

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования

Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники

Кафедра ИТАС

Лабораторная работа №7

«Решение задач на основе
моделей массового обслуживания»

Вариант №8

Проверила:

Протченко Е.В.

Выполнила:

ст.гр.820605

ФИО

Минск 2020

Условие:

На участке выпускаются детали двух видов. Интервалы времени между моментами поступления заготовок для выпуска деталей составляют от 4 до 7 минут. Все заготовки обрабатываются на станке А; время обработки детали на станке примерно постоянное и составляет 5 минут.

10% деталей, выпущенных на станке А, продаются как готовые изделия (детали типа 1). Остальные проходят дальнейшую обработку (из них выпускаются детали типа 2). Детали типа 1 со станка А поступают на два одинаковых станка (В1 и В2); время обработки одной детали на этих станках распределено по экспоненциальному закону и составляет в среднем 20 минут. Перед станками В1 и В2 установлен общий накопитель, вмещающий пять деталей; при его заполнении все поступающие детали типа 1 направляются на станок С, на котором обработка занимает в среднем 6 минут (экспоненциальная случайная величина).

Затраты (в денежных единицах), связанные с работой и простоями каждого станка (в минуту), приведены в таблице.

	А	В	С
Работа	0,2	0,3	0,8
Простой	0,1	0,1	0,1

Прочие расходы, связанные с выпуском деталей, следующие: деталь типа 1 - 4 д.е., деталь типа 2 - 10 д.е. (включая расходы на выпуск детали типа 1). Детали типа 1 продаются по цене 8 д.е., типа 2 - 45 д.е.

1. Найти характеристики работы станка А (8.4, 8.7).
2. Найти характеристики работы группы станков В1-В2 (8.13, 8.4, 8.9). Поток деталей на эту группу станков считать пуассоновским.
3. Рассчитать характеристики работы станка С (8.13, 8.4, 8.7). Поток деталей на станок С считать пуассоновскими.
4. Найти прибыль от работы участка за 8 часов (8.6, 8.7, 8.9).
5. Найти вероятность того, что деталь, поступившая на станки В1-В2, сразу же начнет обрабатываться (не будет ждать в очереди) (8.5, 8.9, пример из 8.8).
6. Найти характеристики работы всех станков и прибыль от работы участка (за 8 часов) при следующих изменениях: заготовки поступают на обработку чаще (с интервалом от 3 до 6 минут), а станок А заменен на новый (А1); время обработки одной детали на станке А1 - 4 минуты. Для нового станка А1 затраты на одну минуту работы и простоя - 0,4 и 0,2 д.е. соответственно. Определить, являются ли предлагаемые изменения целесообразными.

Решение:

Характеристики работы станка А (G/D/1):

Интервалы времени между элементами поступления деталей распределены по равномерному закону. Таким образом, поток заготовок является потоком Пальма.

Средний интервал между заявками равен 5,5 минут,

=> интенсивность $\lambda = 0,182 \frac{\text{детали}}{\text{мин}}$. Время обработки детали на станке является

детерминированной величиной. => $\bar{x} = 5 \text{ мин}$, $\mu = 0,2 \frac{\text{детали}}{\text{мин}}$. Число каналов $m=1$.

Нагрузка: $\rho = \frac{\lambda}{m\mu} = 0,91$.

Вероятность проста: $P_0 = 1 - \rho = 0,09$.

Средняя длина очереди. Так как интервалы поступления новых заказов распределяются по равномерному закону, то коэффициент вариации интервалов времени между заявками $v = \frac{7-4}{(4+7)\sqrt{3}} = 0,157$. Время обслуживания заготовок – детерминированная величина, поэтому коэффициент вариации времени обслуживания $\varepsilon = 0$.

$$\Rightarrow \bar{q} = \frac{\rho^2(v^2 + \varepsilon^2)}{2(1-\rho)} = 0,113 \text{ заготовки.}$$

На обслуживание принимаются все поступающие заготовки, поэтому $P_{\text{отк}} = 0, P_{\text{обсл}} = 1$.

Коэффициент загрузки $U = \rho(1 - P_{\text{отк}}) = 0,91$.

Среднее число заявок на обслуживание (среднее число занятых каналов) $\bar{S} = mU = 0,91$.

Среднее число заявок в СМО: $\bar{k} = \bar{q} + \bar{S} = 1,023$.

Пропускная способность: $\gamma = \mu\bar{S} = 0,182 \text{ заготовок/мин.}$

Среднее время пребывания в очереди (формула Литтла): $\bar{w} = \frac{\bar{q}}{\gamma} = 0,623 \text{ мин.}$

Среднее время пребывания заявки в СМО: $\bar{t} = \bar{w} + \bar{x} = 5,62 \text{ мин.}$

Проанализируем полученные характеристики СМО.

Станок загружен на 91%, т.е. занят обработкой деталей 91% всего времени своей работы. В течение 9% времени СМО простаивает из-за отсутствия заказов. Т.е. устройство перегружено ($U > 0,85$). В среднем в очереди находится 0,113 заготовок, а в очереди на обслуживание – 1,023 прибора. Устройство в среднем обрабатывает 0,182 заготовки в минуту (или 10,92 в час). Время от поступления заготовки до начала её обработки составляет в среднем 0,623 мин. Время до окончания = 5,62 мин.

Характеристики работы станков В1 и В2 (М/М/2 с ограничениями на длину очереди n=5):

Интервалы времени между элементами поступления деталей распределены по пуассоновскому закону. Интенсивность $\lambda = 0,164 \frac{\text{детали}}{\text{мин}}$, т.к. на эти станки поступает 90% деталей со станка А. $\bar{x} = 20 \text{ мин}$, $\mu = 0,05 \frac{\text{детали}}{\text{мин}}$. Число каналов $m=2$.

Нагрузка: $\rho = \frac{\lambda}{m\mu} = 1,64$.

$$P_0 = \left[\sum_{i=0}^m \frac{(m\rho)^i}{i!} + \frac{(m\rho)^{m+1}}{m \cdot m!} \cdot \frac{1 - \rho^n}{1 - \rho} \right]^{-1}$$

Вероятность проста: $P_0 = 0,007$.

Средняя длина очереди. Так как интервалы поступления новых заказов распределяются по пуассоновскому закону, то коэффициент вариации интервалов времени между заявками $v = 1$. Время обслуживания заготовок изменяется по экспоненциальному закону, поэтому коэффициент вариации времени обслуживания $\varepsilon = 1$.

$$\Rightarrow \bar{q} = \frac{(m\rho)^{m+1} \cdot P_0}{m \cdot m!} \cdot \frac{1 - (n+1)\rho^n + n\rho^{n+1}}{(1-\rho)^2} \quad \bar{q} = 4,086 \text{ заготовок.}$$

$$P_{\text{отк}} = \frac{(m\rho)^{m+n}}{m^n \cdot m!} P_0. \quad P_{\text{отк}} = 0,4467, P_{\text{обсл}} = 0,5533.$$

Коэффициент загрузки $U = \rho(1 - P_{\text{отк}}) = 0,9$.

Среднее число заявок на обслуживание (среднее число занятых каналов) $\bar{S} = mU = 1,8$.

Среднее число заявок в СМО: $\bar{k} = \bar{q} + \bar{S} = 5,886$.

Пропускная способность: $\gamma = \mu \bar{S} = 0,09$ заготовок/мин.

Среднее время пребывания в очереди (формула Литтла): $\bar{w} = \frac{\bar{q}}{\gamma} = 45,4$ мин.

Среднее время пребывания заявки в СМО: $\bar{t} = \bar{w} + \bar{x} = 65,4$ мин.

Проанализируем полученные характеристики СМО.

Станок загружен на 90%, т.е. устройство перегружено. Около 45% деталей идут на станок С. В среднем в очереди находится 1,8 заготовок, а в очереди на обслуживание – 5,886 прибора. Устройство в среднем обрабатывает 0,09 заготовки в минуту. Время от поступления заготовки до начала её обработки составляет в среднем 45,4 мин. Время до окончания = 65,4 мин.

Характеристики работы станка С (М/М/1 без ограничений на очередь):

Интервалы времени между элементами поступления деталей распределены по пуассоновскому закону. Интенсивность $\lambda = P_{\text{отк}} * \lambda_B = 0,07 \frac{\text{детали}}{\text{мин}}$.

$\bar{x} = 6$ мин, $\mu = 0,17 \frac{\text{детали}}{\text{мин}}$. Число каналов $m=1$.

Нагрузка: $\rho = \frac{\lambda}{m\mu} = 0,41$.

Вероятность простоя: $P_0 = 1 - \rho = 0,59$.

Средняя длина очереди. Так как интервалы поступления новых заказов распределяются по пуассоновскому закону, то коэффициент вариации интервалов времени между заявками $v = 1$. Время обслуживания заготовок изменяется по экспоненциальному закону, поэтому коэффициент вариации времени обслуживания $\varepsilon = 1$.

$\bar{q} = \frac{\rho^2(v^2 + \varepsilon^2)}{2(1 - \rho)}$, $\bar{q} = 0,285$ заготовок.

Станок принимает на обслуживание все детали $\Rightarrow P_{\text{отк}} = 0, P_{\text{обсл}} = 1$.

Коэффициент загрузки $U = \rho = 0,41$.

Среднее число заявок на обслуживание (среднее число занятых каналов) $\bar{S} = mU = 0,41$.

Среднее число заявок в СМО: $\bar{k} = \bar{q} + \bar{S} = 0,7$.

Пропускная способность: $\gamma = \mu \bar{S} = 0,07$ заготовок/мин.

Среднее время пребывания в очереди (формула Литтла): $\bar{w} = \frac{\bar{q}}{\gamma} = 4,07$ мин.

Среднее время пребывания заявки в СМО: $\bar{t} = \bar{w} + \bar{x} = 10,07$ мин.

Проанализируем полученные характеристики СМО.

Станок загружен на 41%, т.е. он простаивает значительную часть времени. В среднем в очереди находится 0,41 заготовок, а в очереди на обслуживание – 0,7 прибора.

Устройство в среднем обрабатывает 0,07 заготовки в минуту. Время от поступления заготовки до начала её обработки составляет в среднем 4,07 мин. Время до окончания = 10,07 мин.

Таким образом, характеристики станков на участке:

<i>Характеристики</i>	<i>A</i>	<i>B1-B2</i>	<i>C</i>
ρ	0,91	1,64	0,41
P_0	0,09	0,007	0,59
\bar{q} , деталей	0,113	4,086	0,285
$P_{\text{отк}}$	0	0,4467	0
$P_{\text{обсл}}$	1	0,5533	1
U	0,91	0,9	0,41
\bar{S} , деталей	0,91	1,8	0,41
\bar{k} , деталей	1,023	5,886	0,7
γ , деталей/мин	0,182	0,09	0,07
\bar{w} , мин	0,62	45,4	4,07
\bar{t} , мин	5,62	65,4	10,07

Найдём прибыль от работы участка за 8 часов

Выручка от обслуживания заявок в СМО в течение 8 часов $V = \gamma CT = V_A * 0,1 + V_B + V_C = 480 * (0,182 * 8 * 0,1 + (0,09 + 0,07) * 45) = 3525,89$ ден.ед. (здесь 480 – продолжительность рабочей смены в минутах; 0,1 - процент деталей типа 1, идущих на продажу).

Затраты на изготовление деталей $Z_{\text{обсл}} = \gamma C_{\text{обсл}} T = 480 * (0,182 * 4 * 0,1 + (0,09 + 0,07) * 10) = 802,94$ ден. ед.

Затраты, связанные с эксплуатацией СМО в течение 8 часов $Z_{\text{эксп}} = (\bar{S}C_{\text{раб}} + (m - \bar{S})C_{\text{пр}})T = 480 * (0,91 * 0,2 + (1 - 0,91) * 0,1 + 1,8 * 0,3 + (2 - 1,8) * 0,1 + 0,41 * 0,8 + (1 - 0,41) * 0,1) = 546,24$ ден. ед.

Прибыль = $3525,89 - 802,94 - 546,24 = 2176,71$ ден. ед.

Вероятность того, что деталь, поступившая на станки B1-B2, сразу же начнет обрабатываться (не будет ждать в очереди)

Вероятность пребывания в СМО не более 2 заявок

$$P(j \leq 1) = \sum_{j=0}^1 P_j = P_0 + P_1$$

$$P_j = \frac{(m\rho)^j}{j!} P_0, \quad j = 1$$

$$P(j \leq 1) = 0,007 + 2 * 1,64 * 0,007 = 0,03$$

⇒ В 3% случаях.

Определить, являются ли изменения целесообразными:

Условие:

Найти характеристики работы всех станков и прибыль от работы участка (за 8 часов) при следующих изменениях: заготовки поступают на обработку чаще (с интервалом от 3 до 6 минут), а станок А заменен на новый (А1); время обработки одной детали на станке А1 - 4 минуты. Для нового станка А1 затраты на одну минуту работы и простоя - 0,4 и 0,2 д.е. соответственно. Определить, являются ли предлагаемые изменения целесообразными.

Решение:

Новые характеристики станков:

<i>Характеристики</i>	<i>А1</i>	<i>В1-В2</i>	<i>С</i>
ρ	0,889	1,98	0,592
P_0	0,111	0,00198	0,408
\bar{q} , деталей	0,132	4,06	0,859
$P_{отк}$	0	0,5033	0
$P_{обсл}$	1	0,4967	1
U	0,889	0,992	0,592
\bar{S} , деталей	0,889	1,98	0,592
\bar{k} , деталей	1,02	6,04	1,451
γ , деталей/мин	0,222	0,099	0,1006
\bar{w} , мин	0,59	41,01	8,54
\bar{t} , мин	4,59	61,01	14,54

Найдём прибыль от работы участка за 8 часов

Выручка от обслуживания заявок в СМО в течение 8 часов $V = \gamma CT = V_A * 0,1 + V_B + V_C = 480 * (0,222 * 8 * 0,1 + (0,099 + 0,1006) * 45) = 4396,608$ ден.ед. (здесь 480 – продолжительность рабочей смены в минутах; 0,1 - процент деталей типа 1, идущих на продажу).

Затраты на изготовление деталей $Z_{обсл} = \gamma C_{обсл} T = 480 * (0,222 * 4 * 0,1 + (0,099 + 0,1006) * 10) = 1000,704$ ден. ед.

Затраты, связанные с эксплуатацией СМО в течение 8 часов $Z_{эксп} = (\bar{S}C_{раб} + (m - \bar{S})C_{пр})T = 480 * (0,889 * 0,4 + (1 - 0,889) * 0,2 + 1,98 * 0,3 + (2 - 1,98) * 0,1 + 0,592 * 0,8 + (1 - 0,592) * 0,1) = 714,34$ ден. ед.

Прибыль = $4396,608 - 1000,704 - 714,34 = 2681,564$ ден. ед.

Таким образом, замена станка А на новый и А1 и уменьшение интервала времени между моментами поступления заготовок приведет к росту прибыли предприятия с 2176,71 до 2681,564 ден.ед., т.е. на 504,854 ден.ед. в смену (8 часов). Рост прибыли достигнут за счет увеличения пропускной способности станка А (в А1) и более интенсивного использования станков В1-В2 и С. При этом загрузка нового станка А1 меньше, чем старого А.

Отрицательным результатом является увеличение количества отказов на станках В1-В2 (что, впрочем, лишь означает отправление детали на станок С) и увеличение времени ожидания в очереди деталей у станков В1-В2 и С.

=> Данные изменения следует признать выгодными.