Voto	Traccia Matlab	Cognome, Nome e Matricola

CORSO: TEORIA DEI SISTEMI
DOCENTE: VINCENZO LIPPIELLO

Prova scritta del 08/04/2024

Leggere con attenzione
Il corretto svolgimento del compito prevede che lo studente risponda in maniera chiara ai quesiti proposti e, ove necessario, argomenti i diversi passaggi, espliciti le formule usate, motivi le scelte e non si limiti a riportare i soli risultati dei calcoli.
Alla consegna della prova scritta, l'allievo riceverà la traccia dell'elaborato tecnico da svolgere in ambiente Matlab/Simulink.
Non è consentito consultare appunti o altro materiale, così come è assolutamente vietata ogni forma di collaborazione, pena l'annullamento della prova e il non poter partecipare alla successiva seduta d'esame. Durante la seduta, si forniranno spiegazioni soltanto su quesiti inerenti la comprensione della traccia.
Durata della prova: 3 ore.

1. Si consideri un sistema LTI a tempo continui avente il seguente sistema in forma i-s-u

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t) = \begin{bmatrix} k-1 & 1 & 0 \\ 0 & k-1 & 1 \\ 0 & 0 & k-2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u(t), \tag{0.1}$$

$$y(t) = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(t) + du(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + u(t), \tag{0.2}$$

   con $k \in \mathbb{R}$.

   a) Discriminare le proprietà di stabilità asintotica, stabilità semplice ed instabilità al variare del parametro k. **[Punti: 3]**
   b) Si calcolino i valori di k per cui il sistema risulta in forma minima. **[Punti: 2]**
   c) Porre $k = 0$ e calcolare la risposta del sistema al segnale di ingresso $u(t) = \sin(3t) - \delta_{-1}(-t), \forall t \in \mathbb{R}$. **[Punti: 10]**

2. Si consideri il sistema dinamico LTI a tempo continuo descritto dalla funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{125(s+1)}{(s+5)(s^2+4s+25)}.$$

   Si provveda a disegnare i diagrammi asintotici di Bode, apportando le dovute correzioni. **[Punti: 5]**
   Disegnare il diagramma polare (di Nyquist). **[Punti: 4]**

3. Sia dato il sistema LTI a tempo continuo caratterizzato dalla seguente risposta impulsiva $g_y(t) = 2e^{-3t} - 6e^{-5t} + \delta(t)$. Si calcoli la risposta a regime del sistema quando è posto in ingresso $u(t) = (-1 + 2e^{-2t} + \sin(5t - \pi/4))\delta_{-1}(t)$. **[Punti: 3]**

4. Si consideri il seguente sistema dinamico non lineare a tempo discreto

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_1(k)^3 + x_2(k) - 5\sin(u(k)), \\ x_2(k+1) &= x_1(k) + x_2(k) + 2u(k)^3, \\ y(k) &= (2x_1(k)x_2(k) - 1)^2. \end{aligned}$$

   Per tutti gli stati di equilibrio del sistema quando esso è sottoposto all'ingresso $u(k) = \bar{u} = 0$, si scriva il sistema linearizzato corrispondente e si studi la stabilità locale del sistema non lineare. **[Punti: 3]**

Soluzione

1 Esercizio

Quesito a
La matrice della dinamica $\boldsymbol{A}$ è triangolare superiore, tutti gli autovalori si trovano sulla diagonale principale. Quindi, essi risultano $\lambda_1 = \lambda_2 = k-1$ e $\lambda_3 = k-2$. Per l'asintotica stabilità tutti gli autovalori devono avere parte reale minore di zero, questo risulta in $k < 1$. Per l'instabilità basta avere $k > 1$.
Quando $k = 1$ riconosco che $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 < 0$. Poiché ho un autovalore con molteplicità algebrica maggiore di uno e radice nulla, mentre gli altri sono a parte reale negativa, devo discriminare se la matrice è diagonalizzabile o meno per determinare se il sistema con questo valore del parametro è stabile semplicemente o instabile. Nel caso specifico,

$$\nu = n - \operatorname{rank}(A - \lambda_1 \boldsymbol{I}_n) = 3 - \operatorname{rank}(\boldsymbol{A} - 0\boldsymbol{I}_3) = 3 - 2 = 1.$$

La molteplicità geometrica per $k = 1$ risulta diversa da quella algebrica e quindi il sistema con questo valore del parametro risulta instabile. Ciò lo si poteva anche riconoscere dal fatto che per $k = 1$ la matrice $\boldsymbol{A}$ è già nella sua forma di Jordan, quindi sicuramente i modi naturali sono del tipo 1 e t.
Riassumendo, il sistema è asintoticamente stabile per $k < 1$ e instabile per $k \geq 1$.

Quesito b
Per determinare i valori del parametro k per i quali il sistema risulta in forma minima occorre considerare i valori per i quali il sistema risulta sia completamente raggiungibile che completamente osservabile.
Per la raggiungibilità si consideri la seguente matrice di raggiungibilità

$$\boldsymbol{M}_r = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{b} & \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k-1 & (k-1)^2 - 1 \\ 0 & -1 & 3-2k \\ -1 & 2-k & -(k-2)^2 \end{bmatrix},$$

il cui determinante è pari a 1. Dunque, il sistema è completamente raggiungibile $\forall k \in \mathbb{R}$.
Per l'osservabilità si consideri la seguente matrice di osservabilità

$$\boldsymbol{M}_o = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}^T & \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{c}^T & \boldsymbol{A}^{T^2}\boldsymbol{c}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k-1 & (k-1)^2 \\ -1 & 2-k & 2k-(k-1)^2-2 \\ 1 & k-3 & (k-2)^2-2k+4 \end{bmatrix},$$

il cui determinante è pari a 3. Dunque, il sistema è completamente osservabile $\forall k \in \mathbb{R}$.
Il sistema è in forma minima $\forall k \in \mathbb{R}$.

Quesito c
Con il valore del parametro dato nel testo, la matrice della dinamica assume la forma

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Gli autovalori della matrice $\boldsymbol{A}$ sono quindi pari a $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = -2$. Il sistema risulta asintoticamente stabile. Si ricavi, per scopi successivi, la funzione di trasferimento del sistema

$$G(s) = \boldsymbol{c}\,(s\boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{A})^{-1}\,\boldsymbol{b} + d = \frac{s^3 + 4s^2 + 7s + 3}{(s+1)^2(s+2)}$$

e la matrice delle risposte impulsive nello stato

$$H(s) = (s\boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{A})^{-1}\,\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \dfrac{s^2+3s+1}{(s+1)^2(s+2)} \\ -\dfrac{1}{(s+1)(s+2)} \\ -\dfrac{1}{s+2} \end{bmatrix}.$$

L'ingresso $u(t) = \sin(3t) - \delta_{-1}(-t)$ si può scrivere come

$$u(t) = \begin{cases} u_1(t) = \sin(3t) - 1, & t \leq 0 \\ u_2(t) = \sin(3t), & t > 0. \end{cases}$$

Il sistema è dunque sottoposto ad un ingresso discontinuo in $t = 0$. L'uscita può scriversi come

$$y(t) = \begin{cases} y_1(t), & t \leq 0 \\ y_2(t), & t > 0. \end{cases}$$

Per $t \leq 0$, l'ingresso è applicato ad un tempo pari a $-\infty$, ed essendo il sistema asintoticamente stabile, l'effetto dei modi naturali dell'evoluzione libera dell'uscita e del suo transitorio saranno sicuramente svaniti. Resta solamente la parte a regime. Pertanto

$$y_1(t) = |G(3j)| \sin(3t + \arg(G(3j))) - G(0) \simeq 0.9303 \sin(3t - 0.1594) - 1.5.$$

Lo stato a regime per $t < 0$ è invece pari a

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} -H_1(0) + |H_1(3j)| \sin(3t + \arg(H_1(3j))) \\ -H_2(0) + |H_2(3j)| \sin(3t + \arg(H_2(3j))) \\ -H_3(0) + |H_3(3j)| \sin(3t + \arg(H_3(3j))) \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} -0.5 + 0.334 \sin(3t - 1.1834) \\ 0.5 + 0.0877 \sin(3t + 0.9098) \\ 0.5 + 0.2774 \sin(3t + 2.1588) \end{bmatrix}.$$

Utile per il prosieguo è particolarizzare lo stato per $t = 0$

$$\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}(0) \simeq \begin{bmatrix} -0.8092 \\ 0.5692 \\ 0.7308 \end{bmatrix}.$$

Per $t > 0$, si può quindi procedere a calcolare la risposta complessiva dell'uscita a partire dallo stato iniziale $\boldsymbol{x}_0$ calcolato in precedenza. L'ingresso è una sinusoide, $u_2(t) = \sin(3t)$ la cui trasformata è $U(s) = \dfrac{3}{s^2 + 9}$. Pertanto

$$y_2(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\boldsymbol{c}(s\boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}_0 - G(s)U(s)\right] = \mathscr{L}^{-1}\left[-\frac{0.6476s^4 - 0.1648s^3 - 5.284s^2 + 4.5168s - 1.0116}{(s+1)^2(s+2)(s^2+9)}\right].$$

Svolgendo con il metodo dei residui e le antitrasformate notevoli si ottiene

$$y_2(t) \simeq 1.5e^{-2t} - 2e^{-t} + te^{-t} + 0.9303 \sin(3t - 0.1594),$$

per $t > 0$.
Combinando assieme i risultati si ottiene che la risposta dell'uscita al segnale in ingresso $\forall t$ è pari a

$$y(t) \simeq \begin{cases} 0.9303 \sin(3t - 0.1594) - 1.5, & t \leq 0 \\ \\ 1.5e^{-2t} - 2e^{-t} + te^{-t} + 0.9303 \sin(3t - 0.1594), & t > 0 \end{cases}$$

2 Esercizio

I diagrammi di Bode della funzione di trasferimento $G(s)$ data nel testo dell'esercizio sono rappresentati in Fig. 2.1. Per prima cosa, occorre portare la funzione di trasferimento nella sua forma ingegneristica

$$G(s) = 125 \frac{s+1}{(s+5)(s^2+4s+25)} = \frac{s+1}{(1+0.2s)\left(1 + 2\dfrac{0.4}{5}s + \dfrac{s^2}{25}\right)}$$

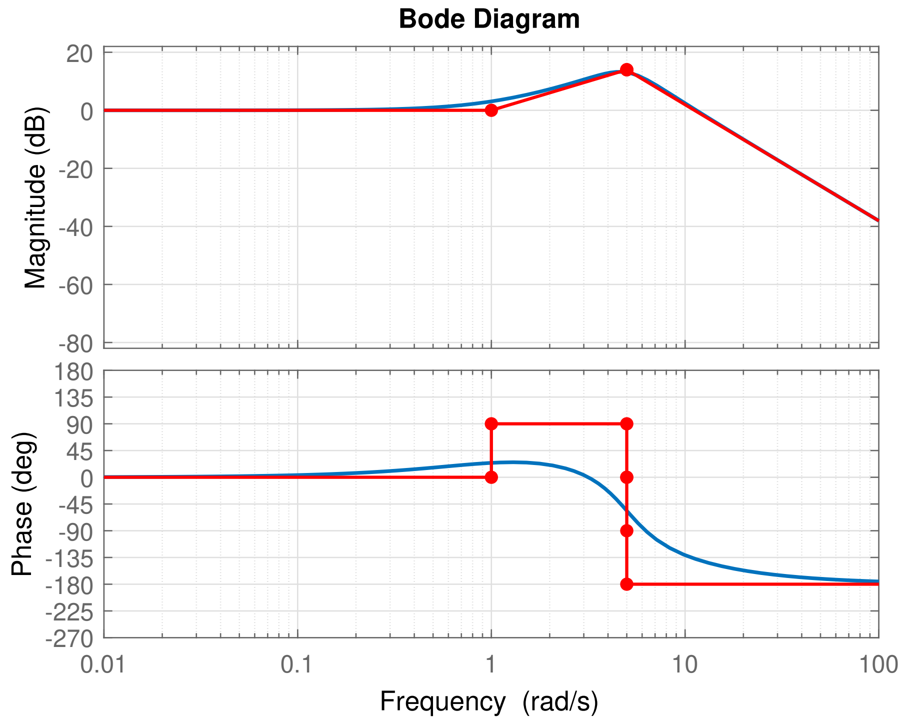

Figura 2.1: Diagramma di Bode di $G(s)$.

Si riconosce al numeratore un termine binomio di molteplicità singola. Al denominatore, invece, vi è un termine binomio di molteplicità singola e uno trinomio molteplicità singola. I parametri riguardanti guadagno del sistema, tipo, costanti di tempo, smorzamenti e pulsazioni naturali sono pari a $\mu = 1$, $g = 0$, $\tau_1 = 1$ s, $T_1 = 0.2$ s, $\omega_n = 5$ rad/s, $\xi = 0.4$. Le pulsazioni di rottura sono quindi uguali a $\omega_1 = 1/|\tau_1| = 1$ rad/s, $\omega_2 = 1/|T_1| = \omega_n = 5$ rad/s.

Poiché il sistema è di tipo 0, il diagramma dei moduli partirà con una retta costante pari a $|\mu|_{dB} = 0$ dB. La prima pulsazione di rottura è in ω_1 ad opera del termine binomio al numeratore di molteplicità singola. La variazione di pendenza relativa del diagramma asintotico è di 20 dB/decade. La correzione del diagramma reale è di 3 dB in ω_1. La seconda pulsazione di rottura è in ω_2 dove vi concorre sia il termine binomio che quello trinomio al denominatore. La variazione di pendenza relativa del diagramma asintotico è di $-20-40 = -60$ dB/decade. La correzione del diagramma reale è somma del contributo del termine binomio al denominatore, pari a -3 dB, e quello del termine trinomio al denominatore pari a $P_R = \left|\frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}\right|_{dB} \simeq$ 2.6954 dB. Quindi $-3+2.6954 \simeq -0.3046$ dB.

Il diagramma delle fasi tiene conto delle solite tecniche di tracciamento. Quindi, il grafico parte da 0 deg siccome il guadagno $\mu > 0$ e il sistema è di tipo 0. Il termine binomio al numeratore, di molteplicità singola, apporta un salto relativo del diagramma asintotico di 90 deg alla relativa pulsazione di rottura. Il termine binomio al denominatore, di molteplicità singola, apporta un salto relativo del diagramma asintotico di -90 deg alla relativa pulsazione di rottura. Il termine trinomio al denominatore, di molteplicità singola, apporta un salto relativo del diagramma asintotico di -180 deg alla relativa pulsazione di rottura. Per effetto di questi contributi, il diagramma delle fasi termina con un tratto piatto pari a -180 deg.

Il tracciamento del diagramma polare (di Nyquist) può seguire il seguente procedimento. Il diagramma reale è rappresentato in Fig. 2.2. Poiché il sistema è di tipo 0, il grafico polare parte nel valore di $\mu = 1$. Inoltre, poiché il sistema è strettamente proprio, il diagramma di Nyquist termina nell'origine.

Nel tratto iniziale, i diagrammi dei moduli e delle fasi indicano che il diagramma polare parte da 1 con fase 0 deg. Il modulo cresce sempre fino a stabilizzarsi a $\simeq 14$ dB, che corrispondono a un modulo di $\simeq 5$ nel piano di Gauss ad una fase di $\simeq -60$ gradi. La fase, in un primo tratto cresce (primo quadrante) per poi rapidamente decrescere senza mai, però, superare i -180 gradi. Quindi, il quarto quadrante è escluso dal diagramma polare. Il modulo va mano mano a decrescere e la fase stabilizzarsi sui -180 gradi. Come altro

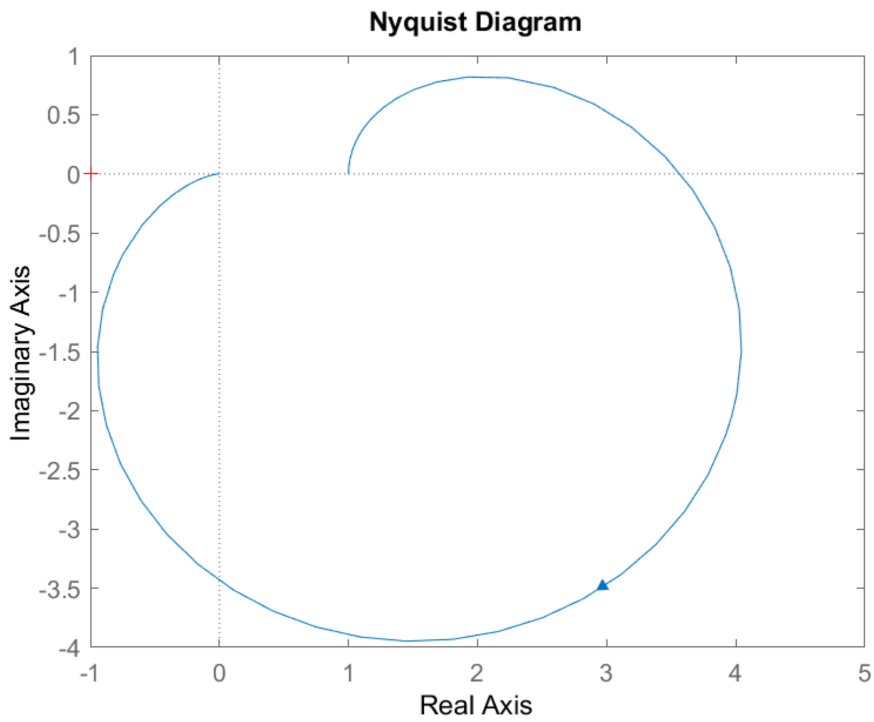

Figura 2.2: Diagramma polare (di Nyquist) della funzione di trasferimento $G(s)$.

punto cardine si può prendere il valore di -90 gradi che è una pulsazione di circa 6 rad/s quando il valore reale del diagrama dei moduli è di circa 11.5 dB, corrispondenti a $\simeq 3.7$ nel piano di Gauss lungo l'asse immaginario puro negativo.

3 Esercizio

La funzione di trasferimento del sistema è pari a

$$G(s) = \mathscr{L}[g_y(t)] = \frac{2}{s+3} - \frac{6}{s+5} + 1 = \frac{s^2+4s+7}{(s+5)(s+3)}.$$

Il sistema è asintoticamente stabile, quindi ammette risposta a regime. Dato il segnale di ingresso si ha

$$y_r(t) = -G(0) + 2G(-2)e^{-2t} - |G(5j)|\sin(5t - \pi/4 + \arg(G(5j))) \simeq -\frac{7}{15} + 2e^{-2t} + 0.6526\sin(5t - \pi/4 + 0.4878).$$

4 Esercizio

Si consideri l'ingresso $u(k) = \bar{u} = 0$. Per trovare gli stati e le uscite di equilibrio occorre risolvere il seguente sistema

$$\begin{aligned}
\bar{x}_1 &= \bar{x}_1^3 + \bar{x}_2 - 5\sin(\bar{u}),\\
\bar{x}_2 &= \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + 2\bar{u}^3,\\
\bar{y} &= (2\bar{x}_1\bar{x}_2 - 1)^2,
\end{aligned}$$

la cui soluzione è $\bar{x}_1 = 0$, $\bar{x}_2 = 0$ e $\bar{y} = 1$.
In generale, le matrici del sistema linearizzato partendo da quello non lineare di partenza risultano essere pari a

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3x_1^2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \; \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -5\cos(u) & 6u^2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \; \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 4x_2(2x_1x_2 - 1) & 4x_1(2x_1x_2 - 1) \end{bmatrix}, \; d = 0.$$

Sostituendo gli stati di equilibrio trovati in precedenza, le matrici del sistema linearizzato con ingresso $\bar{u}$ sono pari a

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -5 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \ \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}, \ d = 0.$$

Risulta possibile studiare le proprietà di stabilità locali del sistema non lineare di partenza a partire dalle matrici della dinamica del sistema linearizzato. Gli autovalori di $\boldsymbol{A}$ sono pari a $\lambda_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\lambda_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Il sistema linearizzato risulta instabile perché λ_1 è in modulo maggiore di uno. Pertanto, anche il sistema non lineare di partenza risulta instabile attorno allo stato di equilibrio definito da $\bar{x}_1$ e $\bar{x}_2$.

ELABORATO TECNICO - TRACCIA N.1 (MATRICOLE PARI)

Risolvere il quesito di seguito riportato utilizzando unicamente lo strumento software Matlab e/o Simulink. Non calcolare nulla a parte su supporti cartacei. Il file generato va consegnato entro il giorno antecedente la prova orale tramite email all'indirizzo del docente con oggetto *[TSI-FSD][Elaborato tecnico]- Cognome Nome Matricola.* In caso di problemi, il discente deve portare un drive USB il giorno della seduta orale. In caso di più files generati, compattare tutto in un file ZIP. ATTENZIONE: nel caso si utilizzi Simulink, salvare il file con compatibilità per la *versione 10.7*. A scanso di equivoci, portare il proprio PC con la versione di Simulink utilizzata.

Si consideri un sistema LTI a tempo continui avente il seguente sistema in forma i-s-u

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t) = \begin{bmatrix} k-1 & 1 & 0 \\ 0 & k-1 & 1 \\ 0 & 0 & k-2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u(t), \tag{4.1}$$

$$y(t) = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(t) + du(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + u(t), \tag{4.2}$$

con $k \in \mathbb{R}$.

- Si scriva uno script per il quale si determinino le proprietà di stabilità asintotica, stabilità semplice ed instabilità del sistema, nonché le proprietà di osservabilità e raggiungibilità, quando il parametro k è nell'intervallo $[5, 5]$.
- Posto $k = 0$, si disegnino i diagrammi di Bode e di Nyquist del sistema.
- Posto $k = 0$, si disegni il valore dell'uscita del sistema quando ad esso è sottoposto l'ingresso $u(t) = \sin(3t) - \delta_{-1}(-t)$, con $t \in [-10, 10]$ s.

Infine, sia data la seguente funzione di trasferimento a tempo discreto (con tempo di campionamento pari a 1)

$$G(z) = \frac{z}{(z-0.1)(z-0.9)(z+0.9)}.$$

Si disegni la risposta dell'uscita all'ingresso $u(k) = 2\delta(k) + (3^k - 1)\delta_{-1}(k)$.

ELABORATO TECNICO - TRACCIA N.2 (MATRICOLE DISPARI)

Risolvere il quesito di seguito riportato utilizzando unicamente lo strumento software Matlab e/o Simulink. Non calcolare nulla a parte su supporti cartacei. Il file generato va consegnato entro il giorno antecedente la prova orale tramite email all'indirizzo del docente con oggetto *[TSI-FSD][Elaborato tecnico]- Cognome Nome Matricola.* In caso di problemi, il discente deve portare un drive USB il giorno della seduta orale. In caso di più files generati, compattare tutto in un file ZIP. ATTENZIONE: nel caso si utilizzi Simulink, salvare il file con compatibilità per la *versione 10.7*. A scanso di equivoci, portare il proprio PC con la versione di Simulink utilizzata.

Sia dato il sistema LTI a tempo continuo caratterizzato dalle seguenti matrici

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ k & -1 & -1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ k \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \ d = 0,$$

con $k \in \mathbb{R}$ un parametro. Far variare k nell'intervallo $[-10, 10]$, con passo significativo, e classificare automaticamente la proprietà di stabilità, raggiungibilità e osservabilità del sistema.

Sia dato il sistema LTI a tempo continuo caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{125(s+1)}{(s+5)(s^2+4s+25)} -$$

Si disegnino i diagrammi di Bode e di Nyquist del sistema. Si determini la banda passante a 3 dB del sistema. Infine, scrivere una rappresentazione i-s-u dello stesso.