Ερώτηση: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ συγκλίνει;

$$\frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n\, n^{1/2}} = \frac{1}{n^{3/2}}$$

$\boxed{\sqrt[k]{n} = n^{1/k}}$ SOS.

Παράδειγμα 1

$f:[0,1] \to \mathbb{R}$

$$f_n(x) = x^2 - \frac{x^n}{2^n}\sin(x^2+3x+1)$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = ;$$

Λύση: $f_n(x) \xrightarrow{\text{ο.σ.}} x^2$

$\forall \varepsilon>0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|f_n(x) - \underset{x^2}{f(x)}| < \varepsilon$ $\forall x \in [0,1]$

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| -\frac{x^n}{2^n}\sin(x^2+3x+1)\right| \le \frac{x^n}{2^n} \le \frac{1}{2^n} < \varepsilon \quad \forall x\in[0,1]$$

- $\frac{1}{2^n} < \varepsilon \Rightarrow 2n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n > \frac{1}{2\varepsilon}$, άρα επιλέγω $n_0 = \frac{1}{2\varepsilon} + 1$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Παράδειγμα

$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$

$f_n(x) = \frac{nx}{n+x}$

ΛΥΣΗ: Κατά σημείο $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{n+x} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}x}{\cancel{n}(1+\frac{x}{n})}$

$= \lim_{n\to+\infty} \frac{x}{1+\underbrace{\frac{x}{n}}_{0}} = x$

Άρα $f_n(x) \xrightarrow{\kappa.\sigma} f(x) = x$

$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} \left| \frac{nx}{n+x} - x \right| = \sup_{x\in[0,1]} \left| \frac{\cancel{nx} - \cancel{nx} - x^2}{n+x} \right|$

$= \sup_{x\in[0,1]} \left| \frac{x^2}{n+x} \right| = \sup_{x\in[0,1]} \frac{x^2}{n+x} = \frac{1}{n+1}$

$g(x) = \frac{x^2}{n+x}$ $\quad g'(x) = \frac{2x(n+x) - x^2}{(n+x)^2} = \frac{2xn + 2x^2 - x^2}{(n+x)^2} = \frac{2xn + x^2}{(n+x)^2} > 0$

Άρα $g \uparrow$ στο $[0,1]$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, επομένως η $f_n \xrightarrow{o.\sigma} f$.

+ Κατά σημείο

(Πρέπει να βρεις n_0) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0$ τ.ω $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ $\forall x \in A$.

$f_n(x) \xrightarrow{o.\sigma} f(x)$

$\sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)|$, $\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \right) = \begin{cases} 0 & \text{συγκλίνει} \\ \neq 0 & \text{δεν συγκλίνει} \end{cases}$

Άσκηση

$f_n(x)=\dfrac{x^2}{x^2+(1-nx)^2}$ δ.ο $f_n \xrightarrow{\cancel{ο.σ}}$

πρέπει να φύγει

Λύση:

f_n συνεχής συνάρτηση $\quad f_n(x) \xrightarrow{κ.σ} f(x)=0$

$f_n \xrightarrow{ο.σ} f \quad \forall \{a_n\} \quad a_n \to a \quad f_n(a_n) \to f(a)$

Έστω $a_n=\dfrac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{\left(\frac{1}{n}\right)^2+\underbrace{\left(1-n\frac{1}{n}\right)^2}_{0}} = 1$$

Κριτήριο Weierstrass

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad |f_n(x)|\le M_n \qquad \forall x\in[a,b]$

Θέλω ομοιόμορφη σύγκλιση $\qquad \sum M_n \longrightarrow$ συγκλίνει

Παράδειγμα

$f_n(x)=\dfrac{x}{n^2+x}$, $f_n:[0,1]\to \mathbb{R}$

πάνω βάζω ότι μεγαλύτερο έχω και κάτω ότι μικρότερο.

Λύση: $\left|\dfrac{x}{n^2+x}\right| \le \dfrac{1}{n^2}$

Η $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ συγκλίνει. Άρα, από κριτήριο Weierstrass η $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα.

$\sup_{x\in[0,1]}\left|\dfrac{x}{n^2+x}\right| = \dfrac{1}{n^2+1}$

Θέτω $g(x)=\dfrac{x}{n^2+x}$. $\quad g'(x)=\dfrac{n^2+\cancel{x}-\cancel{x}}{(n^2+x)^2}$

$g'(x)=\dfrac{n^2}{(n^2+x)^2}>0 \quad g \uparrow$ στο $[0,1]$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (-1)^n$ συγκλίνει, όταν $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ και $a_n \downarrow$.

Παράδειγμα

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n}\right)$$

1º Θέμα: ολοκληρώματα
2º Θέμα: Σειρές
3º Θέμα: Δυναμοσειρές.

Λύση: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, άρα συγκλίνει.

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^p$. Αν $p \leq 1$ αποκλίνει
Αν $p > 1$ συγκλίνει

Παράδειγμα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (x-3)^n \qquad \Bigg| \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

$$a_n = \begin{cases} 0 & , n=0 \\ \frac{1}{n} & , n \geq 1 \end{cases} , \quad x_0 = 3$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}} = 1 \qquad R=1 \qquad \underline{R: \text{ακτίνα}}$$

Άρα συγκλίνει στο $(2,4)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (2-3)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \quad \text{συγκλίνει.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (4-3)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{αποκλίνει}$$

Επομένως το διάστημα σύγκλισης είναι το $[2,4)$.

Παράδειγμα

$0 \leq a_n \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n} \leq b_n \rightarrow$ αποκλίνει

a_n ↓ συγκλίνει

$\frac{1}{n^2}$ ↓ συγκλίνει

$\frac{1}{n}$ ↓ αποκλίνει

$\int_a^{+\infty}$ $\int_{-\infty}^{b}$ $\longrightarrow$ 1ου είδους ολ.

$\int_{a^+}^{b}$ $\int_a^{b^-}$ $\longrightarrow$ 2ου είδους ολ.

$\int_{a^+}^{+\infty}$ $\int_{-\infty}^{b^-}$ $\longrightarrow$ 3ου είδους ολ.