Table of Contents

RBE501 HW4 1
1 1
2 2
3a 3
3b 4
4 4
5 5
5a 5
5b 8
5c 9
6 15

RBE501 HW4

joint angles

```
q = sym('q', [3, 1], 'real');

% joint velocities
q_dot = sym('q_dot', [3, 1], 'real');

% joint accelerations
q_ddot = sym('q_ddot', [3, 1], 'real');

% position of end of joints
p = sym('p', [3, 3], 'real');

% center of mass
pm = sym('pm', [4, 3], 'real');

% mass of joints [mA mB mC mL]'
m = sym('m', [4, 1], 'real');

% length of arms [A B C]'
len = sym('len', [3, 1], 'real');

syms g real;
```

1

theta, d, a, alpha

```
dh = horzcat(q, zeros(3, 1), len, zeros(3, 1))
T = sym(zeros(4, 4, size(dh, 1)));
for joint = 1:size(dh, 1)
    T(:,:, joint) = dh2mat(dh(joint, 1), dh(joint, 2), dh(joint, 3),
 dh(joint, 4));
```

```
end
% ans
T_0_3 = T(:,:, 1) * T(:,:, 2) * T(:,:, 3)
```

```
dh =

[ q1, 0, len1, 0]
[ q2, 0, len2, 0]
[ q3, 0, len3, 0]


T_0_3 =

[ cos(q3)*(cos(q1)*cos(q2) - sin(q1)*sin(q2)) -
 sin(q3)*(cos(q1)*sin(q2) + cos(q2)*sin(q1)), -
 cos(q3)*(cos(q1)*sin(q2) + cos(q2)*sin(q1)) -
 sin(q3)*(cos(q1)*cos(q2) - sin(q1)*sin(q2)), 0, len1*cos(q1)
 + len3*cos(q3)*(cos(q1)*cos(q2) - sin(q1)*sin(q2))
 - len3*sin(q3)*(cos(q1)*sin(q2) + cos(q2)*sin(q1)) +
 len2*cos(q1)*cos(q2) - len2*sin(q1)*sin(q2)]
[ cos(q3)*(cos(q1)*sin(q2) + cos(q2)*sin(q1)) +
 sin(q3)*(cos(q1)*cos(q2) - sin(q1)*sin(q2)),
  cos(q3)*(cos(q1)*cos(q2) - sin(q1)*sin(q2)) -
 sin(q3)*(cos(q1)*sin(q2) + cos(q2)*sin(q1)), 0, len1*sin(q1)
 + len3*cos(q3)*(cos(q1)*sin(q2) + cos(q2)*sin(q1))
 + len3*sin(q3)*(cos(q1)*cos(q2) - sin(q1)*sin(q2)) +
 len2*cos(q1)*sin(q2) + len2*cos(q2)*sin(q1)]
[
                    0,
                                    0, 1,

                                                                0]
[
                    0,
                                    0, 0,

                                                                1]
```

2

```
p_tip = T_0_3 * [0; 0; 0; 1];
p_tip = p_tip(1:3,:);
J_upper = jacobian(p_tip, q);
J_lower = [0, 0, 0; ...
    0, 0, 0; ... % thetas contribute to rotation in z
    1, 1, 1];
% ans
J = vertcat(J_upper, J_lower)

% top 3 rows are translation. bottom 3 rows are rotation. columns are
 joint
```

```
% variables.
```

```
J =

[ - len1*sin(q1) - len3*cos(q3)*(cos(q1)*sin(q2) +
 cos(q2)*sin(q1)) - len3*sin(q3)*(cos(q1)*cos(q2) -
 sin(q1)*sin(q2)) - len2*cos(q1)*sin(q2) - len2*cos(q2)*sin(q1),
 - len3*cos(q3)*(cos(q1)*sin(q2) + cos(q2)*sin(q1))
 - len3*sin(q3)*(cos(q1)*cos(q2) - sin(q1)*sin(q2))
 - len2*cos(q1)*sin(q2) - len2*cos(q2)*sin(q1), -
 len3*cos(q3)*(cos(q1)*sin(q2) + cos(q2)*sin(q1)) -
 len3*sin(q3)*(cos(q1)*cos(q2) - sin(q1)*sin(q2))]
[   len1*cos(q1) + len3*cos(q3)*(cos(q1)*cos(q2) -
 sin(q1)*sin(q2)) - len3*sin(q3)*(cos(q1)*sin(q2) +
 cos(q2)*sin(q1)) + len2*cos(q1)*cos(q2) - len2*sin(q1)*sin(q2),
   len3*cos(q3)*(cos(q1)*cos(q2) - sin(q1)*sin(q2))
 - len3*sin(q3)*(cos(q1)*sin(q2) + cos(q2)*sin(q1))
 + len2*cos(q1)*cos(q2) - len2*sin(q1)*sin(q2),
 len3*cos(q3)*(cos(q1)*cos(q2) - sin(q1)*sin(q2)) -
 len3*sin(q3)*(cos(q1)*sin(q2) + cos(q2)*sin(q1))]
[

                    0,

                            0,
                                                    0]
[

                    0,

                            0,
                                                    0]
[

                    0,

                            0,
                                                    0]
[

                    1,

                            1,
                                                    1]
```

3a

```
len_n = [0.8; 0.4; 0.2]; % m
q_n = [sym(pi) / 4; sym(pi) / 12; -sym(pi) / 6]; % rad

% ans
```

```
T_0_3_n = double(subs(T_0_3, [len; q], [len_n; q_n])) % mm
```

```
T_0_3_n =

    0.8660   -0.5000         0    0.9389
    0.5000    0.8660         0    1.0121
         0         0    1.0000         0
         0         0         0    1.0000
```

3b

```
q_dot_n = [sym(pi) / 6; sym(pi) / 6; sym(pi) / 6]; % rad/s

p_tip_dot = J * q_dot;

% ans m/s, rad/s
P_tip_dot_n = double(subs(p_tip_dot, [len; q; q_dot], [len_n; q_n;
 q_dot_n]))
```

```
P_tip_dot_n =

   -0.8160
    0.7777
         0
         0
         0
    1.5708
```

4

mass of the thing

```
syms mL real;
tau_gravitycomp = J' * [0; mL * g; 0; 0; 0; 0]
```

```
tau_gravitycomp =

 g*mL*(len1*cos(q1) + len3*cos(q3)*(cos(q1)*cos(q2) -
 sin(q1)*sin(q2)) - len3*sin(q3)*(cos(q1)*sin(q2) + cos(q2)*sin(q1)) +
 len2*cos(q1)*cos(q2) - len2*sin(q1)*sin(q2))
                g*mL*(len3*cos(q3)*(cos(q1)*cos(q2) -
 sin(q1)*sin(q2)) - len3*sin(q3)*(cos(q1)*sin(q2) + cos(q2)*sin(q1)) +
 len2*cos(q1)*cos(q2) - len2*sin(q1)*sin(q2))

   g*mL*(len3*cos(q3)*(cos(q1)*cos(q2) - sin(q1)*sin(q2)) -
 len3*sin(q3)*(cos(q1)*sin(q2) + cos(q2)*sin(q1)))
```

5

```
g_n = 9.8; % m*s^-2
mL_n = 1.5 % kg
% ans N*m
tau_gravitycomp_n = double(subs(tau_gravitycomp, [len; q; q_dot; mL;
 g], [len_n; q_n; q_dot_n; mL_n; g_n]))
```

```
mL_n =

    1.5000


tau_gravitycomp_n =

   13.8017
    5.4861
    2.5461
```

5a

```
len_n = [0.8; 0.4; 0.2]; % m
m_n = [2; 1; 0.5; 1.5]; % kg

% position of center of masses wrt F0
pm = cat(3, [len(1) * 0.5 * cos(q(1)); len(1) * 0.5 * sin(q(1)); 0;
 1], ...
    T(:,:, 1)*[len(2) * 0.5; 0; 0; 1], ...
    T(:,:, 1)*T(:,:, 2)*[len(3) * 0.5; 0; 0; 1], ...
    T(:,:, 1)*T(:,:, 2)*T(:,:, 3)*[0; 0; 0; 1]);
num_mass = size(pm, 3);

% jacobian for this arm
planar_arm_jac = @(pos, joint_var) vertcat(jacobian(pos,
 joint_var), ...
    [0, 0, 0; 0, 0, 0; 1, 1, 1]);

J_pm = sym(zeros(6, 3, num_mass));
pm_dot = sym(zeros(6, 1, num_mass));
K = sym(zeros(num_mass, 1));
P = sym(zeros(num_mass, 1));

for i = 1:num_mass
    % jacobian of the mass
    J_pm(:,:, i) = planar_arm_jac(pm(1:3,:, i), q);
    % velocity of the mass
    pm_dot(:,:, i) = J_pm(:,:, i) * q_dot;
    % linear velocity
    v = pm_dot(1:3,:, i);
    % kinetic energy of the mass 0.5*m*v^2
    K(i) = 0.5 * m(i) * (v' * v);
```

```
    % potential energy of the mass m*g*y
    P(i) = m(i) * g * pm(2,:, i);
end

% ans
K
% numerical
K_n = simplify(vpa(subs(K, [m; g; len], [m_n; g_n; len_n])))
% ans
P
% numerical
P_n = simplify(vpa(subs(P, [m; g; len], [m_n; g_n; len_n])))
```

$$K =$$

$$\frac{m_1\left(\frac{len_1^2\,q\_dot_1^2\cos(q_1)^2}{4}+\frac{len_1^2\,q\_dot_1^2\sin(q_1)^2}{4}\right)}{2}$$

$$\frac{m_2\left(q\_dot_1^2\left(len_1\cos(q_1)+\frac{len_2\cos(q_1)}{2}\right)^2+q\_dot_1^2\left(len_1\sin(q_1)+\frac{len_2\sin(q_1)}{2}\right)^2\right)}{2}$$

$$\frac{m_3\left(\left(q\_dot_1\left(len_3\left(\cos(q_1)\cos(q_2)-\sin(q_1)\sin(q_2)\right)+len_1\cos(q_1)+len_2\cos(q_1)\cos(q_2)-len_2\sin(q_1)\sin(q_2)\right)+q\_dot_2\left(len_3\left(\cos(q_1)\cos(q_2)-\sin(q_1)\sin(q_2)\right)+len_2\cos(q_1)\cos(q_2)-len_2\sin(q_1)\sin(q_2)\right)\right)^2}{2}$$

```
+ (q_dot1*((len3*(cos(q1)*sin(q2) + cos(q2)*sin(q1)))/2 +
len1*sin(q1) + len2*cos(q1)*sin(q2) + len2*cos(q2)*sin(q1))
+ q_dot2*((len3*(cos(q1)*sin(q2) + cos(q2)*sin(q1)))/2 +
len2*cos(q1)*sin(q2) + len2*cos(q2)*sin(q1)))^2))/2
(m4*((q_dot1*(len1*cos(q1) + len3*cos(q3)*(cos(q1)*cos(q2)
- sin(q1)*sin(q2)) - len3*sin(q3)*(cos(q1)*sin(q2) +
cos(q2)*sin(q1)) + len2*cos(q1)*cos(q2) - len2*sin(q1)*sin(q2))
+ q_dot3*(len3*cos(q3)*(cos(q1)*cos(q2) - sin(q1)*sin(q2))
- len3*sin(q3)*(cos(q1)*sin(q2) + cos(q2)*sin(q1))) +
q_dot2*(len3*cos(q3)*(cos(q1)*cos(q2) - sin(q1)*sin(q2))
- len3*sin(q3)*(cos(q1)*sin(q2) + cos(q2)*sin(q1))
+ len2*cos(q1)*cos(q2) - len2*sin(q1)*sin(q2)))^2 +
(q_dot1*(len1*sin(q1) + len3*cos(q3)*(cos(q1)*sin(q2)
+ cos(q2)*sin(q1)) + len3*sin(q3)*(cos(q1)*cos(q2) -
sin(q1)*sin(q2)) + len2*cos(q1)*sin(q2) + len2*cos(q2)*sin(q1))
+ q_dot3*(len3*cos(q3)*(cos(q1)*sin(q2) + cos(q2)*sin(q1))
+ len3*sin(q3)*(cos(q1)*cos(q2) - sin(q1)*sin(q2))) +
q_dot2*(len3*cos(q3)*(cos(q1)*sin(q2) + cos(q2)*sin(q1))
+ len3*sin(q3)*(cos(q1)*cos(q2) - sin(q1)*sin(q2)) +
len2*cos(q1)*sin(q2) + len2*cos(q2)*sin(q1)))^2))/2
```

$K_n =$

$$0.16\dot{q}_1^2$$

$$0.5\dot{q}_1^2$$

```
       0.2*q_dot1^2*cos(q2) + 0.125*q_dot1*q_dot2 + 0.2225*q_dot1^2 +
0.0625*q_dot2^2 + 0.2*q_dot1*q_dot2*cos(q2)
0.48*q_dot1^2*cos(q2) + 0.12*q_dot1^2*cos(q3) + 0.12*q_dot2^2*cos(q3)
+ 0.3*q_dot1*q_dot2 + 0.06*q_dot1*q_dot3 + 0.06*q_dot2*q_dot3 +
0.63*q_dot1^2 + 0.15*q_dot2^2 + 0.03*q_dot3^2 + 0.24*q_dot1^2*cos(q2
+ q3) + 0.48*q_dot1*q_dot2*cos(q2) + 0.24*q_dot1*q_dot2*cos(q3)
+ 0.12*q_dot1*q_dot3*cos(q3) + 0.12*q_dot2*q_dot3*cos(q3) +
0.24*q_dot1*q_dot2*cos(q2 + q3) + 0.24*q_dot1*q_dot3*cos(q2 + q3)
```

$P =$

```
       (g*len1*m1*sin(q1))/2


 g*m2*(len1*sin(q1) + (len2*sin(q1))/2)

 g*m3*((len3*(cos(q1)*sin(q2) + cos(q2)*sin(q1)))/2 + len1*sin(q1) +
 len2*cos(q1)*sin(q2) + len2*cos(q2)*sin(q1))
 g*m4*(len1*sin(q1) + len3*cos(q3)*(cos(q1)*sin(q2) +
 cos(q2)*sin(q1)) + len3*sin(q3)*(cos(q1)*cos(q2) - sin(q1)*sin(q2)) +
 len2*cos(q1)*sin(q2) + len2*cos(q2)*sin(q1))


P_n =

                                                    7.84*sin(q1)
                                                     9.8*sin(q1)
                                 2.45*sin(q1 + q2) + 3.92*sin(q1)
 2.94*sin(q1 + q2 + q3) + 5.88*sin(q1 + q2) + 11.76*sin(q1)
```

5b

ans

```
L = sum(K) - sum(P)
% numerical
L_n = simplify(vpa(subs(L, [m; g; len], [m_n; g_n; len_n])))


L =

(m3*((q_dot1*((len3*(cos(q1)*cos(q2) - sin(q1)*sin(q2)))/2 +
 len1*cos(q1) + len2*cos(q1)*cos(q2) - len2*sin(q1)*sin(q2))
 + q_dot2*((len3*(cos(q1)*cos(q2) - sin(q1)*sin(q2)))/2
 + len2*cos(q1)*cos(q2) - len2*sin(q1)*sin(q2)))^2 +
 (q_dot1*((len3*(cos(q1)*sin(q2) + cos(q2)*sin(q1)))/2
 + len1*sin(q1) + len2*cos(q1)*sin(q2) +
 len2*cos(q2)*sin(q1)) + q_dot2*((len3*(cos(q1)*sin(q2)
 + cos(q2)*sin(q1)))/2 + len2*cos(q1)*sin(q2) +
 len2*cos(q2)*sin(q1)))^2))/2 + (m1*((len1^2*q_dot1^2*cos(q1)^2)/4
 + (len1^2*q_dot1^2*sin(q1)^2)/4))/2 + (m2*(q_dot1^2*(len1*cos(q1)
 + (len2*cos(q1))/2)^2 + q_dot1^2*(len1*sin(q1) +
 (len2*sin(q1))/2)^2))/2 + (m4*((q_dot1*(len1*cos(q1)
 + len3*cos(q3)*(cos(q1)*cos(q2) - sin(q1)*sin(q2))
 - len3*sin(q3)*(cos(q1)*sin(q2) + cos(q2)*sin(q1))
 + len2*cos(q1)*cos(q2) - len2*sin(q1)*sin(q2)) +
 q_dot3*(len3*cos(q3)*(cos(q1)*cos(q2) - sin(q1)*sin(q2))
 - len3*sin(q3)*(cos(q1)*sin(q2) + cos(q2)*sin(q1))) +
 q_dot2*(len3*cos(q3)*(cos(q1)*cos(q2) - sin(q1)*sin(q2))
 - len3*sin(q3)*(cos(q1)*sin(q2) + cos(q2)*sin(q1))
 + len2*cos(q1)*cos(q2) - len2*sin(q1)*sin(q2)))^2 +
```

```
 (q_dot1*(len1*sin(q1) + len3*cos(q3)*(cos(q1)*sin(q2)
 + cos(q2)*sin(q1)) + len3*sin(q3)*(cos(q1)*cos(q2) -
 sin(q1)*sin(q2)) + len2*cos(q1)*sin(q2) + len2*cos(q2)*sin(q1))
 + q_dot3*(len3*cos(q3)*(cos(q1)*sin(q2) + cos(q2)*sin(q1))
 + len3*sin(q3)*(cos(q1)*cos(q2) - sin(q1)*sin(q2))) +
 q_dot2*(len3*cos(q3)*(cos(q1)*sin(q2) + cos(q2)*sin(q1))
 + len3*sin(q3)*(cos(q1)*cos(q2) - sin(q1)*sin(q2)) +
 len2*cos(q1)*sin(q2) + len2*cos(q2)*sin(q1)))^2))/2 -
 g*m3*((len3*(cos(q1)*sin(q2) + cos(q2)*sin(q1)))/2 +
 len1*sin(q1) + len2*cos(q1)*sin(q2) + len2*cos(q2)*sin(q1))
 - g*m4*(len1*sin(q1) + len3*cos(q3)*(cos(q1)*sin(q2) +
 cos(q2)*sin(q1)) + len3*sin(q3)*(cos(q1)*cos(q2) - sin(q1)*sin(q2))
 + len2*cos(q1)*sin(q2) + len2*cos(q2)*sin(q1)) - g*m2*(len1*sin(q1) +
 (len2*sin(q1))/2) - (g*len1*m1*sin(q1))/2
```

```
L_n =

0.68*q_dot1^2*cos(q2) - 8.33*sin(q1 + q2) - 33.32*sin(q1)
 - 2.94*sin(q1 + q2 + q3) + 0.12*q_dot1^2*cos(q3)
 + 0.12*q_dot2^2*cos(q3) + 0.425*q_dot1*q_dot2
 + 0.06*q_dot1*q_dot3 + 0.06*q_dot2*q_dot3 +
 4.591774807899560578002870985244e-41*q_dot1^2*cos(2*q1)
 + 1.5125*q_dot1^2 + 0.2125*q_dot2^2 + 0.03*q_dot3^2 +
 0.24*q_dot1^2*cos(q2 + q3) + 0.68*q_dot1*q_dot2*cos(q2) +
 0.24*q_dot1*q_dot2*cos(q3) + 0.12*q_dot1*q_dot3*cos(q3) +
 0.12*q_dot2*q_dot3*cos(q3) + 0.24*q_dot1*q_dot2*cos(q2 + q3) +
 0.24*q_dot1*q_dot3*cos(q2 + q3)
```

5c

Lagrange's Equation some magic involved ans

```
tau = jacobian(jacobian(L, q_dot)', q_dot) * q_ddot - jacobian(L, q)'
% numerical
tau_n = simplify(vpa(subs(tau, [m; g; len], [m_n; g_n; len_n])))

% to extract the q_ddot, I can set them to zero and subtract with the
% original equation. It should give me the coefficients.
```

```
tau =
```

```
                                q_ddot2*((m3*(2*((len3*(cos(q1)*cos(q2)
- sin(q1)*sin(q2)))/2 + len2*cos(q1)*cos(q2) -
len2*sin(q1)*sin(q2))*((len3*(cos(q1)*cos(q2) - sin(q1)*sin(q2)))/2
+ len1*cos(q1) + len2*cos(q1)*cos(q2) - len2*sin(q1)*sin(q2))
+ 2*((len3*(cos(q1)*sin(q2) + cos(q2)*sin(q1)))/2 +
len2*cos(q1)*sin(q2) + len2*cos(q2)*sin(q1))*((len3*(cos(q1)*sin(q2)
+ cos(q2)*sin(q1)))/2 + len1*sin(q1) + len2*cos(q1)*sin(q2) +
len2*cos(q2)*sin(q1))))/2 + (m4*(2*(len3*cos(q3)*(cos(q1)*cos(q2) -
sin(q1)*sin(q2)) - len3*sin(q3)*(cos(q1)*sin(q2) + cos(q2)*sin(q1))
+ len2*cos(q1)*cos(q2) - len2*sin(q1)*sin(q2))*(len1*cos(q1)
+ len3*cos(q3)*(cos(q1)*cos(q2) - sin(q1)*sin(q2))
- len3*sin(q3)*(cos(q1)*sin(q2) + cos(q2)*sin(q1))
+ len2*cos(q1)*cos(q2) - len2*sin(q1)*sin(q2)) +
2*(len3*cos(q3)*(cos(q1)*sin(q2) + cos(q2)*sin(q1))
+ len3*sin(q3)*(cos(q1)*cos(q2) - sin(q1)*sin(q2)) +
len2*cos(q1)*sin(q2) + len2*cos(q2)*sin(q1))*(len1*sin(q1)
+ len3*cos(q3)*(cos(q1)*sin(q2) + cos(q2)*sin(q1))
+ len3*sin(q3)*(cos(q1)*cos(q2) - sin(q1)*sin(q2)) +
len2*cos(q1)*sin(q2) + len2*cos(q2)*sin(q1))))/2) +
q_ddot1*((m2*(2*(len1*sin(q1) + (len2*sin(q1))/2)^2 + 2*(len1*cos(q1)
+ (len2*cos(q1))/2)^2))/2 + (m3*(2*((len3*(cos(q1)*cos(q2)
- sin(q1)*sin(q2)))/2 + len1*cos(q1) + len2*cos(q1)*cos(q2)
- len2*sin(q1)*sin(q2))^2 + 2*((len3*(cos(q1)*sin(q2) +
cos(q2)*sin(q1)))/2 + len1*sin(q1) + len2*cos(q1)*sin(q2)
+ len2*cos(q2)*sin(q1))^2))/2 + (m4*(2*(len1*cos(q1)
+ len3*cos(q3)*(cos(q1)*cos(q2) - sin(q1)*sin(q2))
- len3*sin(q3)*(cos(q1)*sin(q2) + cos(q2)*sin(q1)) +
len2*cos(q1)*cos(q2) - len2*sin(q1)*sin(q2))^2 + 2*(len1*sin(q1)
+ len3*cos(q3)*(cos(q1)*sin(q2) + cos(q2)*sin(q1))
+ len3*sin(q3)*(cos(q1)*cos(q2) - sin(q1)*sin(q2)) +
```

```
len2*cos(q1)*sin(q2) + len2*cos(q2)*sin(q1))^2))/2 +
(m1*((len1^2*cos(q1)^2)/2 + (len1^2*sin(q1)^2)/2))/2)
+ g*m3*((len3*(cos(q1)*cos(q2) - sin(q1)*sin(q2)))/2 +
len1*cos(q1) + len2*cos(q1)*cos(q2) - len2*sin(q1)*sin(q2))
+ g*m4*(len1*cos(q1) + len3*cos(q3)*(cos(q1)*cos(q2) -
sin(q1)*sin(q2)) - len3*sin(q3)*(cos(q1)*sin(q2) + cos(q2)*sin(q1))
+ len2*cos(q1)*cos(q2) - len2*sin(q1)*sin(q2)) + g*m2*(len1*cos(q1)
+ (len2*cos(q1))/2) + (m4*q_ddot3*(2*(len3*cos(q3)*(cos(q1)*cos(q2)
- sin(q1)*sin(q2)) - len3*sin(q3)*(cos(q1)*sin(q2) +
cos(q2)*sin(q1)))*(len1*cos(q1) + len3*cos(q3)*(cos(q1)*cos(q2)
- sin(q1)*sin(q2)) - len3*sin(q3)*(cos(q1)*sin(q2) +
cos(q2)*sin(q1)) + len2*cos(q1)*cos(q2) - len2*sin(q1)*sin(q2))
+ 2*(len3*cos(q3)*(cos(q1)*sin(q2) + cos(q2)*sin(q1)) +
len3*sin(q3)*(cos(q1)*cos(q2) - sin(q1)*sin(q2)))*(len1*sin(q1)
+ len3*cos(q3)*(cos(q1)*sin(q2) + cos(q2)*sin(q1))
+ len3*sin(q3)*(cos(q1)*cos(q2) - sin(q1)*sin(q2))
+ len2*cos(q1)*sin(q2) + len2*cos(q2)*sin(q1))))/2 +
(g*len1*m1*cos(q1))/2
q_ddot1*((m3*(2*((len3*(cos(q1)*cos(q2) - sin(q1)*sin(q2)))/2 +
len2*cos(q1)*cos(q2) - len2*sin(q1)*sin(q2))*((len3*(cos(q1)*cos(q2)
- sin(q1)*sin(q2)))/2 + len1*cos(q1) + len2*cos(q1)*cos(q2)
- len2*sin(q1)*sin(q2)) + 2*((len3*(cos(q1)*sin(q2)
+ cos(q2)*sin(q1)))/2 + len2*cos(q1)*sin(q2) +
len2*cos(q2)*sin(q1))*((len3*(cos(q1)*sin(q2) + cos(q2)*sin(q1)))/2
+ len1*sin(q1) + len2*cos(q1)*sin(q2) + len2*cos(q2)*sin(q1))))/2
+ (m4*(2*(len3*cos(q3)*(cos(q1)*cos(q2) - sin(q1)*sin(q2))
- len3*sin(q3)*(cos(q1)*sin(q2) + cos(q2)*sin(q1)) +
len2*cos(q1)*cos(q2) - len2*sin(q1)*sin(q2))*(len1*cos(q1)
+ len3*cos(q3)*(cos(q1)*cos(q2) - sin(q1)*sin(q2))
- len3*sin(q3)*(cos(q1)*sin(q2) + cos(q2)*sin(q1))
+ len2*cos(q1)*cos(q2) - len2*sin(q1)*sin(q2)) +
2*(len3*cos(q3)*(cos(q1)*sin(q2) + cos(q2)*sin(q1))
+ len3*sin(q3)*(cos(q1)*cos(q2) - sin(q1)*sin(q2)) +
len2*cos(q1)*sin(q2) + len2*cos(q2)*sin(q1))*(len1*sin(q1)
+ len3*cos(q3)*(cos(q1)*sin(q2) + cos(q2)*sin(q1))
+ len3*sin(q3)*(cos(q1)*cos(q2) - sin(q1)*sin(q2))
+ len2*cos(q1)*sin(q2) + len2*cos(q2)*sin(q1))))/2)
+ (m3*(2*(q_dot1*((len3*(cos(q1)*cos(q2) -
sin(q1)*sin(q2)))/2 + len1*cos(q1) + len2*cos(q1)*cos(q2)
- len2*sin(q1)*sin(q2)) + q_dot2*((len3*(cos(q1)*cos(q2)
- sin(q1)*sin(q2)))/2 + len2*cos(q1)*cos(q2) -
len2*sin(q1)*sin(q2)))*(q_dot1*((len3*(cos(q1)*sin(q2)
+ cos(q2)*sin(q1)))/2 + len2*cos(q1)*sin(q2) +
len2*cos(q2)*sin(q1)) + q_dot2*((len3*(cos(q1)*sin(q2)
+ cos(q2)*sin(q1)))/2 + len2*cos(q1)*sin(q2) +
len2*cos(q2)*sin(q1))) - 2*(q_dot1*((len3*(cos(q1)*sin(q2)
+ cos(q2)*sin(q1)))/2 + len1*sin(q1) + len2*cos(q1)*sin(q2)
+ len2*cos(q2)*sin(q1)) + q_dot2*((len3*(cos(q1)*sin(q2)
+ cos(q2)*sin(q1)))/2 + len2*cos(q1)*sin(q2) +
len2*cos(q2)*sin(q1)))*(q_dot1*((len3*(cos(q1)*cos(q2) -
sin(q1)*sin(q2)))/2 + len2*cos(q1)*cos(q2) - len2*sin(q1)*sin(q2))
+ q_dot2*((len3*(cos(q1)*cos(q2) - sin(q1)*sin(q2)))/2
+ len2*cos(q1)*cos(q2) - len2*sin(q1)*sin(q2)))))/2
+ (m4*(2*(q_dot3*(len3*cos(q3)*(cos(q1)*sin(q2) +
```

```
cos(q2)*sin(q1)) + len3*sin(q3)*(cos(q1)*cos(q2) -
sin(q1)*sin(q2))) + q_dot1*(len3*cos(q3)*(cos(q1)*sin(q2)
+ cos(q2)*sin(q1)) + len3*sin(q3)*(cos(q1)*cos(q2) -
sin(q1)*sin(q2)) + len2*cos(q1)*sin(q2) + len2*cos(q2)*sin(q1))
+ q_dot2*(len3*cos(q3)*(cos(q1)*sin(q2) + cos(q2)*sin(q1))
+ len3*sin(q3)*(cos(q1)*cos(q2) - sin(q1)*sin(q2)) +
len2*cos(q1)*sin(q2) + len2*cos(q2)*sin(q1)))*(q_dot1*(len1*cos(q1)
+ len3*cos(q3)*(cos(q1)*cos(q2) - sin(q1)*sin(q2))
- len3*sin(q3)*(cos(q1)*sin(q2) + cos(q2)*sin(q1))
+ len2*cos(q1)*cos(q2) - len2*sin(q1)*sin(q2)) +
q_dot3*(len3*cos(q3)*(cos(q1)*cos(q2) - sin(q1)*sin(q2))
- len3*sin(q3)*(cos(q1)*sin(q2) + cos(q2)*sin(q1))) +
q_dot2*(len3*cos(q3)*(cos(q1)*cos(q2) - sin(q1)*sin(q2))
- len3*sin(q3)*(cos(q1)*sin(q2) + cos(q2)*sin(q1))
+ len2*cos(q1)*cos(q2) - len2*sin(q1)*sin(q2))) -
2*(q_dot1*(len1*sin(q1) + len3*cos(q3)*(cos(q1)*sin(q2)
+ cos(q2)*sin(q1)) + len3*sin(q3)*(cos(q1)*cos(q2)
- sin(q1)*sin(q2)) + len2*cos(q1)*sin(q2) +
len2*cos(q2)*sin(q1)) + q_dot3*(len3*cos(q3)*(cos(q1)*sin(q2)
+ cos(q2)*sin(q1)) + len3*sin(q3)*(cos(q1)*cos(q2) -
sin(q1)*sin(q2))) + q_dot2*(len3*cos(q3)*(cos(q1)*sin(q2)
+ cos(q2)*sin(q1)) + len3*sin(q3)*(cos(q1)*cos(q2)
- sin(q1)*sin(q2)) + len2*cos(q1)*sin(q2) +
len2*cos(q2)*sin(q1)))*(q_dot3*(len3*cos(q3)*(cos(q1)*cos(q2)
- sin(q1)*sin(q2)) - len3*sin(q3)*(cos(q1)*sin(q2) +
cos(q2)*sin(q1))) + q_dot1*(len3*cos(q3)*(cos(q1)*cos(q2)
- sin(q1)*sin(q2)) - len3*sin(q3)*(cos(q1)*sin(q2) +
cos(q2)*sin(q1)) + len2*cos(q1)*cos(q2) - len2*sin(q1)*sin(q2))
+ q_dot2*(len3*cos(q3)*(cos(q1)*cos(q2) - sin(q1)*sin(q2))
- len3*sin(q3)*(cos(q1)*sin(q2) + cos(q2)*sin(q1)) +
len2*cos(q1)*cos(q2) - len2*sin(q1)*sin(q2)))))/2 +
q_ddot2*((m3*(2*((len3*(cos(q1)*sin(q2) + cos(q2)*sin(q1)))/2
+ len2*cos(q1)*sin(q2) + len2*cos(q2)*sin(q1))^2 +
2*((len3*(cos(q1)*cos(q2) - sin(q1)*sin(q2)))/2 +
len2*cos(q1)*cos(q2) - len2*sin(q1)*sin(q2))^2))/2 +
(m4*(2*(len3*cos(q3)*(cos(q1)*sin(q2) + cos(q2)*sin(q1))
+ len3*sin(q3)*(cos(q1)*cos(q2) - sin(q1)*sin(q2))
+ len2*cos(q1)*sin(q2) + len2*cos(q2)*sin(q1))^2 +
2*(len3*cos(q3)*(cos(q1)*cos(q2) - sin(q1)*sin(q2))
- len3*sin(q3)*(cos(q1)*sin(q2) + cos(q2)*sin(q1)) +
len2*cos(q1)*cos(q2) - len2*sin(q1)*sin(q2))^2))/2) +
g*m4*(len3*cos(q3)*(cos(q1)*cos(q2) - sin(q1)*sin(q2))
- len3*sin(q3)*(cos(q1)*sin(q2) + cos(q2)*sin(q1))
+ len2*cos(q1)*cos(q2) - len2*sin(q1)*sin(q2)) +
(m4*q_ddot3*(2*(len3*cos(q3)*(cos(q1)*sin(q2) +
cos(q2)*sin(q1)) + len3*sin(q3)*(cos(q1)*cos(q2)
- sin(q1)*sin(q2)))*(len3*cos(q3)*(cos(q1)*sin(q2)
+ cos(q2)*sin(q1)) + len3*sin(q3)*(cos(q1)*cos(q2)
- sin(q1)*sin(q2)) + len2*cos(q1)*sin(q2) +
len2*cos(q2)*sin(q1)) + 2*(len3*cos(q3)*(cos(q1)*cos(q2)
- sin(q1)*sin(q2)) - len3*sin(q3)*(cos(q1)*sin(q2)
+ cos(q2)*sin(q1)))*(len3*cos(q3)*(cos(q1)*cos(q2) -
sin(q1)*sin(q2)) - len3*sin(q3)*(cos(q1)*sin(q2) + cos(q2)*sin(q1))
+ len2*cos(q1)*cos(q2) - len2*sin(q1)*sin(q2))))/2 +
```

```
g*m3*((len3*(cos(q1)*cos(q2) - sin(q1)*sin(q2)))/2 +
len2*cos(q1)*cos(q2) - len2*sin(q1)*sin(q2))
```

```
                        (m4*(2*(q_dot1*(len3*cos(q3)*(cos(q1)*sin(q2)
+ cos(q2)*sin(q1)) + len3*sin(q3)*(cos(q1)*cos(q2) -
sin(q1)*sin(q2))) + q_dot2*(len3*cos(q3)*(cos(q1)*sin(q2)
+ cos(q2)*sin(q1)) + len3*sin(q3)*(cos(q1)*cos(q2) -
sin(q1)*sin(q2))) + q_dot3*(len3*cos(q3)*(cos(q1)*sin(q2)
+ cos(q2)*sin(q1)) + len3*sin(q3)*(cos(q1)*cos(q2)
- sin(q1)*sin(q2))))*(q_dot1*(len1*cos(q1) +
len3*cos(q3)*(cos(q1)*cos(q2) - sin(q1)*sin(q2))
- len3*sin(q3)*(cos(q1)*sin(q2) + cos(q2)*sin(q1))
+ len2*cos(q1)*cos(q2) - len2*sin(q1)*sin(q2)) +
q_dot3*(len3*cos(q3)*(cos(q1)*cos(q2) - sin(q1)*sin(q2))
- len3*sin(q3)*(cos(q1)*sin(q2) + cos(q2)*sin(q1))) +
q_dot2*(len3*cos(q3)*(cos(q1)*cos(q2) - sin(q1)*sin(q2))
- len3*sin(q3)*(cos(q1)*sin(q2) + cos(q2)*sin(q1))
+ len2*cos(q1)*cos(q2) - len2*sin(q1)*sin(q2))) -
2*(q_dot1*(len1*sin(q1) + len3*cos(q3)*(cos(q1)*sin(q2)
+ cos(q2)*sin(q1)) + len3*sin(q3)*(cos(q1)*cos(q2)
- sin(q1)*sin(q2)) + len2*cos(q1)*sin(q2) +
len2*cos(q2)*sin(q1)) + q_dot3*(len3*cos(q3)*(cos(q1)*sin(q2)
+ cos(q2)*sin(q1)) + len3*sin(q3)*(cos(q1)*cos(q2) -
sin(q1)*sin(q2))) + q_dot2*(len3*cos(q3)*(cos(q1)*sin(q2)
+ cos(q2)*sin(q1)) + len3*sin(q3)*(cos(q1)*cos(q2)
- sin(q1)*sin(q2)) + len2*cos(q1)*sin(q2) +
```

```
len2*cos(q2)*sin(q1)))*(q_dot1*(len3*cos(q3)*(cos(q1)*cos(q2)
- sin(q1)*sin(q2)) - len3*sin(q3)*(cos(q1)*sin(q2) +
cos(q2)*sin(q1))) + q_dot2*(len3*cos(q3)*(cos(q1)*cos(q2)
- sin(q1)*sin(q2)) - len3*sin(q3)*(cos(q1)*sin(q2) +
cos(q2)*sin(q1))) + q_dot3*(len3*cos(q3)*(cos(q1)*cos(q2)
- sin(q1)*sin(q2)) - len3*sin(q3)*(cos(q1)*sin(q2) +
cos(q2)*sin(q1))))))/2 + g*m4*(len3*cos(q3)*(cos(q1)*cos(q2)
- sin(q1)*sin(q2)) - len3*sin(q3)*(cos(q1)*sin(q2) +
cos(q2)*sin(q1))) + (m4*q_ddot2*(2*(len3*cos(q3)*(cos(q1)*sin(q2)
+ cos(q2)*sin(q1)) + len3*sin(q3)*(cos(q1)*cos(q2)
- sin(q1)*sin(q2)))*(len3*cos(q3)*(cos(q1)*sin(q2)
+ cos(q2)*sin(q1)) + len3*sin(q3)*(cos(q1)*cos(q2)
- sin(q1)*sin(q2)) + len2*cos(q1)*sin(q2) +
len2*cos(q2)*sin(q1)) + 2*(len3*cos(q3)*(cos(q1)*cos(q2)
- sin(q1)*sin(q2)) - len3*sin(q3)*(cos(q1)*sin(q2)
+ cos(q2)*sin(q1)))*(len3*cos(q3)*(cos(q1)*cos(q2) -
sin(q1)*sin(q2)) - len3*sin(q3)*(cos(q1)*sin(q2) + cos(q2)*sin(q1))
+ len2*cos(q1)*cos(q2) - len2*sin(q1)*sin(q2))))/2 +
(m4*q_ddot3*(2*(len3*cos(q3)*(cos(q1)*sin(q2) + cos(q2)*sin(q1))
+ len3*sin(q3)*(cos(q1)*cos(q2) - sin(q1)*sin(q2)))^2
+ 2*(len3*cos(q3)*(cos(q1)*cos(q2) - sin(q1)*sin(q2)) -
len3*sin(q3)*(cos(q1)*sin(q2) + cos(q2)*sin(q1)))^2))/2
+ (m4*q_ddot1*(2*(len3*cos(q3)*(cos(q1)*cos(q2) -
sin(q1)*sin(q2)) - len3*sin(q3)*(cos(q1)*sin(q2) +
cos(q2)*sin(q1)))*(len1*cos(q1) + len3*cos(q3)*(cos(q1)*cos(q2)
- sin(q1)*sin(q2)) - len3*sin(q3)*(cos(q1)*sin(q2) +
cos(q2)*sin(q1)) + len2*cos(q1)*cos(q2) - len2*sin(q1)*sin(q2))
+ 2*(len3*cos(q3)*(cos(q1)*sin(q2) + cos(q2)*sin(q1)) +
len3*sin(q3)*(cos(q1)*cos(q2) - sin(q1)*sin(q2)))*(len1*sin(q1)
+ len3*cos(q3)*(cos(q1)*sin(q2) + cos(q2)*sin(q1))
+ len3*sin(q3)*(cos(q1)*cos(q2) - sin(q1)*sin(q2)) +
len2*cos(q1)*sin(q2) + len2*cos(q2)*sin(q1))))/2


tau_n =


    3.025*q_ddot1 + 0.425*q_ddot2 + 0.06*q_ddot3 + 2.94*cos(q1 +
q2 + q3) + 8.33*cos(q1 + q2) + 33.32*cos(q1) + 0.48*q_ddot1*cos(q2
+ q3) + 0.24*q_ddot2*cos(q2 + q3) + 0.24*q_ddot3*cos(q2 + q3) +
1.36*q_ddot1*cos(q2) + 0.24*q_ddot1*cos(q3) + 0.68*q_ddot2*cos(q2) +
0.24*q_ddot2*cos(q3) + 0.12*q_ddot3*cos(q3)
             0.425*q_ddot1 + 0.425*q_ddot2 + 0.06*q_ddot3 +
2.94*cos(q1 + q2 + q3) + 8.33*cos(q1 + q2) + 0.68*q_dot1^2*sin(q2)
+ 0.24*q_ddot1*cos(q2 + q3) + 0.68*q_ddot1*cos(q2) +
0.24*q_ddot1*cos(q3) + 0.24*q_ddot2*cos(q3) + 0.12*q_ddot3*cos(q3)
+ 0.24*q_dot1^2*sin(q2 + q3) + 0.68*q_dot1*q_dot2*sin(q2) +
0.24*q_dot1*q_dot2*sin(q2 + q3) + 0.24*q_dot1*q_dot3*sin(q2 + q3)
0.06*q_ddot1 + 0.06*q_ddot2 + 0.06*q_ddot3 + 2.94*cos(q1 + q2 + q3) +
0.12*q_dot1^2*sin(q3) + 0.12*q_dot2^2*sin(q3) + 0.24*q_ddot1*cos(q2
+ q3) + 0.12*q_ddot1*cos(q3) + 0.12*q_ddot2*cos(q3) +
0.24*q_dot1^2*sin(q2 + q3) + 0.24*q_dot1*q_dot2*sin(q3) +
0.12*q_dot1*q_dot3*sin(q3) + 0.12*q_dot2*q_dot3*sin(q3) +
0.24*q_dot1*q_dot2*sin(q2 + q3) + 0.24*q_dot1*q_dot3*sin(q2 + q3)
```

6

```
% because all z are parallel
alpha = q_dot

% I'm running out of time...
```

```
alpha =

 q_dot1
 q_dot2
 q_dot3
```

Published with MATLAB® R2015b