

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования

Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники

Кафедра ИТАС

Лабораторная работа №2

«Постановка задачи о распределении ресурсов и её решение методом
искусственного базиса»

Вариант №8

Проверила:

Протченко Е.В.

Выполнила:

ст.гр.820605

Ф И О

Минск 2020

Условие:

Составляется смесь для подкормки растений, выращиваемых в опытно-исследовательском хозяйстве. Рассчитано, что смесь должна содержать микроэлементы в следующих количествах: не менее 800 мг меди и 1000 мг кальция. Для составления смеси могут использоваться питательные добавки двух видов: "Флоралюкс" и "Микро-21". Содержание микроэлементов в одной упаковке добавок приведено в таблице.

Микроэлемент	Содержание в одной упаковке, мг	
	"Флоралюкс"	"Микро-21"
Медь	80	10
Кальций	100	20

Стоимость одной упаковки "Флоралюкс" - 45 д.е., "Микро-21" - 5 д.е.

В смеси нельзя использовать более 60 упаковок "Микро-21".

- 1) Обозначим через X_1 и X_2 питательные добавки «Флоралюкс» и «Микро-21» соответственно. Тогда математическая модель будет выглядеть следующим образом:

$$80X_1 + 10X_2 \geq 800$$

$$100X_1 + 20X_2 \geq 1000$$

$$X_2 \leq 60$$

$$X_i \geq 0, \quad i = 1, 2.$$

$$E = 45X_1 + 5X_2 \rightarrow \min$$

Математическая модель задачи в стандартной форме имеет следующий вид:

$$80X_1 + 10X_2 - X_4 = 800$$

$$100X_1 + 20X_2 - X_5 = 1000$$

$$X_2 + X_6 = 60$$

$$X_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 6.$$

$$-E = -45X_1 - 5X_2 \rightarrow \max$$

В полученной системе уравнений базисной переменной является только X_6 , поэтому для решения задачи требуется использовать методы искусственного базиса.

Первый этап (поиск допустимого решения)

Шаг 1. Составим систему ограничений с искусственными базисными переменными.

$$80X_1 + 10X_2 - X_4 + X_7 = 800$$

$$100X_1 + 20X_2 - X_5 + X_8 = 1000$$

$$X_2 + X_6 = 60$$

$$X_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 8.$$

Шаг 2. Искусственная целевая функция:

$$W = X_7 + X_8 \rightarrow \min$$

Шаг 3. Выразим искусственные переменные через небазисные:

$$X_7 = 800 - 80X_1 - 10X_2 + X_4$$

$$X_8 = 1000 - 100X_1 - 20X_2 + X_5$$

Подставим полученные переменные в W :

$$W = -180X_1 - 30X_2 + X_4 + X_5 + 1800 \rightarrow \min.$$

Шаг 4. Перейдём к искусственной целевой функции, подлежащей максимизации.

$$-W = 180X_1 + 30X_2 - X_4 - X_5 - 1800 \rightarrow \max.$$

Полная математическая модель, приведённая к стандартному виду:

$$80X_1 + 10X_2 - X_4 + X_7 = 800$$

$$100X_1 + 20X_2 - X_5 + X_8 = 1000$$

$$X_2 + X_6 = 60$$

$$X_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 8.$$

$$-E = -45X_1 - 5X_2 \rightarrow \max.$$

$$-W = 180X_1 + 30X_2 - X_4 - X_5 - 1800 \rightarrow \max.$$

Шаг 5. Начальное решение:

$$X_1 = X_2 = X_4 = X_5 = 0, X_6 = 60, X_7 = 800, X_8 = 1000.$$

$$E = 45X_1 + 5X_2 = 0.$$

$$-W = 180X_1 + 30X_2 - X_4 - X_5 - 1800 = -1800.$$

Это решение является недопустимым, т. к. значения $X_1 = X_2 = 0$ не удовлетворяют постановке задачи.

Шаг 6. Исходная симплекс-таблица.

Базис	X_1	X_2	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	Решение
$-E$	45	5	0	0	0	0	0	0
$-W$	-180	-30	1	1	0	0	0	-1800
X_7	80	10	-1	0	0	1	0	800
X_8	100	20	0	-1	0	0	1	1000
X_6	0	1	0	0	1	0	0	60

Шаг 7. Симплексные отношения:

$$800/80=10; 1000/100=10; 60/0 \rightarrow \infty. \Rightarrow \text{исключим } X_8 \text{ из базиса.}$$

Базис	X_1	X_2	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	Решение
$-E$	0	-4	0	0,45	0	0	-0,45	-450
$-W$	0	6	1	-0,8	0	0	1,8	0
X_7	0	-6	-1	0,8	0	1	-0,8	0
X_1	1	0,2	0	-0,01	0	0	0,01	10
X_6	0	1	0	0	1	0	0	60

Симплексные отношения:

$$0/0,8=0; 60/0,01=6000. \Rightarrow \text{исключим } X_7 \text{ из базиса.}$$

Базис	X_1	X_2	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	Решение
$-E$	0	-0,625	0,5625	0	0	-0,5626	0	-450
$-W$	0	0	0	0	0	1	1	0
X_5	0	-7,5	-1,25	1	0	1,25	-1	0
X_1	1	0,125	-0,0125	0	0	0,0125	0	10
X_6	0	1	0	0	1	0	0	60

Получено допустимое решение.

Базис	X_1	X_2	X_4	X_5	X_6	Решение
$-E$	0	-0,625	0,5625	0	0	-450
X_5	0	-7,5	-1,25	1	0	0
X_1	1	0,125	-0,0125	0	0	10
X_6	0	1	0	0	1	60

Второй этап (поиск оптимального решения)

Симплексные отношения:

$10/0,125=80$; $60/1,075=55,8139535$. $\Rightarrow X_6$ исключается из базиса.

Базис	X_1	X_2	X_4	X_5	X_6	Решение
$-E$	0	0	0,5625	0	0,625	-412,5
X_5	0	0	-1,25	1	7,5	450
X_1	1	0	-0,0125	0	-0,125	2,5
X_2	0	1	0	0	1	60

Получено оптимальное решение.

$X_1=2,5$; $X_2=60$; $X_5=450$; $X_4=X_6=0$; $E=412,5$ д.е.

2) Состав смеси при следующем дополнительном условии: добавки "Флоралюкс" и "Микро-21" должны использоваться в соотношении 3:1

$$80X_1 + 10X_2 \geq 800$$

$$100X_1 + 20X_2 \geq 1000$$

$$X_2 \leq 60$$

$$X_1 - 3X_2 = 0$$

$$X_i \geq 0, \quad i = 1, 2.$$

$$E = 45X_1 + 5X_2 \rightarrow \min$$

Математическая модель задачи в стандартной форме имеет следующий вид:

$$80X_1 + 10X_2 - X_4 = 800$$

$$100X_1 + 20X_2 - X_5 = 1000$$

$$X_2 + X_6 = 60$$

$$X_1 - 3X_2 = 0$$

$$X_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 6.$$

$$-E = -45X_1 - 5X_2 \rightarrow \max$$

Первый этап (поиск допустимого решения)

Шаг 1. Составим систему ограничений с искусственными базисными переменными.

$$80X_1 + 10X_2 - X_4 + X_7 = 800$$

$$100X_1 + 20X_2 - X_5 + X_8 = 1000$$

$$X_2 + X_6 = 60$$

$$X_1 - 3X_2 + X_9 = 0$$

$$X_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 8.$$

Шаг 2. Искусственная целевая функция:

$$W = X_7 + X_8 + X_9 \rightarrow \min$$

Шаг 3. Выразим искусственные переменные через небазисные:

$$X_7 = 800 - 80X_1 - 10X_2 + X_4$$

$$X_8 = 1000 - 100X_1 - 20X_2 + X_5$$

$$X_9 = -X_1 + 3X_2$$

Подставим полученные переменные в W :

$$W = -181X_1 - 27X_2 + X_4 + X_5 + 1800 \rightarrow \min.$$

Шаг 4. Перейдём к искусственной целевой функции, подлежащей максимизации.

$$-W = 181X_1 + 27X_2 - X_4 - X_5 - 1800 \rightarrow \max.$$

Полная математическая модель, приведённая к стандартному виду:

$$80X_1 + 10X_2 - X_4 + X_7 = 800$$

$$100X_1 + 20X_2 - X_5 + X_8 = 1000$$

$$X_2 + X_6 = 60$$

$$X_1 - 3X_2 + X_9 = 0$$

$$X_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 8.$$

$$-E = -45X_1 - 5X_2 \rightarrow \max.$$

$$-W = 181X_1 + 27X_2 - X_4 - X_5 - 1800 \rightarrow \max.$$

Шаг 5. Начальное решение:

$$X_1 = X_2 = X_4 = X_5 = X_9 = 0, X_6 = 60, X_7 = 800, X_8 = 1000.$$

$$E = 45X_1 + 5X_2 = 0.$$

$$-W = 181X_1 + 27X_2 - X_4 - X_5 - 1800 = -1800.$$

Это решение является недопустимым, т. к. значения $X_1 = X_2 = 0$ не удовлетворяют постановке задачи.

Шаг 6. Исходная симплекс-таблица.

Базис	X_1	X_2	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	Решение
$-E$	45	5	0	0	0	0	0	0	0
$-W$	-181	-27	1	1	0	0	0	0	-1800
X_7	80	10	-1	0	0	1	0	0	800
X_8	100	20	0	-1	0	0	1	0	1000
X_6	0	1	0	0	1	0	0	0	60
X_9	1	-3	0	0	0	0	0	1	0

Решение: $X_1=9,6$; $X_2=3,2$; $X_5=24$; $X_6=56,8$; $X_4=0$; $E=448$ д.е.

3) Анализ на чувствительность к изменению ограничения на использование смеси «Микро-21»

$$X_1 = 2,5 - 0,125d \geq 0$$

$$X_2 = 60 + d \geq 0$$

$$X_5 = 450 + 7,5d \geq 0$$

$$-E = -412,5 + 0,625d$$

$$\Leftrightarrow d \leq 20$$

$$d \geq -60$$

$$d \geq -60$$

$$-60 \leq d \leq 20$$

4) Анализ решения на чувствительность к изменению ограничения на содержание меди

$$X_1 = 2,5 + 0,0125d \geq 0$$

$$\begin{aligned}
 X_2 &= 60 + 0d \geq 0 \\
 X_5 &= 450 + 1,25d \geq 0 \\
 -E &= -412,5 - 0,5625d \\
 \Rightarrow -200 &\leq d \leq \infty
 \end{aligned}$$

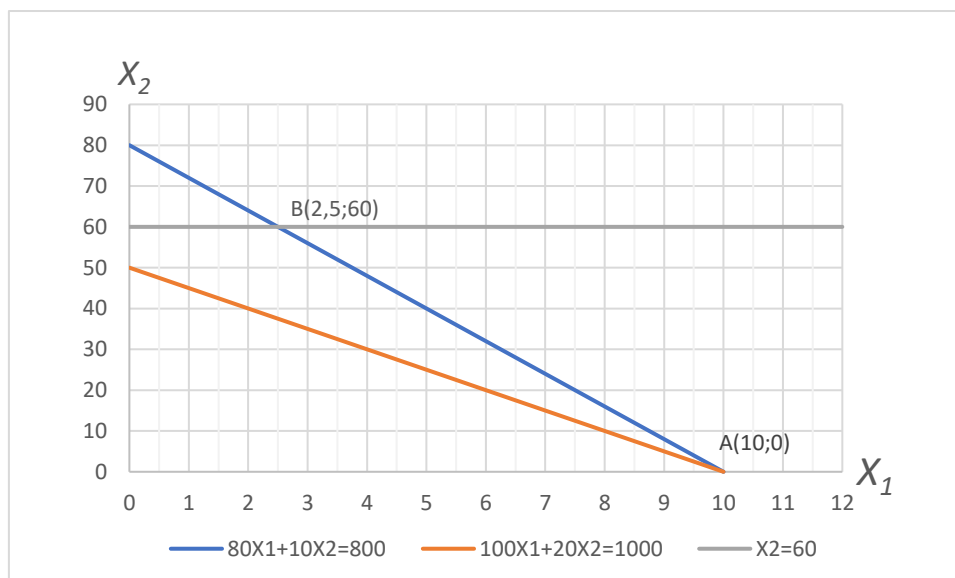
5) Анализ на чувствительность к изменению одного из коэффициентов целевой функции (X_2)

$$\begin{aligned}
 F_4 &= 0,5625 + 0d \geq 0 \\
 F_6 &= 0,625 - d \geq 0 \\
 -E &= -412,5 - 60d \\
 d &\leq 0,625
 \end{aligned}$$

Базис	X_1	X_2	X_4	X_5	X_6	Решение
$-E$	0	0	0,5625	0	0,625	-412,5
X_5	0	0	-1,25	1	7,5	450
X_1	1	0	-0,0125	0	-0,125	2,5
X_2	0	1	0	0	1	60

6) Графический метод и решение с помощью Excel

	X_1	X_2			
Решение	2,5	60			
Целевая функция	45	5	412,5	->min	
Ограничения	80	10	800	>=	800
	100	20	1450	>=	1000
		1	60	<=	60



$$E(A) = 45 \cdot 10 + 5 \cdot 0 = 450 \text{ д. е.}; E(B) = 412,5 \text{ д. е.}$$

\Rightarrow Оптимальное решение находится в точке $B(2,5;60)$.