

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования

Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники

Кафедра ИТАС

Лабораторная работа №4

«Постановка и решение транспортных
оптимизационных задач линейного программирования»

Вариант №8

Проверила:

Протченко Е.В.

Выполнила:

ст.гр.820605

Ф И О

Минск 2020

Условие:

С четырех карьеров (1,2,3,4) доставляется строительный материал на три стройки (1,2,3). С карьеров 1,2,3,4 можно доставить 9, 14, 16 и 11 тонн строительного материала в сутки соответственно. В сутки стройке 1 требуется 12 тонн стройматериала, стройке 2 - 8, стройке 3- 30 тонн. Стоимости перевозок одной тонны стройматериала (в денежных единицах) приведены в таблице.

Карьер	Стройка		
	1	2	3
1	2	9	3
2	3	2	6
3	1	8	2
4	4	8	7

Найти объемы перевозок с каждого карьера на каждую стройку, при которых затраты на перевозки будут минимальными.

Решить задачу при следующем изменении: производительность карьера 1 составляет 15 тонн стройматериала в сутки.

Решение:

Математическая модель:

Ограничения суточной доставки строительных материалов с карьеров:

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} = 9$$

$$X_{21} + X_{22} + X_{23} = 14$$

$$X_{31} + X_{32} + X_{33} = 16$$

$$X_{41} + X_{42} + X_{43} = 11.$$

Ограничения объёма требуемого на стройках материала:

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} = 12$$

$$X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} = 8$$

$$X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43} = 30.$$

$$X_{ij} \geq 0, i = 1, \dots, 4, j = 1, 2, 3.$$

Целевая функция:

$$E = 2X_{11} + 9X_{12} + 3X_{13} + 3X_{21} + 2X_{22} + 6X_{23} + X_{31} + 8X_{32} + 2X_{33} + 4X_{41} + 8X_{42} + 7X_{43} \rightarrow \min.$$

Расчётная таблица:

Карьер	Стройка			
	1	2	3	
1	2	9	3	9
2	3	2	6	14
3	1	8	2	16
4	4	8	7	11
	12	8	30	

Поиск допустимого решения методом минимального элемента

Карьер	Стройка			
	1	2	3	
1	2	9	3	9
2	3	2	6	14
3	1	8	2	16 4
4	4	8	7	11
	12	8	30	

Карьер	Стройка			
	1	2	3	
1	2	9	3	9
2	3	2	6	14 6
3	1	8	2	16 4
4	4	8	7	11
	12	8	30	

Карьер	Стройка			
	1	2	3	
1	2	9	3	9
2	3	2	6	14 6
3	1	8	2	16 4
4	4	8	7	11
	12	8	30 26	

Карьер	Стройка			
	1	2	3	
1	2	9	3	9
2	3	2	6	14 6
3	1	8	2	16 4
4	4	8	7	11
	12	8	30 26 17	

Карьер	Стройка			
	1	2	3	
1	2	9	3	9
2	3	2	6	14 6
3	1	8	2	16 4
4	4	8	7	11
	12	8	30 26 17 11	

Карьер	Стройка			
	1	2	3	
1	2	9	3	9
2	3	2	6	14
3	1	8	2	16
4	4	8	7	11
	12	8	30	

Получен допустимый план перевозок

Т.е. $X_{13} = 9, X_{22} = 8, X_{23} = 6, X_{31} = 12, X_{33} = 4, X_{43} = 11$ – базисные переменные, $X_{11} = X_{12} = X_{21} = X_{32} = X_{41} = X_{42} = 0$ – небазисные, $E = 176$ ден. ед.

Поиск оптимального решения методом потенциалов

Система уравнений для определения вспомогательных величин U_i и $V_j, i = 1, 2, 3, 4, j = 1, 2, 3$:

$$U_1 + V_3 = 3$$

$$U_2 + V_2 = 2$$

$$\begin{aligned}
 U_2 + V_3 &= 6 \\
 U_3 + V_1 &= 1 \\
 U_3 + V_3 &= 2 \\
 U_4 + V_3 &= 7.
 \end{aligned}$$

Пусть $U_1 = 0$. Тогда $V_3 = 3, U_2 = 3, V_2 = -1, U_3 = -1, U_4 = 4, V_1 = 2$.

Вычислим сумму платежей (псевдо стоимости) для всех небазисных переменных. ($\hat{C}_{ij} = U_i + V_j$) и занесём полученные значения в верхний левый угол соответствующих ячеек.

Вычислим разности стоимостей и псевдо стоимостей для всех небазисных переменных:

$D_{ij} = C_{ij} - \hat{C}_{ij}$ и занесём полученные данные в правый нижний угол ячеек.

Т.к. $D_{41} < 0$, X_{41} включается в базис.

Определим переменную для исключения из базиса. Для этого построим цикл.

Карьер	Стройка			
	1	2	3	
1	2 2 0	-1 9 10	3 9 3	9 (0)
2	5 3 -2	2 8 2	6 6 2	14 (3)
3	1 12 -	-2 8 10	2 4 +	16 (-1)
4	6 + -2	4 3 5	7 11 -	11 (4)
12 (2)		8 (-1)	30 (3)	

⇒ Из базиса исключается переменная $X_{43} = 11$.

⇒ $E = 154$. Таким образом, в результате перехода к новому решению затраты на перевозки снизились.

Составим систему уравнений:

$$\begin{aligned}
 U_1 + V_3 &= 3 \\
 U_2 + V_2 &= 2 \\
 U_2 + V_3 &= 6 \\
 U_3 + V_1 &= 1 \\
 U_3 + V_3 &= 2 \\
 U_4 + V_1 &= 4.
 \end{aligned}$$

Пусть $U_1 = 0$. Тогда $V_3 = 3, U_2 = 3, V_2 = -1, U_3 = -1, V_1 = 2, U_4 = 2$.

Определим значения псевдо стоимостей и разницы стоимостей и псевдо стоимостей.

Т.к. $D_{21} < 0$, X_{21} включается в базис.

Определим переменную для исключения из базиса. Для этого построим цикл.

Карьер	Стройка			
	1	2	3	
1	2 2 0	-1 9 10	9 3	9 (0)
2	5 3 +	2	6	14 (3)
3	1 -	8	2	16 (-1)
4	4 11	1 8 7	5 7 2	11 (2)
12 (2)		8 (-1)	30 (3)	

⇒ Из базиса исключается переменная $X_{31} = 1$.

⇒ $E = 152$. Таким образом, в результате перехода к новому решению затраты на перевозки снизились.

Для полученного плана перевозок составим систему уравнений, чтобы определить платежи:

$$U_1 + V_3 = 3$$

$$U_2 + V_2 = 2$$

$$U_2 + V_3 = 6$$

$$U_2 + V_1 = 3$$

$$U_3 + V_3 = 2$$

$$U_4 + V_1 = 4.$$

Пусть $U_1 = 0$. Тогда $V_3 = 3, U_2 = 3, V_2 = -1, U_3 = -1, V_1 = 0, U_4 = 4$.

Определим значения псевдо стоимостей и разницы стоимостей и псевдо стоимостей.

Т.к. все величины D неотрицательны, получено оптимальное решение.

Карьер	Стройка			
	1	2	3	
1	0 2 2	-1 9 10	9 3	9 (0)
2	3 1	2 8	6 5	14 (3)
3	-1 1 2	-2 8 10	2 16	16 (-1)
4	4 11	3 8 5	7 7 0	11 (4)
12 (0)		8 (-1)	30 (3)	

$$X_{13} = 9, X_{21} = 1, X_{22} = 8, X_{23} = 5, X_{33} = 16, X_{41} = 11, X_{11} = X_{12} = X_{31} = X_{32} = X_{42} = X_{43} = 0; E = 9 * 3 + 1 * 3 + 8 * 2 + 5 * 6 + 16 * 2 + 11 * 4 = 152 \text{ ден. ед.}$$

Решение с помощью табличного процессора Excel

	A	B	C	D	E	F	G
2	Затраты на перевозку единицы товара						
3	Карьер	Стройка					
4		1	2	3			
5	1	2	9	3	9		
6	2	3	2	6	14		
7	3	1	8	2	16		
8	4	4	8	7	11		
9		12	8	30			
10							
11	Оптимальный план перевозок						
12	Карьер	Стройка					
13		1	2	3			Запасы
14	1	0	0	9	9	=	9
15	2	6	8	0	14	=	14
16	3	0	0	16	16	=	16
17	4	6	0	5	11	=	11
18		12	8	30			
19		=	=	=			
20	Потребности	12	8	30			
21							
22	Затраты на все перевозки:			152			

Решение задачи с неправильным балансом:

Условие: Решить задачу при следующем изменении: производительность карьера 1 составляет 15 тонн стройматериала в сутки.

Математическая модель:

Ограничения суточной доставки строительных материалов с карьеров:

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} = 15$$

$$X_{21} + X_{22} + X_{23} = 14$$

$$X_{31} + X_{32} + X_{33} = 16$$

$$X_{41} + X_{42} + X_{43} = 11.$$

Ограничения объёма требуемого на стройках материала:

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} = 12$$

$$X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} = 8$$

$$X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43} = 30.$$

$$X_{ij} \geq 0, i = 1, \dots, 4, j = 1, 2, 3.$$

Целевая функция:

$$E = 2X_{11} + 9X_{12} + 3X_{13} + 3X_{21} + 2X_{22} + 6X_{23} + X_{31} + 8X_{32} + 2X_{33} + 4X_{41} + 8X_{42} + 7X_{43} \rightarrow \min.$$

Расчётная таблица:

Карьер	Стройка				
	1	2	3	4	
1	2	9	3	0	15
2	3	2	6	0	14
3	1	8	2	0	16
4	4	8	7	0	11
<div><div>12</div><div>8</div><div>30</div><div>6</div></div> <div><div>$\Sigma=50$</div><div>Фиктивный потребитель</div></div>					<div><div>$\Sigma=56$</div></div>

Найдём допустимы план методом минимального элемента.

Карьер	Стройка				
	1	2	3	4	
1	2	9	3	0	15 9
2	3	2	6	0	14 6
3	1	8	2	0	16 4
4	4	8	7	0	11
<div><div>12</div><div>8</div><div>30 26 17 11</div><div>6</div></div>					

Карьер	Стройка				
	1	2	3	4	
1	2	9	3	0	15
2	3	2	6	0	14
3	1	8	2	0	16
4	4	8	7	0	11
<div><div>12</div><div>8</div><div>30</div><div>6</div></div>					

$E = 176$ ден. ед.

Поиск оптимального решения методом потенциалов

Система уравнений для определения вспомогательных величин U_i и $V_j, i = 1,2,3,4, j = 1,2,3$:

$$U_1 + V_3 = 3$$

$$U_2 + V_2 = 2$$

Карьер	Стройка				
	1	2	3	4	
1	2 2 0	-1 9 10	3 15	-4 0 4	15 (0)
2	5 3 -2	2 8	6 6	-1 0 1	14 (3)
3	1 12 -	-2 8 10	2 4 +	-5 0 5	16 (-1)
4	6 4 + -2	3 8 5	7 5 -	0 6	11 (4)
12 (2)		8 (-1)	30 (3)	6 (-4)	

⇒ Из базиса исключается переменная $X_{43} = 5$.

⇒ $E = 142$. Таким образом, в результате перехода к новому решению затраты на перевозки снизились.

Для полученного плана перевозок составим систему уравнений, чтобы определить платежи:

$$U_1 + V_3 = 3$$

$$U_2 + V_2 = 2$$

$$U_2 + V_3 = 6$$

$$U_3 + V_1 = 1$$

$$U_3 + V_3 = 2$$

$$U_4 + V_1 = 4$$

$$U_4 + V_4 = 0.$$

Пусть $U_1 = 0$. Тогда $V_3 = 3, U_2 = 3, V_2 = -1, U_3 = -1, V_1 = 2, U_4 = 2, V_4 = -2$.

Определим значения псевдо стоимостей и разницы стоимостей и псевдо стоимостей.

Т.к. D_{21} — наибольшая по модулю отрицательная разница, X_{21} включается в базис.

Определим переменную для исключения из базиса. Для этого построим цикл.

Карьер	Стройка				
	1	2	3	4	
1	2 2 0	-1 9 10	3 15	-2 0 2	15 (0)
2	5 3 + -2	2 8	6 6 -	1 0 -1	14 (3)
3	1 7 -	-2 8 10	2 9 +	-3 0 3	16 (-1)
4	4 5	1 8 7	5 7 2	0 6	11 (2)
12 (2)		8 (-1)	30 (3)	6 (-2)	

⇒ Из базиса исключается переменная $X_{23} = 6$.

⇒ $E = 130$. Таким образом, в результате перехода к новому решению затраты на перевозки снизились.

Для полученного плана перевозок составим систему уравнений, чтобы определить платежи:

$$U_1 + V_3 = 3$$

$$U_2 + V_2 = 2$$

$$U_2 + V_1 = 3$$

$$U_3 + V_1 = 1$$

$$U_3 + V_3 = 2$$

$$U_4 + V_1 = 4$$

$$U_4 + V_4 = 0.$$

Пусть $U_1 = 0$. Тогда $V_3 = 3, U_2 = 1, V_2 = 1, U_3 = -1, V_1 = 2, U_4 = 2, V_4 = -2$.

Определим значения псевдо стоимостей и разницы стоимостей и псевдо стоимостей.

Т.к. все величины D неотрицательны, получено оптимальное решение.

Карьер	Стройка				
	1	2	3	4	
1	2 2 0	1 9 8	15 3	-2 0 2	15 (0)
2	6 3	8 2	4 6 2	-1 0 1	14 (1)
3	1 1	0 8 8	15 2	-3 0 3	16 (-1)
4	5 4	3 8 5	5 7 2	6 0	11 (2)
	12 (2)	8 (1)	30 (3)	6 (-2)	

$X_{13} = 15, X_{21} = 6, X_{22} = 8, X_{31} = 1, X_{33} = 15, X_{41} = 5, X_{44} = 6, X_{11} = X_{12} = X_{13} = X_{23} = X_{24} = X_{32} = X_{34} = X_{42} = X_{43} = 0$; $E = 15 * 3 + 6 * 3 + 8 * 2 + 1 * 1 + 15 * 2 + 5 * 4 + 6 * 0 = 130$ ден. ед.

Решение с помощью табличного процессора Excel

	A	B	C	D	E	F	G	H
2	Затраты на перевозку единицы товара							
3	Карьер	Стройка						
4		1	2	3	4			
5	1	2	9	3	0			
6	2	3	2	6	0			
7	3	1	8	2	0			
8	4	4	8	7	0			
9								
10								
11	Оптимальный план перевозок							
12	Карьер	Стройка						
13		1	2	3	4			
14	1	0	0	15	0	15	=	Запасы
15	2	6	8	0	0	14	=	14
16	3	1	0	15	0	16	=	16
17	4	5	0	0	6	11	=	11
18		12	8	30	6			
19		=	=	=	=			
20	Потребности	12	8	30	6			
21								
22	Затраты на все перевозки:				130			