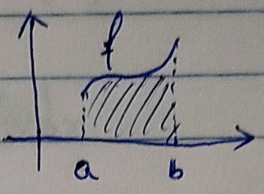
ΣΜΑΡΑΓΔΑΚΗΣ. 01/03/2024.

xesmarag.github.io / calc-ii-2024. xesmarag@aegean.gr.

2-3 quiz για μπόνους + σύνολο τελικό, τελικό

ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

$\int_a^b f(x)\,dx$ με $f:[a,b]\to\mathbb{R}$



ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΕΙΔΟΥΣ Ι (επέκταση του ορισμένου) (1ου είδους)

Έστω $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ η οποία είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,t]$, όπου $t\geq a$.

Θεωρούμε την συνάρτηση $F:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ (clopen), τέτοια ώστε

$$F(t)=\int_a^t f(x)\,dx$$

Το $\lim\limits_{t\to+\infty} F(t)$ καλείται γενικευμένο ολοκλήρωμα της f στο $[a,+\infty)$,

δηλαδή $$\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,dx=\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

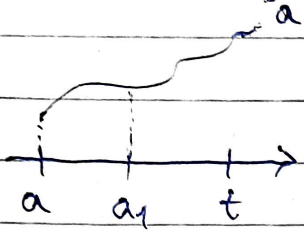
Όταν $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = A\in\mathbb{R}$, τότε λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει στο A.

Όταν $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx=\pm\infty$ ή δεν υπάρχει, τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα αποκλίνει.

Πρόταση

Έστω $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε $[a,t]$, $t\geq a$, και $a_1\geq a$. Το $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει αν και μόνο αν $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει.

Απόδειξη: $$\int_a^t f(x)\,dx = \int_a^{a_1} f(x)\,dx + \int_{a_1}^t f(x)\,dx$$



$$\lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx = \int_a^{a_1} f(x)\,dx + \lim_{t\to\infty}\int_{a_1}^t f(x)\,dx$$

Εάν $\int_{a_1}^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει, τότε έχει τιμή $A_1\in\mathbb{R}$ και επειδή $\int_a^{a_1} f(x)\,dx = B$, $B\in\mathbb{R}$

έχουμε ότι $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = A_1+B\in\mathbb{R}$ και συγκλίνει.

Εάν $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = A\in\mathbb{R}$, τότε $\int_{a_1}^{+\infty} f(x)\,dx = A-B\in\mathbb{R}$ και συγκλίνει.

Παράδειγμα 1

Έστω $p\neq 0$. Υπολογίστε το $\int_0^{+\infty} e^{px}\,dx$.

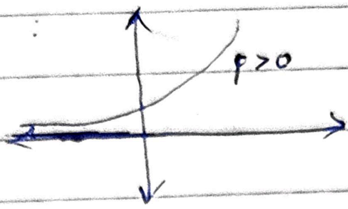
Λύση: Έστω $t\geq 0$. $$\int_0^t e^{px}\,dx = \int_0^t \frac{1}{p}(e^{px})'\,dx = \frac{1}{p}\int_0^t (e^{px})'$$

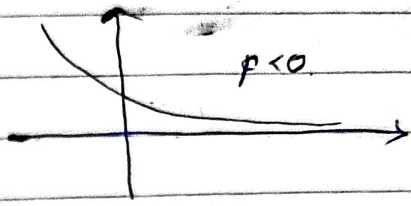
$$= \frac{1}{p}\left[e^{px}\right]_0^t = \frac{1}{p}\left(e^{pt}-e^{p\cdot 0}\right)$$

$$= \frac{1}{p}\left(e^{pt}-1\right) = F(t)$$

$$\int_0^{+\infty} e^{px}\,dx = \lim_{t\to+\infty} F(t) = \frac{1}{p}\left(\lim_{t\to+\infty} e^{pt} - 1\right) \quad (*)$$

$$\lim_{t\to+\infty} e^{pt} = \begin{cases} +\infty, & p>0 \\ 0, & p<0 \end{cases}$$





Οπότε $(*) = \begin{cases} +\infty, & p>0 \\ -\frac{1}{p}, & p<0. \end{cases}$

Παράδειγμα 2.

Έστω $a>0$ και $p\in\mathbb{R}$. Υπολογίστε $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$.

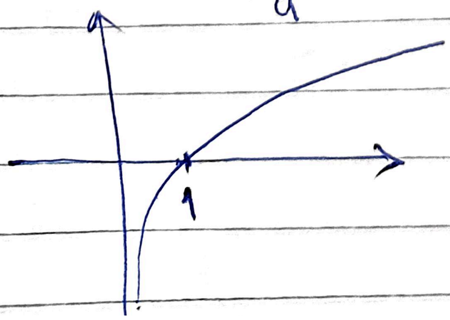
Λύση: Έστω $t \geq a$. $\int_a^t x^{-p}\,dx \overset{p\neq 1}{=} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_a^t = \frac{t^{1-p}}{1-p} - \frac{a^{1-p}}{1-p} =$

Έστω $p\neq 1$. $\int_a^{+\infty} x^{-p}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t^{1-p}}{1-p} - \frac{a^{1-p}}{1-p}\right) = \begin{cases} +\infty, & p<1 \\ \frac{a^{1-p}}{p-1}, & p>1 \end{cases}$

Έστω $p=1$. $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_a^t = \ln t - \ln a = F(t)$

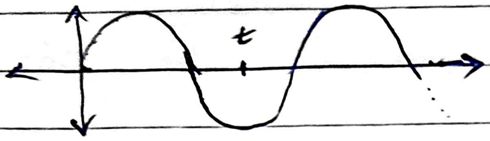
$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to+\infty} F(t) = +\infty$ αποκλίνει

γιατί



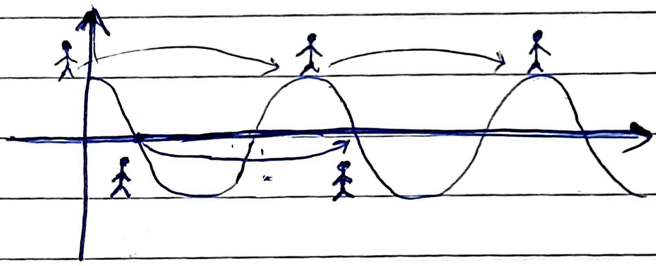
Παράδειγμα 3

$\int_0^{+\infty} \sin x \, dx = ;$



ΛΥΣΗ: $t \geq 0$. $\bullet \int_0^t \sin x \, dx = -[\cos x]_0^t = -\cos t + \underbrace{\cos 0}_{1} = 1 - \cos t = F(t)$

$\bullet \lim_{t \to +\infty} F(t) = 1 - \lim_{t \to +\infty} \cos t$



Υπάρχει το $\lim_{t \to +\infty} \cos t$;

$a_n = 2\pi n, \ n \in \mathbb{N}$, $b_n = 2\pi n + \frac{\pi}{2}, \ n \in \mathbb{N}$

Καθώς το $n \to \infty$ & $a_n \to +\infty$

$\lim_{n \to \infty} \cos(2\pi n) = 1$ και $\lim_{n \to \infty} \cos(2\pi n + \frac{\pi}{2}) = 0$

Επειδή $\lim_{n \to \infty} \cos(2\pi n) \neq \lim_{n \to \infty} \cos(2\pi n + \frac{\pi}{2})$ έχουμε $\lim_{t \to \infty} \cos t = +\infty$

άρα $\int_0^{+\infty} \sin x \, dx$ αποκλίνει

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[t, b]$, $t \leq b$.
Θεωρούμε την $G : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε

$$G(t) = \int_t^b f(x) \, dx, \quad t \leq b$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty} G(t) = B$$ αυτό καλείται γενικευμένο ολοκλήρωμα της f στο $(-\infty, b]$.

Όταν $B \in \mathbb{R}$, τότε το ολοκλήρωμα συγκλίνει στο B.

Όταν $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \pm\infty$ ή όταν δεν υπάρχει, τότε το ολοκλήρωμα αποκλίνει.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>

Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $[t_1, t_2]$ για $t_1 \leq t_2$
Έστω $E \in \mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{E} f(x)\,dx + \int_{E}^{+\infty} f(x)\,dx$$

$$= \underbrace{\lim_{t_1\to-\infty} \int_{t_1}^{E} f(x)\,dx}_{\text{Γ.Ο είδους I της } f \text{ στο } (-\infty, E] \;\; A} + \underbrace{\lim_{t_2\to+\infty} \int_{E}^{t_2} f(x)\,dx}_{\text{Γ.Ο είδους I της } f \text{ στο } [E, +\infty) \;\; B}$$

Το $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει αν A, B συγκλίνουν.

Το $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ αποκλίνει αν <u>τουλάχιστον</u> ένα από τα A, B αποκλίνει.

Ερώτημα: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_{-t}^{t} f(x)\,dx$. είναι σωστό; (Απάντηση: Δεν ισχύει πάντα)

Αντιπαράδειγμα: $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx$.

$$\int_{-t}^{t} x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-t}^{t} = \frac{t^2}{2} - \frac{t^2}{2} = 0$$

Άρα, $\lim_{t\to+\infty}\int_{-t}^{t} x\,dx = 0$

Έστω $\xi = 0$.

(A) $\int_{-\infty}^{0} x\,dx$

$$= \int_{t_1}^{0} x\,dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_{t_1}^{0}$$

$$= -\frac{t_1^2}{2} = G(t_1)$$

(B) $\int_{0}^{+\infty} x\,dx$

$$= \int_{0}^{t_2} x\,dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{t_2}$$

$$= \frac{t_2^2}{2} =$$

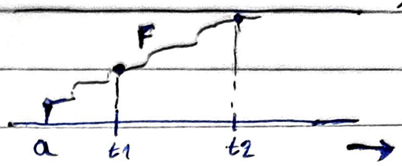
$\lim_{t\to-\infty} G(t_1) = -\infty$, αποκλίνει. Επομένως, αφού αποκλίνει τουλάχιστον 1 από τα δύο, τότε και το $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx$ αποκλίνει.

ΠΡΟΤΑΣΗ:

Έστω $f: [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,t]$, $t \geq a$ και $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,+\infty)$.

Εάν $F(t) = \int_{a}^{t} f(x)\,dx$ είναι άνω φραγμένο, τότε $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει.

sup F < ∞



ΑΠΟΔΕΙΞΗ Θ.δ.ο $F \uparrow$ στο $[a,+\infty)$

Εάν $t_1<t_2$ θ.δ.ο $F(t_1)\le F(t_2)$

$\Leftrightarrow F(t_2)-F(t_1)\geq 0.$

$$\int_a^{t_2} f(x)\,dx-\int_a^{t_1} f(x)\,dx=\cancel{\int_a^{t_1} f(x)\,dx}+\int_{t_1}^{t_2} f(x)\,dx-\cancel{\int_a^{t_1} f(x)\,dx}=\int_{t_1}^{t_2} f(x)\,dx\geq 0$$

Τότε $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx=\sup F(t)<\infty$, αφού η F είναι άνω φραγμένη.

ΠΡΟΤΑΣΗ : ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ

Εάν $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ συγκλίνουν στο $[a,+\infty)$ και $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$, τότε

το $\int_a^{+\infty}(\kappa\cdot f(x)+\lambda g(x))\,dx$ συγκλίνει στο $[a,+\infty)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ : $t\geq 0$. Βρίσκω $\int_a^{t}(\kappa f(x)+\lambda g(x))\,dx=\kappa\int_a^{t} f(x)\,dx+\lambda\int_a^{t} g(x)\,dx.$

Παίρνω όρια : $\lim_{t\to+\infty}\int_a^{t}(\kappa f(x)+\lambda g(x))\,dx=\kappa\underbrace{\lim_{t\to\infty}\int_a^{t} f(x)\,dx}_{A}+\lambda\underbrace{\lim_{t\to\infty}\int_a^{t} g(x)\,dx}_{B}$

A + B συγκλίνουν, τότε και το αρχικό συγκλίνει.