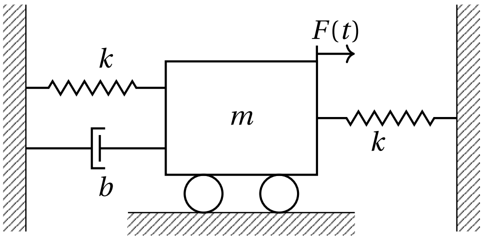
Voto	Traccia Matlab	Cognome, Nome e Matricola

CORSO: TEORIA DEI SISTEMI

DOCENTE: VINCENZO LIPPIELLO

Prova scritta del 03/03/2025

Leggere con attenzione
Il corretto svolgimento del compito prevede che lo studente risponda in maniera chiara ai quesiti proposti e, ove necessario, argomenti i diversi passaggi, espliciti le formule usate, motivi le scelte e non si limiti a riportare i soli risultati dei calcoli.
Alla consegna della prova scritta, l'allievo riceverà la traccia dell'elaborato tecnico da svolgere in ambiente Matlab/Simulink.
Non è consentito consultare appunti o altro materiale, così come è assolutamente vietata ogni forma di collaborazione, pena l'annullamento della prova e il non poter partecipare alla successiva seduta d'esame. Durante la seduta, si forniranno spiegazioni soltanto su quesiti inerenti la comprensione della traccia.
Durata della prova: 3 ore.



1. Sia dato il sistema meccanico in figura, con $m, b, k > 0$. L'ingresso è dato dalla forza $F(t)$, mentre si scelga come uscita lo spostamento del carrello.
   a) Si derivi una rappresentazione i-s-u e si fornisca la relativa classificazione. **[Punti: 3]**
   b) Posti $m = 1$ e $b = 2\sqrt{2}$, si calcolino i valori di k affinché il sistema sia contemporaneamente asintoticamente stabile e presenti modi naturali pseudo-periodici, non identicamente nulli, con smorzamento $\xi > 0.5$. **[Punti: 3]**

2. Si consideri un sistema LTI a tempo continuo avente la seguente forma i-s-u con $k, h \in \mathbb{R}$,

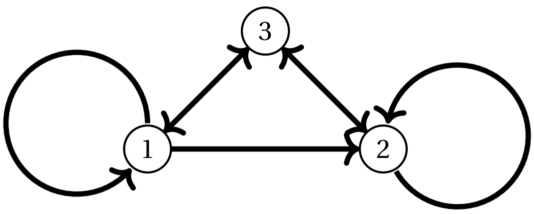
$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t) = \begin{bmatrix} k-h & 0 \\ h-1 & k-1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} u(t),$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k & h \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t).$$

   a) Si discuta la stabilità, l'osservabilità e la raggiungibilità al variare dei parametri. **[Punti: 3]**
   b) Si trovino i valori dei parametri affinché il sistema ammetta uno ed un solo stato di equilibrio quando il sistema è sottoposto all'ingresso $u(t) = \bar{u}$ e calcolarne l'espressione. **[Punti: 3]**
   c) Posti $k = -1$ e $h = 2$, considerato $u(t) = -5 + \cos(2t)\delta_{-1}(-t)$, si calcolino le uscite del sistema, $y_1(t)$ e $y_2(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. **[Punti: 7]**

3. Sia dato il sistema LTI a tempo continuo caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento $G(s) = 40\dfrac{s(s^2+1)(s+5)}{(s^2+50.1s+5)(s^2-40s+400)}$. Si disegnino i diagrammi asintotici di Bode, apportando le dovute correzioni **[Punti: 5]**. Si determini se il sistema è un filtro, fornendo una giustificazione. **[Punti: 2]**

4. Si consideri la rete di pagine web raffigurata nella figura sottostante. Si provveda a determinare il modello dinamico della rete ed a dimostrare, attraverso lo studio degli stati di equilibrio, che la pagina 2 ha maggiore probabilità di visita da parte di un *random surfer* **[Punti: 2]**. Calcolare la risposta libera dello stato a partire dalla condizione iniziale $\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$. **[Punti: 2]**



Soluzione

1 Esercizio

Quesito a.

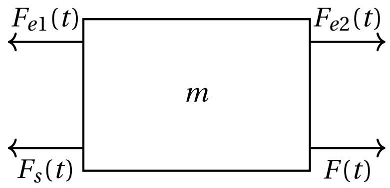


Figura 1.1: Isolamento delle forze nel sistema meccanico.

Il sistema meccanico ha un grado di libertà dato dalla posizione del carrello $s(t)$ che descrive univocamente il sistema. La direzione positiva dello spostamento è scelta arbitrariamente da sinistra a destra della figura. La forza agente sul carrello è data da $F(t)$. Sul carrello di massa m agiscono anche due forze elastiche $F_{e1}(t) = k(s(t) - 0)$ e $F_{e2}(t) = k(0 - s(t))$. Sul carrello agisce anche una forza di smorzamento pari a $F_s = b(\dot{s}(t) - 0)$. Scrivendo la seconda legge di Newton per l'unico elemento inerziale presente, lungo l'unica direzione di moto possibile, e con riferimento per quanto concerne i segni delle varie componenti alla schematizzazione delle forze agenti su di essa in Figura 1.1, si può ottenere quanto segue

$$m\ddot{s}(t) = F(t) - F_{e1}(t) + F_{e2}(t) - F_s(t) = F(t) - ks(t) - ks(t) - b\dot{s}(t) = F(t) - 2ks(t) - b\dot{s}(t).$$

Considerando $x_1(t) = s(t)$ e $x_2(t) = \dot{s}(t)$, la rappresentazione i-s-u del sistema meccanico è pari a

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{2k}{m} & -\dfrac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{bmatrix} F(t),$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}.$$

Il sistema è di ordine 2, tempo continuo, lineare, tempo invariante, strettamente proprio, SISO.

Quesito b.
Si riscriva ora la matrice della dinamica con i valori indicati nel testo del quesito, ossia $m = 1$ e $b = 2\sqrt{2}$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2k & -2\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico della matrice $\boldsymbol{A}$ è pari a

$$\varphi_1(\lambda) = \lambda^2 + 2\sqrt{2}\lambda + 2k.$$

Per la regola di Cartesio, il polinomio caratteristico ammette radici a parte reale negativa per $k > 0$.
Gli autovalori del sistema sono pari a

$$\lambda_{1,2} = -\sqrt{2} \pm \sqrt{2 - 2k}.$$

Il sistema ammette modi naturali pseudo-periodici quando gli autovalori sono complessi coniugati. Ciò accade quando il radicando è negativo, ossia $2 - 2k < 0 \Rightarrow k > 1$. Per trovare la costante elastica della molla tale che si abbia lo smorzamento richiesto nei modi naturali pseudo-periodici, è utile ricordare la seguente espressione parametrica per i termini trinomi dai quali scaturiscono radici complesse coniugate

$$\varphi_2(\lambda) = \lambda^2 + 2\xi\omega_n\lambda + \omega_n^2.$$

Confrontando il precedente con $\varphi_1(\lambda)$ si vede che $\omega_n = \sqrt{2k}$ e $\xi = \sqrt{\dfrac{1}{k}}$. Pertanto è facile ottenere $\xi > 0.5 \Rightarrow k < 4$. Il caso $\xi < 1$ è già contemplato avendo scelto il radicando negativo.
Combinando assieme i risultati, il sistema è asintoticamente stabile con modi naturali pseudo-periodici aventi smorzamento superiore a 0.5 se $1 < k < 4$.

2 Esercizio

Quesito a.
Gli autovalori della matrice della dinamica $\boldsymbol{A}$ sono pari a $\lambda_1 = k-h$ e $\lambda_2 = k-1$. Il sistema è asintoticamente stabile quando tutti gli autovalori sono a parte reale negativa, e ciò avviene quando $k < h \wedge k < 1$. Il sistema è instabile quando un solo autovalore ha parte reale positivo, e ciò accade quando $k > h \vee k > 1$. Il sistema è stabile quando un autovalore è nullo e gli altri a parte reale negativa. Ciò accade quando $(k = h \wedge k \neq 1) \vee (k = 1 \wedge k \neq h)$. Quando $k = h = 1$ entrambi gli autovalori sono nulli e la matrice $\boldsymbol{A}$ è la matrice nulla. Essa è una matrice in forma diagonale, quindi il sistema è semplicemente stabile. Riassumendo, si ha asintotica stabilità per $k < h \wedge k < 1$, instabilità per $k > h \vee k > 1$, stabilità per $(k = h \wedge k \neq 1) \vee (k = 1 \wedge k \neq h) \vee k = h = 1$.
La raggiungibilità del sistema si può studiare attraverso la seguente matrice

$$\boldsymbol{M}_r = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k-h \\ -2 & h-2k+1 \end{bmatrix}.$$

Il determinante di $\boldsymbol{M}_r$ è $1-h$. Quindi, il sistema è completamente osservabile se e solo se $h \neq 1$, $\forall k \in \mathbb{R}$.
L'osservabilità del sistema si può studiare attraverso la seguente matrice

$$\boldsymbol{M}_o = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}^T & \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{C}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k & h-1 & h(h-1)-k(h-k) \\ 1 & h & k-1 & h(k-1) \end{bmatrix}.$$

Il rango di $\boldsymbol{M}_o$ può essere al più pari a 2. Tale eventualità accade quando $k \neq 1$ considerando come minore la matrice di ordine due formata dalla prima e dalla seconda colonna, ad esempio.
Pertanto, il sistema è in forma minima quando $h \neq 1 \wedge k \neq 1$.

Quesito b.
Essendo il sistema LTI, la condizione per cui il sistema ammette un solo stato di equilibrio, qualsiasi sia l'ingresso costante, è che la matrice della dinamica, $\boldsymbol{A}$, sia invertibile. Il determinante di $\boldsymbol{A}$ è pari a $-(h-k)(k-1)$. Questo si annulla solo per $h = k \vee k = 1$. Dunque, il sistema ammette un unico stato di equilibrio quando $h \neq k \wedge k \neq 1$. In tal caso, lo stato di equilibrio è

$$\bar{\boldsymbol{x}} = -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}\bar{u} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{h-k} \\ \dfrac{h-1}{(h-k)(k-1)} - \dfrac{2}{k-1} \end{bmatrix} \bar{u}.$$

Quesito c.
La risposta complessiva $\boldsymbol{y}(t)$ si può suddividere come

$$\boldsymbol{y}(t) = \begin{cases} \boldsymbol{y}_1(t) = \begin{bmatrix} y_{1,1}(t) \\ y_{1,2}(t) \end{bmatrix}, & t < 0, \\ \boldsymbol{y}_2(t) = \begin{bmatrix} y_{2,1}(t) \\ y_{2,2}(t) \end{bmatrix}, & t \geq 0, \end{cases}$$

questo a causa della modifica dell'ingresso che assume la forma

$$u(t) = \begin{cases} -5 + \cos(2t), & t < 0, \\ -5, & t \geq 0. \end{cases}$$

Le matrici della forma i-s-u, dopo aver sostituito il valore $k = -1$ e $h = 2$, sono pari a

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Si cominci dal caso $t<0$ e si provveda a calcolare $\boldsymbol{y}_1(t)$. Il sistema è asintoticamente stabile per i risultati visti precedentemente. Poiché si presuppone che i segnali siano stati applicati ad un tempo $t=-\infty$, qualunque istante di tempo $t<0$ si consideri, si può presupporre che le evoluzioni libere ed il transitorio si siano già estinti: il sistema è quindi a regime. La funzione di trasferimento del sistema è pari a

$$\boldsymbol{G}_1(s)=\begin{bmatrix} G_{1,1}(s) \\ G_{1,2}(s)\end{bmatrix}\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}_2-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} -\dfrac{2s+5}{(s+2)(s+3)} \\ \\ \dfrac{3s+8}{(s+2)(s+3)}\end{bmatrix}.$$

Pertanto, applicando il teorema del valore finale e della risposta a regime a ognuna delle due componenti dell'uscita, si ottiene

$$\boldsymbol{y}_1(t)=\begin{bmatrix} y_{1,1}(t) \\ y_{1,2}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -5G_{1,1}(0)+|G_{1,1}(2j)|\cos(2t+\arg(G_{1,1}(2j))) \\ -5G_{1,2}(0)+|G_{1,2}(2j)|\cos(2t+\arg(G_{1,2}(2j)))\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{25}{6}+0.6279\cos(2t+2.4429) \\ \\ -\dfrac{20}{3}+0.9806\cos(2t-0.7299)\end{bmatrix},$$

per $t<0$.
Per il prosieguo, sarà utile avere a disposizione anche l'evoluzione dello stato per $t<0$. Pertanto, considerando $\boldsymbol{H}(s)=(s\boldsymbol{I}_3-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}$ la matrice delle risposte impulsive nello stato, si ottiene

$$\boldsymbol{H}(s)=\begin{bmatrix} H_1(s) \\ H_2(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+3} \\ \\ -\dfrac{2s+5}{(s+2)(s+3)}\end{bmatrix}.$$

Giacché per $t<0$ anche lo stato sarà al suo andamento di regime, applicando nuovamente il teorema della risposta armonica e del valore finale si può concludere che

$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -5H_1(0)+|H_1(2j)|\cos(2t+\arg(H_{1,1}(2j))) \\ -5H_2(s)+|H_2(2j)|\cos(2t+\arg(H_{2,1}(2j)))\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\dfrac{5}{3}+0.2774\cos(2t-0.588) \\ \\ \dfrac{25}{6}+0.6279\cos(2t+2.4429)\end{bmatrix}$$

Particolarizzando lo stato in $t=0$ si ottiene

$$\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0=\begin{bmatrix} x_{0,1} \\ x_{0,2}\end{bmatrix}\simeq\begin{bmatrix} -1.4359 \\ 3.6859\end{bmatrix}$$

.
L'uscita calcolabile, per $t>0$, è pari a

$$\boldsymbol{y}_2(t)=\begin{bmatrix} y_{2,1}(t) \\ y_{2,2}(t)\end{bmatrix}=\mathscr{L}^{-1}\left[\boldsymbol{C}\,(s\boldsymbol{I}_2-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{C}\,(s\boldsymbol{I}_2-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}U(s)\right], \tag{2.1}$$

con

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}\,(s\boldsymbol{I}_2-\boldsymbol{A}_2)^{-1}&=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{(s+2)(s+3)} & \dfrac{1}{s+2} \\ \\ -\dfrac{s+4}{(s+2)(s+3)} & -\dfrac{2}{s+2}\end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{C}\,(s\boldsymbol{I}_3-\boldsymbol{A}_2)^{-1}\boldsymbol{b}&=\boldsymbol{G}_1(s),\end{aligned}$$

da cui, sostituendo nella (2.1), si ottiene

$$\boldsymbol{y}_2(t)=\begin{bmatrix} \mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{(s+2)(s+3)}x_{0,1}+\dfrac{1}{s+2}x_{0,2}-\dfrac{2s+5}{(s+2)(s+3)}U(s)\right] \\ \\ \mathscr{L}^{-1}\left[-\dfrac{s+4}{(s+2)(s+3)}x_{0,1}-\dfrac{2}{s+2}x_{0,2}+\dfrac{3s+8}{(s+2)(s+3)}U(s)\right]\end{bmatrix},$$

con $U(s) = -\frac{5}{s}$. Tenendo conto dei valori numerici delle condizioni iniziali, si ottiene

$$\boldsymbol{y}_2(t) \simeq \begin{bmatrix} \frac{25}{6} - 0.2308e^{-3t} - \frac{1}{4}e^{-2t} \\ -\frac{20}{3} + 0.2308e^{-3t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \end{bmatrix},$$

per $t \geq 0$.
La risposta complessiva del sistema $\forall\, t \in \mathbb{R}$ risulta dunque pari a

$$\boldsymbol{y}(t) = \begin{cases} \boldsymbol{y}_1(t) = \begin{bmatrix} \frac{25}{6} + 0.6279\cos(2t + 2.4429) \\ -\frac{20}{3} + 0.9806\cos(2t - 0.7299) \end{bmatrix}, & t < 0, \\ \boldsymbol{y}_2(t) = \begin{bmatrix} \frac{25}{6} - 0.2308e^{-3t} - \frac{1}{4}e^{-2t} \\ -\frac{20}{3} + 0.2308e^{-3t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \end{bmatrix}, & t \geq 0, \end{cases}$$

3 Esercizio

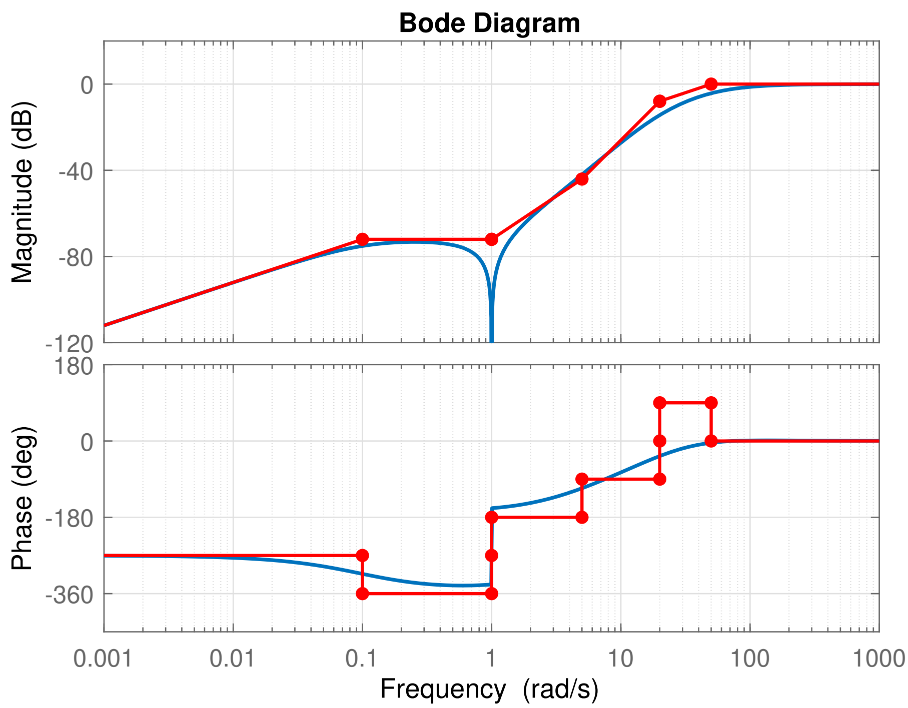


Figura 3.1: Diagramma di Bode della funzione di trasferimento $G(s)$.

La forma ingegneristica di tale funzione di trasferimento è pari a

$$G(s) = 0.1\frac{s(1+s^2)\left(1+\frac{s}{5}\right)}{\left(1+\frac{s}{0.1}\right)\left(1-\frac{s}{20}\right)^2\left(1+\frac{s}{50}\right)}.$$

Si riconoscono al numeratore un termine monomio, binomio e trinomio di molteplicità singola. Al denominatore, invece, vi sono due termini binomio di molteplicità singola e uno di molteplicità doppia. I parametri riguardanti guadagno del sistema, tipo, costanti di tempo, smorzamenti e pulsazioni naturali sono pari a $\mu = 0.1$, $g = -1$, $\alpha_n = 1$ rad/s, $\xi = 0$, $\tau = 0.2$ s, $T_1 = 10$ s, $T_2 = -0.05$ s, $T_3 = 0.02$ s Le pulsazioni di rottura, in ordine crescente, sono quindi pari a $\omega_1 = 1/|T_1| = 0.1$ rad/s, $\omega_2 = \alpha_n = 1$ rad/s, $\omega_3 = 1/|\tau| = 5$ rad/s, $\omega_4 = 1/|T_2| = 20$ rad/s, $\omega_5 = 1/|T_3| = 50$ rad/s.
Poiché il sistema è di tipo -1, il diagramma dei moduli partirà con un tratto rettilineo di pendenza 20 dB/decade che intersecra l'asse $\omega = 1$ rad/s nel valore di $\mu_{dB} = -20$ dB. La prima pulsazione di rottura è in ω_1 ad opera del termine binomio al denominatore di molteplicità singola. La variazione di pendenza relativa del diagramma asintotico è di -20 dB/decade con una correzione in ω_1 di -3 dB. La seconda pulsazione di rottura è in ω_2 ad opera del termine trinomio al numeratore di molteplicità singola. La variazione di pendenza relativa del diagramma asintotico è di 40 dB/decade. Poiché $\xi = 0$, vi sarà un asintoto verticale con il grafico reale dei moduli che tenderà verso $-\infty$ dB. La terza pulsazione di rottura è in ω_3 ad opera del termine binomio al numeatore di molteplicità doppia. La correzione relativa è di 20 dB/decade. Il fattore correttivo in ω_3 è di 3 dB. La quarta pulsazione di rottura è in ω_4 ad opera del termine binomio al denominatore di molteplicità doppia. La correzione relativa è di -40 dB/decade. Il fattore correttivo in ω_4 è di -6 dB. Infine, la quinta pulsazione di rottura è in ω_5 ad opera del termine binomio al denominatore di molteplicità singola. La correzione relativa è di -20 dB/decade. Il fattore correttivo in ω_5 è di -3 dB.
Il diagramma delle fasi tiene conto delle solite tecniche di tracciamento. Quindi, il grafico parte da -270 deg (oppure da 90 deg, a discrezione dello studente data la periodicità del diagramma delle fasi) siccome il guadagno $\mu > 0$ e il sistema è di tipo -1. Il termine binomio al numeratore, di molteplicità singola, apporta un salto relativo del diagramma asintotico di 90 deg alla relativa pulsazione di rottura. Il termine trinomio al numeratore, di molteplicità singola, apporta un salto relativo del diagramma asintotico di 180 deg alla relativa pulsazione di rottura. Poiché $\xi = 0$ si ha un tratto verticale in ω_2. Il termine binomio al denominatore, di molteplicità doppia, apporta un salto relativo del diagramma asintotico di 180 deg (segno positivo perché $T_2 < 0$) alla relativa pulsazione di rottura. I termini binomiali al denominatore, entrambi di molteplicità singola, apportano salti relativi del diagramma asintotico di -90 deg alle relative pulsazioni di rottura.
Per effetto di questi contributi, il diagramma delle fasi termina con un tratto piatto pari a 360 deg.
Il sistema **è un filtro passa-alto** nelle definizioni date. Rispetta la condizione necessaria per poter essere un filtro passa-alto, ossia il sistema è proprio. In questo caso $G_\infty \simeq 32$ dB. Il diagramma reale dei moduli assume valore di $32 - 3 = 29$ dB a circa 70 rad/s. Prima di quella pulsazione il grafico reale è sempre sotto 29 dB, mentre dopo resta confinato in un intorno di 3 dB attorno G_∞.

4 Esercizio

Ricordando dalla teoria come si costruisce la matrice dei link, è possibile scrivere immediatamente il seguente sistema dinamico per la rete considerata nel testo del quesito

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(k).$$

La somma di ogni colonna della matrice $\boldsymbol{A}$ è correttamente pari a 1.
Come suggerito dal quesito, bisogna ricercare gli stati di equilibrio del sistema. Occorre quindi risolvere la seguente equazione

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}}.$$

È facile verificare che la matrice $\boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{A}$ ha determinante pari a 0, dunque non è invertibile. In particolare, gli autovalori di $\boldsymbol{A}$ sono pari a $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{13}}{12}$. La presenza di un autovalore di $\boldsymbol{A}$ pari ad 1 conferma la non invertibilità di $\boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{A}$. Il sistema ammette dunque infiniti stati di equilibrio, o nessuno.

Un metodo veloce per provare quanto richiesto dal quesito è calcolare gli stati di equilibrio risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \bar{x}_1 & = \dfrac{1}{3}\bar{x}_1 + \dfrac{1}{2}\bar{x}_3 \\ \bar{x}_2 & = \dfrac{1}{3}\bar{x}_1 + \dfrac{1}{2}\bar{x}_2 + \dfrac{1}{2}\bar{x}_3 \\ \bar{x}_3 & = \dfrac{1}{3}\bar{x}_1 + \dfrac{1}{2}\bar{x}_2 \end{cases} \Rightarrow \bar{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \dfrac{3}{4}\alpha \\ \dfrac{3}{2}\alpha \\ \alpha \end{bmatrix},$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$, il che dimostra che la seconda pagina può assumere un valore maggiore di quello nullo risultando la pagina più visitata da un random surfer.
Il calcolo della risposta libera dello stato può ottenersi attraverso la seguente espressione

$$\boldsymbol{x}_l(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left[z\left(z\boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{A}\right)^{-1}\boldsymbol{x}_0\right] = \mathcal{Z}^{-1}\left[z\frac{\begin{bmatrix} * & * & \dfrac{z}{2}-\dfrac{1}{4} \\ * & * & \dfrac{z}{2} \\ * & * & \left(z-\dfrac{1}{3}\right)\left(z-\dfrac{1}{2}\right) \end{bmatrix}}{(z-1)\left(z^2+\dfrac{1}{6}z-\dfrac{1}{12}\right)}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right] = \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{\begin{bmatrix} \dfrac{z^2}{2}-\dfrac{z}{4} \\ \dfrac{z^2}{2} \\ z\left(z-\dfrac{1}{3}\right)\left(z-\dfrac{1}{2}\right) \end{bmatrix}}{(z-1)\left(z^2+\dfrac{1}{6}z-\dfrac{1}{12}\right)}\right].$$

Calcolando col metodo dei residui per la trasformata Zeta si ottiene

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_l(k) &= \mathcal{Z}^{-1}\begin{bmatrix} \dfrac{0.2308z}{z-1} + \dfrac{0.3006z}{z-0.2171} - \dfrac{0.5314z}{z+0.3838} \\ \dfrac{0.4615z}{z-1} - \dfrac{0.2308z}{z-0.2171} - \dfrac{0.2308z}{z+0.3838} \\ \dfrac{0.3077z}{z-1} - \dfrac{0.07z}{z-0.2171} + \dfrac{0.7622z}{z+0.3838} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (0.2308 + 0.3006(0.2171)^k - 0.5314(-0.3838)^k)\delta_{-1}(k) \\ (0.4615 - 0.2308(0.2171)^k - 0.2308(-0.3838)^k)\delta_{-1}(k) \\ (0.3077 - 0.07(0.2171)^k + 0.7622(-0.3838)^k)\delta_{-1}(k) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

ELABORATO TECNICO - TRACCIA N.1 (MATRICOLE PARI)

Risolvere il quesito di seguito riportato utilizzando unicamente lo strumento software Matlab e/o Simulink. Non calcolare nulla a parte su supporti cartacei. Il file generato va consegnato entro il giorno antecedente la prova orale tramite email all'indirizzo del docente con oggetto *[TSI-FSD][Elaborato tecnico]- Cognome Nome Matricola.* In caso di problemi, il discente deve portare un drive USB il giorno della seduta orale. In caso di più files generati, compattare tutto in un file ZIP. ATTENZIONE: nel caso si utilizzi Simulink, salvare il file con compatibilità per la *versione 24.2.* A scanso di equivoci, portare il proprio PC con la versione di Simulink utilizzata.

Si consideri un sistema LTI a tempo continuo avente la seguente forma i-s-u con $k, h \in \mathbb{R}$,

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t) = \begin{bmatrix} k-h & 0 \\ h-1 & k-1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} u(t),$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k & h \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t).$$

- Si scriva uno script per il quale si determinino le proprietà di stabilità asintotica, stabilità semplice ed instabilità del sistema, nonché le proprietà di osservabilità e raggiungibilità, quando i parametri k, h variano nell'intervallo $[-5, 5]$.
- Posto $k = -1$ e $h = 2$, si disegni il valore dell'uscita del sistema quando ad esso è sottoposto l'ingresso $u(t) = -5 + \cos(2t)\delta_{-1}(-t)$, con $t \in [-10, 10]$ s.

Sia dato il sistema LTI a tempo continuo caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento

$$G(s) = 40 \frac{s(s^2+1)(s+5)}{(s^2+50.1s+5)(s^2-40s+400)}.$$

Si disegnino i diagrammi di Bode del sistema. Si determini la banda passante a 3 dB del sistema.

ELABORATO TECNICO - TRACCIA N.2 (MATRICOLE DISPARI)

Risolvere il quesito di seguito riportato utilizzando unicamente lo strumento software Matlab e/o Simulink. Non calcolare nulla a parte su supporti cartacei. Il file generato va consegnato entro il giorno antecedente la prova orale tramite email all'indirizzo del docente con oggetto *[TSI-FSD][Elaborato tecnico]- Cognome Nome Matricola.* In caso di problemi, il discente deve portare un drive USB il giorno della seduta orale. In caso di più files generati, compattare tutto in un file ZIP. ATTENZIONE: nel caso si utilizzi Simulink, salvare il file con compatibilità per la *versione 24.2.* A scanso di equivoci, portare il proprio PC con la versione di Simulink utilizzata.

Si consideri un sistema LTI a tempo continuo avente la seguente forma i-s-u con $k, h \in \mathbb{R}$,

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t) = \begin{bmatrix} k-h & 0 \\ h-1 & k-1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} u(t),$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k & h \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t).$$

- Si scriva uno script per il quale si classifichi lo stato di equilibrio del sistema del secondo ordine in sella, centro, fuoco, etc., quando i parametri k, h variano nell'intervallo $[-5, 5]$.
- Posto $k = -1$ e $h = 2$, si disegni il valore dell'uscita del sistema quando ad esso è sottoposto l'ingresso $u(t) = 5 - \sin(2t)\delta_{-1}(-t)$, con $t \in [-10, 10]$ s.

Sia dato il sistema LTI a tempo continuo caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento

$$G(s) = 40 \frac{s(s^2+1)(s+5)}{(s^2+50.1s+5)(s^2-40s+400)}.$$

Si disegnino i diagrammi di Bode del sistema. Si scriva una forma i-s-u del sistema.