ΣΜΑΡΑΓΔΑΚΗΣ Σύνοψη 1ου Μαθήματος 08/03/2024

$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$: 1ο βήμα $\int_a^t f(x)\,dx = F(t)$ 2ο βήμα $\lim_{t\to+\infty} F(t) =$ Γ.Ο είδους Ι στο $[a,+\infty)$

ή

$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$: $\int_t^b f(x)\,dx = F(t)$. $\lim_{t\to-\infty} G(t) =$ Γ.Ο είδους Ι στο $(-\infty, b]$

f ολοκληρώσιμη σε κάθε $[a,t]$, $t \geq a$

f ολοκληρώσιμη σε κάθε $[t,b]$, $t \leq b$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^a f(x)\,dx + \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,dx = \text{Γ.Ο. Ι είδους στο } \mathbb{R}$$

$$\neq \lim_{t\to\infty}\int_{-t}^{t} f(x)\,dx$$

$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \in \mathbb{R}$ συγκλίνει $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \in \{-\infty, +\infty\}$ ή δεν υπάρχει, αποκλίνει

Κριτήρια Σύγκλισης.

Πρόταση (Κριτήριο Συγκρίσεως)

Έστω $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες σε κάθε $[a,t]$, $t\geq a$. τέτοιο ώστε $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $\forall x\in[a,+\infty)$.

1. Εάν $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ συγκλίνει, τότε $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει
2. Εάν $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$, τότε $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx = +\infty$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: ① Έστω $\underbrace{\int_a^{+\infty} g(x)\,dx = A < \infty}_{\text{φραγμένο}}$, τότε $\underbrace{\int_a^{t} g(x)\,dx = G(t)}_{\text{είναι αύξουσα}}$

Οπότε, $G(t) \leq \int_a^{+\infty} g(x)\,dx = A < \infty$ και άρα είναι φραγμένη.

$(g: [a,+\infty) \to [0,+\infty)$ και $G(t) = \int_a^{t} g(x)\,dx$ είναι φραγμένη, τότε $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx = \sup G$ συγκλίνει

Άρα $\int_a^{t} f(x)\,dx \leq \int_a^{t} g(x)\,dx$ $\quad F(t) \leq G(t) \leq A < \infty$

Συνεπώς και $F(t)$ είναι φραγμένη.

$(f: [a,+\infty) \to [0,+\infty)$ και F είναι φραγμένη, άρα από πρόταση (1η διάλεξη) έχουμε $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \sup F)$

② Έστω $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$ και $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ συγκλίνει

Αν $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx = A < \infty$, τότε από την ① θα έχουμε $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ να συγκλίνει. ΑΤΟΠΟ

Άρα η αρχική υπόθεση είναι λανθασμένη $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει.

Παράδειγμα 1

Δ.ο το $\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \left| \frac{5\cos(x^3+2x+1)}{x^6+1} \right| dx$ συγκλίνει.

Λύση: $f(x) = \left| \frac{5\cos(x^3+2x+1)}{x^6+1} \right| = \frac{5\,|\cos(x^3+2x+1)|}{|x^6+1|} \leq \frac{5}{x^6+1} \leq \frac{5}{x^6} = G(x)$

$0 \leq f(x) \leq g(x)$

• $\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{5}{x^6}\,dx = 5\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{1}{x^6}\,dx$

• $\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} x^{-6}\,dx = \left[\frac{1}{-6+1}x^{-6+1}\right]_{\sqrt{2}}^{t} = -\frac{1}{5}t^{-5} + \frac{1}{5}2^{-\frac{5}{2}} = G(t)$

$\Rightarrow \lim_{t\to+\infty} G(t) = \frac{1}{5}2^{-\frac{5}{2}} < +\infty$ επομένως το G συγκλίνει, άρα

και η $\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει

Παράδειγμα 2

Δ.ο $\int_{3}^{+\infty} \frac{7}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$ αποκλίνει.

Λύση: $0 \le f(x) \le g(x)$

Θέτω $g(x) = \frac{7}{\sqrt{x^2-4}}$.

$\frac{7}{\sqrt{x^2-4}} \geq \frac{7}{\sqrt{x^2}} = \frac{7}{|x|} \overset{x\geq 3}{=\!=} \frac{7}{x} = f(x)$.

Ξέρουμε ότι $\int_{3}^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ αποκλίνει, άρα και $\int_{3}^{+\infty} \frac{7}{x}\,dx$ αποκλίνει.

Οπότε από το Κριτήριο Συγκρίσεως έχουμε ότι $\int_{3}^{+\infty} \frac{7}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$ αποκλίνει.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΟΡΙΑΚΗΣ ΣΥΓΚΡΙΣΗΣ

$f: [a,+\infty) \to \mathbb{R}$, $g: [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) \geq 0$, $x \in [a,+\infty)$

και $g(x) > 0$ για κάποιο $a' \geq a$ στο $[a',+\infty)$

και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = K$, τότε:

① Για $K \in (0,+\infty)$. Το $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει ανν $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ συγκλίνει.

② Για $K=0$.

- $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ συγκλίνει $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει
- $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ αποκλίνει $\Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ αποκλίνει.

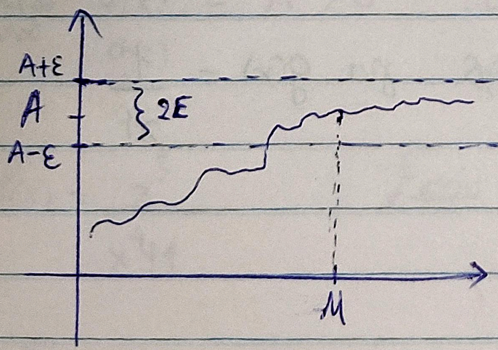
③ Για $K = +\infty$

- $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει $\Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ συγκλίνει
- $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ αποκλίνει $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ αποκλίνει

Απόδειξη:

$\forall \varepsilon>0 \ \exists M \in \mathbb{R}$ τ.ω $\forall x \geq M$

$|f(x) - A| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A.$



$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = K$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0 \ \exists M \in \mathbb{R}$ τ.ω $\forall x \geq M \ \left|\dfrac{f(x)}{g(x)} - K\right| < \varepsilon$

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - K\right| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} - K < \varepsilon \Leftrightarrow K - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < K + \varepsilon \quad \forall x \geq M.$$

$(**)$ $\qquad (*)$

$$\Leftrightarrow (K-\varepsilon)g(x) \leq \boxed{f(x) \leq (K+\varepsilon)g(x).}$$

$(\Leftarrow)$

$\circledast$ $\forall x \geq M \quad 0 \leq f(x) \leq \underbrace{(K+\varepsilon)}^{>0} g(x)$

Αν η $\int_M^{+\infty} g(x)\,dx$ συγκλίνει, τότε $(K+\varepsilon)\int_M^{+\infty} g(x)\,dx$ συγκλίνει

Από το Κριτήριο Σύγκρισης $\Longrightarrow \int_M^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει

$(\Longrightarrow)$ (είχα $\forall \varepsilon > 0$, $\varepsilon = K/2$)

$(**)$ $\forall x \geq M \quad (K-\varepsilon)g(x) \leq f(x)$

για $\varepsilon = \frac{K}{2} \qquad 0 \leq \frac{1}{2}Kg(x) \leq f(x)$

$\Rightarrow$ Αν $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει, τότε $\int_M^{+\infty} \frac{1}{2}Kg(x)\,dx$ συγκλίνει $\Rightarrow \int_M^{+\infty} g(x)\,dx$ συγκλίνει

<u>Παράδειγμα 1</u>

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^3}{x^4+1}\,dx = +\infty$$

<u>Λύση:</u> Με κριτήριο οριακής σύγκλισης (Υπάρχει g?)

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K > 0$ και $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$ αποκλίνει, τότε $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ αποκλίνει

$f(x) = \frac{x^3}{x^4+1}$. Έστω $g(x) = \frac{1}{x}$. $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{x^3}{x^4+1}}{\frac{1}{x}} = \frac{x^4}{x^4+1}$, τότε

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{x^4+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{\cancel{x^4}\left(1+\frac{1}{x^4}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\underbrace{\frac{1}{x^4}}_{\to 0}} = 1 = K.$$

Όμως, $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$ αποκλίνει $\Longrightarrow \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ αποκλίνει.

Αν είχαμε $f(x)=\dfrac{x^5}{x^7+1}$ και $g(x)=\dfrac{1}{x^2}$

Τότε $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^7}{x^7+1}=1$

$\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$ συγκλίνει.

$$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}\,dx=\begin{cases}\text{συγκλίνει για } p>1\\ \text{αποκλίνει για } p\leq 1\end{cases}$$

Πορισμα

$f\in[a,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)\geq 0$, $\forall x\in[a,+\infty)$

① $\lim\limits_{x\to+\infty}x^p f(x)=K\in[0,+\infty)$ με $p>1$, τότε $\int_a^{+\infty}f(x)\,dx$ συγκλίνει, ενώ

② $\lim\limits_{x\to+\infty}x^p f(x)=K\in(0,+\infty)\cup\{+\infty\}$ με $p\leq 1$, τότε $\int_a f(x)\,dx$ αποκλίνει

Σημειωση:
Είναι το ίδιο με το Κριτήριο Οριακής Σύγκλισης για $g(x)=\dfrac{1}{x^p}$

Παράδειγμα 1

$\int_1^{+\infty}\dfrac{x^8}{x^{15}+1}\,dx$ συγκλίνει ή αποκλίνει;

Λύση: $\lim\limits_{x\to+\infty}x^7\cdot\dfrac{x^8}{x^{15}+1}=K=1$ $p=7>1$ Και από το παραπάνω Πόρισμα συγκλίνει

Ορισμος

Έστω $f: [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη.
Το γενικευμένο ολοκλήρωμα είδους I στο $[a,+\infty)$ συγκλίνει απολύτως, αν

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx$$ συγκλίνει.

Παράδειγμα: $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\, dx$ συγκλίνει απολύτως;

Λύση: $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x^2}\right| dx$

$0 \leq \tilde{f}(x) = \left|\dfrac{\sin x}{x^2}\right| \leq \dfrac{1}{x^2}$ Από Κριτήριο Σύγκρισης $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$.