17/05/2024

ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ

$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $a_n \in \mathbb{R}$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \rightarrow$ δυναμοσειρά με κέντρο $x_0 \in \mathbb{R}$

$\Updownarrow$

$f_n(x) = a_n (x-x_0)^n$ $\qquad \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$

Μπορούμε να θέσουμε $y = x - x_0$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (y-0)^n \rightarrow$ δυναμοσειρά με κέντρο 0

Για $x = x_0$: $\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x_0 - x_0)^n}_{\in \mathbb{R}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot 0^n = a_0 \in \mathbb{R}$ συγκλίνει

$\rightarrow$ σειρά πραγματικών αριθμών

Σύμβαση: $0^0 = 1$, $0^n \overset{n>0}{=} 0$ Τουλάχιστον ένα σημείο σύγκλισης

ΥΠΕΝΘΥΜΗΣΗ

$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{m \geq n} a_n \right)$, $\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\inf_{m \geq n} a_n \right)$

ΙΔΙΟΤΗΤΑ: $a_n \rightarrow a$, τότε το $\lim_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$

$\limsup_{n\to\infty} a_n \neq \liminf_{n\to\infty} a_n \Rightarrow a_n$ αποκλίνει

Παράδειγμα 1: $a_n = (-1)^n$

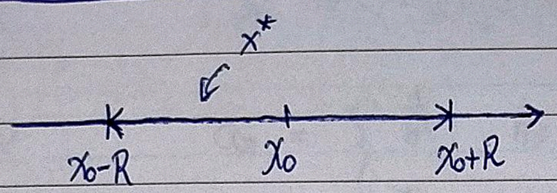
$\limsup_{n\to\infty} a_n = 1$

$\liminf_{n\to\infty} a_n = -1$

Παράδειγμα 2: $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$

$\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = 0 \qquad a_n \rightarrow 0.$

ΑΚΤΙΝΑ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ R



$x \in (x_0 - R, x_0 + R)$

$$R = \begin{cases} \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, & \text{όταν } \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 0 \\ \infty, & \text{όταν } \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \\ 0, & \text{όταν } \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$R = \begin{cases} \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}, & \text{όταν } \limsup\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 0 \\ \infty, & \text{όταν } \limsup\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0 \\ 0, & \text{όταν } \limsup\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0 \end{cases}$$

- Αν $R = \infty$, τότε $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ συγκλίνει στο $\mathbb{R}$
- Για δοσμένο $x = x^* \in \mathbb{R}$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x^* - x_0)^n$ συγκλίνει και μάλιστα απόλυτα
- Όταν $R = 0$, τότε μοναδικό σημείο σύγκλισης είναι το $x = x_0$
- Όταν $R > 0$, τότε για $x^* \in (x_0 - R, x_0 + R)$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x^* - x_0)^n$ θα συγκλίνει απόλυτα.

Έστω το διάστημα $(x_0 - R, x_0 + R)$. Τότε μπορούμε να πάρουμε a, b τ.ω $x_0 - R < a < b < x_0 + R$ και θεωρούμε το $[a, b]$.
Η δυναμοσειρά $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα $\forall x \in [a, b]$.
Για σύγκλιση στα σημεία $x_{1,2} = x_0 \pm R$ θα πρέπει να εξετάσω σύγκλιση των σειρών πραγματικών αριθμών.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x_1 - x_0)^2 \quad \text{και} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x_2 - x_0)^2$$

__Παράδειγμα__ Να βρεθεί το ευρύτερο διάστημα σύγκλισης της διασποράς

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n\right) \to$ Γενική Μορφή (Βρίσκω R με εξετάζω τα άκρα)

__ΛΥΣΗ__

$x_0 = 0$ $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2} , & n \geq 1 \\ 0 , & n=0 \end{cases}$

$$\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n^2}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^2 = \left(\frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}}\right)^2 = 1$$

$$R = \frac{1}{\lim\ldots} = \frac{1}{1} = 1$$

Η δυναμοσειρά συγκλίνει για $x \in (-1,1)$

Για $x_1 = -1$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ συγκλίνει

Για $x_2 = 1$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει

Οπότε το ευρύτερο διάστημα είναι το $[-1,1]$

__Παράδειγμα__ Να βρεθεί το ευρύτερο διάστημα σύγκλισης της διασποράς.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (x-2)^{2n}}{n}$ $\to$ με ενοχλεί $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n\right)$

__ΛΥΣΗ__: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (x-2)^{2n}}{n} = 0\cdot(x-2)^0 + 0\,(x-2)^1 + \frac{2(x-2)^2}{1} + 0\cdot(x-2)^3 + \frac{2^2(x-2)^4}{2} + 0\cdot(x-2)^5 + \frac{2^3(x-2)^6}{3}$

$x_0 = 2$

$a_n = \begin{cases} 0 , & n=0 \\ \frac{2^k}{k} , & n = 2k,\ k\in\mathbb{N} \text{ (άρτιος)} \\ 0 , & n = 2k+1,\ k\in\mathbb{N} \text{ (περιττός)} \end{cases}$ ο αριθμητής πάει πιο γρήγορα από τον παρονομαστή.

$$\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[2k]{\frac{2^k}{k}} = \frac{\lim_{k\to\infty} \sqrt[2k]{2^k}}{\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\sqrt{k}} \to 1} = \lim_{k\to\infty} 2^{k\cdot\frac{1}{2k}} = \sqrt{2} > 0$$

άρα $R = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Επομένως, συγκλίνει τουλάχιστον στο $\left(2-\frac{\sqrt{2}}{2}, 2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$x_1 = 2+\frac{\sqrt{2}}{2}$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} \frac{\left(2^{1/2}\right)^{2n}}{2^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$

$x_2 = 2-\frac{\sqrt{2}}{2}$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2n} = \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$

Οπότε το ευρύτερο διάστημα σύγκλισης είναι το $\left(2-\frac{\sqrt{2}}{2}, 2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

$$f(x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x_0-x_0)^n = a_0$$

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, n (x-x_0)^{n-1}$$

$$f'(x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, n (x_0-x_0)^{n-1} = a_1 \cdot 1$$

$$a_0 \cdot 0 \cdot 0^{-1} + a_1 \cdot 1 (0)^0 \to 1$$

$\vdots$

μη μηδενικό

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, n(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)(x-x_0)^{n-k} \xrightarrow[x=x_0]{n=k} \underbrace{a_k \cdot k\cdot(k+1)\cdot\ldots\cdot 1}_{k!}$$

k-οστή παράγωγος

$$\Rightarrow a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n}$$

Ανάπτυγμα Taylor της f γύρω από το x_0.

Παράδειγμα $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θα έχουμε $f^{(n)}(x) = e^x$

$f^{(n)}(x_0) = e^0 = 1$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \xRightarrow{x=1} e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$