17/04/2024

$(f_n)_{n=1}^{\infty}$ $\quad f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$

$\quad\quad\quad\quad\; f : [a,b] \to \mathbb{R}$

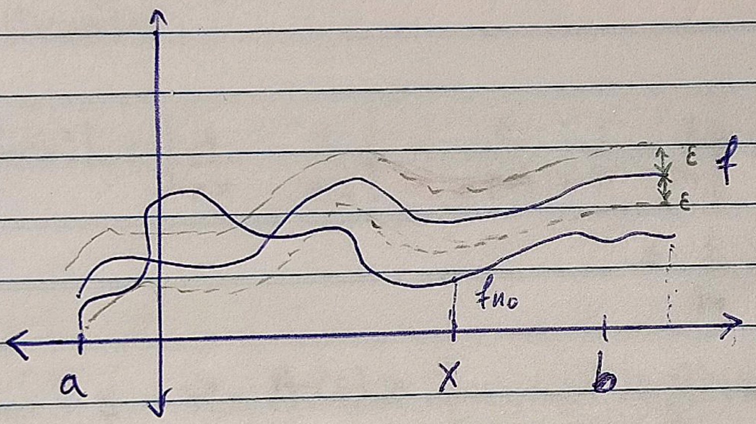
$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ → $f_n(x) \xrightarrow{\kappa.\sigma} f(x)$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ → $f_n(x) \xrightarrow{o.\sigma} f(x)$

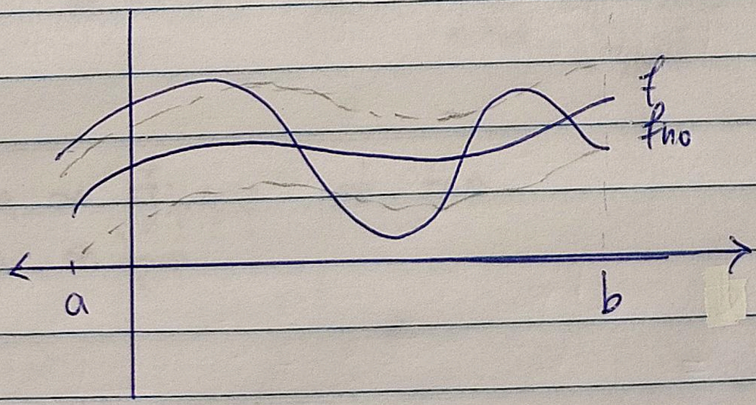
ακολουθία συναρτήσεων
$f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma} f$
$f_n \xrightarrow{o.\sigma} f$

$f_n \xrightarrow{o.\sigma} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma} f$

$f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma} f$, $\forall \varepsilon > 0$, $\forall x \in [a,b]$ $\exists\, n_0(\varepsilon, x) := n_0$ τέτοιο ώστε $\forall n \geq n_0$
$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$



$f_n \xrightarrow{o.\sigma} f$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, n_0(\varepsilon) = n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω $\forall n \geq n_0$.
$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, $\forall x \in [a,b]$



$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = j = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx.$$

<u>Κριτήριο Cauchy</u>

$f_n \xrightarrow{o.6} f$ <u>ανν</u> $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, n_0(\varepsilon)$ τέτοιο ώστε $\forall\, m, n \geq n_0(\varepsilon)$ $\forall x \in [a,b]$

$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

<u>Παράδειγμα</u>

$f_n : [1,\infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{1}{nx}$

$\forall$ $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon = 2)$ θέλουμε να βρούμε $n_0(\varepsilon)$ τέτοιο ώστε $\forall m, n \geq n_0$

$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

$$|f_n(x) - f_m(x)| = \left|\frac{1}{nx} - \frac{1}{mx}\right| = \frac{1}{|x|}\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \leq \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq$$

$$\leq \frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0} = \frac{2}{n_0(\varepsilon)} < \varepsilon$$

$$\frac{2}{n_0(\varepsilon)} < \varepsilon \Rightarrow n_0(\varepsilon) > \frac{2}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{n_0(\varepsilon)}{2} > \frac{1}{\varepsilon}$$

$n_0(2) > \frac{2}{2} = 1$, άρα επιλέγω το $n_0 = 2$

<u>Κριτήριο:</u> $f_n \xrightarrow{o.6} f$ <u>ανν</u> $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| = 0$

1º βήμα $\rightsquigarrow$ εξάρτηση από το n

2º βήμα $\rightsquigarrow$ όριο.

Παράδειγμα

$f_n(x) = \frac{1}{n^2+x^2}$ $\quad x\in[0,+\infty)$ συγκλίνει ομοιόμορφα;

Λύση:

$f_n \xrightarrow{κ.σ} f \qquad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+x^2} = 0$

$$\sup|f_n(x) - \cancel{f(x)}^{\,0}| = \sup_{x\in[0,+\infty)} |f_n(x)| = \sup_{x\in[0,+\infty)} \frac{1}{n^2+x^2} \le \frac{1}{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,+\infty)} \frac{1}{n^2+x^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

$f_n(x) \xrightarrow{ο.σ} 0$

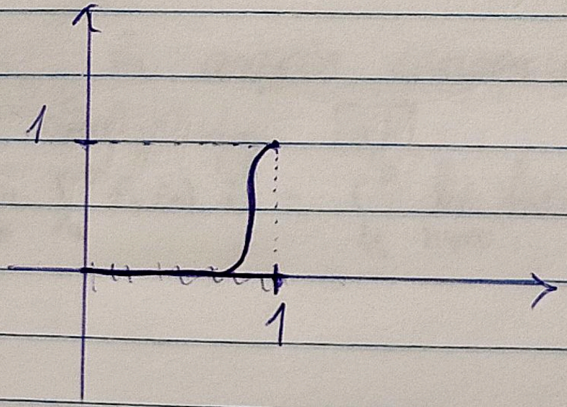
Παράδειγμα

$f_n : [0,1] \to \mathbb{R} \qquad f_n(x) = x^n$

Λύση: $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x\in[0,1) \\ 1, & x=1 \end{cases}$

$\sup|f_n(x) - f(x)| = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sup|f_n(x) - f(x)| = 1 \neq 0$

f_n δεν έχω ομοιόμορφη σύγκλιση



$f_n \xrightarrow{κ.σ} \begin{cases} 0, & x\in[0,1) \\ 1, & x=1 \end{cases}$

Παράδειγμα

$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ $\qquad f_n(x) = \dfrac{x}{x+n}$

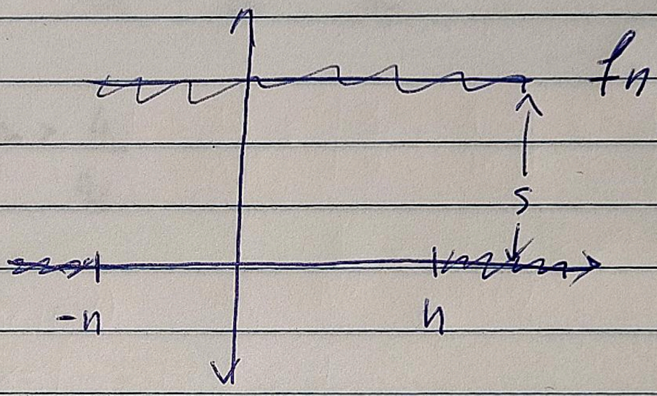
$f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} 0$ $\qquad \sup_{x\in[0,1]} \left| \dfrac{x}{x+n} \right| = \sup_{x\in[0,1]} \dfrac{x}{x+n} \geq \dfrac{n}{n+n}$

$$\frac{x}{x+n} = \frac{1}{1+n}$$

$g(x) = \dfrac{x}{x+n}$ $\qquad g'(x) = \dfrac{(x+n)-x}{(x+n)^2} = \dfrac{n}{(x+n)^2} > 0 \qquad f_n \nearrow$

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{1+n} = 0$ $\qquad f_n \xrightarrow{o.\sigma.} 0$

Παράδειγμα



$$f_n(x) = \begin{cases} 5, & x\in[-n,n] \\ 0, & x\notin[-n,n] \end{cases}$$

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 5.$

$\sup_{x\in(-\infty,\infty)} |f_n(x) - 5) = 5$

$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(-\infty,\infty)} |f_n - f| = 5 \neq 0$, δεν έχουμε ομοιόμορφη σύγκλιση

ΠΡΟΤΑΣΗ

$f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ $\qquad f_n$ συνεχείς συναρτήσεις

$f_n \xrightarrow{o.\sigma.} f$ ολοκληρώσιμη $[a,b]$

Τότε $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

Παράδειγμα

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \quad , \quad f_n(x) = \frac{n+3\sin x}{3n+\cos^2 x}$$

Λύση :

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n+\sin x}{3n+\cos^2 x} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}\left(1+\frac{\sin x}{n}\right)}{\cancel{n}\left(3+\frac{\cos^2 x}{n}\right)} = \frac{1}{3}$$

$$\left|f_n - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{n+\sin x}{3n+\cos^2 x} - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{3n+3\sin x - 3n - \cos^2 x}{9n+3\cos^2 x}\right|$$

$$= \left|\frac{3\sin x - \cos^2 x}{9n+3\cos^2 x}\right| \leq \frac{3+1}{9n} = \frac{4}{9n} \leq \frac{4}{9n_0} < \varepsilon$$

$$\frac{4}{9n_0(\varepsilon)} < \varepsilon \Rightarrow \frac{9n_0}{4} > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n_0 > \frac{4}{9\varepsilon}$$

Άρα $f_n \xrightarrow{0.6} \frac{1}{3}$

Οπότε $\displaystyle\int_0^1 \frac{n+\sin x}{3n+\cos^2 x} \xrightarrow{n\to\infty} \int_0^1 \frac{1}{3}dx = \frac{1}{3}\int_0^1 dx = \frac{1}{3}$

Πρόταση

$f_n \xrightarrow{0.6} f$, f_n συνεχείς στο $[a,b]$, τότε $\forall (a_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{R}$ με $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a \in \mathbb{R}$, πρέπει να ισχύει $\lim_{n\to\infty} f_n(a_n) = f(a)$