24/05/2024

Σειρά Taylor της f γύρω από το $x_0 \in \mathbb{R}$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x-x_0) + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k.$$

$f^{(k)}$ είναι κ-οστή παράγωγος

$f^{(0)} = f$

$f^{(1)} = f'$

$f^{(2)} = f''$

τι γίνεται εάν $|x-x_0| < \varepsilon$, ε μικρός αριθμός ;

Τότε $(x-x_0)^k \xrightarrow{k\to\infty} 0$

$\varepsilon = 0,001 = 10^{-3}$

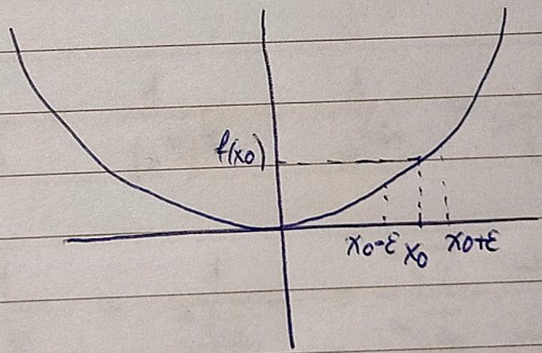
$\varepsilon^3 = (10^{-3})^3 = 10^{-9} << 1$

για f συνεχή συνάρτηση για την οποία ξέρουμε ότι είναι δύο φορές παραγωγίσιμη

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0) + \_\_\_\_$$

για $\varepsilon << 1$

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$



Παράδειγμα

$f(x) = \ln x$, $x \in (0,+\infty)$ $\longrightarrow$ $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$

$f(1.001)$ $x_0 = 1$

$$\underset{1.001}{f(x)} = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2$$

$$= \cancel{f(1)}^{0} + 1 \cdot 0,001 - \frac{1}{2}\, 0,000001$$

ΑΣΚΗΣΗ 1

Να αποδειχθεί ότι $\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot x^{k} = \frac{x}{(1-x)^2}$, $|x|<1$

$$\left(\sum \lambda^n = \frac{1}{1-\lambda}\right)$$

Λύση:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot x^{k} = 1\cdot x^1 + 2x^2 + 3x^3 + \dots$$

$$= x(1 + \underbrace{2x}_{(x^2)'} + \underbrace{3x^2}_{(x^3)'} + \dots + \underbrace{k\cdot x^{k-1}}_{(x^k)'} + \dots)$$

$$= x\sum_{k=1}^{\infty}(x^k)' = x\left(\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} x^k}_{\sum_{k=0}^{\infty} x^k - 1}\right)' = x\left(\frac{1}{x-1} - 1\right)'$$

$$= x\left(-\frac{1}{(1-x)^2}\right)(-1)$$

$$= \frac{x}{(1-x)^2}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Να βρείτε πού συγκλίνει η $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}(x-1)^n$

Λύση:

$$a_n = \begin{cases} 0, & n=0 \\ \frac{1}{\sqrt{n}}, & n>0 \end{cases} \qquad x_0 = 1$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} \xrightarrow{n\to\infty} ; \qquad \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n^{1/2}}} = \frac{1}{(n^{1/2})^{1/n}} = \frac{1}{n^{1/2n}} = \frac{1}{\sqrt[2n]{n}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[m]{\frac{m}{2}}} = \frac{1}{\frac{\sqrt[m]{m}}{\sqrt[m]{2}}} = \frac{\sqrt[m]{2}}{\sqrt[m]{m}} \quad \begin{matrix}\to 1 \\ \to 1\end{matrix}$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \xrightarrow{n\to\infty} ; \qquad \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{\frac{n}{n+1}} = \sqrt{\frac{\cancel{n}1}{\cancel{n}(1+\frac{1}{n})}} \to 1$$

$R = \frac{1}{\text{όριο}} = 1$. Η δυναμοσειρά συγκλίνει τουλάχιστον στο $(1-1, 1+1) = (0,2)$

έλεγχος για $x=0$ κ' $x=2$

$x=0$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} (-1)^n$ $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

Άρα, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} (-1)^n$ συγκλίνει

$x=2$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} 1^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}} = \infty$

Άρα, η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} (x-1)^n$ συγκλίνει στο $[0,2)$.