Τετάρτη 17/04 14:00-17:00 Αίθουσα 3 — 12/04/2024

Τετάρτη 29/05 9:00-12:00 -//-

quiz II 15/05 17:00-17:30.

ΑΠΟΛΥΤΗ ΣΥΓΚΛΙΣΗ

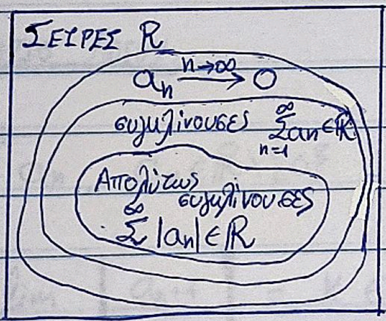
Η Σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απολύτως αν $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει.

ΑΠΟΛΥΤΗ ΣΥΓΚΛΙΣΗ $\Rightarrow$ ΣΥΓΚΛΙΣΗ

$\not\Leftarrow$ δεν ισχύει πάντα.

Παράδειγμα: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2} = -1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \dots$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{1}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{|(-1)^n|}_{1} \left|\frac{1}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ συγκλίνει} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2} \text{ συγκλίνει.}$$



Αναγκαία συνθήκη για σύγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ είναι $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ ($\lim_{n\to\infty} a_n = 0$)

Π.χ. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ $\quad \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΡΙΖΑΣ

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \in \mathbb{R}$

Αν $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \kappa \in \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$

Αν $\kappa < 1$, τότε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει (ικανή και αναγκαία)

Αν $\kappa > 1$, τότε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει

Αν $\kappa = 1$, δεν δίνει πληροφορία.

Παράδειγμα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{3^n} \quad \text{συγκλίνει;}$$

ΛΥΣΗ: $a_n = \frac{n^{10}}{3^n} > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^{10}}{3^n}} = \frac{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^{10}}}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n}} \overset{(*)}{=} \frac{\left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\right)^{10}}{3} = \frac{1}{3} \in [0,1)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{3^n} \quad \text{συγκλίνει από κριτήριο ρίζας.}$$

$(*)$ $n^{10/n} = \left(n^{1/n}\right)^{10} = \left(\sqrt[n]{n}\right)^{10}$

$$\boxed{\text{Γνωρίζουμε } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \ \& \ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lambda} = 1}$$

Κριτήριο Λόγου

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \kappa \in \mathbb{R}^+$$

Αν $\kappa \in [0,1)$, τότε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει

Αν $\kappa > 1$, τότε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει

Αν $\kappa = 1$, τότε δεν δίνει πληροφορία

Παράδειγμα

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{6^n}$ συγκλίνει ;

Λύση: $a_n = \frac{n+2}{6^n} > 0$

$a_{n+1} = \frac{(n+1)+2}{6^{n+1}} = \frac{n+3}{6^{n+1}} > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+3}{6^{n+1}}}{\frac{n+2}{6^n}}$$

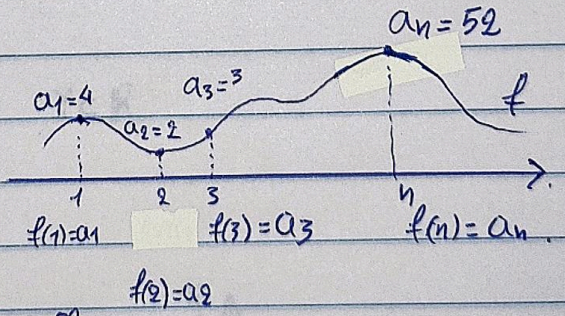
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{n+2} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{6^n}{6^{n+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}(1+\overbrace{\tfrac{3}{n}}^{0})}{\cancel{n}(1+\underbrace{\tfrac{2}{n}}_{0})} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6} = \frac{1}{6} < 1$$

άρα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{6^n}$ συγκλίνει

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad , a_n = f(n)$



Αν $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει, τότε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει

π.χ. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ Εισάγω την συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x^2}$ $\quad f(n) = \frac{1}{n^2} = a_n$

$\left(\int_a^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx \right.$ συγκλίνει αν $\left. p>1 \right)$ $\quad \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx < \infty \xrightarrow[\text{ολοκληρώματος}]{\text{κριτήριο}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$

ΕΝΑΛΛΑΣΟΜΕΝΕΣ ΣΕΙΡΕΣ

Πριν $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$

τώρα $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$, δεν συγκλίνει απολύτως $\left|(-1)^n \frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$.

Μορφή (α): $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ και $b_n \geq b_{n+1}$, $a_n = (-1)^n b_n$, $b_n \geq 0$,

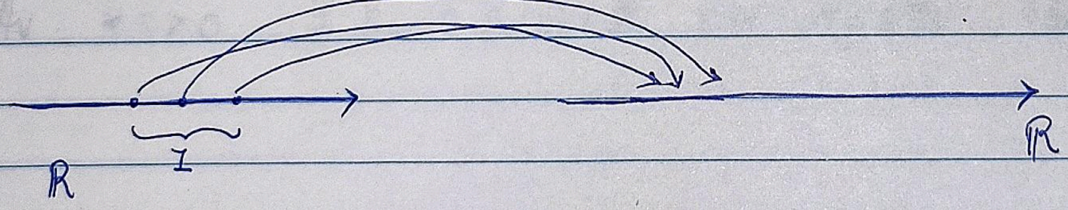
τότε $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ συγκλίνει.

Μορφή (β): $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$, και $b_n \geq b_{n+1}$, $a_n = (-1)^{n+1} b_n$, $b_n \geq 0$,

τότε $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$ συγκλίνει.

ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΟΝ

$(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $a_n \in \mathbb{R}$ $\longrightarrow$ $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, $f_n : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



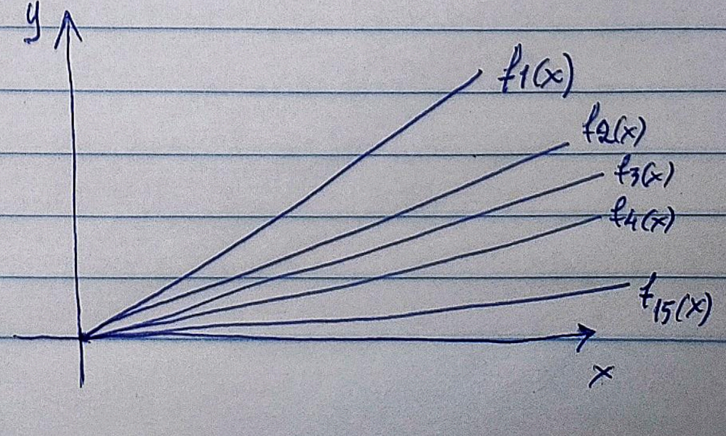
$F(I, \mathbb{R}) = \{ f : I \to \mathbb{R} \}$ με $I \subseteq \mathbb{R}$

$(f_n)_{n=1}^{\infty}$, $f_n \in F(I, \mathbb{R})$

Παράδειγμα

$f_n(x) = \frac{x}{n}$, $x \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$

Λύση: $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, $f_n \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$



Θα έχουμε 2 είδη σύγκλισης:

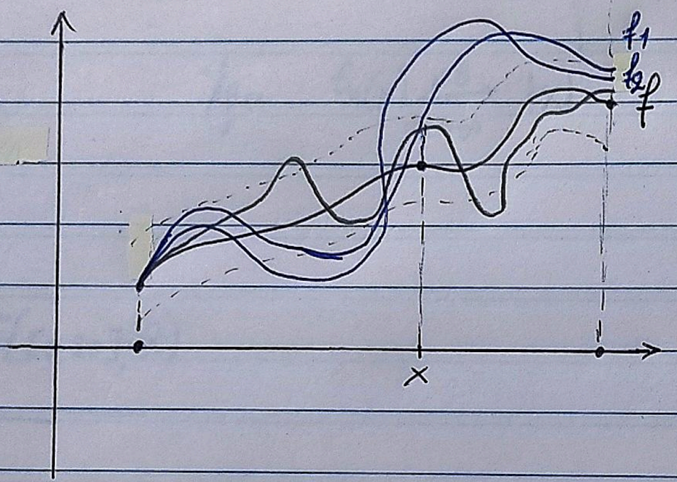
1. Κατά σημείο σύγκλιση (κ.σ) ← οδηγεί
2. Ομοιόμορφη σύγκλιση (ο.σ)

Κατα Σημειο Συγκλιση

$(f_n)_{n=1}^{\infty}$, $f_n \in F(I, \mathbb{R})$, $f \in F(I, \mathbb{R})$

$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\kappa\sigma} f$

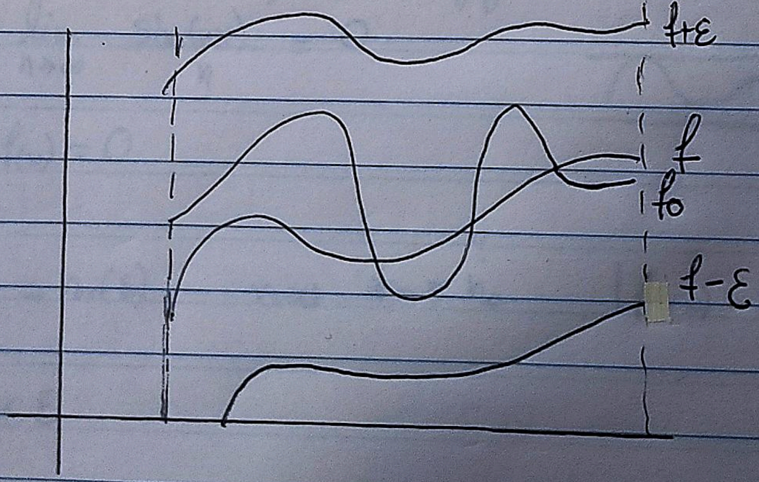
Αν $\forall \varepsilon > 0$ και $\forall x \in I$ $\exists n_0 := n_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $\forall n \geq n_0$ $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$



Ομοιομορφη Συγκλιση

$f_n \xrightarrow{o.\sigma} f$

Αν $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 := n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ τ.ω $\forall n \geq n_0$, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, $\forall x \in I$



Πότε συγκλίνει κατά σημείο.

$f_n \xrightarrow{κ.σ} f$

αν $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \forall x \in I$

Παράδειγμα

$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$

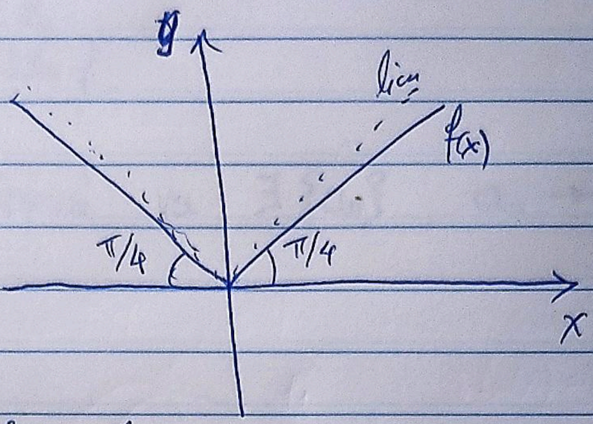
Λύση: $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$

$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$

$= \sqrt{x^2 + \lim_{x\to\infty} \frac{1}{n}}$

$= \sqrt{x^2}$

$= |x|$



Άρα $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{κ.σ} |x|$

Παράδειγμα

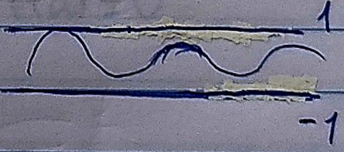
$(f_n)_{n=1}^{\infty}$, $f_n \in F([0,2\pi], R)$

$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$

Λύση: Θ.δ.ο $f_n \xrightarrow{o.σ} f$

Θα δούμε σε ποια συνάρτηση συγκλίνει κατά σημείο.

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = 0$



$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{κ.σ} f(x) = 0$

$\forall ε > 0 \ \exists n_0 := n_0(ε)$ τ.ω $\forall n \geq \overset{?}{n_0}$, $|f_n(x) - \overset{0}{f(x)}| < ε$.

Θέλω $|f_n(x)| < ε$

$|f_n(x)| = \left|\frac{\sin(nx)}{n}\right| = \frac{|\sin(nx)|}{n} \leq \frac{1}{n} < ε$

$\frac{1}{n} < ε \Rightarrow n > \frac{1}{ε}$, $n_0 = \left[\frac{1}{ε}\right] + 1$, τότε $\forall n \geq n_0 \ |f_n(x) - 0| < ε$

ακέραιο μέρος