Voto

Traccia Matlab

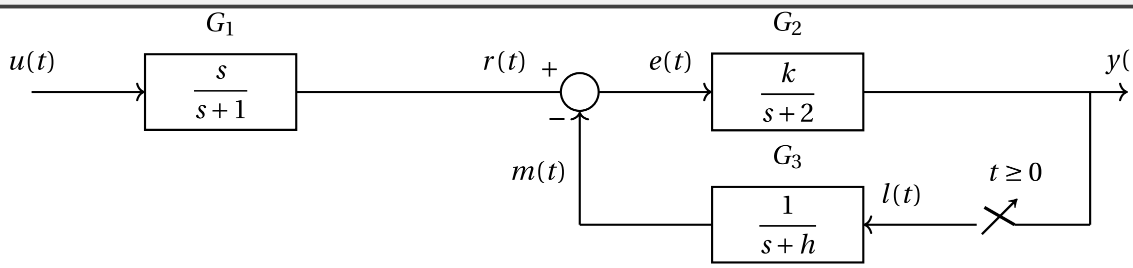
Cognome, Nome e Matricola

CORSO: TEORIA DEI SISTEMI

DOCENTE: VINCENZO LIPPIELLO

# Prova scritta del 14/07/2025

**Leggere con attenzione**
Il corretto svolgimento del compito prevede che lo studente risponda in maniera chiara ai quesiti proposti e, ove necessario, argomenti i diversi passaggi, espliciti le formule usate, motivi le scelte e non si limiti a riportare i soli risultati dei calcoli.
Alla consegna della prova scritta, l'allievo riceverà la traccia dell'elaborato tecnico da svolgere in ambiente Matlab/Simulink.
Non è consentito consultare appunti o altro materiale, così come è assolutamente vietata ogni forma di collaborazione, pena l'annullamento della prova e il non poter partecipare alla successiva seduta d'esame. Durante la seduta, si forniranno spiegazioni soltanto su quesiti inerenti la comprensione della traccia.
Durata della prova: 3 ore.




1. Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo rappresentato nello schema a blocchi in figura dove $u(t) = -10\sin(10t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$ e $h, k \in \mathbb{R}$.
   a) Si ricavi il modello i-s-u (matriciale) sia prima che dopo l'apertura dell' interruttore. **[Punti: 2]**
   b) Si determinino i valori di $h$ e $k$ affinché il sistema sia asintoticamente stabile $\forall t \in \mathbb{R}$. **[Punti: 2]** Esiste un caso per cui un singolo sottosistema $G_i$ è instabile ma il sistema complessivo interconnesso è asintoticamente stabile? **[Punti: 1]**
   c) Si trovino i valori dei parametri $h$ e $k$ affinché il sistema sia completamente osservabile e raggiungibile $\forall t \in \mathbb{R}$. **[Punti: 3]**
   d) Posto $h = 3$ e $k = -2$, si determini la risposta complessiva dell'uscita $y(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. **[Punti: 7]**

2. Sia dato il sistema LTI a tempo continuo caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{s^2(s^2+100)}{(s^2+0.05s+0.25)(s^2+2s+1)}$. Si disegnino i diagrammi asintotici di Bode, apportando le dovute correzioni. **[Punti: 5]**

3. Si consideri un sistema dinamico LTI a tempo continuo caratterizzato dalla seguente risposta impulsiva dell'uscita $g_y(t) = \delta(t) + 4e^{-t}\delta_{-1}(t) - 9e^{-2t}\delta_{-1}(t)$. Il sistema è sottoposto al seguente ingresso $u(t) = (5 + 2e^{-3t} + 4\cos(2t + \pi/3))\delta_{-1}(t)$. Se possibile, calcolare la risposta a regime dello stato **[Punti: 3]** e dell'uscita del sistema. **[Punti: 2]**

4. Il lido balneare "Sole Splendente" desidera ottimizzare la gestione giornaliera dei suoi ombrelloni e la stima dell'incasso. Si definiscono le seguenti variabili di stato per ogni giorno $k \in \mathbb{N}_0$: $x_1(k)$, il numero di ombrelloni occupati nella prima fila (Premium); $x_2(k)$, il numero di ombrelloni occupati nelle file successive (Standard). Ogni giorno, una percentuale del 10% degli ombrelloni Premium viene liberata (per disdetta o fine soggiorno); per gli ombrelloni Standard, una percentuale del 15% di quelli occupati termina la sua locazione ogni giorno; il lido riceve un flusso totale di nuove prenotazioni giornaliere, indicato come $u(k)$. Di questo flusso, una frazione del 30% viene destinata agli ombrelloni Premium, mentre la parte restante viene assegnata agli Standard. L'uscita del sistema, $y(k)$, rappresenta l'incasso totale per il giorno $k$. Questo viene calcolato considerando un prezzo di 10 per ogni ombrellone Premium e di 5 per gli Standard. L'ingresso al lido, $u(k)$, è descritto da $u(k) = \left(5 + 4\cos\left(2k + \frac{\pi}{3}\right)\right)\delta_{-1}(k)$. Scrivere il modello discreto i-s-u che descrive l'evoluzione dell'occupazione del lido balneare. **[Punti: 2]** Verificare l'asintotica stabilità del sistema e, se possibile, calcolare il massimo incasso a regime in un mese. **[Punti: 3]** [Suggerimento: Per la risposta armonica a tempo discreto usare $G(e^{j\omega_0})$ come funzione di risposta in frequenza.]

# Soluzione

## 1 Esercizio

**Quesito a.**
Si proceda per prima cosa a calcolare la rappresentazione i-s-u dei tre sottosistemi applicando, ad esempio, la forma canonica di raggiungibilità

$$G_1 : \begin{cases} \dot{x}_1(t) & = -x_1(t) + u(t), \\ r(t) & = -x_1(t) + u(t). \end{cases}$$

$$G_2 : \begin{cases} \dot{x}_2(t) & = -2x_2(t) + e(t), \\ y(t) & = kx_2(t). \end{cases}$$

$$G_3 : \begin{cases} \dot{x}_3(t) & = -hx_3(t) + l(t), \\ m(t) & = x_3(t). \end{cases}$$

Per $t < 0$, è possibile ricavare le seguenti relazioni dalla topologie dello schema a blocchi $e(t) = r(t) - m(t)$ e $l(t) = y(t)$. Pertanto, la rappresentazione i-s-u del sistema per $t < 0$ risulta pari a

$$\dot{x}_1(t) = -x_1(t) + u(t), \tag{1.1a}$$
$$\dot{x}_2(t) = -x_1(t) - 2x_2(t) - x_3(t) + u(t), \tag{1.1b}$$
$$\dot{x}_3(t) = kx_2(t) - hx_3(t), \tag{1.1c}$$
$$y(t) = kx_2(t). \tag{1.1d}$$

Le matrici corrispondenti della forma i-s-u trovata sono pari a

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & k & -h \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{c}_1 = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \end{bmatrix}, \ d_1 = 0.$$

Per $t \geq 0$, invece, le relazioni ricavabili dalla topologia dello schema a blocchi sono $e(t) = r(t) - m(t)$ e $l(t) = 0$. Pertanto, la rappresentazione i-s-u del sistema per $t \geq 0$ risulta pari a

$$\dot{x}_1(t) = -x_1(t) + u(t), \tag{1.2a}$$
$$\dot{x}_2(t) = -x_1(t) - 2x_2(t) - x_3(t) + u(t), \tag{1.2b}$$
$$\dot{x}_3(t) = -hx_3(t), \tag{1.2c}$$
$$y(t) = kx_2(t). \tag{1.2d}$$

Le matrici corrispondenti della forma i-s-u trovata sono pari a

$$\boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -h \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{b}_1, \ \boldsymbol{c}_2 = \boldsymbol{c}_1, \ d_2 = d_1.$$

**Quesito b.**
Il polinomio caratteristico della matrice $\boldsymbol{A}_1$ è pari a $\varphi_1(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda^2 + (2+h)\lambda + k + 2h)$. Un autovalore di $\boldsymbol{A}_1$ è sicuramente $\lambda_1 = -1$. Il sistema per $t < 0$ è asintoticamente stabile se e solo se i coefficienti di $\lambda^2 + (2+h)\lambda + k + 2h$ hanno tutti lo stesso segno, ossia $h > -2 \wedge k > -2h$.
Il polinomio caratteristico della matrice $\boldsymbol{A}_2$ è pari a $\varphi_2(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda+h)(\lambda+2)$. Gli autovalori di $\boldsymbol{A}_2$ sono $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -h$, $\lambda_3 = -2$. Il sistema per $t \geq 0$ è asintoticamente stabile se e solo se tutti gli autovalori sono negativi, ossia $h > 0$.
Componendo i risultati, abbiamo che il sistema è asintoticamente stabile $\forall\, t \in \mathbb{R}$ se e solo se $h > 0 \wedge k > -2h$.

I singoli sistemi $G_i$, $i = 1,2,3$, sono considerati in forma minima, quindi la stabilità asintotica si può inferire dal denominatore della rispettiva funzione di trasferimento. Per $G_1$ e $G_2$ è facile verificare che sono sempre asintoticamente stabili perché hanno autovalori $-1$ e $-2$, rispettivamente. $G_3$ ha autovalore $-h$, quindi è instabile quando $h < 0$. Per $t < 0$ si nota che l'intero sistema è asintoticamente stabile per $h > -2$. Esiste quindi un intervallo per cui $G_3$ è instabile ma l'intero sistema è asintoticamente stabile.

**Quesito c.**
La matrice di raggiungibilità per $t < 0$ è pari a

$$\boldsymbol{M}_{r,1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{A}_1^2\boldsymbol{b}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 7-k \\ 0 & k & -3k-hk \end{bmatrix}.$$

Il determinante di questa matrice è pari a $k(k+2h)$. Il sistema è completamente raggiungibile quando il determinante è diverso da zero, ossia se e solo se $k \neq 0 \wedge k \neq -2h$.
La matrice di raggiungibilità per $t \geq 0$ è pari a

$$\boldsymbol{M}_{r,2} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{A}_2^2\boldsymbol{b}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il determinante di questa matrice è pari a 0. Il sistema non è mai completamente raggiungibile per $t \geq 0$ e quindi non esistono valori che rendono il sistema completamente raggiungibile $\forall t \in \mathbb{R}$.
La matrice di osservabilità per $t < 0$ è pari a

$$\boldsymbol{M}_{o,1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_1^T & \boldsymbol{A}_1^T\boldsymbol{c}_1^T & \boldsymbol{A}_1^{2^T}\boldsymbol{c}_1^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -k & 3k \\ k & -2k & -k(k-4) \\ 0 & -k & k(h+2) \end{bmatrix}.$$

Il determinante di questa matrice è pari a $k^3(h-1)$. Il sistema è completamente osservabile quando il determinante è diverso da zero, ossia se e solo se $k \neq 0 \wedge h \neq 1$.
La matrice di osservabilità per $t \geq 0$ è pari a

$$\boldsymbol{M}_{o,2} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_1^T & \boldsymbol{A}_2^T\boldsymbol{c}_1^T & \boldsymbol{A}_2^{2^T}\boldsymbol{c}_1^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -k & 3k \\ k & -2k & 4k \\ 0 & -k & k(h+2) \end{bmatrix}.$$

Il determinante di questa matrice è pari a $k^3(h-1)$, la stessa condizione per $t < 0$. Quindi, il sistema è completamente osservabile se e solo se $k \neq 0 \wedge h \neq 1$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

**Quesito d.**
La risposta complessiva $y(t)$ si può suddividere come

$$y(t) = \begin{cases} y_1(t), & t < 0, \\ y_2(t), & t \geq 0. \end{cases}$$

Si cominci dal caso $t < 0$ e si provveda a calcolare $y_1(t)$. Il sistema modellato dalla forma i-s-u in (1.1), dopo aver sostituito i valori $h = 3$ e $k = -2$, è pari a

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \ d = 0.$$

Il sistema è asintoticamente stabile per quanto visto al quesito *a)*. Gli autovalori sono pari a $\lambda_{1,2} = -1$, $\lambda_3 = -4$.

Poiché si presuppone che i segnali siano stati applicati ad un tempo $t = -\infty$, qualunque istante di tempo $t < 0$ si consideri, si può presupporre che le evoluzioni libere ed il transitorio si siano già estinti: il sistema è quindi a regime. Il legame fra l'uscita $y_1(t)$ e l'ingresso $u(t)$ è dato dalla seguente funzione di trasferimento

$$\boldsymbol{W}_1(s) = \boldsymbol{c}(s\boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{A}_1)^{-1}\boldsymbol{b} = -\frac{2s(s+3)}{(s+1)^2(s+4)}.$$

Sapendo che $Y_1(s) = W_1(s)U(s)$, per il teorema della risposta armonica si può scrivere

$$y_1(t) = -10|W_1(10j)|\sin(10t + \arg(W_1(10j))) \simeq -1.92\sin(10t + 1.8592).$$

Per il prosieguo, sarà utile avere a disposizione anche l'evoluzione dello stato per $t < 0$ Pertanto, con considerazioni similari fatti per l'uscita, l'evoluzione per $t < 0$ potrà essere calcolata a partire dall'espressione

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[(s\boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{A}_1)^{-1}\boldsymbol{b}U(s)\right].$$

Chiamando $\boldsymbol{H}_1(s) = (s\boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{A}_1)^{-1}\boldsymbol{b}$ la matrice delle risposte impulsive nello stato, si ottiene

$$\boldsymbol{H}_1(s) = \begin{bmatrix} H_{1,1}(s) \\ H_{1,2}(s) \\ H_{1,3}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} \\ \dfrac{s(s+3)}{(s+1)^2(s+4)} \\ -\dfrac{2s}{(s+1)^2(s+4)} \end{bmatrix}.$$

Giacché per $t < 0$ anche lo stato sarà al suo andamento di regime, applicando nuovamente il teorema della risposta armonica si può concludere che

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10|H_{1,1}(10j)|\sin(10t + \arg(H_{1,1}(10j))) \\ -10|H_{1,2}(10j)|\sin(10t + \arg(H_{1,2}(10j))) \\ -10|H_{1,3}(10j)|\sin(10t + \arg(H_{1,3}(10j))) \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} -0.995\sin(10t - 1.4711) \\ -0.96\sin(10t - 1.2824) \\ -0.184\sin(10t + 0.5798) \end{bmatrix}.$$

Particolarizzando lo stato in $t = 0$ (istante di apertura dell'interruttore) si ottiene $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \simeq \begin{bmatrix} 0.9901 \\ 0.9204 \\ -0.1008 \end{bmatrix}$.

Per $t \geq 0$, invece, fissati $h$ e $k$ come richiesto, le matrici del sistema in forma i-s-u in (1.2) sono pari a

$$\boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix},$$

col resto uguale a prima. Il sistema è asintoticamente stabile per quanto visto al quesito a), con autovalori $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -3$. L'uscita $y_2(t)$, a partire dal tempo $t = 0$, è calcolabile come

$$y_2(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\boldsymbol{c}(s\boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{A}_2)^{-1}\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{c}(s\boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{A}_2)^{-1}\boldsymbol{b}U(s)\right], \tag{1.3}$$

con

$$\boldsymbol{c}(s\boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{A}_2)^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{2}{(s+1)(s+2)} & -\dfrac{2}{s+2} & \dfrac{2}{(s+2)(s+3)} \end{bmatrix},$$

$$W_2(s) = \boldsymbol{c}(s\boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{A}_2)^{-1}\boldsymbol{b} = -\frac{2s}{(s+1)(s+2)},$$

$$U(s) = -\frac{100}{s^2+100}.$$

Sostituendo le precedenti nella (1.3), si ottiene

$$\begin{aligned} y_2(t) &\simeq 1.9802e^{-t} - 1.9802e^{-2t} - 1.8408e^{-2t} + 0.2016e^{-3t} - 0.2016e^{-2t} + 3.8462e^{-2t} - 1.9802e^{-t} - 1.951\sin(10t + 1.8679) \\ &\simeq -0.1764e^{-2t} + 0.2016e^{-3t} - 1.951\sin(10t + 1.8679). \end{aligned}$$

La risposta complessiva del sistema $\forall\, t \in \mathbb{R}$ risulta dunque pari a

$$y(t) \simeq \begin{cases} -1.92\sin(10t + 1.8592), & t < 0, \\ -0.1764e^{-2t} + 0.2016e^{-3t} - 1.951\sin(10t + 1.8679), & t \geq 0. \end{cases}$$

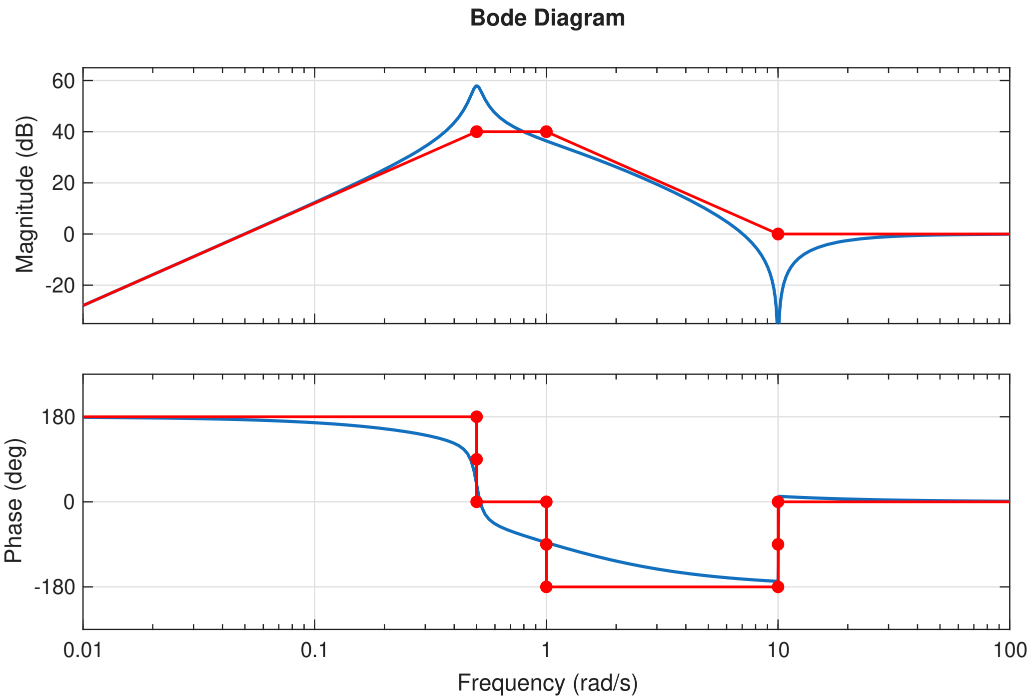



Figura 2.1: Diagramma di Bode della funzione di trasferimento $G(s)$.

## 2 Esercizio

La forma ingegneristica di tale funzione di trasferimento è pari a

$$G(s) = \frac{s^2(s^2+100)}{(s^2+0.05s+0.25)(s^2+2s+1)} = 400\frac{s^2\left(1+\dfrac{s^2}{10^2}\right)}{\left(1+\dfrac{2\cdot 0.05}{0.5}s+\dfrac{s^2}{0.5^2}\right)(1+s)^2}$$

Si riconoscono al numeratore un termine monomio di molteplicità doppia e uno trinomio di molteplicità singola. Al denominatore, un termine binomio di molteplicità doppia e uno trinomio di molteplicità singola. I parametri riguardanti guadagno del sistema, tipo, costanti di tempo, smorzamenti e pulsazioni naturali sono pari a $\mu = 400$, $g = -2$, $\alpha_n = 10$ rad/s, $\xi = 0$, $T_1 = 1$ s, $\omega_n = 0.5$ rad/s, $\zeta = 0.05$. Le pulsazioni di rottura, in ordine crescente, sono quindi pari a $\omega_1 = \omega_n = 0.5$ rad/s, $\omega_2 = 1/|T_1| = 1$ rad/s, $\omega_3 = \alpha_n = 10$ rad/s.
Poiché il sistema è di tipo $-2$, il diagramma dei moduli partirà con un tratto rettilineo di pendenza 40 dB/decade che interseca l'asse $\omega = 1$ rad/s nel valore di $\mu_{dB} \simeq 52$ dB. La prima pulsazione di rottura è in $\omega_1$ ad opera del termine trinomio al denominatore, di molteplicità singola. La variazione di pendenza relativa del diagramma asintotico è di $-40$ dB/decade. La correzione è di $P_R = \left|\dfrac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}\right|_{dB} \simeq 20$ dB. La seconda pulsazione di rottura è in $\omega_2$ ad opera del termine binomio al denominatore di molteplicità doppia. La variazione di pendenza relativa del diagramma asintotico è di $-2\cdot 20$ dB/decade, con correzione $-2\cdot 3$ dB alla pulsazione di rottura. La terza pulsazione di rottura è in $\omega_3$ ad opera del termine trinomio al numeratore di molteplicità singola. Poiché $\xi = 0$, vi sarà un asintoto verticale con diagramme reale che tende a $-\infty$ dB.
Il diagramma delle fasi tiene conto delle solite tecniche di tracciamento. Quindi, il grafico parte da 180 deg siccome il guadagno $\mu > 0$ e il sistema è di tipo $-2$. Il termine trinomio al denominatore, di molteplicità singola, apporta un salto relativo del diagramma asintotico di $-180$ deg alla relativa pulsazione di rottura. Poiché $\zeta = 0.05$, non è facile fare una correzione accurata. Poiché lo smorzamento è molto piccolo, allora si può approcciare un tratto quasi verticale intorno alla pulsazione di rottura. Il termine binomio al denominatore, di molteplicità doppia, apporta un salto relativo del diagramma asintotico di $-2\cdot 90$ deg alla relativa pulsazione di rottura. Il termine trinomio al numeratore, di molteplicità singola, apporta un salto relativo del diagramma asintotico di $\pm 180$ deg alla relativa pulsazione di rottura (scegliamo arbitrariamente il segno + nel nostro diagramma per renderlo più compatto). Poiché $\xi = 0$ anche il diagramma corretto avrà un trat-

to verticale in $\omega_3$. Per effetto di questi contributi, il diagramma delle fasi termina con un tratto piatto pari a 0 deg.

## 3 Esercizio

Dalla risposta impulsiva dell'uscita è possibile calcolare la funzione di trasferimento del sistema $G(s) = \mathscr{L}[g_y(t)] = 1 + \frac{4}{s+1} - \frac{9}{s+2} = \frac{s^2-2s+1}{s^2+3s+2} = \frac{(s-1)^2}{(s+1)(s+2)}$.
Per il prosieguo, è bene calcolare anche il sistema i-s-u con la forma canonica di raggiungibilità. Le matrici risultanti sono

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} -1 & -5 \end{bmatrix}, \ d = 1.$$

Dalla forma i-s-u è possibile calcolare la matrice delle risposte impulsive come

$$H(s) = (s\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} H_1(s) \\ H_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \dfrac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}.$$

La risposta a regime dello stato è pari a

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_r(t) = \begin{bmatrix} x_{r,1}(t) \\ x_{r,2}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 5H_1(0) + 2H_1(-3)e^{-3t} + 4|H_1(2j)|\cos(2t + \arg(H_1(2j)) + \pi/3) \\ 5H_2(0) + 2H_2(-3)e^{-3t} + 4|H_2(2j)|\cos(2t + \arg(H_2(2j)) + \pi/3) \end{bmatrix} \\ &\simeq \begin{bmatrix} 2.5 + e^{-3t} + 0.6325\cos(2t - 0.8453) \\ -3e^{-3t} + 1.2649\cos(2t + 0.7254) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

La risposta a regime dell'uscita è

$$\begin{aligned} y_r(t) &= 5G(0) + 2G(-3)e^{-3t} + 4|G(2j)|\cos(2t + \arg(G(2j)) + \pi/3) \\ &\simeq 2.5 + 16e^{-3t} + 3.1623\cos(2t + 3.2235). \end{aligned}$$

## 4 Esercizio

Un modello i-s-u del lido balneare è pari a

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_1(k) - 0.1x_1(k) + 0.3u(k), \\ x_2(k+1) &= x_2(k) - 0.15x_2(k) + 0.7u(k), \\ y(k) &= 10x_1(K) + 5x_2(k). \end{aligned}$$

Le matrici della forma i-s-u possono scriversi come

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.85 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.7 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 10 & 5 \end{bmatrix}, \ d = 0.$$

Gli autovalori della matrice $\boldsymbol{A}$ sono pari a $\lambda_1 = 0.9$ e $\lambda_2 = 0.85$. Essendo entrambi in modulo minore dell'unità, il sistema è asintoticamente stabile, ammettendo quindi risposta a regime.
Si calcoli la funzione del trasferimento del sistema a tempo discreto così costruito che risulta pari a

$$G(z) = \boldsymbol{c}(z\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b} = \frac{6.5z - 5.7}{z^2 - 1.75z + 0.765}.$$

L'incasso a regime, per il giorno $k$ è pari a

$$y_r(k) = 5G(1) + 4|G(e^{2j})|\cos(2k + \arg(e^{2j}) + \pi/3) \simeq 266.6667 + 16.4818\cos(2k - 1.4799).$$

Il massimo incasso a regime nel giorno $k$ sarà dato da $266.6667 + 16.4818 \simeq 283.15$ , perché il coseno è limitato fra $[-1, 1]$. In un mese, supponendo 30 giorni, l'incasso massimo sarà di 8494.5 . Il minimo a regime, invece, sarebbe $266.6667 - 16.4818 \simeq 250.18$ al giorno, ossia 7505.4 al mese.

**ELABORATO TECNICO - TRACCIA N.1 (MATRICOLE PARI)**

Risolvere il quesito di seguito riportato utilizzando unicamente lo strumento software Matlab e/o Simulink. Non calcolare nulla a parte su supporti cartacei. Il file generato va consegnato entro il giorno antecedente la prova orale tramite email all'indirizzo del docente con oggetto *[TSI-FSD][Elaborato tecnico]- Cognome Nome Matricola.* In caso di problemi, il discente deve portare un drive USB il giorno della seduta orale. In caso di più files generati, compattare tutto in un file ZIP. ATTENZIONE: nel caso si utilizzi Simulink, salvare il file con compatibilità per la *versione 24.2.* A scanso di equivoci, portare il proprio PC con la versione di Simulink utilizzata.

Si consideri un sistema LTI a tempo continuo avente la seguente forma i-s-u con $k, h \in \mathbb{R}$,

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & k & -h \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t),$$
$$y(t) = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t).$$

- Si scriva uno script per il quale si determinino le proprietà di stabilità asintotica, stabilità semplice ed instabilità del sistema quando i parametri $k, h$ variano nell'intervallo $[-5, 5]$.
- Posto $h = 3$ e $k = -2$, si disegni il valore dell'uscita del sistema quando ad esso è sottoposto all'ingresso $u(t) = -10\sin(10t)\delta_{-1}(t)$, con $t \geq 0$ s.

Sia dato il sistema LTI a tempo continuo caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s^2(s^2+100)}{(s^2+0.05s+0.25)(s^2+2s+1)}.$$

Si disegnino i diagrammi di Bode e di Nyquist del sistema. Si determini la banda passante a 3 dB del sistema e prepararsi a commentare a voce la motivazione della risposta.

**ELABORATO TECNICO - TRACCIA N.2 (MATRICOLE DISPARI)**

Risolvere il quesito di seguito riportato utilizzando unicamente lo strumento software Matlab e/o Simulink. Non calcolare nulla a parte su supporti cartacei. Il file generato va consegnato entro il giorno antecedente la prova orale tramite email all'indirizzo del docente con oggetto *[TSI-FSD][Elaborato tecnico]- Cognome Nome Matricola.* In caso di problemi, il discente deve portare un drive USB il giorno della seduta orale. In caso di più files generati, compattare tutto in un file ZIP. ATTENZIONE: nel caso si utilizzi Simulink, salvare il file con compatibilità per la *versione 24.2.* A scanso di equivoci, portare il proprio PC con la versione di Simulink utilizzata.

Si consideri un sistema LTI a tempo continuo avente la seguente forma i-s-u con $k, h \in \mathbb{R}$,

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & k & -h \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t),$$
$$y(t) = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t).$$

- Si scriva uno script per il quale si classifichino le proprietà di raggiungibilità ed osservabilità del sistema quando i parametri $k, h$ variano nell'intervallo $[-5, 5]$.
- Posto $h = 3$ e $k = -2$, si disegni il valore dell'uscita del sistema quando ad esso è sottoposto all'ingresso $u(t) = -10\cos(10t)\delta_{-1}(-t)$, con $t \in [-10, 10]$ s.

Sia dato il seguente sistema in forma i-s-u a tempo discreto

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_1(k) - 0.1x_1(k) + 0.7u(k), \\ x_2(k+1) &= x_2(k) - 0.15x_2(k) + 0.3u(k), \\ y(k) &= 10x_1(K) + 5x_2(k). \end{aligned}$$

Rappresentare la risposta a regime dello stato e dell'uscita quando l'ingresso è pari a $u(k) = (5 + 4\cos(2k + \pi/3))\delta_{-1}(k)$, per $k \geq 0$.