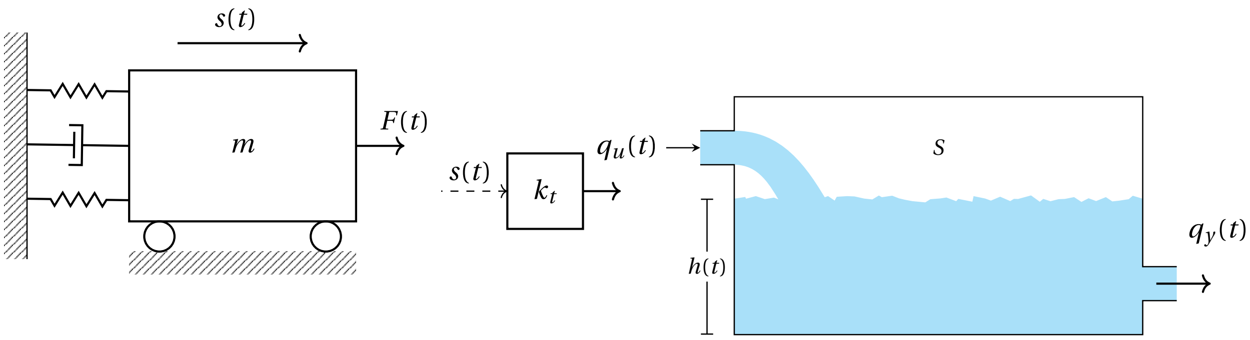
| Voto | Traccia Matlab | Cognome, Nome e Matricola |
|---|---|---|
| | | |

CORSO: TEORIA DEI SISTEMI
DOCENTE: VINCENZO LIPPIELLO

# Prova scritta del 08/09/2025

**Leggere con attenzione**
Il corretto svolgimento del compito prevede che lo studente risponda in maniera chiara ai quesiti proposti e, ove necessario, argomenti i diversi passaggi, espliciti le formule usate, motivi le scelte e non si limiti a riportare i soli risultati dei calcoli.
L'allievo potrà scaricare la traccia dell'elaborato tecnico da svolgere in ambiente Matlab/Simulink dal sito docenti.
Non è consentito consultare appunti o altro materiale, così come è assolutamente vietata ogni forma di collaborazione, pena l'annullamento della prova e il non poter partecipare alla successiva seduta d'esame. Durante la seduta, si forniranno spiegazioni soltanto su quesiti inerenti la comprensione della traccia.
Durata della prova: 3 ore.




1. Si consideri lo schema a blocchi sopra rappresentato, per il quale si è scelto come ingressi la forza $u_1(t) = F(t)$ applicata al carrello e la portata in uscita al serbatoio, $u_2(t) = q_y(t)$. L'uscita del sistema è l'altezza del serbatoio, $y(t) = h(t)$. I componenti del sistema meccanico sono $k > 0$, costante elastica uguale per entrambe le molle, e $b > 0$, costante di smorzamento viscoso. Per il serbatoio, $S > 0$ è la sua sezione. La posizione $s(t)$ del carrello è trasformata nella portata di ingresso del serbatoio, $q_u(t)$, attraverso un guadagno $k_t > 0$. Si scriva e si classifichi il modello i-s-u del sistema complessivo. **[Punti: 5]** Considerati come ingressi $u_1(t) = \bar{u}_1$ e $u_2(t) = \bar{u}_2$, si verifichi quando il sistema ammette stati di equilibrio e calcolarne l'espressione. **[Punti: 3]**

2. Si consideri il seguente sistema dinamico LTI a tempo continuo, con $k \in \mathbb{R}$,

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t) = \begin{bmatrix} k & 1 & 0 \\ 0 & k+1 & 0 \\ 0 & 1 & k \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ k \\ 1 \end{bmatrix} u(t),$$
$$y(t) = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & k \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t).$$

   a) Trovare tutte le condizioni di stabilità del sistema al variare del parametro $k$. **[Punti: 2]**
   b) Si studi al raggiungibilità e l'osservabilità del sistema al variare dl parametro $k$. Laddove il sistema non fosse in forma minima, porre $k = -2$ e trovare la matrice di trasformazione che porta il sistema in forma canonica di Kalman. **[Punti: 4]**
   c) Posti $k = -2 - \delta_{-1}(t)$ e $u(t) = 2 + \cos(5t)$, si calcoli l'uscita del sistema, $y(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. **[Punti: 7]**

3. Sia dato il sistema LTI a tempo continuo caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{8} \frac{(s+20)(s^2+0.02s+1)}{(s+0.1)(s^2+0.01s+25)}.$$

   Si disegnino i diagrammi asintotici di Bode, apportando le dovute correzioni. **[Punti: 5]**

4. Data la funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{1}{s^2+105s+500}$ di un sistema a tempo continuo, calcolarne la forma i-s-u del sistema a dati campionati approssimante le sue dinamiche, scegliendo opportunamente il periodo di campionamento $T_s$. **[Punti: 4]**

## Soluzione

### 1 Esercizio

Il primo blocco è un sistema massa-molla-smorzatore. Il sistema ha un grado di libertà in quanto la posizione del carrello descrive in maniera univoca il sottosistema. Ricordando le relazioni costitutive per l'elemento elastico e l'elemento smorzatore, è possibile scrivere le seguenti relazioni per le forze agenti sulle singole masse: $F_s(t) = b(\dot{s}(t) - 0)$, $F_{e_1}(t) = k(s(t) - 0)$ e $F_{e_e}(t) = k(s(t) - 0)$. Scrivendo la seconda legge di Newton l'elemento inerziale di massa $m$ lungo l'unica direzione di moto lungo la quale si esplica l'accelerazione, e con riferimento per quanto concerne i segni delle varie componenti, si può ottenere quanto segue

$$m\ddot{s}(t) = -F_{e_1}(t) - F_{e_2}(t) - F_s(t) + F(t)$$

Con semplici manipolazioni è possibile quindi ricavare il modello del sistema meccanico

$$m\ddot{s}(t) + b\dot{s}(t) + 2ks(t) = F(t). \tag{1.1}$$

Dal secondo blocco risulta banalmente la relazione statica

$$q_u(t) = k_t s(t). \tag{1.2}$$

Il terzo blocco dello schema è infine costituito da un serbatoio la cui equazione dinamica è

$$S\dot{h}(t) = q_u(t) - q_y(t). \tag{1.3}$$

Seguendo la traccia del quesito, si ponga come variabile di ingresso la forza applicata al carrello, $u_1(t) = F(t)$, e la portata di uscita del serbatoio, $u_2(t) = q_y(t)$. Come uscita si scelga l'altezza del serbatoio, $y(t) = h(t)$. Si scelgano come variabili di stato $x_1(t) = s(t)$, $x_2(t) = \dot{s}(t)$ e $x_3(t) = h(t)$. Con queste scelte, a partire da (1.1), (1.2) e (1.3), è possibile pervenire al seguente sistema i-s-u dell'intero schema a blocchi

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \tag{1.4a}$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{2k}{m}x_1(t) - \frac{b}{m}x_2(t) + \frac{1}{m}u_1(t), \tag{1.4b}$$

$$\dot{x}_3(t) = \frac{k_t}{S}x_1(t) - \frac{1}{S}u_2(t), \tag{1.4c}$$

$$y(t) = x_3(t). \tag{1.4d}$$

Il sistema è di ordine 3, tempo continuo, SISO, strettamente proprio, lineare e tempo invariante (LTI). È possibile scrivere il sistema in forma matriciale con matrici

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2k}{m} & -\frac{b}{m} & 0 \\ \frac{k_t}{S} & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{S} \end{bmatrix},\ \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice della dinamica, $\boldsymbol{A}$, non ha mai determinante diverso da zero, quindi il sistema ammette nessuno o infiniti stati di equlibrio. Per calcolarli, andiamo ad applicare per ispezione la definizione e si ottiene

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{x}_2, \\ 0 &= -\frac{2k}{m}\bar{x}_1 - \frac{b}{m}\bar{x}_2 + \frac{1}{m}\bar{u}_1, \\ 0 &= \frac{k_t}{S}\bar{x}_1 - \frac{1}{S}\bar{u}_2. \end{aligned}$$

Da questa si ottiene che si possono ottenere stati di equilibrio se e solo se $\bar{x}_1 = \frac{1}{k_t S}\bar{u}_2 = \frac{1}{2k}\bar{u}_1$. Questo avviene quando ad esempio $\bar{u}_2 = \frac{k_t S}{2k}\bar{u}_1$, ossia quando la portata di uscita ha un particolare valore costante dipendente dai parametri geometrici del sistema e da primo ingresso costante. Se così avviene, si hanno infiniti stati di equilibrio pari a

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2k}\bar{u}_1 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix},$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$.

## 2 Esercizio

**Quesito a.**
Il polinomio caratteristico della matrice $\boldsymbol{A}$ è pari a $\varphi(\lambda) = (\lambda - k - 1)(\lambda - k)^2$. Gli autovalori sono pari a $\lambda_1 = \lambda_2 = k$ e $\lambda_3 = k+1$. Gli autovalori sono quindi tutti reali.
Il sistema è asintoticamente stabile quando tutti gli autovalori sono minori di zero, quindi $k < 0 \wedge k < -1 \Rightarrow k < -1$.
Il sistema è instabile quando un autovalore è maggiore di zero, ossia $k > 0 \vee k > -1 \Rightarrow k > -1$.
Il sistema è stabile quando un autovalore è nullo e gli altri minori di zero, ossia $k = -1$. Quando $k = 0$ si hanno due autovalori nulli, ma l'ultimo è positivo, $\lambda_3 = 1$, quindi inutile guardare diagonalizzabilità o meno della matrice: il sistema è instabile perché si ricade nel punto precedente.

**Quesito b.**
La matrice di raggiungibilità è pari a

$$\boldsymbol{M}_r = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{b} & \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k & k(2k+1) \\ k & k(k+1) & k(k+1)^2 \\ 1 & 2k & k^2 + k(2k+1) \end{bmatrix}$$

Il determinante di questa matrice è pari a 0. Il sistema non è quindi completamente raggiungibile.
La matrice di osservabilità è pari a

$$\boldsymbol{M}_o = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}^T & \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{c}^T & \boldsymbol{A}^{2^T}\boldsymbol{c}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k & k^2 \\ 0 & k+1 & 2k + k(2k+1) + 1 \\ k & k^2 & k^3 \end{bmatrix}.$$

Il determinante di questa matrice è pari a 0. Il sistema non è completamente osservabile.
Il sistema risulta quindi non in forma minima. Sostituendo $k = -2$ nelle precedenti matrici si ottiene

$$\boldsymbol{M}_{r,1} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 6 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & -4 & 10 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{M}_{o,1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & -8 \end{bmatrix}.$$

Il rango di $\boldsymbol{M}_{r,1}$ e $\boldsymbol{M}_{o,1}$ è pari a 2.
Per la procedura della scomposizione canonica di Kalman, prendiamo le colonne linearmente indipendenti di $\boldsymbol{M}_{r,1}$, ossia

$$X_r :< \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} > .$$

Prendiamo anche due colonne linearmente indipendenti di $\boldsymbol{M}_{o,1}$ che è

$$X_o :< \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} > .$$

Calcoliamo ora il nullo di $\boldsymbol{M}_{r,1}^T$ pari a

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -4 \\ 6 & -2 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow z_1 = -3z_2 \wedge z_3 = 2z_2 \Rightarrow X_{n,r} :< \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} > .$$

Calcoliamo ora il nullo di $\boldsymbol{M}_{o,1}^T$ pari a

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 4 \\ 4 & 3 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow z_2 = 0 \wedge z_1 = 2z_3 \Rightarrow X_{n,o} :< \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} > .$$

Si prendano ora le colonne $X_1 = X_r \cap X_{n,o}$. Questo insieme è vuoto perché i vettori sono linearmente indipendenti.
Si prendano ore le colonne $X_2 = X_r \cap \left(X_{n,r} \cup X_o\right)$. Questo sarà pari a $X_r$ stesso perché $X_{n,r} \cup X_o$ danno tre vettori linearmente indipendenti che coprono tutto $\mathbb{R}^3$, quindi qualsiasi vettore di tre componenti sarà contenuto in questo spazio vettoriale. Quindi $X_2 = X_r :< \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} >$.
Si prendano ora le colonne $X_3 = X_{n,o} \cap \left(X_{n,r} \cup X_o\right)$. Questo darà proprio $X_{n,o}$ in quanto, come sopra, $X_{n,r} \cup X_o$ danno tre vettori linearmente indipendenti che coprono tutto $\mathbb{R}^3$, quindi qualsiasi vettore di tre componenti sarà contenuto in questo spazio vettoriale. Quindi $X_3 = X_{n,o} :< \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} >$.
Si prendano ora le colonne $X_4 = X_{n,r} \cap X_o$. Questo insieme è vuoto perché i vettori sono linearmente indipendenti fra loro.
Dunque, la matrice di trasformazione di Kalman sarà data da

$$\boldsymbol{T}_k^{-1} = \begin{bmatrix} X_2 & X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Quesito c.**
La risposta complessiva $y(t)$ si può suddividere come

$$y(t) = \begin{cases} y_1(t), & t < 0, \\ y_2(t), & t \geq 0. \end{cases}$$

Questo riflette il cambio di valore del parametro pari a

$$k = \begin{cases} -2, & t < 0, \\ -3, & t \geq 0. \end{cases}$$

Si cominci dal caso $t < 0$ e si provveda a calcolare $y_1(t)$. Dopo aver sostituito il valore $k = -2$ nelle matrici si ottiene

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \ d = 0.$$

Il sistema è asintoticamente stabile per quanto visto al quesito *a)*. Gli autovalori sono pari a $\lambda_{1,2} = -2$, $\lambda_3 = -1$.
Poiché si presuppone che i segnali siano stati applicati ad un tempo $t = -\infty$, qualunque istante di tempo $t < 0$ si consideri, si può presupporre che le evoluzioni libere ed il transitorio si siano già estinti: il sistema è quindi a regime. Il legame fra l'uscita $y_1(t)$ e l'ingresso $u(t)$ è dato dalla seguente funzione di trasferimento

$$\boldsymbol{W}_1(s) = \boldsymbol{c}_1(s\boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{A}_1)^{-1}\boldsymbol{b}_1 = -\frac{2s}{(s+1)(s+2)}.$$

Sapendo che $Y_1(s) = W_1(s)U(s)$, per la sovrapposizione degli effetti, il calcolo a regime con ingresso costante e il teorema della risposta armonica si può scrivere

$$y_1(t) = 2W_1(0) + |W_1(5j)|\cos(5t + \arg(W_1(5j))) \simeq 0.3642\cos(5t + 2.1487).$$

Per il prosieguo, sarà utile avere a disposizione anche l'evoluzione dello stato per $t < 0$ Pertanto, con considerazioni similari fatti per l'uscita, l'evoluzione per $t < 0$ potrà essere calcolata a partire dall'espressione

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[(s\boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{A}_1)^{-1}\boldsymbol{b}_1 U(s)\right].$$

Chiamando $\boldsymbol{H}_1(s) = (s\boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{A}_1)^{-1}\boldsymbol{b}_1$ la matrice delle risposte impulsive nello stato, si ottiene

$$\boldsymbol{H}_1(s) = \begin{bmatrix} H_{1,1}(s) \\ H_{1,2}(s) \\ H_{1,3}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{2}{(s+1)(s+2)} \\ -\dfrac{2}{s+1} \\ \dfrac{s-1}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}.$$

Giacché per $t < 0$ anche lo stato sarà al suo andamento di regime, applicando nuovamente il principio di sovrapposizione degli effetti, il calcolo a regime con ingresso costante e il teorema della risposta armonica si può concludere che

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2H_{1,1}(0) + |H_{1,1}(5j)|\cos(5t + \arg(H_{1,1}(5j))) \\ 2H_{1,2}(0) + |H_{1,2}(5j)|\cos(5t + \arg(H_{1,2}(5j))) \\ 2H_{1,3}(0) + |H_{1,3}(5j)|\cos(5t + \arg(H_{1,3}(5j))) \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} -2 + 0.0728\cos(5t + 0.5779) \\ -4 + 0.3922\cos(5t + 1.7682 \\ -1 + 0.1857\cos(5t - 0.7955) \end{bmatrix}.$$

Particolarizzando lo stato in $t = 0$ (istante di apertura dell'interruttore) si ottiene $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \simeq \begin{bmatrix} -1.939 \\ -4.0769 \\ -0.87 \end{bmatrix}$.

Per $t \geq 0$, invece, sostituito il valore $k = -3$, le matrici del sistema sono pari a

$$\boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{c}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Il sistema è asintoticamente stabile per quanto visto al quesito *a)*. Gli autovalori sono pari a $\lambda_{1,2} = -3$, $\lambda_3 = -2$.
L'uscita $y_2(t)$, a partire dal tempo $t = 0$, è calcolabile come

$$y_2(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\boldsymbol{c}_2(s\boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{A}_2)^{-1}\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{c}_2(s\boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{A}_2)^{-1}\boldsymbol{b}_2 U(s)\right], \tag{2.1}$$

con

$$\boldsymbol{c}_2(s\boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{A}_2)^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+3} & -\dfrac{2}{(s+2)(s+3)} & -\dfrac{3}{s+3} \end{bmatrix},$$
$$W_2(s) = \boldsymbol{c}_2(s\boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{A}_2)^{-1}\boldsymbol{b}_2 = -\frac{3s}{(s+2)(s+3)},$$
$$U(s) = \frac{2}{s} + \frac{s}{s^2+25}.$$

Sostituendo le precedenti nella (2.1), si ottiene

$$y_2(t) \simeq -1.939e^{-3t} - 8.1538e^{-3t} + 8.1538e^{-2t} + 2.61e^{-3t} + 6.7941e^{-3t} - 6.4138e^{-2t} + 0.4777\cos(5t + 2.4917).$$

La risposta complessiva del sistema $\forall\, t \in \mathbb{R}$ risulta dunque pari a

$$y(t) \simeq \begin{cases} 0.3642\cos(5t + 2.1487), & t < 0, \\ -0.6887e^{-3t} + 1.74e^{-2t} + 0.4777\cos(5t + 2.4917), & t \geq 0. \end{cases}$$

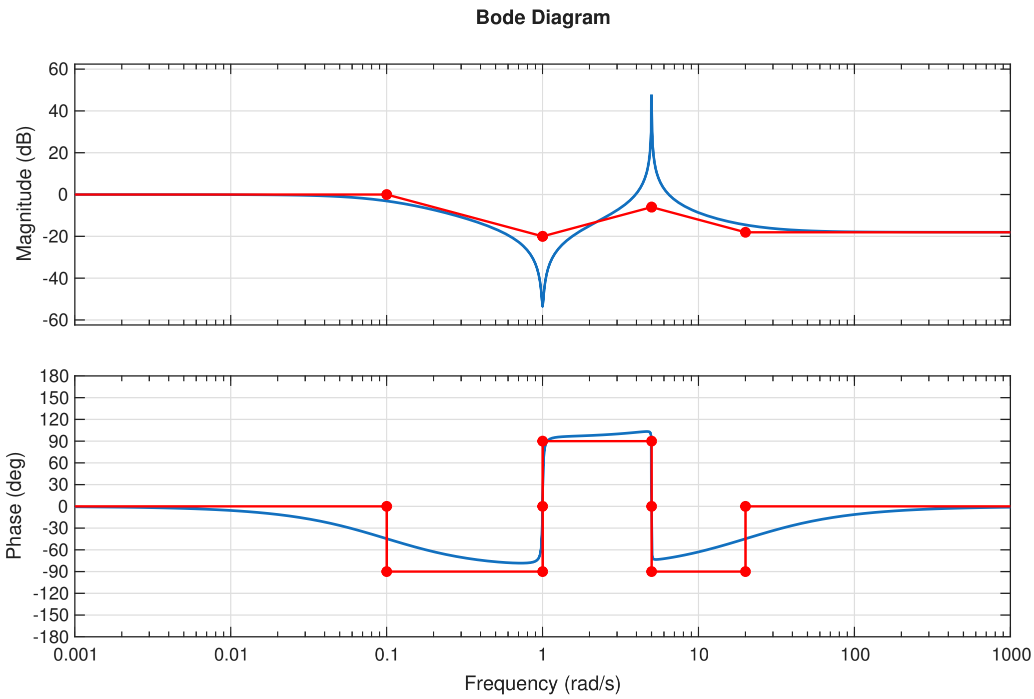



Figura 3.1: Diagramma di Bode della funzione di trasferimento $G(s)$.

# 3 Esercizio

La forma ingegneristica di tale funzione di trasferimento è pari a

$$G(s) = \frac{1}{8}\frac{(s+20)(s^2+0.02s+1)}{(s+0.1)(s^2+0.01s+25)} = \frac{\left(1+\frac{2\cdot 0.01}{1}s+s^2\right)\left(1+\frac{s}{20}\right)}{\left(1+\frac{s}{0.1}\right)\left(1+\frac{2\cdot 0.001}{5}s+\frac{s^2}{25}\right)}.$$

Si riconoscono al numeratore un termine monomio di molteplicità singola e uno trinomio di molteplicità singola. Al denominatore, un termine binomio di molteplicità singola e uno trinomio di molteplicità singola. I parametri riguardanti guadagno del sistema, tipo, costanti di tempo, smorzamenti e pulsazioni naturali sono pari a $\mu = 1$, $g = 0$, $\alpha_n = 1$ rad/s, $\xi = 0.01$, $\tau_1 = 1/20$ s, $T_1 = 1/0.1$ s, $\omega_n = 5$ rad/s, $\zeta = 0.001$. Le pulsazioni di rottura, in ordine crescente, sono quindi pari a $\omega_1 = 1/|T_1| = 0.1$ rad/s, $\omega_2 = \alpha_n = 1$ rad/s, $\omega_3 = \omega_n = 5$ rad/s e $\omega_4 = 1/|\tau_1| = 20$ rad/s.
Poiché il sistema è di tipo 0, il diagramma dei moduli partirà con un tratto rettilineo costante pari a $\mu_{dB} = 0$ dB. La prima pulsazione di rottura è in $\omega_1$ ad opera del termine binomio al denominatore, di molteplicità singola. La variazione di pendenza relativa del diagramma asintotico è di $-20$ dB/decade. La correzione è di circa $-3$ dB alla pulsazione di rottura. La seconda pulsazione di rottura è in $\omega_2$ ad opera del termine trinomio al numeratore, di molteplicità singola. La variazione di pendenza relativa del diagramma asintotico è di 40 dB/decade. La correzione è di $P_R = -\left|\frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}\right|_{dB} \simeq -34$ dB. La terza pulsazione di rottura è in $\omega_3$ ad opera del termine trinomio al denominatore, di molteplicità singola. La variazione di pendenza relativa del diagramma asintotico è di $-40$ dB/decade. La correzione è di $P_R = \left|\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}\right|_{dB} \simeq 54$ dB. La quarta pulsazione di rottura è in $\omega_4$ ad opera del termine binomio al numeratore, di molteplicità singola. La variazione di pendenza relativa del diagramma asintotico è di 20 dB/decade. La correzione è di circa 3 dB alla pulsazione di rottura.
Il diagramma delle fasi tiene conto delle solite tecniche di tracciamento. Quindi, il grafico parte da 0 deg siccome il guadagno $\mu > 0$ e il sistema è di tipo 0. Il termine binomio al denominatore, di molteplicità singola, apporta un salto relativo del diagramma asintotico di $-90$ deg alla relativa pulsazione di rottura. Il termine trinomio al numeratore, di molteplicità singola, apporta un salto relativo del diagramma asintotico di

180 deg alla relativa pulsazione di rottura. Poiché $\xi = 0.01$, ovvero un valor emolto piccolo rispetto all'unità, il diagramma reale avrà un salto di 180 deg molto ripido, quasi verticale, dal basso verso l'alto in $\omega_2$. Il termine trinomio al denominatore, di molteplicità singola, apporta un salto relativo del diagramma asintotico di $-180$ deg alla relativa pulsazione di rottura. Poiché $\zeta = 0.001$, il diagramma reale avrà un salto di 180 deg estremamente ripido, quasi verticale, dall'alto verso il basso in $\omega_3$. Il termine binomio al numeratore, di molteplicità singola, apporta un salto relativo del diagramma asintotico di 90 deg alla relativa pulsazione di rottura. Per effetto di questi contributi, il diagramma delle fasi termina con un tratto piatto pari a 0 deg.

# 4 Esercizio

La funzione di trasferimento è del secondo ordine. Il polinomio caratteristico è pari a $\varphi(\lambda) = \lambda^2 + 105\lambda + 500 = (\lambda+5)(\lambda+100)$. I due autovalori sono pari a $\lambda_1 = -5$ e $\lambda_2 = -100$. Per calcolare il periodo di campionamento, $T_s$, si può calcolare il tempo di assestamento all'1% della risposta allo scalino. Il sistema del secondo ordine presenta quindi due poli distnti: questa condizione non permette una formula per il calcolo del tempo di assestamento. Tuttavia, poiché vi è più di un ordine di grandezza fra i due poli, trascurando il polo associato alla costante di tempo più veloce, la risposta allo scalino di $G(s)$ si può approssimare a quella di

$$G_a(s) = \frac{1}{s+5} = \frac{1}{5}\frac{1}{0.2s+1}.$$

Il tempo di assestamento è quindi calcolabile come quello di un sistema del primo ordine

$$T_{a1} = 4.6 \cdot 0.2 = 0.92 \text{ s}.$$

Il periodo di campionamento, $T_s$, del campionatore e del mantenitore ZOH può esser calcolato come

$$\frac{T_{a1}}{10\alpha} \le T_s \le \frac{T_{a1}}{\alpha},$$

con $\alpha \in [5, 10]$. Selezionando arbitrariamente $\alpha = 5$ è possibile essere $T_s = 0.1$ s rispettando il vincolo di cui sopra.

Per calcolare il sistema a dati campionati approssimante $G(s)$ si proceda dapprima a calcolarne una sua forma i-s-u le cui matrici sono

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -500 & -105 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, d = 0.$$

Le matrici del sistema a dati campionati possono quindi ottenersi come

$$\boldsymbol{A}^\star = e^{\boldsymbol{A}T_s} = e^{\boldsymbol{A}t}|_{t=T_s} = \mathscr{L}^{-1}\left[(s\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{A})^{-1}\right]|_{t=T_s} = \begin{bmatrix} \frac{20}{19}e^{-5t} - \frac{1}{19}e^{-100t} & \frac{1}{95}e^{-5t} - \frac{1}{95}e^{-100t} \\ \frac{100}{19}e^{-100t} - \frac{100}{19}e^{-5t} & \frac{20}{19}e^{-100t} - \frac{1}{19}e^{-5t} \end{bmatrix}\Bigg|_{t=T_s} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0.6385 & 0.0064 \\ -3.1920 & -0.0319 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}^\star = \boldsymbol{A}^{-1}\left(\boldsymbol{A}^\star - \boldsymbol{I}_2\right)\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0.0007 \\ 0.0064 \end{bmatrix}.$$

I termini $\boldsymbol{c}$ e $d$ restano inalterati.

**ELABORATO TECNICO - TRACCIA N.1 (MATRICOLE PARI)**

Risolvere il quesito di seguito riportato utilizzando unicamente lo strumento software Matlab e/o Simulink. Non calcolare nulla a parte su supporti cartacei. Il file generato va consegnato entro il giorno antecedente la prova orale tramite email all'indirizzo del docente con oggetto *[TSI-FSD][Elaborato tecnico]- Cognome Nome Matricola*. In caso di problemi, il discente deve portare un drive USB il giorno della seduta orale. In caso di più files generati, compattare tutto in un file ZIP. ATTENZIONE: nel caso si utilizzi Simulink, salvare il file con compatibilità per la *versione 24.2*. A scanso di equivoci, portare il proprio PC con la versione di Simulink utilizzata.

Si consideri un sistema LTI a tempo continuo avente la seguente forma i-s-u con $k, h \in \mathbb{R}$,

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2k & -1 & 0 \\ h & 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}(t),$$
$$y(t) = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t).$$

- Si scriva uno script per il quale si determinino le proprietà di stabilità asintotica, stabilità semplice ed instabilità del sistema quando i parametri $k, h$ variano nell'intervallo $[0.1, 10]$.
- Posto $h = 1$ e $k = 0.1$, si disegni il valore dell'uscita del sistema quando ad esso è sottoposto all'ingresso $u_1(t) = 10\delta_{-1}(t)$ e $u_2(t) = 2\cos(5t)\delta_{-1}(t)$, con $t \geq 0$ s.

Sia dato il sistema LTI a tempo continuo caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{8}\frac{(s+20)(s^2+0.02s+1)}{(s+0.1)(s^2+0.01s+25)}.$$

Si disegnino i diagrammi di Bode e di Nyquist del sistema. Si determini la banda passante a 3 dB del sistema e prepararsi a commentare a voce la motivazione della risposta.

**ELABORATO TECNICO - TRACCIA N.2 (MATRICOLE DISPARI)**

Risolvere il quesito di seguito riportato utilizzando unicamente lo strumento software Matlab e/o Simulink. Non calcolare nulla a parte su supporti cartacei. Il file generato va consegnato entro il giorno antecedente la prova orale tramite email all'indirizzo del docente con oggetto *[TSI-FSD][Elaborato tecnico]- Cognome Nome Matricola*. In caso di problemi, il discente deve portare un drive USB il giorno della seduta orale. In caso di più files generati, compattare tutto in un file ZIP. ATTENZIONE: nel caso si utilizzi Simulink, salvare il file con compatibilità per la *versione 24.2*. A scanso di equivoci, portare il proprio PC con la versione di Simulink utilizzata.

Si consideri il seguente sistema dinamico LTI a tempo continuo, con $k \in \mathbb{R}$,

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}\boldsymbol{u}(t) = \begin{bmatrix} k & 1 & 0 \\ 0 & k+1 & 0 \\ 0 & 1 & k \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ k \\ 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}(t),$$
$$y(t) = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & k \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t).$$

- Si scriva uno script per il quale si classifichino le proprietà di stabilità, raggiungibilità ed osservabilità del sistema quando $k$ varia nell'intervallo $[-10, 10]$.
- Posto $k = -2$, si disegni il valore dell'uscita del sistema quando ad esso è sottoposto all'ingresso $u(t) = -\sin(5t)\delta_{-1}(-t)$, con $t \in [-10, 10]$ s.

Sia dato il sistema LTI a tempo continuo caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{8}\frac{(s+20)(s^2+0.02s+1)}{(s+0.1)(s^2+0.01s+25)}.$$

Si disegnino i diagrammi di Bode e di Nyquist del sistema. Si determini il sistema i-s-u corrispondente, risolvendo così il problema della realizzazione.