \bar{x}_1 \bar{x}_3^2 & = 0 \\ \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \bar{x}_3 & = 1 \end{cases}.$$

Partendo da $\bar{x}_1\bar{x}_3^2 = 0$, le ultime due equazioni del sistema precedente hanno come unica soluzione $\bar{x}_1 = 0$ e $\bar{x}_3 = 1$. Infatti, il caso $\bar{x}_3 = 0$ non ammette soluzione nel sistema. Dunque, lo stato di equilibrio del sistema è pari a $\bar{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix}\bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \bar{x}_3\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}0 & -1 & 1\end{bmatrix}^T$. L'uscita di equilibrio è invece pari a

$$\bar{y} = g(\bar{\boldsymbol{x}}) \Rightarrow \bar{y} = 0.$$

Per costruire il sistema linearizzato è conveniente dapprima calcolare le seguenti derivate

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ x_3^2 & u_2 & 2x_1x_3 \\ x_2x_3 & x_1x_3 & x_1x_2 \end{bmatrix}, \ \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x_2 \\ u_2 & u_1 \end{bmatrix}, \ \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}, \ \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}.$$

Pertanto, le matrici di una rappresentazione i-s-u del sistema linearizzato attorno allo stato di equilibrio $\bar{\boldsymbol{x}}$ sopra calcolato sono pari a

$$\boldsymbol{A} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{u}}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{B} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{u}}\right|_{\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{u}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}, \ \boldsymbol{d} = \begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}.$$

Per valutare la stabilità del sistema linearizzato, si calcoli il polinomio caratteristico della matrice della dinamica:

$$\varphi(\lambda) = \det(\lambda \boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{A}) = \lambda^2(\lambda - 2).$$

Gli autovalori sono quindi pari a $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 = 2$. Il sistema linearizzato è quindi instabile poiché vi è un autovalore che in modulo è maggiore di uno. Il sistema non lineare di partenza è quindi instabile attorno allo stato di equilibrio trovato.

ELABORATO TECNICO - TRACCIA N.1 (MATRICOLE PARI)

Risolvere il quesito di seguito riportato utilizzando unicamente lo strumento software Matlab e/o Simulink. Non calcolare nulla a parte su supporti cartacei. Il file generato va consegnato entro il giorno antecedente la prova orale tramite email all'indirizzo del docente con oggetto *[TSI-FSD][Elaborato tecnico]- Cognome Nome Matricola.* In caso di problemi, il discente deve portare un drive USB il giorno della seduta orale. In caso di più files generati, compattare tutto in un file ZIP. ATTENZIONE: nel caso si utilizzi Simulink, salvare il file con compatibilità per la *versione 24.2.* A scanso di equivoci, portare il proprio PC con la versione di Simulink utilizzata.

Sia dato il sistema LTI a tempo continuo caratterizzato dalla seguente espressione

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}(t) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t) = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 0 & -1 & k \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} k \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u(t), \\
y(t) &= \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(t) + du(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + u(t).
\end{aligned}
$$

con $h \in \mathbb{R}$.

- Si scriva uno script per il quale si determinino le proprietà di stabilità asintotica, stabilità semplice ed instabilità del sistema, nonché le proprietà di osservabilità e raggiungibilità, quando il parametro k varia nell'intervallo $[-5, 5]$.
- Posto $k = -1$, si disegni il valore dell'uscita del sistema quando ad esso è sottoposto l'ingresso $u(t) = 5 - \cos(t)\delta_{-1}(-t)$, con $t \in [-10, 10]$ s.

Sia dato il sistema LTI a tempo continuo caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento

$$
G(s) = 300 \frac{s^2 + 10.3s + 3}{s^4 + 33s^3 + 90s^2}.
$$

Si disegnino i diagrammi di Bode del sistema. Si determini la banda passante a 3 dB del sistema.

ELABORATO TECNICO - TRACCIA N.2 (MATRICOLE DISPARI)

Risolvere il quesito di seguito riportato utilizzando unicamente lo strumento software Matlab e/o Simulink. Non calcolare nulla a parte su supporti cartacei. Il file generato va consegnato entro il giorno antecedente la prova orale tramite email all'indirizzo del docente con oggetto *[TSI-FSD][Elaborato tecnico]- Cognome Nome Matricola.* In caso di problemi, il discente deve portare un drive USB il giorno della seduta orale. In caso di più files generati, compattare tutto in un file ZIP. ATTENZIONE: nel caso si utilizzi Simulink, salvare il file con compatibilità per la *versione 24.2.* A scanso di equivoci, portare il proprio PC con la versione di Simulink utilizzata.

Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo rappresentato dalle seguenti matrici con $h \in \mathbb{R}$

$$
\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -h & -h-1 \end{bmatrix}, \; \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \; \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} -h & -h-1 \end{bmatrix}, \; d = 1.
$$

- Si facciano variare i valori di h nell'intervallo $\begin{bmatrix} -5 & 5 \end{bmatrix}$ e si stampi a video un messaggio relativo alla proprietà di stabilità del sistema (stabile, instabile, asintoticamente stabile).
- Posto $h = 3$, si scriva la funzione di trasferimento del sistema e si disegnino i diagrammi asintotici di Bode di tale sistema.
- Posto $h = 3$ per $t \leq 0$ e $h = 2$ per $t > 0$, si disegni la risposta forzata dell'uscita, nell'intervallo di tempo $\begin{bmatrix} -5 & 10 \end{bmatrix}$ s, quando in ingresso al sistema è posto il segnale $u(t) = 1 + \sin(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. [Suggerimento: Si consideri la risposta per $t \geq 0$ e la si salvi in un vettore. Si consideri la risposta per $t > 0$ e la si salvi in un altro vettore. Comporre il grafico con l'unione dei due vettori].