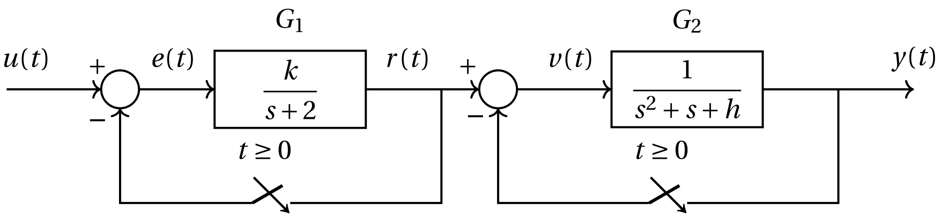
Voto | Traccia Matlab | Cognome, Nome e Matricola

CORSO: TEORIA DEI SISTEMI
DOCENTE: VINCENZO LIPPIELLO

Prova scritta del 07/10/2024

Leggere con attenzione
Il corretto svolgimento del compito prevede che lo studente risponda in maniera chiara ai quesiti proposti e, ove necessario, argomenti i diversi passaggi, espliciti le formule usate, motivi le scelte e non si limiti a riportare i soli risultati dei calcoli.
Alla consegna della prova scritta, l'allievo riceverà la traccia dell'elaborato tecnico da svolgere in ambiente Matlab/Simulink.
Non è consentito consultare appunti o altro materiale, così come è assolutamente vietata ogni forma di collaborazione, pena l'annullamento della prova e il non poter partecipare alla successiva seduta d'esame. Durante la seduta, si forniranno spiegazioni soltanto su quesiti inerenti la comprensione della traccia.
Durata della prova: 3 ore.



1. Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo rappresentato nello schema a blocchi in figura dove $h, k \in \mathbb{R}$ sono due parametri e con $u(t) = -1 - \sin(5t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
   a) Dopo aver ricavato i modelli i-s-u prima e dopo la chiusura degli interruttori, si determinano i valori di h e k affinché il sistema sia asintoticamente stabile $\forall t \in \mathbb{R}$. **[Punti: 5]**
   b) Si descriva, in non più di 10 righe, da quali contributi è composta l'uscita $y(t)$ quando $k = 0$ e $h = 1$ per $t \geq 0$. **[Punti: 2]**
   c) Per $t \geq 0$, posti $k = -2$ e $h = -3$, si determinino i valori delle condizioni iniziali, non tutte nulle, affinché l'uscita libera non presenti modi instabili. **[Punti: 4]**
   d) Posti $h = k = 1$, si determini la risposta complessiva dell'uscita $y(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. **[Punti: 7]**

2. Sia dato il sistema LTI a tempo continuo caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento $G(s) = 4000\dfrac{(s^2 + 1.2s + 1)(s + 100)}{(s^2 + 100)(s^2 + 40s + 400)}$. Si disegnino i diagrammi asintotici di Bode con le dovute correzioni. **[Punti: 5]** Si determini se il sistema è un filtro, dandone opportuna giustificazione. **[Punti: 2]**

3. Si voglia scrivere un modello di un ecosistema. Sia $x_1(k)$ il numero di prede di tipo A, $x_2(k)$ il numero di prede di tipo B, $x_3(k)$ il numero predatori al mese k. Tutti gli stati avranno sempre valori positivi. Dopo attenta osservazione dell'ecosistema si può affermare che al mese successivo a quello di osservazione: (i) il numero prede A è pari a quello del mese attuale, cresce di $u(k)$ per via dell'introduzione di nuovi elementi, diminuisce di un fattore $\alpha_1 > 0$ rispetto al quadrato del numero attuale di prede di tipo A, diminuisce di un fattore $\beta_1 > 0$ rispetto al prodotto fra il numero di prede di tipo A e di predatori, aumenta di un fattore γ_1 rispetto al numero di prede attuali di tipo A per la natalità; (ii) ii numero prede B è pari a quello del mese attuale, diminuisce di un fattore $\alpha_2 > 0$ rispetto al quadrato del numero attuale di prede di tipo B, diminuisce di un fattore $\beta_2 > 0$ rispetto al prodotto fra il numero di prede di tipo B e di predatori, aumenta di un fattore γ_2 rispetto al numero di prede attuali di tipo B per la natalità; (iii) il numero di predatori è pari a quello del mese attuale, diminuisce di un fattore $\beta_3 > 0$ rispetto al numero di predatori stessi per mortalità, aumenta di un fattore γ_3 rispetto al numero di prede attuali di tipo A moltiplicato per il numero di predatori e di un fattore γ_4 rispetto al numero di prede attuali di tipo B moltiplicato per il numero di predatori per la natalità. L'uscita del sistema è data dalla popolazione totale dell'ecosistema. Si calcolino gli stati e l'uscite di equilibrio del sistema per $u(k) = 0$, ipotizzando solo il caso $\bar{x}_2 = 0$ **[Punti: 2]**. Posti $\alpha_1 = \gamma_1 = \gamma_4 = 0$, tramite linearizzazione, per ognuno dei punti di equilibrio trovati, si trovino il valore degli altri parametri affinché il sistema risulti asintoticamente stabile **[Punti: 3]**.

Soluzione

1 Esercizio

Quesito a.
Si proceda per prima cosa a calcolare la rappresentazione i-s-u dei due sottosistemi applicando, ad esempio, la forma canonica di raggiungibilità

$$G_1 : \begin{cases} \dot{x}_1(t) &= -2x_1(t) + e(t), \\ r(t) &= kx_1(t). \end{cases}$$

$$G_2 : \begin{cases} \dot{x}_2(t) &= x_3(t), \\ \dot{x}_3(t) &= -hx_2(t) - x_3(t) + v(t) \\ y(t) &= x_2(t). \end{cases}$$

Per $t < 0$, è possibile ricavare le seguenti relazioni dalla topologie dello schema a blocchi $e(t) = u(t)$, $v(t) = r(t)$. Pertanto, la rappresentazione i-s-u del sistema per $t < 1$ risulta pari a

$$\dot{x}_1(t) = -2x_1(t) + u(t), \tag{1.1a}$$
$$\dot{x}_2(t) = x_3(t), \tag{1.1b}$$
$$\dot{x}_3(t) = kx_1(t) - hx_2(t) - x_3(t), \tag{1.1c}$$
$$y(t) = x_2(t). \tag{1.1d}$$

Le matrici corrispondenti della forma i-s-u trovata sono pari a

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ k & -h & -1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{c}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \ d_1 = 0.$$

Gli autovalori di $\boldsymbol{A}_1$ sono $\lambda_{1,1} = -2$, $\lambda_{1,2} = -\frac{1-\sqrt{1-4h}}{2}$ e $\lambda_{1,3} = -\frac{1+\sqrt{1-4h}}{2}$. Il sistema per $t < 0$ è asintoticamente stabile quando i due autovalori sono entrambi negativi, ossia quando $h > 0$ e $\forall k \in \mathbb{R}$.
Per $t \geq 0$, è possibile ricavare le seguenti relazioni dalla topologie dello schema a blocchi $e(t) = u(t) - r(t)$, $v(t) = r(t) - y(t)$. Pertanto, la rappresentazione i-s-u del sistema per $t \geq 1$ risulta pari a

$$\dot{x}_1(t) = -(k+2)x_1(t) + u(t), \tag{1.2a}$$
$$\dot{x}_2(t) = x_3(t), \tag{1.2b}$$
$$\dot{x}_3(t) = kx_1(t) - (h+1)x_2(t) - x_3(t), \tag{1.2c}$$
$$y(t) = x_2(t). \tag{1.2d}$$

Le matrici corrispondenti della forma i-s-u trovata sono pari a

$$\boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} -(k+2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ k & -h-1 & -1 \end{bmatrix},$$

mentre il resto è invariato rispetto al caso $t < 0$. Gli autovalori di $\boldsymbol{A}_2$ sono $\lambda_{2,1} = -k-2$, $\lambda_{2,2} = -\frac{1-\sqrt{-4h-3}}{2}$ e $\lambda_{2,3} = -\frac{1+\sqrt{-4h-3}}{2}$. Il sistema per $t \geq 0$ è asintoticamente stabile quando i due autovalori sono entrambi negativi, ossia quando $h > -1 \wedge k > -2$.
Combinando i risultati, il sistema è asintoticamente stabile $\forall t \in \mathbb{R}$ quando $k > -2 \wedge h > 0$.

Quesito b.

Per $k = 0$ e $h = 1$ e $t \geq 0$ il sistema è asintoticamente stabile per quanto visto sopra e gli interruttori sono chiusi, attivando le due retroazioni attorno a G_1 e G_2. Tuttavia per $k = 0$ il sistema G_1 ha una funzione di trasferimento nulla, quindi non c'è risposta forzata in $r(t)$. In quest'ultimo segnale vi è solo l'evoluzione libera dello stato di G_1 dalla sua condizione iniziale: tale evoluzione tenderà a zero per via dell'asintotica stabilità di G_1. L'uscita di G_2, $y(t)$, sarà data dalla sua evoluzione libera, che tende a zero perché il sistema è asintoticamente stabile, e il contributo forzato per effetto di $v(t)$. L'ingresso $v(t)$ è una combinazione dell'evoluzione libera di G_1 e dell'opposto dell'uscita di G_2. Poiché sia $r(t)$ che l'evoluzione libera di G_2 vanno a zero, anche $v(t)$ è un segnale che andrà a zero: quindi, l'uscita $y(t)$ tenderà anch'ella a zero.

Quesito c.
Il sistema per $t \geq 0$ con $k = -2$ e $h = -3$ assume la seguente forma

$$\dot{x}_1(t) = u(t), \tag{1.3a}$$
$$\dot{x}_2(t) = x_3(t), \tag{1.3b}$$
$$\dot{x}_3(t) = -2x_1(t) + 2x_2(t) - x_3(t), \tag{1.3c}$$
$$y(t) = x_3(t). \tag{1.3d}$$

con

$$\boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix},$$

L'uscita libera del sistema è calcolabile come

$$y_L(t) = \boldsymbol{c}_1 e^{\boldsymbol{A}_2 t} \boldsymbol{x}_0,$$

con $\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} x_{0,1} & x_{0,2} & x_{0,3} \end{bmatrix}^T$ e $t \geq 0$.
La matrice esponenziale può essere calcolata come

$$e^{\boldsymbol{A}_2 t} = \mathscr{L}^{-1}[(s\boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{A}_2)^{-1}] = \mathscr{L}^{-1}\left[\begin{bmatrix} * & * & * \\ -\dfrac{2}{s(s^2+s-2)} & \dfrac{s+1}{s^2+s-2} & \dfrac{1}{s^2+s-2} \\ * & * & * \end{bmatrix}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} * & * & * \\ 1 - \dfrac{2}{3}e^t - \dfrac{1}{3}e^{-2t} & \dfrac{1}{3}e^{-2t} + \dfrac{2}{3}e^t & \dfrac{1}{3}e^t - \dfrac{1}{3}e^{-2t} \\ * & * & * \end{bmatrix}.$$

Pertanto, l'evoluzione libera risulta essere pari a

$$y_L(t) = \boldsymbol{c}_1 e^{\boldsymbol{A}_2 t} \boldsymbol{x}_0 = \left(1 - \frac{2}{3}e^t - \frac{1}{3}e^{-2t}\right) x_{0,1} + \left(\frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{2}{3}e^t\right) x_{0,2} + \left(\frac{1}{3}e^t - \frac{1}{3}e^{-2t}\right) x_{0,3}$$

$$= x_{0,1} + \left(-\frac{2}{3}x_{0,1} + \frac{2}{3}x_{0,2} + \frac{1}{3}x_{0,3}\right) e^t + \left(-\frac{1}{3}x_{0,1} + \frac{1}{3}x_{0,2} - \frac{1}{3}x_{0,3}\right) e^{-2t}.$$

Affinché i modi naturali divergenti siano nulli occorre che $-\frac{2}{3}x_{0,1} + \frac{2}{3}x_{0,2} + \frac{1}{3}x_{0,3} = 0$. Ciò avviene quando $x_{0,3} = 2(x_{0,1} - x_{0,2})$.
Il sistema quindi con condizioni iniziali $\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 2(\alpha - \beta) \end{bmatrix}^T$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, annulla il modo divergente di $y_L(t)$.

Quesito d.
La risposta complessiva $y(t)$ si può suddividere come

$$y(t) = \begin{cases} y_1(t), & t < 0, \\ y_2(t), & t \geq 0. \end{cases}$$

Si cominci dal caso $t < 0$ e si provveda a calcolare $y_1(t)$. La matrice della dinamica dalla forma i-s-u in (1.1), dopo aver sostituito i valori $h = k = 1$, è pari a

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Il sistema è asintoticamente stabile per i risultati visti precedentemente.
Poiché si presuppone che i segnali siano stati applicati ad un tempo $t = -\infty$, qualunque istante di tempo $t < 0$ si consideri, si può presupporre che le evoluzioni libere ed il transitorio si siano già estinti: il sistema è quindi a regime. Il legame fra l'uscita $y(t)$ e l'ingresso $u(t)$ è dato dalla seguente funzione di trasferimento

$$\boldsymbol{W}_1(s) = \boldsymbol{c}_1(s\boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{A}_1)^{-1}\boldsymbol{b}_1 = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 3s + 2}.$$

Sapendo che $Y_1(s) = W_1(s)U(s)$, per il teorema della risposta armonica si può scrivere

$$y_1(t) = -W_1(0) - |W_1(5j)|\sin\left(5t + \arg\left(W_1(5j)\right)\right) = -\frac{1}{2} - 0.0076\sin(5t + 2.1567),$$

per $t < 0$.
Per il prosieguo, sarà utile avere a disposizione anche l'evoluzione dello stato per $t < 0$. Pertanto, considerando $\boldsymbol{H}(s) = (s\boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{A}_1)^{-1}\,\boldsymbol{b}_1$ la matrice delle risposte impulsive nello stato, si ottiene

$$\boldsymbol{H}(s) = \begin{bmatrix} H_1(s) \\ H_2(s) \\ H_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+2} \\ \dfrac{1}{s^3 + 3s^2 + 3s + 2} \\ \dfrac{s}{s^3 + 3s^2 + 3s + 2} \end{bmatrix}.$$

Giacché per $t < 0$ anche lo stato sarà al suo andamento di regime, applicando nuovamente il teorema della risposta armonica si può concludere che

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -H_1(0) - |H_1(5j)|\sin(5t + \arg(H_1(5j))) \\ -H_2(0) - |H_2(5j)|\sin(5t + \arg(H_2(5j))) \\ -H_3(0) - |H_3(5j)|\sin(5t + \arg(H_3(5j))) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 - 0.1857\sin(5t - 1.1903) \\ -0.5 - 0.0076\sin(5t + 2.1567 \\ -0.0379\sin(5t - 2.5557) \end{bmatrix}.$$

Particolarizzando lo stato in $t = 0$ (istante di chiusura dell'interruttore) si ottiene $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} x_{0,1} \\ x_{0,2} \\ x_{0,3} \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} -0.3276 \\ -0.5063 \\ 0.021 \end{bmatrix}$.
Per $t \geq 0$, invece, fissati h e k come richiesto, la matrice della dinamica del sistema in (1.2) è

$$\boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

L'uscita calcolabile per $t \geq 0$ è pari a

$$y_2(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\boldsymbol{c}_1\,(s\boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{A}_2)^{-1}\,\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{c}_1\,(s\boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{A}_2)^{-1}\,\boldsymbol{b}_1 U(s)\right], \tag{1.4}$$

con

$$\boldsymbol{c}_1\,(s\boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{A}_2)^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s^3 + 4s^2 + 5s + 6} & \dfrac{s+1}{s^2 + s + 2} & \dfrac{1}{s^2 + s + 2} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{c}_1\,(s\boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{A}_2)^{-1}\,\boldsymbol{b}_1 = \frac{1}{s^3 + 4s^2 + 5s + 6},$$

da cui, sostituendo nella (1.4), si ottiene

$$\tilde{y}_2(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^3+4s^2+5s+6}x_{0,1} + \frac{s+1}{s^2+s+2}x_{0,2} + \frac{1}{s^2+s+2}x_{0,3} + \frac{1}{s^3+4s^2+5s+6}U(s)\right].$$

Essendo $U(s) = -\frac{1}{s} - \frac{5}{s^2+25}$, e tenendo conto dei valori numerici delle condizioni iniziali, si ottiene

$$y_2(t) \simeq -\frac{1}{6} - 0.0177e^{-3t} - 0.3561\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t + 0.4747\right) + 0.0073\sin(5t - 2.3253)$$

per $t \geq 0$.
La risposta complessiva del sistema $\forall t \in \mathbb{R}$ risulta dunque pari a

$$y(t) \simeq \begin{cases} -\frac{1}{2} - 0.0076\sin(5t + 2.1567), & t < 0, \\ -\frac{1}{6} - 0.0177e^{-3t} - 0.3561\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t + 0.4747\right) + 0.0073\sin(5t - 2.3253), & t \geq 0. \end{cases}$$

2 Esercizio

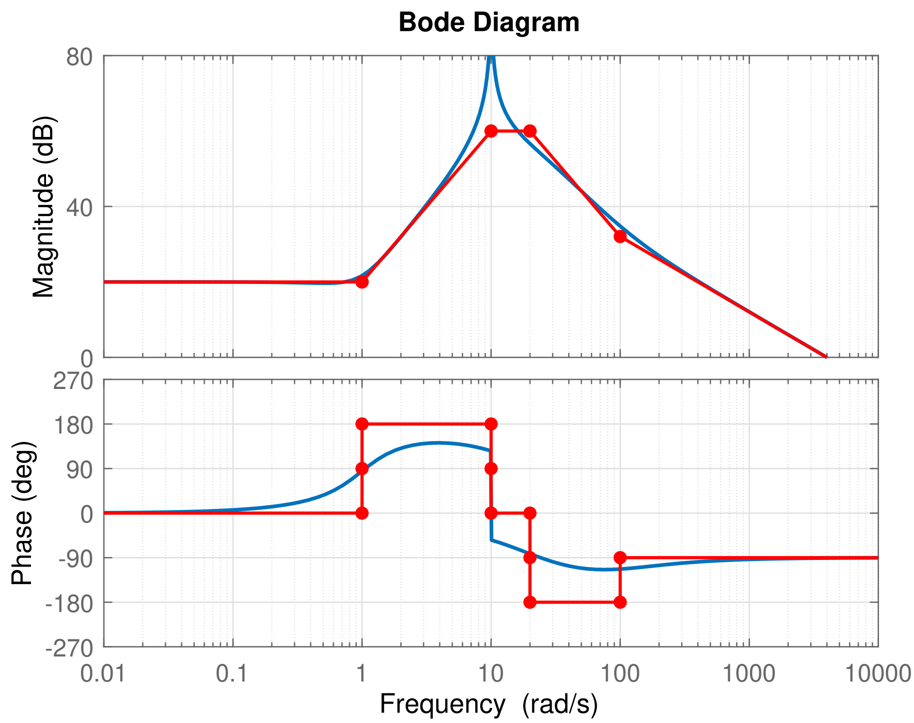


Figura 2.1: Diagramma di Bode della funzione di trasferimento $G(s)$.

La forma ingegneristica di tale funzione di trasferimento è pari a

$$G(s) = 10\frac{\left(1 + \frac{2\cdot 0.6}{1}s + \frac{s^2}{1}\right)\left(1 + \frac{1}{100}s\right)}{\left(1 + \frac{s^2}{100}\right)\left(1 + \frac{1}{20}s\right)^2}.$$

Si riconoscono al numeratore un termine trinomio ed uno binomio, entrambi di molteplicità singola. Al denominatore, invece, vi è un termine trinomio di molteplicità singola ed uno binomio di molteplicità doppia.

I parametri riguardanti guadagno del sistema, tipo, costanti di tempo, smorzamenti e pulsazioni naturali sono pari a $\mu = 10$, $g = 0$, $\alpha_n = 1$ rad/s, $\varsigma = 0.6$, $\tau_1 = 0.01$ s, $\omega_n = 10$ rad/S, $\zeta = 0$, $T_1 = 0.05$ s. Le pulsazioni di rottura, in ordine crescente, sono quindi pari a $\omega_1 = \alpha_n = 1$ rad/S, $\omega_2 = \omega_n = 10$ rad/s, $\omega_3 = 1/|T_1| = 20$ rad/s e $\omega_4 = 1/|\tau_1| = 100$ rad/s.
Poiché il sistema è di tipo 0, il diagramma dei moduli partirà con un tratto piatto pari a $\mu_{dB} = 20$ dB. La prima pulsazione di rottura è in ω_1 ad opera del termine trinomio al numeratore. La variazione di pendenza relativa del diagramma asintotico è di 40 dB/decade. Poiché lo smorzamento è $\varsigma = 0.6$, in circa ω_1 vi sarà una correzione di $P_R = \left|\frac{1}{2\varsigma\sqrt{1-\varsigma^2}}\right|_{dB} \simeq 0.3546$ dB. La seconda pulsazione di rottura è in ω_2 ad opera del termine trinomio al denominatore. La variazione di pendenza relativa del diagramma asintotico è di -40 dB/decade. Poiché $\zeta = 0$, si avrà un asintoto verticale tendente a $+\infty$ dB. La terza pulsazione di rottura è in ω_3 ad opera del termine binomio al denominatore. La variazione di pendenza relativa del diagramma asintotico è di -40 dB/decade a causa della doppia molteplicità. La quarta pulsazione di rottura è in ω_4 ad opera del termine binomio al numeratore. La variazione di pendenza relativa del diagramma asintotico è di 20 dB/decade.
Il diagramma delle fasi tiene conto delle solite tecniche di tracciamento. Quindi, il grafico parte da 0 deg siccome il guadagno $\mu > 0$ e il sistema è di tipo 0. Il termine trinomio al numeratore, di molteplicità singola, apporta un salto relativo del diagramma asintotico di 180 deg alla relativa pulsazione di rottura. Il termine trinomio al denominatore, di molteplicità singola, apporta un salto relativo del diagramma asintotico di -180 deg alla relativa pulsazione di rottura. Il termine binomio al denominatore, di molteplicità doppia, apporta un salto relativo del diagramma asintotico di -180 deg alla relativa pulsazione di rottura. Il termine binomio al numeratore, di molteplicità singola, apporta un salto relativo del diagramma asintotico di 90 deg alla relativa pulsazione di rottura.
Per effetto di questi contributi, il diagramma delle fasi termina con un tratto piatto pari a -90 deg.
Il sistema potrebbe essere un filtro passa basso perché rispetta la condizione necessaria di essere di tipo zero. Tuttavia, il termine trinomio al numeratore, prima, e l'asintoto verticale verso l'alto, dovuto ad un termine trinomio al denominatore, poi, vanificano questa possibilità. Il sistema non è quindi classificabile come nessun filtro standard.

3 Esercizio

Dalla descrizione nel testo del quesito è possibile ricavare il seguente modello a tempo discreto

$$\begin{aligned}
x_1(k+1) &= x_1(k) - \alpha_1 x_1(k)^2 - \beta_1 x_1(k)x_3(k) + \gamma_1 x_1(k) + u(k) = (1 - \alpha_1 x_1(k) - \beta_1 x_3(k) + \gamma_1)x_1(k) + u(k),\\
x_2(k+1) &= x_2(k) - \alpha_2 x_2(k)^2 - \beta_2 x_2(k)x_3(k) + \gamma_2 x_2(k) = (1 - \alpha_2 x_2(k) - \beta_2 x_3(k) + \gamma_2)x_2(k),\\
x_3(k+1) &= x_3(k) - \beta_3 x_3(k) + \gamma_3 x_1(k)x_3(k) + \gamma_4 x_2(k)x_3(k) = (1 - \beta_3 + \gamma_3 x_1(k) + \gamma_4 x_2(k))x_3(k),\\
y(k) &= x_1(k) + x_2(k) + x_3(k).
\end{aligned}$$

Il calcolo degli stati di equilibrio del sistema con $u(k) = 0$ e considerando solo $\bar{x}_2 = 0$ passa attraverso la risoluzione del seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases}
\bar{x}_1 &= (1 - \alpha_1\bar{x}_1 - \beta_1\bar{x}_3 + \gamma_1)\bar{x}_1(k) + \bar{u},\\
\bar{x}_2 &= (1 - \alpha_2\bar{x}_2 - \beta_2\bar{x}_3 + \gamma_2)\bar{x}_2,\\
\bar{x}_3 &= (1 - \beta_3 + \gamma_3\bar{x}_1 + \gamma_4\bar{x}_2)\bar{x}_3,
\end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases}
0 &= (-\alpha_1\bar{x}_1 - \beta_1\bar{x}_3 + \gamma_1)\bar{x}_1(k),\\
0 &= (-\beta_3 + \gamma_3\bar{x}_1)\bar{x}_3,
\end{cases}$$

Dall'ultima equazione si ottiene che essa è risolta per $\bar{x}_3 = 0$ oppure $\bar{x}_1 = \frac{\beta_3}{\gamma_3}$. Nel primo caso, la prima equazione è risolta per $\bar{x}_1 = 0$ oppure $\bar{x}_1 = \frac{\gamma_1}{\alpha_1}$. Nel secondo caso, la prima equazione è risolta per $\bar{x}_3 =$

$\dfrac{\gamma_1}{\beta_1} - \dfrac{\alpha_1\beta_3}{\beta_1\gamma_3}$. Pertanto, gli stati di equilibrio del sistema sono

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} \dfrac{\beta_3}{\gamma_3} \\ 0 \\ \dfrac{\gamma_1}{\beta_1} - \dfrac{\alpha_1\beta_3}{\beta_1\gamma_3} \end{bmatrix}, \quad P_3 = \begin{bmatrix} \dfrac{\gamma_1}{\alpha_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Per effettuare il procedimento di linearizzazione si scriva il modello dinamico precedente come

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(k), u(k)) = \begin{bmatrix} f_1(\boldsymbol{x}(k), u(k)) \\ f_2(\boldsymbol{x}(k), u(k)) \\ f_3(\boldsymbol{x}(k), u(k)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(k) - \alpha_1 x_1(k)^2 - \beta_1 x_1(k)x_3(k) + \gamma_1 x_1(k) + u(k) \\ x_2(k) - \alpha_2 x_2(k)^2 - \beta_2 x_2(k)x_3(k) + \gamma_2 x_2(k) \\ x_3(k) - \beta_3 x_3(k) + \gamma_3 x_1(k)x_3(k) + \gamma_4 x_2(k)x_3(k) \end{bmatrix}.$$

Si proceda ora al calcolo della matrice della dinamica,

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1(k)}{\partial x_1(k)} & \dfrac{\partial f_1(k)}{\partial x_2(k)} & \dfrac{\partial f_1(k)}{\partial x_3(k)} \\ \dfrac{\partial f_2(k)}{\partial x_1(k)} & \dfrac{\partial f_2(k)}{\partial x_2(k)} & \dfrac{\partial f_2(k)}{\partial x_3(k)} \\ \dfrac{\partial f_3(k)}{\partial x_1(k)} & \dfrac{\partial f_3(k)}{\partial x_2(k)} & \dfrac{\partial f_3(k)}{\partial x_3(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 2\alpha_1 x_1 - \beta_1 x_3 + \gamma_1 & 0 & -\beta_1 x_1 \\ 0 & 1 - 2\alpha_2 x_2 - \beta_2 x_3 + \gamma_2 & -\beta_2 x_2 \\ \gamma_3 x_3 & \gamma_3 x_3 & 1 - \beta_3 + \gamma_3 x_1 + \gamma_4 x_2 \end{bmatrix}.$$

Considerando le posizioni del testo con $\alpha_1 = \gamma_1 = \gamma_4 = 0$ si ottiene

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 - \beta_1 x_3 & 0 & -\beta_1 x_1 \\ 0 & 1 - 2\alpha_2 x_2 - \beta_2 x_3 + \gamma_2 & -\beta_2 x_2 \\ \gamma_3 x_3 & \gamma_4 x_3 & 1 - \beta_3 + \gamma_3 x_1 \end{bmatrix}$$

Si può ora particolarizzare la matrice per ognuno degli stati di equilibrio. Quindi

$$\boldsymbol{A}_{P1} = \boldsymbol{I}_3.$$

Questa matrice è la matrice identità con tutti autovalori pari a 1. Dunque, non si può concludere nulla sull'asintotica stabilità del sistema.
Per il secondo punto di equilibrio

$$\boldsymbol{A}_{P2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\dfrac{\beta_1\beta_3}{\gamma_3} \\ 0 & 1 + \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Questa matrice è triangolare superiore, quindi gli autovalori sono sulla diagonale principale e bisogna imporli in modulo minore di 1. Tuttavia, vi sono due autovalori pari ad 1. Quindi, nulla si può concludere sull'asintotica stabilità del sistema.
Infine, per il terzo punto di equilibrio

$$\boldsymbol{A}_{P3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\dfrac{\beta_1\beta_3}{\gamma_3} \\ 0 & 1 + \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \beta_3 + \dfrac{\gamma_1\gamma_3}{\alpha_1} \end{bmatrix}.$$

Questa matrice è triangolare superiore, quindi gli autovalori sono sulla diagonale principale e bisogna imporli in modulo minore di 1. Tuttavia, vi sono due autovalori pari ad 1. Quindi, nulla si può concludere sull'asintotica stabilità del sistema.

ELABORATO TECNICO - TRACCIA N.1 (MATRICOLE PARI)

Risolvere il quesito di seguito riportato utilizzando unicamente lo strumento software Matlab e/o Simulink. Non calcolare nulla a parte su supporti cartacei. Il file generato va consegnato entro il giorno antecedente la prova orale tramite email all'indirizzo del docente con oggetto *[TSI-FSD][Elaborato tecnico]- Cognome Nome Matricola.* In caso di problemi, il discente deve portare un drive USB il giorno della seduta orale. In caso di più files generati, compattare tutto in un file ZIP. ATTENZIONE: nel caso si utilizzi Simulink, salvare il file con compatibilità per la *versione 24.2.* A scanso di equivoci, portare il proprio PC con la versione di Simulink utilizzata.

Sia dato il sistema LTI a tempo continuo caratterizzato dalle seguenti matrici

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -k-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ k & -h & -2 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ d = 0,$$

con $h, k \in \mathbb{R}$.

- Si scriva uno script per il quale si determinino le proprietà di stabilità asintotica, stabilità semplice ed instabilità del sistema, nonché le proprietà di osservabilità e raggiungibilità, quando i parametri h e k variano nell'intervallo $[-5, 5]$.
- Posti $h = k = 1$, si disegnino i diagrammi di Bode del sistema.
- Posti $h = k = 1$, si disegni il valore dell'uscita del sistema quando ad esso è sottoposto l'ingresso $u(t) = -1 - \sin(5t)$, con $t \in [-10, 10]$ s.

Sia dato il sistema LTI a tempo continuo caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento

$$G(s) = 4000 \frac{(s^2 + 1.2s + 1)(s + 100)}{(s^2 + 100)(s^2 + 40s + 400)}.$$

Si disegnino i diagrammi di Bode del sistema. Si determini la banda passante a 3 dB del sistema. Infine, scrivere una rappresentazione i-s-u dello stesso.

ELABORATO TECNICO - TRACCIA N.2 (MATRICOLE DISPARI)

Risolvere il quesito di seguito riportato utilizzando unicamente lo strumento software Matlab e/o Simulink. Non calcolare nulla a parte su supporti cartacei. Il file generato va consegnato entro il giorno antecedente la prova orale tramite email all'indirizzo del docente con oggetto *[TSI-FSD][Elaborato tecnico]- Cognome Nome Matricola.* In caso di problemi, il discente deve portare un drive USB il giorno della seduta orale. In caso di più files generati, compattare tutto in un file ZIP. ATTENZIONE: nel caso si utilizzi Simulink, salvare il file con compatibilità per la *versione 24.2.* A scanso di equivoci, portare il proprio PC con la versione di Simulink utilizzata.

Sia dato il sistema LTI a tempo discreto del primo ordine caratterizzato dalle seguenti matrici

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{h_1 h_2}{h_3} \\ 0 & 1 + h_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \ d = 0.$$

con $h_1, h_2, h_3, h_4 > 0$.

- Si scriva uno script per il quale si determinino le proprietà di stabilità asintotica, stabilità semplice ed instabilità del sistema quando tutti i $h_i \in [0, 5]$, $h = 1, \ldots, 4$.
- Posti tutti i $h_i = -0.3$, $i = 1, \ldots, 4$, si disegni il valore dell'uscita del sistema quando ad esso è sottoposto l'ingresso $u(k) = 10\delta_{-1}(k)$, con $k \in [0, 30]$.

Sia dato il sistema LTI a tempo continuo caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento

$$G(s) = 4000 \frac{(s^2 + 1.2s + 1)(s + 100)}{(s^2 + 100)(s^2 + 40s + 400)}.$$

Si disegnino i diagrammi di Bode e di Nyquist del sistema. Si determini la banda passante a 3 dB del sistema.