Voto	Traccia Matlab	Cognome, Nome e Matricola

CORSO: TEORIA DEI SISTEMI
DOCENTE: VINCENZO LIPPIELLO

Prova scritta del 16/06/2025

Leggere con attenzione
Il corretto svolgimento del compito prevede che lo studente risponda in maniera chiara ai quesiti proposti e, ove necessario, argomenti i diversi passaggi, espliciti le formule usate, motivi le scelte e non si limiti a riportare i soli risultati dei calcoli.
Alla consegna della prova scritta, l'allievo riceverà la traccia dell'elaborato tecnico da svolgere in ambiente Matlab/Simulink.
Non è consentito consultare appunti o altro materiale, così come è assolutamente vietata ogni forma di collaborazione, pena l'annullamento della prova e il non poter partecipare alla successiva seduta d'esame. Durante la seduta, si forniranno spiegazioni soltanto su quesiti inerenti la comprensione della traccia.
Durata della prova: 3 ore.

1. Si consideri il seguente sistema dinamico LTI a tempo continuo, con $h, k \in \mathbb{R}$,

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) = \begin{bmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & k\frac{\sqrt{2}}{2} & -k\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & k\frac{\sqrt{2}}{2} & k\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}(t),$$
$$y(t) = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t).$$

   a) Trovare tutte le condizioni di stabilità del sistema al variare dei parametri h, k. **[Punti: 3]**

   b) Si studi al raggiungibilità e l'osservabilità del sistema al variare dei parametri h, k. Laddove il sistema non fosse in forma minima, e solo per il caso $k = 0$, trovare la matrice di trasformazione che porta il sistema in forma canonica di Kalman. **[Punti: 4]**

   c) Posti $h = k = -1$, considerati $u_1(t) = 5\cos(2t)\delta_{-1}(-t)$ e $u_2(t) = 3$, si calcoli l'uscita del sistema, $y(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. **[Punti: 8]**

2. Si consideri la funzione $G(s) = \dfrac{s+3}{s+2}$. Si disegnino i diagrammi polari del sistema. **[Punti: 5]**

3. Sia dato il sistema LTI a tempo continuo caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{2}{5}\frac{s(s^2+6s+5)(s+50)}{(s^2+1)(s^2+2s+100)}.$$

   Si disegnino i diagrammi asintotici di Bode, apportando le dovute correzioni. **[Punti: 5]**

4. In città è attivo un servizio di monopattini elettrici in due aree principali: la zona A (campus universitario) e zona B (centro storico). Indichiamo con $x_1(k)$ il numero di monopattini funzionanti in zona A allanno solare k e $x_2(k)$ il numero di monopattini funzionanti in zona B allanno solare k. Ogni anno: una frazione $\alpha_1 x_1(k)$ viene spostata da A a B per ottimizzare la domanda; una frazione $\alpha_2 x_2(k)$ viene spostata da B ad A per lo stesso motivo; una frazione $\beta_1 x_1(k)$ viene ritirata per guasti o furti in zona A; una frazione $\beta_2 x_2(k)$ viene ritirata per guasti o furti in zona B. Inoltre, ogni anno vengono introdotti $u_1(k)$ monopattini in zona A e $u_2(k)$ monopattini in zona B. Ogni monopattino operativo in un anno produce un incasso fisso annuale proporzionale a $\gamma > 0$ per la compagnia. Scrivere il modello discreto i-s-u che descrive l'evoluzione del numero dei monopattini nelle due aree, con uscita, $y(k)$, l'incasso annuo. **[Punti: 2]** Con parametri $\alpha_1 = 0.15$, $\alpha_2 = 0.2$, $\beta_1 = 0.1$, $\beta_2 = 0.08$, e $\gamma = 600$, e ingressi $u_1(k) = 50\delta_{-1}(k)$ e $u_2(k) = 30\delta_{-1}(k)$, verificare l'asintotica stabilità del sistema e, se possibile, calcolare la risposta a regime. **[Punti: 3]**

Soluzione

1 Esercizio

Quesito a.
Il polinomio caratteristico della matrice della dinamica, $\boldsymbol{A}$, è pari a $\varphi(\lambda) = (\lambda - h)(\lambda^2 - k\lambda\sqrt{2} + k^2)$. Gli autovalori sono pari a $\lambda_1 = h$, $\lambda_{2,3} = \frac{\sqrt{2}}{2}k(1 \pm j)$, quindi due autovalori complessi coniugati al variare del parametro. Il sistema è asintoticamente stabile quando tutti gli autovalori hanno parte reale negativa, ossia quando $h < 0 \wedge k < 0$. Se un solo autovalore ha parte reale positiva il sistema è instabile, $h > 0 \vee k > 0$. Il sistema è stabile semplicemente se un autovalore ha parte reale nulla, e molteplicità algebrica singola, e gli altri parte reale negativa, ossia quando $h = 0 \wedge k < 0$. Restano da discriminare due casi: il caso $h = k = 0$ che porta tutti autovalori nulli (molteplicità algebrica tre) e $h < 0 \wedge k = 0$ con due autovalori nulli (molteplicità algebrica due). Nel primo caso, $h = k = 0$, la matrice della dinamica $\boldsymbol{A}$ è identicamente nulla. Questo è il caso di matrice diagonale con molteplicità geometrica tre, quindi pari a quella algebrica: il sistema è semplicemente stabile. Nel secondo caso, $h < 0 \wedge k = 0$, la matrice della dinamica $\boldsymbol{A}$ assume l'espressione $\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. La molteplicità geometrica dei due autovalori nulli è pari a $\nu = 3 - \text{rank}(\boldsymbol{A}_1 - 0\boldsymbol{I}_3) = 3 - \text{rank}(\boldsymbol{A}_1) = 3 - 1 = 2$. Quindi, il sistema è semplicemente stabile anche quando $h < 0 \wedge k = 0$.
Riepilogando:

- **Asintotica stabilità:** $h < 0 \wedge k < 0$.
- **Instabilità:** $h < 0 \vee k < 0$.
- **Semplice stabilità:** $(h = 0 \wedge k \leq 0) \vee (h \leq 0 \vee k = 0)$.

Quesito b.
La raggiungibilità del sistema si può studiare attraverso la seguente matrice

$$\boldsymbol{M}_r = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2}k & -k^2 & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{2}k & -\frac{\sqrt{2}}{2}k & k^2 & -k^2 \end{bmatrix}.$$

Il rango di $\boldsymbol{M}_r$ è al più due perchè c'è una riga tutta nulla. Quindi il sistema non è completamente raggiungibile. Il rango di $\boldsymbol{M}_r$ è pari a 2.
L'osservabilità del sistema si può studiare attraverso la seguente matrice

$$\boldsymbol{M}_o = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}^T & \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{c}^T & \boldsymbol{A}^{T^2}\boldsymbol{c}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & k^2 \\ 1 & \sqrt{2}k & k^2 \end{bmatrix}.$$

Il determinante di $\boldsymbol{M}_o$ è nullo, quindi il sistema non è completamente osservabile. Il rango di $\boldsymbol{M}_o$ è pari a 2 quando $k \neq 0$, altrimenti è pari a 1.
Considerando il caso $k = 0$, per la procedura della scomposizione canonica di Kalman, prendiamo le colonne linearmente indipendenti di $\boldsymbol{M}_r$, ossia

$$X_r :< \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} > .$$

Prendiamo anche la colonna linearmente indipendente di $\boldsymbol{M}_o$ che è

$$X_o :< \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} > .$$

Calcoliamo ora il nullo di $\boldsymbol{M}_r^T$ pari a

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow z_2 = z_3 = 0 \Rightarrow X_{n,r} :< \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} > .$$

Calcoliamo ora il nullo di $\boldsymbol{M}_o^T$ pari a

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow z_2 = z_3 \Rightarrow X_{n,o} :< \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} > .$$

Si noti come il nullo ha dimensione due perché la matice $\boldsymbol{M}_o^T$ ha rango 1 con dimensione 3.

Si prendano ora le colonne $X_1 = X_r \cap X_{n,o}$. Questo insieme è pari a $X_1 =< \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} >$.

Si prendano ore le colonne $X_2 = X_r \cap \left(X_{n,r} \cup X_o\right)$. Questo darà proprio X_o in quanto si ottiene combinando le colonne di X_r. Quindi, $X_2 =< \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} >$.

Si prendano ora le colonne $X_3 = X_{n,o} \cap \left(X_{n,r} \cup X_o\right)$. Questo darà proprio $X_{n,r}$. Quindi, $X_3 =< \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} >$.

Si prendano ora le colonne $X_4 = X_{n,r} \cap X_o$. Questo insieme è vuoto perché i vettori sono linearmente indipendenti fra loro.
Dunque, la matrice di trasformazione di Kalman sarà data da

$$\boldsymbol{T}_k^{-1} = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

Quesito c.
La risposta complessiva $y(t)$ si può suddividere come

$$y(t) = \begin{cases} y_1(t), & t \leq 0, \\ y_2(t), & t > 0, \end{cases}$$

questo a causa della modifica dell'ingresso $u_1(t)$ che assume la forma

$$u_1(t) = \begin{cases} 5\cos(2t), & t \leq 0, \\ 0, & t > 0. \end{cases}$$

Si cominci dal caso $t < 0$ e si provveda a calcolare $y_1(t)$. Le matrici della forma i-s-u, dopo aver sostituito i valore $h = k = -1$, sono pari a

$$\boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} ,$$

mentre le altre matrici sono identiche. Il sistema è asintoticamente stabile per i risultati visti precedentemente.
Poiché si presuppone che i segnali siano stati applicati ad un tempo $t = -\infty$, qualunque istante di tempo $t \geq 0$ si consideri, si può presupporre che le evoluzioni libere ed il transitorio si siano già estinti: il sistema è quindi a regime. Il legame fra l'uscita $y_1(t)$ e l'ingresso $\boldsymbol{u}(t)$ è dato dalla seguente funzione di trasferimento

$$\boldsymbol{W}_1(s) = \boldsymbol{c}(s\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{A}_2)^{-1}\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} W_{1,1}(s) & W_{1,2}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{\sqrt{2}}{s^2+\sqrt{2}s+1} & \dfrac{s+\sqrt{2}}{s^2+\sqrt{2}s+1} \end{bmatrix}.$$

Sapendo che $Y_1(s) = \boldsymbol{W}_1(s)\boldsymbol{U}(s)$, per il teorema del valore finale e della della risposta armonica si può scrivere

$$y_1(t) = 5|W_{1,1}(2j)|\cos(2t + \arg(W_{1,1}(2j))) + 3W_{1,2}(0) = 1.715\cos(2t + 0.756) + 3\sqrt{2},$$

per $t \leq 0$.
Per il prosieguo, sarà utile avere a disposizione anche l'evoluzione dello stato per $t \leq 0$. Pertanto, considerando $\boldsymbol{H}(s) = (s\boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{A}_2)^{-1}\boldsymbol{B}$ la matrice delle risposte impulsive nello stato, si ottiene

$$\boldsymbol{H}(s) = \begin{bmatrix} H_{1,1}(s) & H_{1,2}(s) \\ H_{2,1}(s) & H_{2,2}(s) \\ H_{3,1}(s) & H_{3,3}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{s+\sqrt{2}}{s^2+\sqrt{2}s+1} & -\dfrac{s+\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{s^2+\sqrt{2}s+1} \\ \dfrac{s}{s^2+\sqrt{2}s+1} & \dfrac{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{s^2+\sqrt{2}s+1} \end{bmatrix}.$$

Giacché per $t \leq 0$ anche lo stato sarà al suo andamento di regime, applicando nuovamente il teorema della risposta armonica si può concludere che

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5|H_{2,1}(2j)|\cos(2t + \arg(H_{2,1}(2j))) + 3H_{2,2}(0) \\ 5|H_{3,1}(2j)|\cos(2t + \arg(H_{3,1}(2j))) + 3H_{3,2}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2.9704\cos(2t - 1.4303) - \dfrac{3}{2}\sqrt{2} \\ 2.4254\cos(2t - 0.8148) + \dfrac{3}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Particolarizzando lo stato in $t = 0$ si ottiene

$$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} x_{0,1} \\ x_{0,2} \\ x_{0,3} \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 0 \\ -1.7054 \\ 3.7852 \end{bmatrix}$$

.
L'uscita calcolabile, per $t > 0$, è pari a

$$y_2(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\boldsymbol{c}(s\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{A}_2)^{-1}\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{c}(s\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{A}_2)^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s)\right], \tag{1.1}$$

con

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c}(s\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{A}_2)^{-1} &= \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{s+\sqrt{2}}{s^2+\sqrt{2}s+1} & \dfrac{s}{s^2+\sqrt{2}s+1} \end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{c}(s\boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{A}_2)^{-1}\boldsymbol{B} &= \boldsymbol{W}_1(s), \\ U_1(s) &= 0, \\ U_2(s) &= \frac{3}{s}, \end{aligned}$$

da cui, sostituendo nella (1.1), si ottiene

$$y_2(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[-\frac{s+\sqrt{2}}{s^2+\sqrt{2}s+1}x_{0,2} + \frac{s}{s^2+\sqrt{2}s+1}x_{0,3} + 3\frac{s+\sqrt{2}}{s(s^2+\sqrt{2}s+1)}\right],$$

per $t > 0$. Tenendo conto dei valori numerici delle condizioni iniziali, si ottiene

$$y_2(t) \simeq 2.4118 e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t - 0.7854\right) + 5.3531 e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t + 0.7854\right) + 3\sqrt{2} + 4.2426 e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t + \pi\right),$$

per $t > 0$.
La risposta complessiva del sistema $\forall t \in \mathbb{R}$ risulta dunque pari a (dopo aver usato le formule di riduzione trigonometriche)

$$y(t) \simeq \begin{cases} 1.715\cos(2t + 0.756) + 3\sqrt{2}, & t \leq 0, \\ 2.425 e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t - 1.03\right) + 3\sqrt{2}, & t > 0. \end{cases}$$

2 Esercizio

Con i valori dati, la funzione di trasferimento del sistema risulta essere pari a

$$G(s) = \frac{s+3}{s+2}.$$

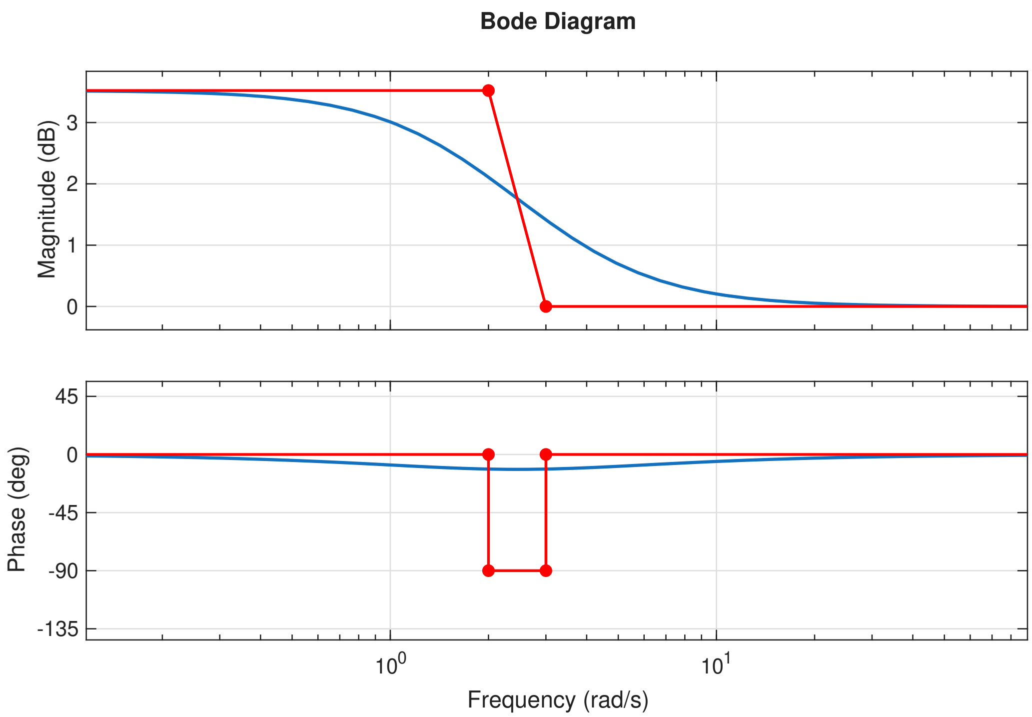

Figura 2.1: Diagramma di Bode della funzione di trasferimento $G(s)$.

La forma ingegneristica di tale funzione di trasferimento è pari a

$$G(s) = \frac{3}{2} \frac{\frac{s}{3} + 1}{\frac{s}{2} + 1}.$$

Al numeratore ed al denominatore vi sono due termini monomi di molteplicità singola. I parametri riguardanti guadagno del sistema, tipo, costanti di tempo, smorzamenti e pulsazioni naturali sono pari a $\mu = \frac{2}{3}$, $g = 0$, $\tau = \frac{1}{3}$ s, $T = 0.5$ s. Le pulsazioni di rottura, in ordine crescente, sono quindi pari a $\omega_1 = 1/|T| = 2$ rad/s, $\omega_2 = 1/|\tau| = 3$ rad/s.

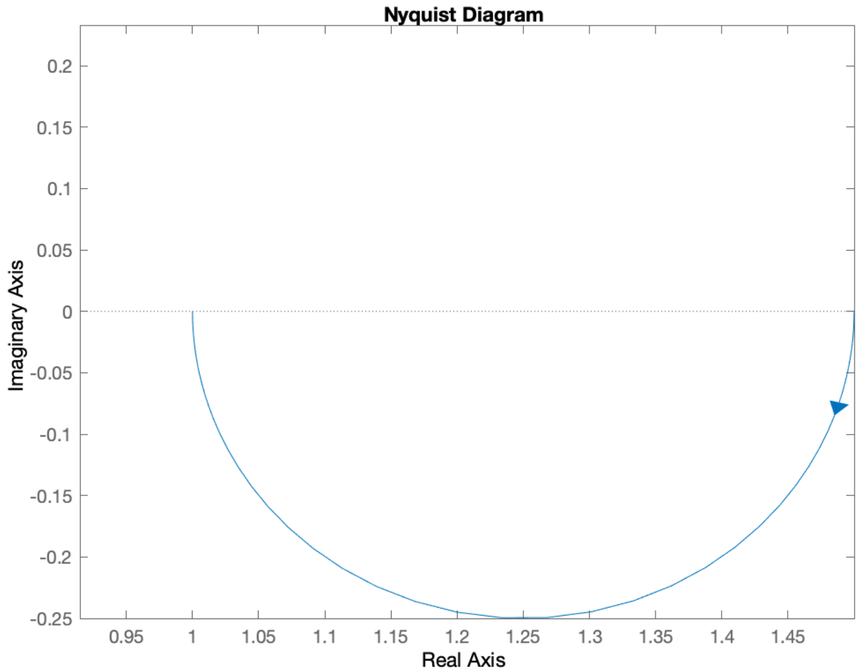

Figura 2.2: Diagramma di Nyquist della funzione di trasferimento $G(s)$.

Poiché il sistema è di tipo 0, il diagramma dei moduli partirà con un tratto costante del valore pari a $\mu_{dB} \simeq$ 3.5218 dB. La prima pulsazione di rottura è in ω_1 ad opera del termine binomio al denominatore di molteplicità singola. La variazione di pendenza relativa del diagramma asintotico è di -20 dB/decade. Il fattore correttivo in ω_1 è -3 dB. La seconda pulsazione di rottura è in ω_2 ad opera del termine binomio al numeratore di molteplicità singola. La correzione relativa è di 20 dB/decade. Il fattore correttivo in ω_2 + di 36 dB.

Il diagramma delle fasi tiene conto delle solite tecniche di tracciamento. Quindi, il grafico parte da 0 deg siccome il guadagno $\mu > 0$ e il sistema è di tipo 0. Il termine binomio al numeratore, di molteplicità singola, apporta un salto relativo del diagramma asintotico di 90 deg alla relativa pulsazione di rottura. Il termine binomio al denominatore, di molteplicità singola, apporta un salto relativo del diagramma asintotico di -90 deg alla relativa pulsazione di rottura. Per effetto di questi contributi, il diagramma delle fasi termina con un tratto piatto pari a 0 deg.

Il tracciamento del diagramma polare (di Nyquist) può seguire il seguente procedimento. Il diagramma reale è rappresentato in Fig. 2.2. Poiché il sistema è di tipo 0, il grafico polare parte nel valore di $\mu = 1.5$. Inoltre, poiché il sistema è proprio, ossia il grado relativo è nullo, il diagramma polare terminerà al valore $\lim_{\omega \longrightarrow \infty |G(j\omega)|_{dB}=0}$ dB. Questo valore va convertito non in decibel, quindi 0dB = 1. Il diagramma di Nyquist termina quindi in 1.

Nel tratto iniziale, i diagrammi dei moduli e delle fasi indicano che il diagramma polare parte da zero con fase 0 deg e poi la fase decresce (quindi quarto quadrante). La fase, poi, ricresce monoticamente a partire da $\omega \simeq 2$ rad/s fino a tornare a 0 deg, quindi ad un punto sull'asse reale positivo.

3 Esercizio

La forma ingegneristica di tale funzione di trasferimento è pari a

$$G(s) = \frac{s(s+5)(s+1)(s+50)}{(s^2+1)(s^2+2s+100)} = \frac{(1+s)\left(1+\frac{s}{5}\right)\left(1+\frac{s}{50}\right)}{s^{-1}(1+s^2)\left(1+\frac{2\cdot 0.1}{10}s+\frac{s^2}{10^2}\right)}$$

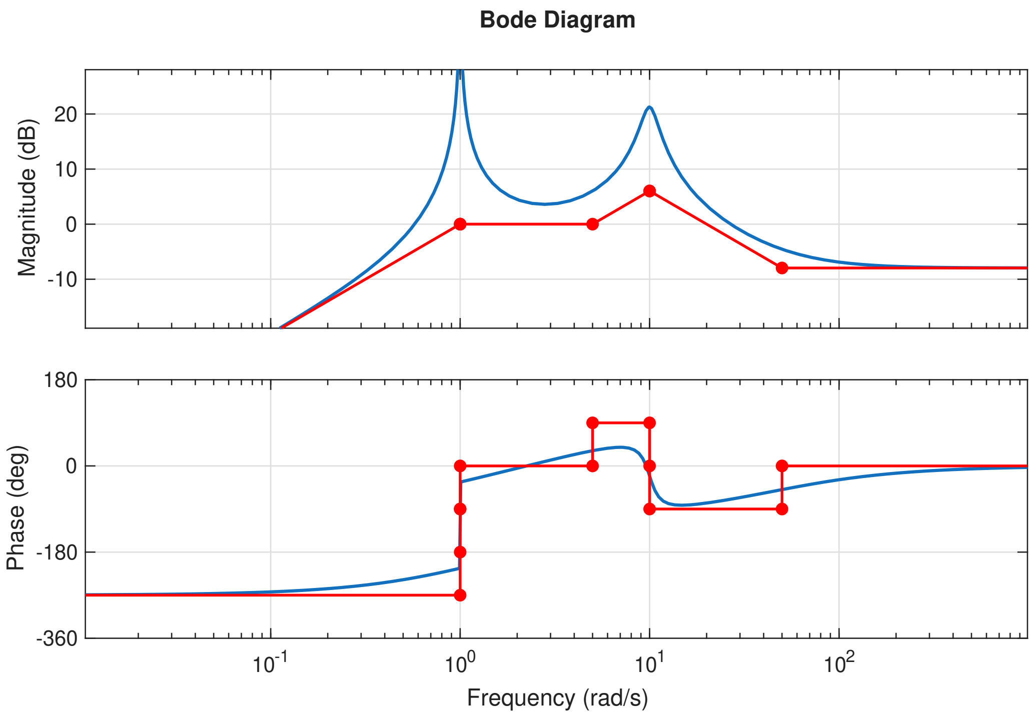

Figura 3.1: Diagramma di Bode della funzione di trasferimento $G(s)$.

Si riconoscono al numeratore tre termini binomio di molteplicità singola. Al denominatore, invece, vi è un termine monomio e due termini trinomi di molteplicità singola. I parametri riguardanti guadagno del sistema, tipo, costanti di tempo, smorzamenti e pulsazioni naturali sono pari a $\mu = 1$, $g = -1$, $\tau_1 = 1$ s, $\tau_2 = 0.2$ s, $\tau_3 = 0.02$ s, $\omega_{n1} = 1$ rad/s, $\zeta_1 = 0$, $\omega_{n2} = 10$ rad/s e $\zeta_2 = 0.1$. Le pulsazioni di rottura, in ordine crescente, sono quindi pari a $\omega_1 = 1/|\tau_1| = \omega_{n1} = 1$ rad/s, $\omega_2 = 1/|\tau_2| = 5$ rad/s, $\omega_3 = \omega_{n2} = 10$ rad/s, $\omega_4 = 1/|\tau_3| = 50$ rad/s.

Poiché il sistema è di tipo -1, il diagramma dei moduli partirà con un tratto rettilineo di pendenza 20 dB/decade che interseca l'asse $\omega = 1$ rad/s nel valore di $\mu_{dB} = 0$ dB. La prima pulsazione di rottura è in ω_1 ad opera sia del termine binomio al numeratore, di molteplicità singola, che del termine trinomio al denominatore, di molteplicità singola. La variazione di pendenza relativa del diagramma asintotico è di $20 - 40 = -20$ dB/decade con una correzione di $+3$ dB dovuto al termine binomio al numeratore e di $+\infty$ dB (asintoto verticale) per il termine trinomio al denominatore con $\zeta_1 = 0$. La seconda pulsazione di rottura è in ω_2 ad opera del termine binomio al numeratore di molteplicità singola. La variazione di pendenza relativa del diagramma asintotico è di 20 dB/decade, con correzione 3 dB alla pulsazione di rottura. La terza pulsazione di rottura è in ω_3 ad opera del termine trinomio al denominatore di molteplicità singola. La correzione relativa è di -40 dB/decade. Poiché lo smorzamento è $\zeta_2 = 0.1$, in circa ω_1 vi sarà una correzione di $P_R = \left|\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}\right|_{dB} \simeq 14$ dB. La quarta pulsazione di rottura è in ω_4 ad opera del termine binomio al numeratore di molteplicità singola. La correzione relativa è di 20 dB/decade. Il fattore correttivo in ω_4 è di 3 dB.

Il diagramma delle fasi tiene conto delle solite tecniche di tracciamento. Quindi, il grafico parte da -270 deg (o alternativamente da 90 deg) siccome il guadagno $\mu > 0$ e il sistema è di tipo -1. I termini binomio al numeratore, di molteplicità singola, apportano tutti un salto relativo del diagramma asintotico di 90 deg alla relativa pulsazione di rottura. Il primo termine trinomio al denominatore, con $\xi_1 = 0$, di molteplicità singola, apporta un salto relativo del diagramma asintotico di ± 180 deg alla relativa pulsazione di rottura. Scegliamo arbitrariamente tra le due possibilità di apportare un tratto verticale positivo in ω_1 di 180 deg. Il secondo termine trinomio al denominatore, di molteplicità singola, apporta un salto relativo del diagramma asintotico di -180 deg alla relativa pulsazione di rottura. Poiché $\xi_2 = 0.1$ si ha quasi un tratto verticale che va accennato, come da grafico.

Per effetto di questi contributi, il diagramma delle fasi termina con un tratto piatto pari a 0 deg.