Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования

Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники

Кафедра ИТАС

Лабораторная работа №5

«Решение задач оптимизации в классе моделей

нелинейного программирования»

Вариант №8

Проверила:

Протченко Е.В.

Выполнила:

ст.гр.820605

ФИО

Минск 2020

Условие:

Составляется план производства двух химических реактивов (Р1 и Р2). Минимально необходимый объем выпуска реактива Р1 – B_1 тонн, реактива Р2 – B_2 тонн. Прибыль от продажи одной тонны реактива Р1 составляет C_1 тыс. ден.ед., реактива Р2 – C_2 тыс. ден.ед. Чтобы выпуск реактивов был экономически выгодным, необходимо, чтобы общая прибыль от продажи реактивов составила не менее D млн ден.ед.

Производство реактивов связано с загрязнением окружающей среды. Количество опасных отходов (в граммах), выделяемых в окружающую среду при производстве реактивов, приближенно описывается следующей формулой:

$$E = K_1X_1 + K_2X_2 + K_3 X_1^2 + K_4 X_2^2,$$

где X_1, X_2 - объем выпуска реактивов Р1 и Р2 (в тоннах).

Требуется найти объемы производства реактивов, при которых загрязнение окружающей среды будет минимальным.

Значения параметров задачи приведены в таблице.

B_1	B_2	C_1	C_2	D	K_1	K_2	K_3	K_4
120	200	10	4	8	5	8	0,1	0,1

Решение:

Математическая модель:

$$X_1 \geq 120$$
$$X_2 \geq 200$$
$$10X_1 + 4X_2 \geq 8000$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$
$$E = 5X_1 + 8X_2 + 0{,}1X_1^2 + 0{,}1X_2^2 \to min$$

Решим задачу, используя метод Франка-Вульфа.

Градиент целевой функции:

$$grad\ E = \left(\frac{\partial E}{\partial X_1}, \frac{\partial E}{\partial X_2}\right) = (5 + 0{,}2X_1, 8 + 0{,}2X_2).$$

Найдём начальное допустимое решение.

Для этого исключим из целевой функции все нелинейные элементы и решим полученную задачу линейного программирования симплекс-методом.

	X_1	X_2			
Решение	*720*	*200*			
Целевая функция	5	8	*5200*	->	min
Ограничения	10	4	*8000*	>=	8000
	1	0	*720*	>=	120
	0	1	*200*	>=	200

Начальное допустимое решение:

$X_1^{(0)} = 720$ т, $X_2^{(0)} = 200$ т

$E^{(0)} = 61040$ г.

Зададим требуемую точность решения задачи: $\varepsilon = 0{,}5$ (г).

Решим задачу, используя итерационный алгоритм.

Итерация 1

Определим антиградиент целевой функции в точке ОДР, соответствующей текущему решению:

$-grad\ E\left(X^{(0)}\right)$ =(-149; -48).

Определим угловую точку ОДР, соответствующую предельно допустимому перемещению от текущего решения в направлении антиградиента. Для этого решим задачу с исходной системой ограничений и целевой функцией, коэффициентами которой являются координаты антиградиента:

	X_1^*	X_2^*			
Решение	*120*	*1700*			
Целевая функция (W)	-149	-48	*-99480*	->	max
Ограничения	10	4	*8000*	>=	8000
	1	0	*120*	>=	120
	0	1	*1700*	>=	200

Решение этой задачи следующее: $X_1^* = 120$ т, $X_2^* = 1700$ т. Это означает, что поиск нового решения будет осуществляться от точки $X^{(0)} = (720; 200)$ к точке $X^* = (120; 1700)$.

Составим уравнения для перехода к новому решению:

$X_1^{(1)} = X_1^{(0)} + \lambda\left(X_1^* - X_1^{(0)}\right) = 720 - 600\lambda$;

$X_2^{(1)} = 200 + 1500\lambda$.

, где λ – коэффициент, задающий величину перемещения от текущего решения к новому решению в направлении точки X^*.

Подставим полученные уравнения в целевую функцию.

$E = 5(720 - 600\lambda) + 8(200 + 1500\lambda) + 0{,}1(720 - 600\lambda)^2 + 0{,}1(200 +$
$+1500\lambda)^2 = 261000\lambda^2 - 17400\lambda + 61040.$

Экстремум:

$\frac{dE}{d\lambda} = 522000\lambda - 17400 = 0.$

$\lambda = 0{,}0(3).$

Определим новое решение:

$X_1^{(1)} = 720 - 600 * 0{,}0(3) = 700$ т;

$X_2^{(1)} = 200 + 1500 * 0{,}0(3) = 250$ т.

$E^{(1)} = 60750$ г.

Проверим условие окончания поиска решения. Для этого определим разность значений целевой функции для нового и предыдущего решения:

$\Delta E = \left|E^{(1)} - E^{(0)}\right| = |60750 - 61040| = 290$ (г).

Т.к. $\Delta E < \varepsilon$, условие окончания поиска решения не выполняется.

Итерация 2

Определим антиградиент целевой функции в точке ОДР, соответствующей текущему решению:

$-grad\ E\left(X^{(1)}\right)$ =(-145; -58).

Определим угловую точку ОДР, соответствующую предельно допустимому перемещению от текущего решения в направлении антиградиента. Для этого решим задачу с исходной системой ограничений и целевой функцией, коэффициентами которой являются координаты антиградиента:

	X*₁	***X*₂***			
Решение	*120*	*1700*			
Целевая функция (W)	-145	-58	*-116000*	->	max
Ограничения	10	4	*8000*	>=	8000
	1	0	*120*	>=	120
	0	1	*1700*	>=	200

Составим уравнения для перехода к новому решению:

$X_1^{(2)} = X_1^{(1)} + \lambda\left(X_1^* - X_1^{(1)}\right) = 700 - 580\lambda;$

$X_2^{(2)} = 250 - 1450\lambda.$

Подставим полученные уравнения в целевую функцию.

$E^{(2)} = 5(700 + 580\lambda) + 8(250 - 1450\lambda) + 0{,}1(700 + 580\lambda)^2 +$
$+0{,}1(250 - 1450\lambda)^2 = 243890\lambda^2 + 60750.$

Экстремум:

$$\frac{dE}{d\lambda} = 487780\lambda^2 = 0.$$
$\lambda = 0.$

Определим новое решение:

$X_1^{(2)} = 700 + 20 * 0 = 700$ т;
$X_2^{(2)} = 250 - 50 * 0 = 250$ т.
$E^{(2)} = 60750$ г.

Проверим условие окончания поиска решения. Для этого определим разность значений целевой функции для нового и предыдущего решения:
$\Delta E = \left|E^{(2)} - E^{(1)}\right| = |60750 - 607500| = 0$ (г).

Так как $\Delta E \le \varepsilon$, оптимальное решение найдено:

$X_1 = 700$ т, $X_2 = 250$ т, $E = 60750$ г.

Решение с помощью табличного процессора Excel:

	X₁	***X₂***			
Решение	*700*	*250*			
Целевая функция (E)	5	8	*60750*	->	min
Ограничения	10	4	*8000*	>=	8000
	1	0	*700*	>=	120
	0	1	*250*	>=	200