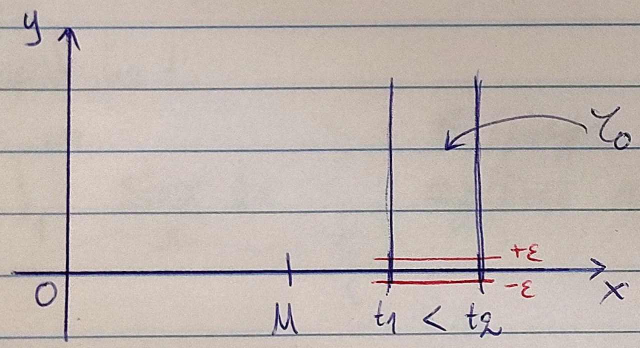
13/03/2024

Κριτήριο Cauchy

$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει ανν, $\forall \varepsilon>0 \ \exists M\in\mathbb{R}$ τ.ω $\forall t_1,t_2\in[M,+\infty)$

τ.ω $M \leq t_1 \leq t_2$ $\left|\int_{t_1}^{t_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$



το ορισμένο ολοκλήρωμα στο $[t_1,t_2]$

Απόδειξη

$(\Longrightarrow)$ Έστω $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει $\forall t\geq M$, τότε $\forall \varepsilon>0 \ \exists M\in\mathbb{R}$ τ.ω

$$\left|\int_{t_1}^{t_2} f(x)\,dx\right| = \left|\int_a^{t_2} f(x)\,dx - \int_a^{t_1} f(x)\,dx\right| = \left|\int_a^{t_2} f(x)\,dx - \int_a^{+\infty} f(x)\,dx + \int_a^{+\infty} f(x)\,dx - \int_a^{t_1} f(x)\,dx\right|$$

$$\leq \left|\int_a^{t_2} f(x)\,dx - \int_a^{+\infty} f(x)\,dx\right| + \left|\int_a^{+\infty} f(x)\,dx - \int_a^{t_1} f(x)\,dx\right|$$

$t_1, t_2 > M$

$\forall \varepsilon'>0 \ \exists M\in\mathbb{R}$ τ.ω $\forall t_1,t_2\in[a,+\infty)$ με $t_1<t_2$

$$\left|\int_{t_1}^{t_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$$

$< \varepsilon+\varepsilon = 2\varepsilon = \varepsilon'$

$\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon$

Απολυτη Συγκλιση

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx$$ συγκλίνει (δηλαδή, $<+\infty$)

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists M \in \mathbb{R}$ τ.ω $\forall\, t_1, t_2 \in [M, +\infty) : t_1 > t_2 . \ \left| \int_{t_1}^{t_2} f(x)\, dx \right| < \varepsilon .$

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} f(x)\, dx \right| \leq \int_{t_1}^{t_2} |f(x)|\, dx = \left| \int_{t_1}^{t_2} |f(x)|\, dx \right| < \varepsilon$$

Παράδειγμα 1

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

1ο Ερώτημα. συγκλίνει απόλυτα; $\xrightarrow{\text{ΝΑΙ}} \int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ συγκλίνει

$\xrightarrow{\text{ΟΧΙ}}$ ΔΕΝ ΞΕΡΩ

$\forall \varepsilon \ \exists M$ τ.ω $t_1, t_2 \in [M, +\infty)$ με $t_1 < t_2$

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} \frac{\sin x}{x}\, dx \right| < \varepsilon$$

$$\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\, dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx$$

$$\lim_{t \to +\infty} \int_1^t \frac{1}{x}\, dx = \lim_{t \to +\infty} [\log x]_1^t = \lim_{t \to +\infty} \log t - \overset{0}{\cancel{\log 1}} = +\infty$$

2ο Ερώτημα: Τι πράξεις μπορώ να κάνω ώστε να έχω πιο βολικό ολοκλήρωμα;

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\sin x}{x}\, dx \ \overline{\ \sin x = -(\cos x)'\ } \ - \int_{t_1}^{t_2} \frac{(\cos x)'}{x}\, dx = \underbrace{\underbrace{\left[-\cos x \cdot \frac{1}{x} \right]_{t_1}^{t_2}}_{<0} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\cos x}{x^2}\, dx}_{\circledast}$$

Έστω $f(x) = \cos x$ & $g(x) = -\frac{1}{x}$

$$\boxed{\begin{array}{l}\displaystyle\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int fg' \\ (\cos x)' = -\sin x \\ (\sin x)' = \cos x\end{array}}$$

$$(*) \quad \int_{t_1}^{t_2} \frac{\sin x}{x}\, dx = -\frac{\cos t_2}{t_2} + \frac{\cos t_1}{t_1} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\cos x}{x^2}\, dx$$

$$\Rightarrow \left| \int_{t_1}^{t_2} \frac{\sin x}{x}\, dx \right| \leq \frac{|\cos t_2|}{t_2} + \frac{|\cos t_1|}{t_1} + \int_{t_1}^{t_2} \frac{|\cos x|}{x^2}\, dx$$

$$t_1, t_2 > M \qquad \leq \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_1} + \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{x^2}\, dx < \varepsilon$$

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΛΟΓΟΥ (CAUCHY)

$f : [a, +\infty)$ ολοκληρώσιμη σε $[a, t]$, $t \geq a$

αν $\lim\limits_{x \to +\infty} |f(x)|^{1/x} < 1$, τότε $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ συγκλίνει.

Παράδειγμα 1

Ν.δ.ο $\int_a^{+\infty} e^{-x^2} dx$ συγκλίνει.

ΛΥΣΗ: $f(x) = e^{-x^2} > 0$

- $|f(x)|^{\frac{1}{x}} = \left(e^{-x^2}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{-x}$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} |f(x)|^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0 < 1$

Άρα από το Κριτήριο Λόγου CAUCHY το $\int_a^{+\infty} e^{-x^2} dx$ συγκλίνει.

Παράδειγμα 2

$$\int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx$$

$f(x) = e^{-x}$ $\qquad |f(x)|^{\frac{1}{x}} = e^{-1}$ $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty} |f(x)|^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{e} < 1$, άρα συγκλίνει

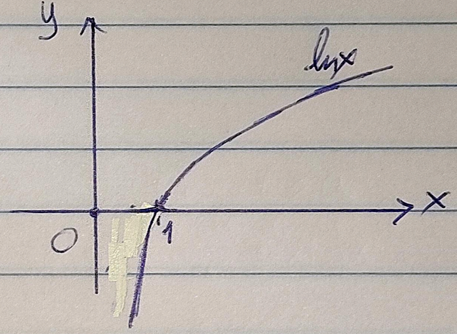
Ορισμός

Έστω $f:(a,b]$ ολοκληρώσιμη σε κάθε $[t,b]$, $t>a$

$$F(t) = \int_t^b f(x)\,dx \qquad \lim_{t\to a^+} F(t) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Παράδειγμα 1

$$\int_{0^+}^1 \ln x\,dx$$



$$F(t) = \int_t^1 \ln x\,dx = \int_t^1 x' \ln x\,dx$$

$$= [x\ln x]_t^1 - \int_t^1 x(\ln x)'\,dx$$

$$= \cancel{1\ln 1}^{\,0} - t\ln t - \int_t^1 dx$$

$$= t - 1 - t\ln t$$

$$\int_{0^+}^1 f(x)\,dx = \lim_{t\to0^+}(-t\ln t) + 0 - 1 = \lim_{t\to0^+}(-t\ln t) - 1$$

$$= -\lim_{t\to0^+}\left(\frac{\ln t}{\frac{1}{t}}\right) - 1 = -\lim_{t\to0^+}\left(\frac{\frac{1}{t}}{-\frac{1}{t^2}}\right) - 1 = \lim_{\cancel{t\to0^+}} t^{\,\to 0} - 1 = -1.$$