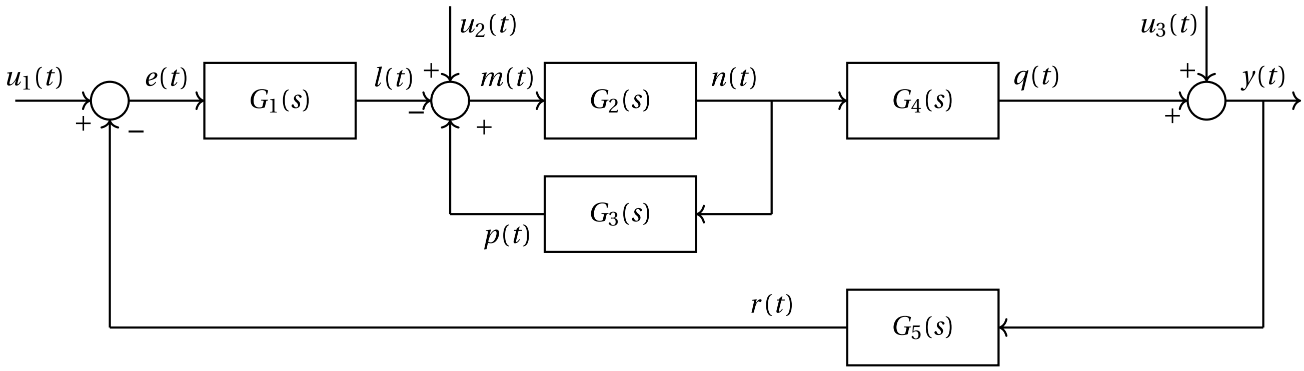
Voto	Traccia Matlab	Cognome, Nome e Matricola

CORSO: TEORIA DEI SISTEMI
DOCENTE: VINCENZO LIPPIELLO

Prova scritta del 12/02/2024

Leggere con attenzione
Il corretto svolgimento del compito prevede che lo studente risponda in maniera chiara ai quesiti proposti e, ove necessario, argomenti i diversi passaggi, espliciti le formule usate, motivi le scelte e non si limiti a riportare i soli risultati dei calcoli.
Alla consegna della prova scritta, l'allievo riceverà la traccia dell'elaborato tecnico da svolgere in ambiente Matlab/Simulink.
Non è consentito consultare appunti o altro materiale, così come è assolutamente vietata ogni forma di collaborazione, pena l'annullamento della prova e il non poter partecipare alla successiva seduta d'esame. Durante la seduta, si forniranno spiegazioni soltanto su quesiti inerenti la comprensione della traccia.
Durata della prova: 3 ore.



1. Si calcoli la funzione di trasferimento dello schema a blocchi rappresentato nella precedente figura. **[Punti: 5]**

2. Si consideri il sistema a tempo continuo avente polinomio caratteristico
$$\varphi(\lambda) = \lambda^5 + 6\lambda^4 + 14\lambda^3 + 16\lambda^2 + k\lambda + 2,$$
con $k \in \mathbb{R}$. Si trovino i valori di k affinché il sistema si asintoticamente stabile. **[Punti: 5]**

3. Si consideri il sistema tempo continuo avente la seguente equazione ingresso-uscita
$$\dddot{y}(t) + (k+2)\ddot{y}(t) + (k^2+2k+1)\dot{y}(t) + k(k^2+1)y(t) = (2-k)\dot{u}(t) - (k^2+k+2)u(t),$$
con $k \in \mathbb{R}$.
   a) Si scriva la funzione di trasferimento del sistema e si determini una forma i-s-u. **[Punti: 3]**
   b) Si calcolino i valori di k che rendono il sistema asintoticamente stabile. **[Punti: 2]**
   c) Posto $k = 1$, si calcoli l'uscita del sistema quando esso è sottoposto all'ingresso $u = (1-\cos(t))\delta_{-1}(-t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. **[Punti: 7]**

4. Sia dato il sistema LTI a tempo continuo caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento
$$G(s) = \frac{(s^2+0.04)(s^2+100)}{(s^2+1)(s^2+4s+4)}.$$
Si disegnino i diagrammi asintotici di Bode, apportando le dovute correzioni. **[Punti: 5]**

5. Si consideri il sistema LTI a tempo discreto espresso dalla seguente forma i-s-u
$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k) = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0.5 \\ 1/3 & 0.5 & 0.5 \\ 1/3 & 0.5 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(k).$$
Si disegni la rete di pagine web che abbia come modello dinamico quello espresso dalla forma precedente e dare un'adeguata giustificazione. **[Punti: 3]**

Soluzione

1 Esercizio

Si riconosce che il sistema raffigurato è di tipo MISO, con tre ingressi e una uscita. Pertanto, la funzione di trasferimento può essere scritta come

$$Y(s) = \boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{U}(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & G_{13}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ U_3(s) \end{bmatrix}, \tag{1.1}$$

con $G_{1i}(s)$ la funzione di trasferimento fra y e u_i, $i = 1, \ldots, 3$, quando gli altri segnali di ingresso sono nulli. Si proceda quindi ora scrivere le relazioni fra i vari segnali dello schema a blocchi direttamente nel dominio di Laplace

$$E(s) = U_1(s) - R(s), \tag{1.2a}$$
$$L(s) = G_1(s)E(s), \tag{1.2b}$$
$$M(s) = -L(s) + U_2(s) + P(s), \tag{1.2c}$$
$$N(s) = G_2(s)M(s), \tag{1.2d}$$
$$P(s) = G_3(s)N(s), \tag{1.2e}$$
$$Q(s) = G_4(s)N(s), \tag{1.2f}$$
$$Y(s) = Q(s) + U_3(s), \tag{1.2g}$$
$$R(s) = G_5(s)Y(s). \tag{1.2h}$$

Grazie alla sovrapposizione degli effetti, per il calcolo di $G_{11}(s)$ si procede algebricamente come segue ponendo $u_2(t) = u_3(t) = 0$. Per prima cosa, è utile risolvere la relazione che lega $N(s)$ con $L(s)$ quando $u_2(t) = 0$. Questa è pari a

$$N(s) = G_2(s)M(s) = G_2(s)(-L(s) + P(s)) = G_2(s)(-L(s) + G_3(s)N(s)) \Rightarrow N(s) = \frac{G_2(s)}{G_2(s)G_3(s) - 1}L(s).$$

Dunque, svolgendo per esteso i conti, partendo dall'uscita, la relazione che lega $Y(s)$ con $U_1(s)$, quindi la $G_{11}(s)$ si ottiene come

$$\begin{aligned} Y(s) = Q(s) = G_4(s)N(s) &= \frac{G_2(s)G_4(s)}{G_2(s)G_3(s) - 1}L(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)G_4(s)}{G_2(s)G_3(s) - 1}E(s) \\ &= \frac{G_1(s)G_2(s)G_4(s)}{G_2(s)G_3(s) - 1}(U_1(s) - R(s)) = \frac{G_1(s)G_2(s)G_4(s)}{G_2(s)G_3(s) - 1}(U_1(s) - G_5(s)Y(s)). \end{aligned}$$

Da cui

$$Y(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)G_4(s)}{G_1(s)G_2(s)G_4(s)G_5(s) + G_2(s)G_3(s) - 1}U(s),$$

pertanto

$$G_{11}(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)G_4(s)}{G_1(s)G_2(s)G_4(s)G_5(s) + G_2(s)G_3(s) - 1}.$$

Per il calcolo di $G_{12}(s)$ si procede algebricamente come prima ponendo $u_1(t) = u_3(t) = 0$. Svolgendo i conti si ottiene

$$G_{12}(s) = \frac{G_2(s)G_4(s)}{G_1(s)G_2(s)G_4(s)G_5(s) + G_2(s)G_3(s) - 1}.$$

Infine, per il calcolo di $G_{13}(s)$ si pone $u_1(t) = u_2(t) = 0$. Svolgendo i conti si ottiene

$$G_{13}(s) = \frac{1 - G_2(s)G_3(s)}{G_1(s)G_2(s)G_4(s)G_5(s) + G_2(s)G_3(s) - 1}.$$

2 Esercizio

Per risolvere il quesito si può utilizzare il criterio di Routh. Si costruisca quindi la tabella di Routh corrispondente al polinomio dato nel testo del quesito come segue.

#			
5	1	14	k
4	6	16	2
3	$\frac{34}{3}$	$k-\frac{1}{3}$	
2	$\frac{255}{17}-\frac{9}{17}k$	2	
1	$\frac{9k^2-278k+477}{9k-275}$		
0	2		

Tabella 2.1: Tabella di Routh associata al polinomio nel testo del quesito.

Il criterio di Routh afferma che il polinomio da cui si è costruita la relativa tabella ha radici tutte a parte reale negativa se e solo se la prima colonna della tabella corrispondente ha tutti i termini dello stesso segno. Per verificare l'asintotica stabilità del sistema LTI associato al polinomio dato nel testo del quesito, occorre trovare i valori di k che rendono concordi in segno i termini della prima colonna della Tabella 2.1. Quindi, occorre risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} 275-9k>0 \\ \left[\begin{array}{l} 9k^2-278k+477>0 \\ 9k-275>0 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k<30.5556 \\ 1.8235<k<29.0654 \vee k>30.5556 \end{cases} \Rightarrow 1.8235<k<29.0654$$

dove le parentesi quadre indicano un sistema di segno. Pertanto, il polinomio caratteristico $\varphi(\lambda)$ ha tutte radici a parte reale negativa quando $1.8235 < k < 29.0654$. Per tali valori del parametro k, il sistema è asintoticamente stabile.

3 Esercizio

Quesito a.

La funzione di trasferimento del sistema è pari a

$$G(s) = \frac{(2-k)s-k^2-k-2}{s^3+(k+2)s^2+(k^2+2k+1)s+k(k^2+1)}.$$

Una forma i-s-u, utilizzando la forma canonica di raggiungibilità, ha le seguenti matrici

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -k(k^2+1) & -(k+1)^2 & -(k+2) \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} -k^2-k-2 & 2-k & 0 \end{bmatrix},\ d=0.$$

Quesito b.

Il polinomio caratteristico del sistema è dato dal denominatore della $G(s)$ pari a $\varphi(\lambda) = \lambda^3+(k+2)\lambda^2+(k^2+1)^2\lambda+k(k^2+1)$, le cui radici sono $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_{2,3} = -1 \pm jk$. Il sistema, quindi, ammette radici tutte a parte reale negativa se e solo se $k > 0$.

Quesito c.

Posto $k = 1$, la forma i-s-u del sistema assume le seguenti matrici

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ d=0.$$

La funzione di trasferimento del sistema è invece pari a

$$G(s) = \frac{s-4}{s^3+3s^2+4s+2}.$$

L'ingresso assume la seguente forma

$$u(t) = \begin{cases} 1-\cos(t), \ t \le 0, \\ 0, \ t > 0. \end{cases}$$

La risposta complessiva $y(t)$ si può suddividere come

$$y(t) = \begin{cases} y_1(t), \ t \le 0, \\ y_2(t), \ t > 0. \end{cases}$$

Si cominci dal caso $t \le 0$ e si provveda a calcolare $y_1(t)$. Il sistema è asintoticamente stabile per quanto visto al quesito *a)*. Gli autovalori sono pari a $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -1 \pm j$. Poiché si presuppone che i segnali siano stati applicati ad un tempo $t = -\infty$, qualunque istante di tempo $t < 0$ si consideri, si può presupporre che le evoluzioni libere ed il transitorio si siano già estinti: il sistema è quindi a regime. Il legame fra l'uscita $y_1(t)$ e l'ingresso $u(t)$ è dato dalla seguente funzione di trasferimento Sapendo che $Y_1(s) = G(s)U(s)$, per il teorema della risposta armonica si può scrivere

$$y_1(t) = G(0) - |G(j)|\cos(t + \arg(G(j))) \simeq -2 - 1.3038\cos(t + 1.0041).$$

Per il prosieguo, sarà utile avere a disposizione anche l'evoluzione dello stato per $t \le 0$ Pertanto, con considerazioni similari fatti per l'uscita, l'evoluzione per $t \le 0$ potrà essere calcolata a partire dall'espressione

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[(s\boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}U(s)\right].$$

Chiamando $\boldsymbol{H}(s) = (s\boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}$ la matrice delle risposte impulsive nello stato, si ottiene

$$\boldsymbol{H}(s) = \begin{bmatrix} H_{1,1}(s) \\ H_{1,2}(s) \\ H_{1,3}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s^3+3s^2+4s+2} \\ \dfrac{s}{s^3+3s^2+4s+2} \\ \dfrac{s^2}{s^3+3s^2+4s+2} \end{bmatrix}.$$

Giacché per $t \le 0$ anche lo stato sarà al suo andamento di regime, applicando nuovamente il teorema della risposta armonica si può concludere che

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{1,1}(0) - |H_{1,1}(j)|\cos(t + \arg(H_{1,1}(j))) \\ H_{1,2}(0) - |H_{1,2}(5j)|\cos(t + \arg(H_{1,2}(j))) \\ H_{1,3}(0) - |H_{1,3}(j)|\cos(t + \arg(H_{1,3}(j))) \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 0.5 - 0.3162\cos(t - 1.8925) \\ -0.3162\cos(t - 0.3218) \\ -0.3162\cos(t + 1.249) \end{bmatrix}.$$

Particolarizzando lo stato in $t = 0$ (istante di apertura dell'interruttore) si ottiene $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \simeq \begin{bmatrix} 0.6 \\ -0.3 \\ -0.1 \end{bmatrix}$.

Per $t > 0$, invece, il sistema è in evoluzione libera. Anche in questo caso, il sistema è asintoticamente stabile per quanto visto nel quesito precedente. L'uscita $y_2(t)$ a partire dal tempo $t = 0$ è calcolabile come

$$y_2(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\boldsymbol{c}\,(s\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{A}_2)^{-1}\boldsymbol{x}_0\right], \tag{3.1}$$

con

$$\boldsymbol{c}\,(s\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{A}_2)^{-1} = \begin{bmatrix} -\dfrac{2(2s^2+6s+9)}{s^3+3s^2+4s+2} & \dfrac{s^2-s-12}{s^3+3s^2+4s+2} & \dfrac{s-4}{s^3+3s^2+4s+2} \end{bmatrix}.$$

Sostituendo la precedente nella (3.1), si ottiene

$$y_2(t) \simeq -e^{-t}(2.5 + 1.6125\sin(t + 0.1244)).$$

La risposta complessiva del sistema $\forall\, t \in \mathbb{R}$ risulta dunque pari a

$$y(t) \simeq \begin{cases} -2 - 1.3038\cos(t + 1.0041), \ t \le 0, \\ -e^{-t}(2.5 + 1.6125\sin(t + 0.1244)), \ t > 0. \end{cases}$$

4 Esercizio

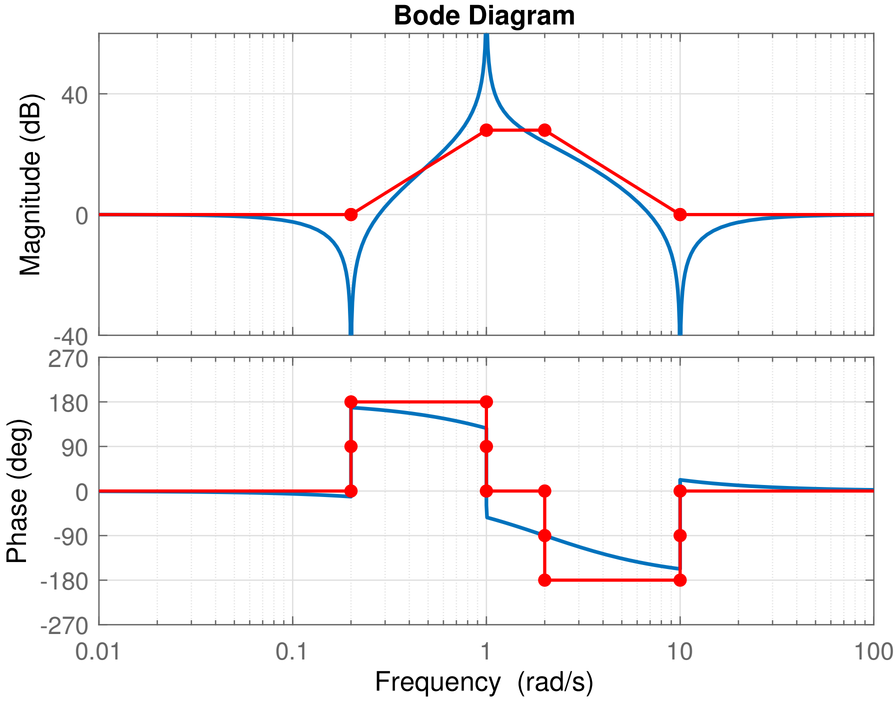


Figura 4.1: Diagramma di Bode della funzione di trasferimento $G(s)$.

La forma ingegneristica di tale funzione di trasferimento è pari a

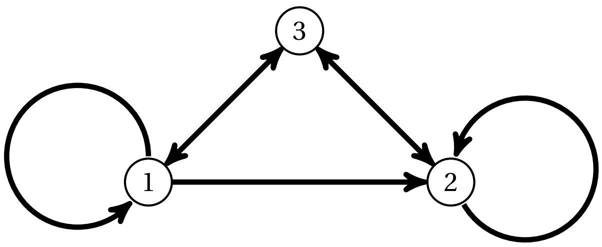
$$G(s) = \frac{\left(1+\dfrac{s^2}{0.04}\right)\left(1+\dfrac{s^2}{100}\right)}{(1+s^2)(1+0.5s)^2}.$$

Si riconoscono al numeratore due termini trinomio di molteplicità singola. Al denominatore, invece, vi è un termine binomio di molteplicità doppia e un termine trinomio di molteplicità singola. I parametri riguardanti guadagno del sistema, tipo, costanti di tempo, smorzamenti e pulsazioni naturali sono pari a $\mu = 1$, $g = 0$, $\alpha_{n,1} = 0.2$ rad/s, $\zeta_1 = 0$, $\alpha_{n,2} = 10$ rad/s, $\zeta_2 = 0$, $\omega_n = 1$ rad/s, $\xi = 0$, $T = 0.5$ s. Le pulsazioni di rottura, in ordine crescente, sono quindi pari a $\omega_1 = \alpha_{n,1} = 0.2$ rad/s,$\omega_2 = \omega_n = 1$ rad/s, $\omega_3 = 1\|T| = 2$ rad/s e $\omega_4 = \alpha_{n,2} = 10$ rad/s.
Poiché il sistema è di tipo 0, il diagramma dei moduli partirà con un tratto piatto di valore $\mu_{dB} = 0$ dB. La prima pulsazione di rottura è in ω_1 ad opera del termine trinomio al numeratore di molteplicità singola. La variazione di pendenza relativa del diagramma asintotico è di 40 dB/decade. Poiché lo smorzamento associato è $\zeta_1 = 0$, si avrà un asintoto verticale che tende a $-\infty$ dB. La seconda pulsazione di rottura è in ω_2 ad opera del termine trinomio al denominatore di molteplicità singola. La variazione di pendenza relativa del diagramma asintotico è di -40 dB/decade. La correzione relativa è di -6 dB, anche se non vi almeno una decade fra questa pulsazione di rottura e quella che la precede. Il grafico reale mostra infatti una correzione di circa -4 dB. La terza pulsazione di rottura è in ω_3 ad opera del termine binomio al denominatore di molteplicità doppia. La variazione di pendenza relativa del diagramma asintotico è di -40 dB/decade La quarta pulsazione di rottura è in ω_4 ad opera del termine trinomio al numeratore di molteplicità singola. La variazione di pendenza relativa del diagramma asintotico è di 40 dB/decade. Poiché lo smorzamento associato è $\zeta_2 = 0$, si avrà un asintoto verticale che tende a $-\infty$ dB.
Il diagramma delle fasi tiene conto delle solite tecniche di tracciamento. Quindi, il grafico parte da 0 deg siccome il guadagno $\mu > 0$ e il sistema è di tipo 0. Il primo termine trinomio al numeratore, di molteplicità singola, apporta un salto relativo del diagramma asintotico di 180 deg alla relativa pulsazione di rottura. La correzione di questo termine provoca un salto verticale di 180 deg nel diagramma delle fasi perché $\zeta_1 = 0$.

In ω_1 il grafico asintotico delle fasi passa per $\simeq 63$ deg perché risente della correzione del termine dovuto a ω_2. Pertanto, il grafico reale della fase ha un salto in ω_1 che parte da $63-90=-27$ deg e termina in $63+90=153$ deg. In realtà si ha una discrepanza da quanto mostrato in Fig. 4.1 perche l'influenza della pulsazione successiva è troppo vicina per rendere affidabile questa correzione a mano. Il termine trinomio al denominatore, di molteplicità singola, apporta un salto relativo del diagramma asintotico di -180 deg alla relativa pulsazione di rottura. La correzione di questo termine provoca un salto verticale di 180 deg nel diagramma delle fasi perché $\xi=0$. In ω_2 il grafico asintotico delle fasi passa per $\simeq 0$ deg. Pertanto, il grafico reale della fase ha un salto in ω_2 che parte da -90 deg e termina in 90 deg. In realtà si ha una discrepanza da quanto mostrato in Fig. 4.1 perché l'influenza della pulsazione successiva è troppo vicina per rendere affidabile questa correzione a mano. Il termine binomio al denominatore, di molteplicità doppia, apporta un salto relativo del diagramma asintotico di -180 deg alla relativa pulsazione di rottura. Infine, l'ultimo termine trinomio al numeratore, di molteplicità singola, apporta un salto relativo del diagramma asintotico di 180 deg alla relativa pulsazione di rottura. La correzione di questo termine provoca un salto verticale di 180 deg nel diagramma delle fasi perché $\zeta_2=0$. In ω_4 il grafico asintotico delle fasi passa per $\simeq -63$ deg. Pertanto, il grafico reale della fase ha un salto in ω_4 che parte da $-63-90=-153$ deg e termina in $-63+90=27$ deg. Questa correzione è più accurata delle altre perché non vi sono pulsazioni influenti nelle vicinanze di ω_4.
Per effetto di questi contributi, il diagramma delle fasi termina con un tratto piatto pari a 0 deg.

5 Esercizio

Ricordando dalla teoria come si costruisce la matrice dei link, è possibile effettuare il procedimento inverso ed ottenere la rete di pagine web raffigurata nella figura sottostante .



La giustificazione è data dal fatto che il singolo elemento della matrice dinamica $a_{i,j}$, con $i,j=1,\ldots,n$ è dato da

$$a_{i,j}=\begin{cases}\dfrac{1}{n_j}, & \text{se } j \text{ ha un collegamento verso } i, \text{ con } n_j \text{ il numero dei collegamenti uscenti da } j,\\ 0, & \text{altrimenti.}\end{cases}$$

ELABORATO TECNICO - TRACCIA N.1 (MATRICOLE PARI)

Risolvere il quesito di seguito riportato utilizzando unicamente lo strumento software Matlab e/o Simulink. Non calcolare nulla a parte su supporti cartacei. Il file generato va consegnato entro il giorno antecedente la prova orale tramite email all'indirizzo del docente con oggetto *[TSI-FSD][Elaborato tecnico]- Cognome Nome Matricola*. In caso di problemi, il discente deve portare un drive USB il giorno della seduta orale. In caso di più files generati, compattare tutto in un file ZIP. ATTENZIONE: nel caso si utilizzi Simulink, salvare il file con compatibilità per la *versione 10.7*. A scanso di equivoci, portare il proprio PC con la versione di Simulink utilizzata.

Sia dato il sistema LTI a tempo continuo descritto dalle matrici

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -k(k^2+1) & -(k+1)^2 & -(k+2) \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} -k^2-k-2 & 2-k & 0 \end{bmatrix}, \ d = 0.$$

Far variare k nell'intervallo $[-10, 10]$, con passo significativo, e classificare automaticamente la proprietà di stabilità, raggiungibilità e osservabilità del sistema.
Posto d'ora in avanti $k = 1$, si calcolino gli stati di equilibrio del sistema. si disegni l'uscita totale del sistema quando esso è sottoposto all'ingresso $u(t) = (1-\cos(t)\delta_{-1}(-t)$, in un intervallo $t \in [-15, 15]$.

ELABORATO TECNICO - TRACCIA N.2 (MATRICOLE DISPARI)

Risolvere il quesito di seguito riportato utilizzando unicamente lo strumento software Matlab e/o Simulink. Non calcolare nulla a parte su supporti cartacei. Il file generato va consegnato entro il giorno antecedente la prova orale tramite email all'indirizzo del docente con oggetto *[TSI-FSD][Elaborato tecnico]- Cognome Nome Matricola*. In caso di problemi, il discente deve portare un drive USB il giorno della seduta orale. In caso di più files generati, compattare tutto in un file ZIP. ATTENZIONE: nel caso si utilizzi Simulink, salvare il file con compatibilità per la *versione 10.7*. A scanso di equivoci, portare il proprio PC con la versione di Simulink utilizzata.

Sia dato il seguente sistema LTI a tempo continuo

$$G(s) = \frac{(s^2+0.04)(s^2+100)}{(s^2+1)(s^2+4s+4)}.$$

Disegnare i diagrammi di Bode e di Nyquist del sistema in due finestre separate.

Sia dato il seguente sistema LTI a tempo discreto

$$W(z) = \frac{z(z-1)}{z^2-0.9z+k}.$$

Far variare k nell'intervallo $[-10, 10]$, con passo significativo, e classificare automaticamente la proprietà di stabilità, raggiungibilità e osservabilità del sistema.
Posti d'ora in avanti $k = 0.2$, si calcoli una rappresentazione i-s-u del sistema. Si disegni l'uscita totale del sistema quando esso è sottoposto all'ingresso $u(k) = -\delta(k) + (3^k+1)\delta_{-1}(k)$, in un intervallo $k \in [0, 15]$.