Τρία Θέματα 19/04/2024

$f_n \xrightarrow{κ.σ} f$

Βρες $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ τ.ω $a_n \to a \in \mathbb{R}$

$\lim_{n\to\infty} f_n(a_n) = f(a)$, τότε $f_n \xrightarrow{ο.σ} f$.

- Αν θέλω ν.δ.ο $f_n \not\xrightarrow{ο.σ} f$, αρκεί να $\exists \{a_n\}$, $a_n \to a$ τέτοιο ώστε $\lim_{n\to\infty} f_n(a_n) \neq f(a)$

Παράδειγμα

$$f_n(x) = \frac{x^2}{x^2+(1-nx)^2}, \quad x\in[0,1]$$

Λύση: Κ.σ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = x^2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\underbrace{x^2+(1-nx)^2}_{+\infty}} = x^2 \cdot 0 = 0 = f(x)$

$f_n(x) \xrightarrow{κ.σ} 0$

$a_n = \frac{1}{n}$, $n=1,2,\dots$ $\quad a_n \to 0 = a \quad f(a)=0$

$$f_n(a_n) = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \underbrace{\left(1-n\frac{1}{n}\right)^2}_{0}} = 1, \ \forall n$$

Άρα $f_n(a_n) \xrightarrow{n\to+\infty} 1 \neq 0 = f(0)$, επομένως δεν συγκλίνει ομοιόμορφα.

Δοκιμάζουμε ακολουθία της μορφής $a_n = \frac{1}{n^p}$, $p\in\mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$ [redacted]

$$f_n \xrightarrow{\kappa\sigma} f$$

Ισχύει;

Απάντηση: Όχι, πάντα!

<u>Μερικά Αθροίσματα</u>

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_n(x), \quad f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$$

<u>Κατά σημείο σύγκλιση</u>

$$S_n(x) \xrightarrow{\kappa.\sigma} S(x), \quad S : [a,b] \to \mathbb{R}$$

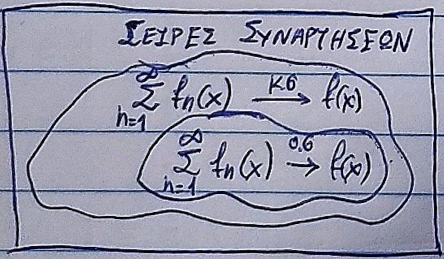
Αν $\forall \varepsilon > 0$, $\forall x \in [a,b]$ $\exists n_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ τ.ω $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$

$$\Leftrightarrow \left| \sum_{k=1}^{n} f_n(x) - S(x) \right| < \varepsilon$$

Θεωρούμε το x σταθερά και υπολογίζουμε το όριο $\lim_{n\to\infty} S_n = S$

<u>Ομοιόμορφη σύγκλιση</u>

Αν $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ τ.ω $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$ $\forall n \geq n_0(\varepsilon)$, $\forall x \in [a,b]$



<u>Παράδειγμα</u>: $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$, $x \in (-1,1)$

<u>Λύση</u>:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^{k-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{S_n(x) = \frac{1 - x^{n-1}}{1-x}}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - x^{n-1}}{1-x} = \frac{1 - \overbrace{\lim_{n\to\infty} x^{n-1}}^{0}}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

Άρα $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \xrightarrow{\kappa.\sigma} \frac{1}{1-x} = S(x)$

Για να συγκλίνει ομοιόμορφα πρέπει $\lim_{n\to\infty} \sup |S_n(x) - S(x)| = 0$, $x \in (-1,1)$

$$\sup_{x\in(-1,1)} |S_n(x)-S(x)| = \sup_{x\in(-1,1)} \left| \frac{1-x^{n-1}}{1-x} - \frac{1}{1-x} \right|$$

$$= \sup_{x\in(-1,1)} \left| \frac{-x^{n-1}}{1-x} \right| = \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(-1,1)} \left| \frac{-x^{n-1}}{1-x} \right| = \infty \neq 0$$

<u>Κριτηριο Weierstrass</u>

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n, \quad f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$

$\exists \{M_n\}_{n=1}^{\infty}$

Πρέπει να ισχύουν τα εξής: (1) $|f_n(x)| \leq M_n, \ \forall x \in [a,b]$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ συγκλίνει

Τότε $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a,b]$

<u>Παράδειγμα</u>

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n^2}, \ x \in [-2,2]$

$f_n(x) = \frac{x^n}{2^n n^2}$

<u>Λύση:</u> $|f_n(x)| = \left| \frac{x^n}{2^n n^2} \right| \leq \left| \left(\frac{x}{2}\right)^n \right| \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$

Αφού $x \in [-2,2] \Rightarrow \frac{x}{2} \in [-1,1]$

Γνωρίζουμε $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ συγκλίνει αν $p>1$

Επομένως $|f_n(x)|$ συγκλίνει. Άρα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n^2}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-2,2]$

Πρόταση

Έστω $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $S(x) : [a,b] \to \mathbb{R}$, τότε η $S(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx = \int_a^b S(x)\,dx$$

Παράδειγμα

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{x^{2n}}{n!} e^{-x^2} dx$$

Λύση: Θα ορίσω $f_n(x) = \frac{x^{2n}}{n!} e^{-x^2}$, $x \in (0,1)$ για να δω που συγκλίνει.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = e^{-x^2} \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n}}{n!} = 0$$

$$f_n(x) \xrightarrow{\text{κ.σ}} 0$$

$$|f_n(x)| = \left| e^{-x^2} \frac{x^{2n}}{n!} \right| \leq \frac{|x|^{2n}}{n!} \leq \frac{1}{n!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e \in \mathbb{R}$$

$\left\{ e = \sum \frac{1}{n!} \right.$

$\left\{ \frac{f(x_0)}{0!} + \frac{(x-x_0) f'(x_0)}{1!} + \frac{(x-x_0) f''(x_0)}{2!} + \dots \right.$

$\left\{ = \sum \frac{f_n(x)}{n!} (x-x_0)^n \right.$

Οπότε,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{x^{2n}}{n!} e^{-x^2} dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} e^{-x^2} dx$$

$$= \int_0^1 e^{-x^2} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!}}_{e^{x^2}} dx = \int_0^1 dx = 1$$