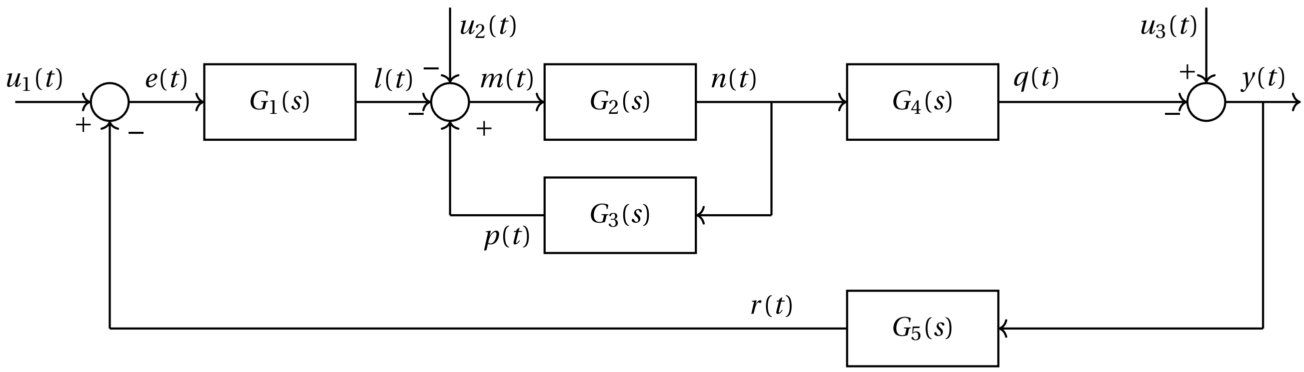
Voto	Traccia Matlab	Cognome, Nome e Matricola

CORSO: TEORIA DEI SISTEMI
DOCENTE: VINCENZO LIPPIELLO

Prova scritta del 12/09/2022

Leggere con attenzione
Il corretto svolgimento del compito prevede che lo studente risponda in maniera chiara ai quesiti proposti e, ove necessario, argomenti i diversi passaggi, espliciti le formule usate, motivi le scelte e non si limiti a riportare i soli risultati dei calcoli.
Alla consegna della prova scritta, l'allievo riceverà la traccia dell'elaborato tecnico da svolgere in ambiente Matlab/Simulink.
Non è consentito consultare appunti o altro materiale, così come è assolutamente vietata ogni forma di collaborazione, pena l'annullamento della prova e il non poter partecipare alla successiva seduta d'esame. Durante la seduta, si forniranno spiegazioni soltanto su quesiti inerenti la comprensione della traccia.
Durata della prova: 3 ore.



1. Si calcoli la funzione di trasferimento dello schema a blocchi rappresentato nella precedente figura. **[Punti: 5]**

2. Sia dato il seguente sistema LTI a tempo continuo caratterizzato dalla funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{s^2}{(s+h)(s+1)}$ con $h = \delta_{-1}(-t)$ un parametro tempo variante.
   a) Scrivere la risposta impulsiva del sistema e una rappresentazione i-s-u. **[Punti: 3]**
   b) Studiare le proprietà di raggiungibilità e di osservabilità del sistema in base al cambiamento del parametro h sopra delineato. **[Punti: 3]**
   c) Studiare le proprietà di stabilità del sistema per $t \leq 0$ e $t > 0$ **[Punti: 3]**.
   d) Scrivere la risposta complessiva dell'uscita $y(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, quando il sistema è sottoposto all'ingresso $u(t) = 1 - \cos(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. **[Punti: 7]**

3. Sia dato il sistema LTI a tempo continuo caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento $G(s) = 2.5\dfrac{s^2+1}{s(s^2-4.5s-2.5)}$. Si disegnino i diagrammi asintotici di Bode, apportando le dovute correzioni. **[Punti: 5]** Determinare se il sistema può esser classificato come filtro o meno, giustificando la scelta prodotta. **[Punti: 2]**

4. Si consideri il sistema LTI a tempo continuo descritto dalla seguente funzione di trasferimento $W(s) = \dfrac{2s+1}{s^2+6s+5}$. Si trovi un opportuno periodo di campionamento del sistema per un'eventuale approssimazione dello stesso in un sistema a dati campionati [non occorre calcolare l'approssimazione a dati campionati]. **[Punti: 2]**

Soluzione

1 Esercizio

Si riconosce che il sistema raffigurato è di tipo MISO, con tre ingressi e una uscita. Pertanto, la funzione di trasferimento può essere scritta come

$$Y(s) = \boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{U}(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & G_{13}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ U_3(s) \end{bmatrix}, \tag{1.1}$$

con $G_{1i}(s)$ la funzione di trasferimento fra y e u_i, $i = 1,\dots,3$, quando gli altri segnali di ingresso sono nulli. Si proceda quindi ora scrivere le relazioni fra i vari segnali dello schema a blocchi direttamente nel dominio di Laplace

$$E(s) = U_1(s) - R(s), \tag{1.2a}$$
$$L(s) = G_1(s)E(s), \tag{1.2b}$$
$$M(s) = -L(s) - U_2(s) + P(s), \tag{1.2c}$$
$$N(s) = G_2(s)M(s), \tag{1.2d}$$
$$P(s) = G_3(s)N(s), \tag{1.2e}$$
$$Q(s) = G_4(s)N(s), \tag{1.2f}$$
$$Y(s) = -Q(s) + U_3(s), \tag{1.2g}$$
$$R(s) = G_5(s)Y(s). \tag{1.2h}$$

Grazie alla sovrapposizione degli effetti, per il calcolo di $G_{11}(s)$ si procede algebricamente come segue ponendo $u_2(t) = u_3(t) = 0$. Per prima cosa, è utile risolvere la relazione che lega $N(s)$ con $L(s)$ quando $u_2(t) = 0$. Questa è pari a

$$N(s) = G_2(s)M(s) = G_2(s)(-L(s) + P(s)) = G_2(s)(-L(s) + G_3(s)N(s)) \Rightarrow N(s) = \frac{G_2(s)}{G_2(s)G_3(s) - 1}L(s).$$

Dunque, svolgendo per esteso i conti, partendo dall'uscita, la relazione che lega $Y(s)$ con $U_1(s)$, quindi la $G_{11}(s)$ si ottiene come

$$\begin{aligned} Y(s) &= -Q(s) = -G_4(s)N(s) = -\frac{G_2(s)G_4(s)}{G_2(s)G_3(s) - 1}L(s) = -\frac{G_1(s)G_2(s)G_4(s)}{G_2(s)G_3(s) - 1}E(s) \\ &= -\frac{G_1(s)G_2(s)G_4(s)}{G_2(s)G_3(s) - 1}(U_1(s) - R(s)) = -\frac{G_1(s)G_2(s)G_4(s)}{G_2(s)G_3(s) - 1}(U_1(s) - G_5(s)Y(s)). \end{aligned}$$

Da cui

$$Y(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)G_4(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)G_4(s)G_5(s) - G_2(s)G_3(s)}U(s),$$

pertanto

$$G_{11}(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)G_4(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)G_4(s)G_5(s) - G_2(s)G_3(s)}.$$

Per il calcolo di $G_{12}(s)$ si procede algebricamente come prima ponendo $u_1(t) = u_3(t) = 0$. Svolgendo i conti si ottiene

$$G_{12}(s) = \frac{G_2(s)G_4(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)G_4(s)G_5(s) - G_2(s)G_3(s)}.$$

Infine, per il calcolo di $G_{13}(s)$ si pone $u_1(t) = u_2(t) = 0$. Svolgendo i conti si ottiene

$$G_{13}(s) = \frac{1 - G_2(s)G_3(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)G_4(s)G_5(s) - G_2(s)G_3(s)}.$$

2 Esercizio

Quesito a.
La risposta impulsiva di un sistema LTI a tempo continuo è l'antitrasformata di Laplace della funzione di trasferimento. Quindi, nel caso in esame, si ottiene

$$g_y(t) = \mathscr{L}^{-1}[G(s)] = \delta(t) + \frac{1}{h-1}e^{-t} - \frac{h^2}{h-1}e^{-ht}.$$

Inoltre, dalla funzione di trasferimento, attraverso la forma canonica di raggiungibilità, ad esempio, è possibile ricavare una rappresentazione i-s-u del sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t),\\ \dot{x}_2(t) &= -hx_1(t) - (h+1)x_2(t) + u(t),\\ y(t) &= -hx_1(t) - (h+1)x_2(t) + u(t).\end{aligned}$$

Il sistema presenta quindi le seguenti matrici

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -h & -h-1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} -h & -h-1 \end{bmatrix},\ d = 1.$$

Quesito b.
Poiché il sistema in forma i-s-u è stato scritto in forma canonica di raggiungibilità, il sistema sarà sempre raggiungibile qualunque valore del parametro h.
Si esamini quindi la sola osservabilità attraverso la relativa matrice

$$\boldsymbol{M}_o = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}^T & \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{c}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -h & h(h+1) \\ -h-1 & h^2+h+1 \end{bmatrix}.$$

Poiché $\boldsymbol{M}_o$ è quadrata, si può studiare l'osservabilità attraverso il suo determinante. Esso è pari a h^2. Il sistema non è osservabile per $h = 0$, ossia quando il determinante si annulla. Il valore del parametro è $h = 1$ per $t \leq 0$ e $h = 0$ per $t > 0$. Quindi, il sistema non è osservabile per $t > 0$.

Quesito c.
Per $t \leq 0$ il valore h è pari a 1. La matrice della dinamica assume forma pari a

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Gli autovalori sono pari a $\lambda_{1,1} = \lambda_{1,2} = -1$. Il sistema è quindi asintoticamente stabile.
Per $t > 00$ il valore h è pari a 0. La matrice della dinamica assume forma pari a

$$\boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Gli autovalori sono pari a $\lambda_{2,1} = 0$ e $\lambda_{2,2} = -1$. Il sistema è quindi semplicemente stabile.

Quesito d.
Gli autovalori del sistema sono $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -h$. Il valore del parametro è $h = 1$ per $t \leq 0$ e $h = 0$ per $t > 0$. Le proprietà di stabilità nei rispettivi intervalli di tempo sono stati valutati nel quesito precedente. L'uscita del sistema è quindi nella forma

$$y(t) = \begin{cases} y_1(t), & t \leq 0, \\ y_2(t), & t > 0. \end{cases}$$

Si cominci per $t \leq 0$. Poiché si suppone che l'ingresso è applicato a $t = -\infty$ ed il sistema è asintoticamente stabile, allora l'uscita, così come lo stato, è già a regime. Pertanto, considerando che $h = 1$ in questo intervallo, la funzione di trasferimento del sistema assume la forma

$$G_1(s) = \frac{s^2}{(s+1)^2}.$$

Invece, la matrice della dinamica risulta pari a $\boldsymbol{A}_1$ del quesito precedente. Considerata la forma dell'ingresso, si ottiene, l'uscita è calcolabile come

$$y_1(t) = G_1(0) - |G_1(j)|\cos(t + \arg(G_1(j))) = -0.5\cos(t + \pi/2),$$

per $t \leq 0$.
È anche possibile calcolare l'andamento dello stato per $t \leq 0$. Si calcoli la matrice delle risposte impulsive nel dominio di Laplace come

$$\boldsymbol{H}(s) = (s\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{A}_1)^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} H_1(s) \\ H_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(s+1)^2} \\ \dfrac{s}{(s+1)^2} \end{bmatrix}.$$

Anche lo stato è a regime, pertanto assume la seguente espressione

$$\boldsymbol{x}_(t) = \begin{bmatrix} H_1(0) + |H_1(j)|\sin(t + \arg(H_1(j))) \\ H_2(0) + |H_2(j)|\sin(t + \arg(H_2(j))) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 0.5\cos(t - \pi/2) \\ -0.5\cos(t) \end{bmatrix},$$

per $t \leq 0$. È quindi ora possibile particolare lo stato nell'istante di tempo $t = 0$, momento nel quale in valore di h cambia

$$\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \end{bmatrix}.$$

Per $t > 0$ si può ricorrere alla forma generale per calcolare l'espressione dell'uscita

$$y_2(t) = \mathscr{L}^{-1}[\boldsymbol{c}_2(s\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{A}_2)^{-1}\boldsymbol{x}_0] + \mathscr{L}^{-1}[G(s)U(s)],$$

dove si è scomposta l'uscita in parte libera e forzata. Pertanto, considerando che $h = 0$ in questo intervallo temporale, la funzione di trasferimento del sistema assume la forma

$$G_2(s) = \frac{s}{(s+1)}.$$

Invece, la matrice della dinamica e dell'uscita risultano pari a

$$\boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{c}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Infine, la trasformata di Laplace dell'ingresso è pari a

$$U(s) = \mathscr{L}[u(t)] = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}.$$

Dunque, svolgendo i conti si ottiene

$$y_2(t) = 1.5e^{-t} - 0.5\sqrt{2}\cos(t + \pi/4),$$

per $t > 0$.
Pertanto, l'espressione completa dell'uscita è pari a

$$y(t) = \begin{cases} -0.5\cos(t + \pi/2), & t \leq 0, \\ 1.5e^{-t} - 0.5\sqrt{2}\cos(t + \pi/4), & t > 0. \end{cases}$$

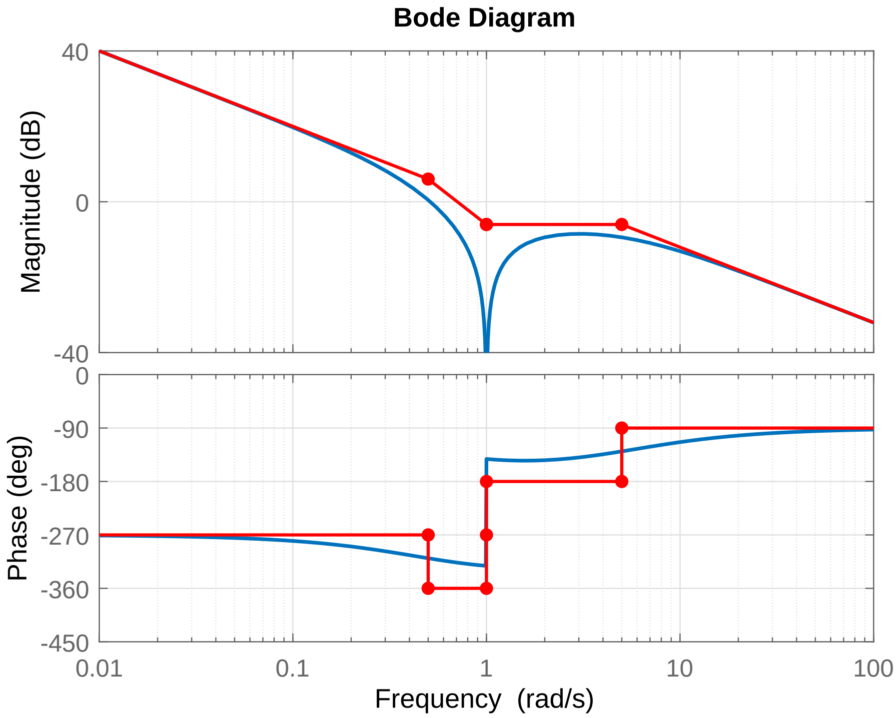


Figura 3.1: Diagramma di Bode della funzione di trasferimento $G(s)$.

3 Esercizio

La forma ingegneristica di tale funzione di trasferimento è pari a

$$G(s) = -\frac{1+s^2}{s\,(1-0.2s)\,(1+2s)}.$$

Si riconosce al numeratore un termine trinomio di molteplicità singola Al denominatore, invece, vi è un termine monomio di molteplicità singola e due termini binomio di molteplicità singola. I parametri riguardanti guadagno del sistema, tipo, costanti di tempo, smorzamenti e pulsazioni naturali sono pari a $\mu = -1$, $g = 1$, $\alpha_n = 1$ rad/s, $\xi = 0$, $T_1 = -0.2$ s, $T_2 = 2$ s. Le pulsazioni di rottura, in ordine crescente, sono quindi pari a $\omega_1 = 1/|T_2| = 0.5$ rad/s, $\omega_2 = \alpha_n = 1$ rad/s e $\omega_3 = 1/|T_1| = 5$ rad/s.
Poiché il sistema è di tipo 1, il diagramma dei moduli partirà con tratto decrescente con pendenza -20 dB/decade che passera in μ in decibel, ossia $20\log_{10}|\mu| = 20$ dB, per $\omega = 1$ rad/s. La prima pulsazione di rottura è in ω_1 ad opera del termine binomio al denominatore di molteplicità singola. La variazione di pendenza relativa del diagramma asintotico è di -20 dB/decade. Il fattore correttivo in ω_1 per il termine trinomio al denominatore di molteplicità singola è di -3 dB. La seconda pulsazione di rottura è in ω_2 ad opera del termine trinomio al numeratore di molteplicità doppia. La variazione di pendenza relativa del diagramma asintotico è di 40 dB/decade. Il fattore correttivo in ω_2 per il termine trinomio al numeratore di molteplicità singola è la creazione di un asintoto verticale verso $-\infty$ dB perché $\xi = 0$. La terza pulsazione di rottura è in ω_3 ad opera del termine binomio al denominatore di molteplicità singola. La variazione di pendenza relativa del diagramma asintotico è di -20 dB/decade. Il fattore correttivo in ω_1 per il termine trinomio al denominatore di molteplicità singola è di -3 dB.
Il diagramma delle fasi tiene conto delle solite tecniche di tracciamento. Quindi, il grafico parte da $-180-90 = -270$ deg siccome il guadagno $\mu < 0$ e il sistema è di tipo 1. Il termine binomio al denominatore, associato a ω_1, di molteplicità doppia, apporta un salto relativo del diagramma asintotico di -90 deg alla relativa pulsazione di rottura. Il termine trinomio al numeratore, associato a ω_2, di molteplicità singola, apporta un salto relativo del diagramma asintotico di 180 deg alla relativa pulsazione di rottura. Poiché $\xi = 0$ vi sarà un salto nella fase di 180 deg in corrispondenza di ω_2. Il valore del diagramma asintotico in ω_2 + di -225 deg. Quindi, il salto del diagramma reale avverrà da circa $-225-90 = -315$ deg a $-225+90 =$

-135 deg. Il termine binomio al denominatore, associato a ω_3, di molteplicità singola, apporta un salto relativo del diagramma asintotico di 90 deg alla relativa pulsazione di rottura. Per effetto di questi contributi, il diagramma delle fasi termina con un tratto piatto pari a -90 deg.
Il sistema non rispetta né la condizione necessaria per essere filtro passa basso né quella per essere filtro passa alto. Pertanto, il sistema non può esser classificato come filtro.

4 ESERCIZIO

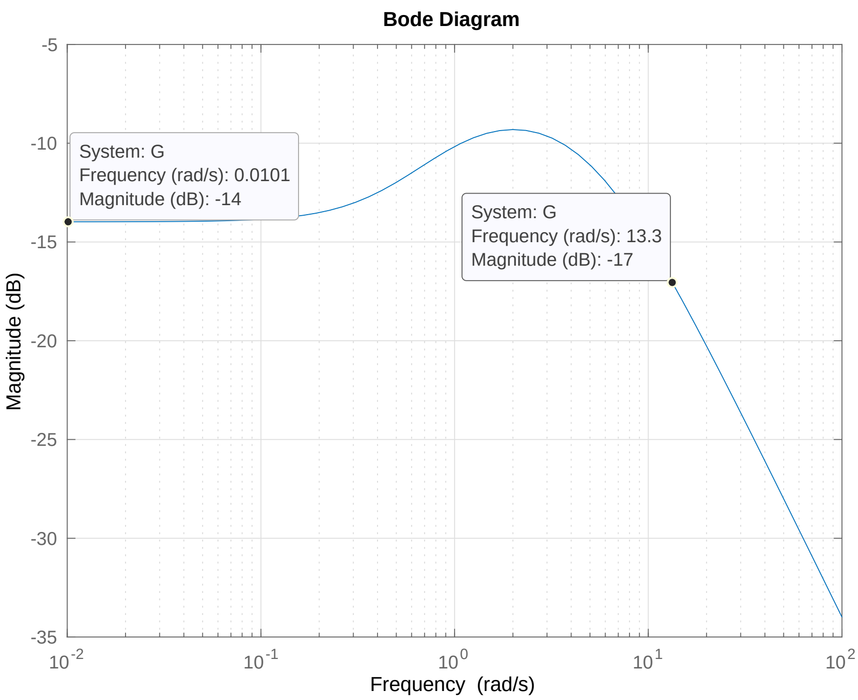


Figura 4.1: Diagramma di Bode della funzione di trasferimento $W(s)$.

Il sistema $W(s)$ non è approssimabile ad uno del primo ordine, oppure ad uno del secondo ordine con poli coincidenti, o ancora ad uno del secondo ordine con poli complessi coniugati. Pertanto, essendo $W(s)$ di tipo zero, al fine di ricavare il periodo di campionamento T_s per tale sistema in vista di una sua possibile approssimazione a dati campionati, è opportuno studiare l'andamento effettivo del diagramma di Bode dei moduli del sistema. Per tale motivo, si faccia riferimento alla Fig. 4.1. Occorre estrarre la pulsazione ω_3, definita come la più alta pulsazione di un sistema di tipo zero tale che, dopo tale pulsazione, il diagramma effettivo di Bode dei moduli sia sempre al di sotto del valore del guadagno statico meno 3 dB. È possibile evincere dal grafico di Fig. 4.1 che tale pulsazione è pari a $\omega_3 = 13.3$ rad/s.
Si definisca con ω_s la pulsazione di campionamento, pari a $\omega_s = \dfrac{2\pi}{T_s}$. È possibile ricavare ω_s attraverso la seguente legge empirica

$$\alpha\omega_3 \le \omega_s \le 10\alpha\omega_3,$$

con $\alpha \in [5, 10]$. Nel caso in esame si ha $13.3\alpha \le \omega_s \le 133\alpha$. Con $\alpha = 5$ si ottiene $66.5 \le \omega_s \le 665$. Con $\alpha = 10$ si ottiene $133 \le \omega_s \le 1330$. Scegliendo arbitrariamente $\omega_s = 200$ rad/s si rispettano entrambi i casi. Pertanto, è possibile ricavare un periodo di campionamento accettabile come

$$T_s = \frac{2\pi}{\omega_s} = \frac{2\pi}{200} = 0.0314 \text{ s}.$$

ELABORATO TECNICO - TRACCIA N.1 (MATRICOLE PARI)

Risolvere il quesito di seguito riportato utilizzando unicamente lo strumento software Matlab e/o Simulink. Non calcolare cioé nulla a parte su supporti cartacei. Il file generato per risolvere la traccia assegnata va consegnato entro il giorno antecedente la prova orale tramite email all'indirizzo del docente con oggetto *[TSI-FSD][Elaborato tecnico]-Cognome Nome Matricola*. In caso non fosse possibile inviare un email, il discente deve portare un drive USB il giorno della seduta orale. In caso di piú files generati, compattare tutto in un file ZIP. ATTENZIONE: nel caso si utilizzi Simulink, salvare il file generato con compatibilitá per la *versione 10.2*. A scanso di equivoci, portare il proprio PC con la versione di Simulink utilizzata per risolvere, eventualmente, il quesito.

Sia dato il seguente sistema LTI a tempo continuo caratterizzato dalla funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s^2}{(s+h)(s+1)}$$

con $h = \delta_{-1}(-t)$ un parametro tempo variante.

1. Fare in modo che il programma determini automaticamente le proprietà di raggiungibilità e di osservabilità del sistema in base al cambiamento del parametro h sopra delineato.
2. Fare in modo che il programma determini automaticamente le proprietà di stabilità del sistema per $t \leq 0$ e $t > 0$.
3. Diagrammare la risposta complessiva dell'uscita $y(t)$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$, quando il sistema è sottoposto all'ingresso $u(t) = 1 - \cos(t)$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$.

ELABORATO TECNICO - TRACCIA N.2 (MATRICOLE DISPARI)

Risolvere il quesito di seguito riportato utilizzando unicamente lo strumento software Matlab e/o Simulink. Non calcolare cioé nulla a parte su supporti cartacei. Il file generato per risolvere la traccia assegnata va consegnato entro il giorno antecedente la prova orale tramite email all'indirizzo del docente con oggetto *[TSI-FSD][Elaborato tecnico]-Cognome Nome Matricola*. In caso non fosse possibile inviare un email, il discente deve portare un drive USB il giorno della seduta orale. In caso di piú files generati, compattare tutto in un file ZIP. ATTENZIONE: nel caso si utilizzi Simulink, salvare il file generato con compatibilitá per la *versione 10.2*. A scanso di equivoci, portare il proprio PC con la versione di Simulink utilizzata per risolvere, eventualmente, il quesito.

Sia dato il sistema LTI a tempo continuo caratterizzato dalle seguenti matrici

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ k & -1 & -1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ k \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \ d = 0,$$

con $k \in \mathbb{R}$ un parametro. Far variare k nell'intervallo $[-10, 10]$, con passo significativo, e classificare automaticamente la proprietà di stabilità, raggiungibilità e osservabilità del sistema.
Sia dato il sistema LTI a tempo continuo definito dalla seguente funzione di trasferimento Sia dato il sistema LTI a tempo continuo caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento

$$G(s) = 2.5\frac{s^2+1}{s(s^2-4.5s-2.5)}.$$

Si disegnino i diagrammi di Bode e di Nyquist del sistema. Infine, scrivere una rappresentazione i-s-u del sistema.