22/03/2024

$$\mathcal{L}(f(x))(p) = \int_0^{+\infty} e^{-px} f(x)\,dx$$

$f(x)$	$\mathcal{L}(f(x))(p)$
$1, \quad x \in [0,+\infty)$	$\frac{1}{p}, \quad p>0$
$x, \quad x \in [0,+\infty)$	$\frac{1}{p^2}, \quad p>0$
$e^{ax}, \quad x \in [0,+\infty)$	$\frac{1}{p-a}, \quad p>a$
$\sin ax, \quad x \in [0,+\infty)$	$\frac{a}{p^2+a^2}, \quad p>0$
$\cos ax, \quad x \in [0,+\infty)$	$\frac{p}{p^2+a^2}, \quad p>0$
$x^n, \quad x \in [0,+\infty)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}, \quad p>0$
$u_a(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < a \\ 1, & x \ge a \end{cases}$	$\frac{e^{-ap}}{p}, \quad p>0$

$\rightarrow \mathcal{L}(a f_1(x) + b f_2(x))(p) = a\,\mathcal{L}(f_1(x))(p) + b\,\mathcal{L}(f_2(x))(p)$

Πρόταση

Έστω $\mathcal{L}(f(x))(p) = \eta(p)$, $p \geq p_0$, τότε $\mathcal{L}(\underbrace{e^{ax} f(x)}_{g(x)})(p) = \eta(p-a)$, $p \geq p_0 - a$

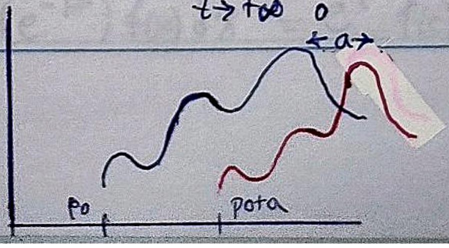
Απόδειξη:

$$\eta_g(p) = \int_0^{+\infty} e^{-px} g(x)\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-px} e^{-ax} f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-(p-a)x} f(x)\,dx$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \int_0^t e^{-(p-a)x} f(x)\,dx \quad \underline{\text{θέτω } p^* = p-a} \quad \lim_{t\to+\infty} \int_0^t e^{-p^* x} f(x)\,dx = \eta_f(p^*)$$

$p^* \geq 0 \Rightarrow p - a \geq p_0$
$\Rightarrow p \geq p_0 + a$

$\Rightarrow \eta_g(p) = \eta_f(p-a)$, $p \geq p_0 + a$



ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω $a>0$ και $\mathcal{L}(f(x))(p) = \eta(p)$, $p \geq p_0$

$$\mathcal{L}(f(ax))(p) = \frac{1}{a}\,\eta\left(\frac{p}{a}\right)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$\mathcal{L}(f(ax))(p) = \int_0^{+\infty} e^{-px} f(ax)\,dx$$ $a>0$ θέτω $\xi = ax \Rightarrow d\xi = a\,dx$, $x = \frac{\xi}{a}$

$$= \lim_{t\to+\infty} \int_0^{at} e^{-p\frac{\xi}{a}} f(\xi)\,\frac{1}{a}\,d\xi$$ $t^* = at$, αφού $a\to+\infty$ τότε $t^*\to+\infty$

$$= \frac{1}{a} \lim_{t^*\to+\infty} \int_0^{t^*} e^{-p\frac{\xi}{a}} f(\xi)\,d\xi$$

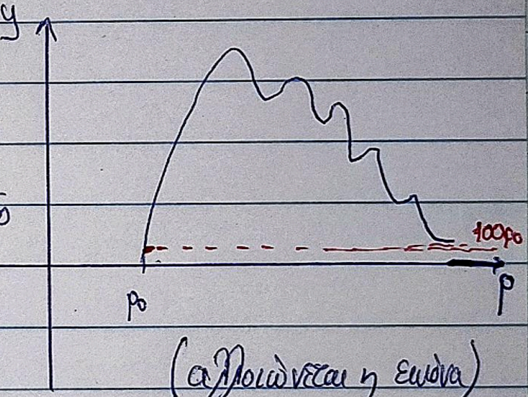
$$= \frac{1}{a} \lim_{t^*\to+\infty} \int_0^{t^*} e^{-\frac{p}{a}\cdot\xi} f(\xi)\,d\xi$$ όπου $p^* = \frac{p}{a}$

$$= \frac{1}{a} \lim_{t^*\to+\infty} \int_0^{t^*} e^{-p^*\xi} f(\xi)\,d\xi$$

$$\simeq \frac{1}{a}\,\eta(p^*), \quad p^* \geq p_0$$

$a = 100$

$d = \frac{1}{100}$



(αλλοιώνεται η εικόνα)

Άρα, $\mathcal{L}(f(ax))(p) = \frac{1}{a}\,\eta\left(\frac{p}{a}\right)$ $\quad p \geq a p_0$

ΠΡΟΤΑΣΗ

$f: [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[0,+\infty)$

$\exists\, f'$ κατά τμήματα συνεχής στο $[0,+\infty)$

$|f(x)| \leq M e^{p_0\cdot x}$ για κάποια M, p_0 και για $x \geq x_0$,

τότε $\mathcal{L}(f'(x))(p) = p\,\mathcal{L}(f(x))(p) - f(0)$, $p \geq p_0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$\mathcal{L}(f'(x))(p) = \int_0^{+\infty} e^{-px} f'(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_0^{t} e^{-px} f'(x)\,dx$$

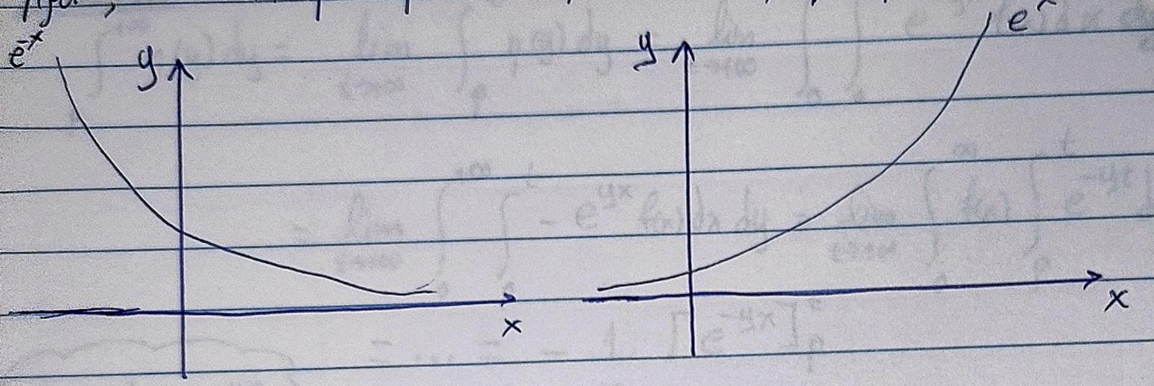
• $$\int_0^t e^{-px} f'(x)\,dx = \left[e^{-px} f(x)\right]_0^t - \int_0^t (e^{-px})' f(x)\,dx = e^{-pt} f(t) - \cancel{e^{-p\cdot 0}}^{\,1} f(0) + p\int_0^t e^{-px} f(x)\,dx$$

$$\cdot \lim_{t\to+\infty}\int_0^t e^{-px} f'(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty}\left(e^{-pt}f(t) - f(0)\right) + p\underbrace{\lim_{t\to+\infty}\int_0^t e^{-px} f(x)\,dx}_{\mathcal{L}(f(x))(p)}$$

$$\lim_{t\to+\infty} |e^{-pt} f(t)| = \lim_{t\to+\infty}\left(e^{-pt}|f(x)|\right) \le M \lim_{t\to+\infty} e^{-pt}\cdot e^{p_0 t}$$

$$= M\lim_{t\to+\infty} e^{-(p-p_0)t} \xrightarrow{p>p_0 \Rightarrow p-p_0>0} 0.$$

Άρα, $\mathcal{L}(f'(x))(p) = p\,\mathcal{L}(f(x))(p) - f(0)$, $p>p_0$.



Παράδειγμα

$f'(x)+3f(x)=e^{-2x}$, $f(0)=0$

$$\mathcal{L}(f'(x)+3f(x))(p) = \mathcal{L}(f'(x))(p) + 3\mathcal{L}(f(x))(p)$$
$$= p\,\mathcal{L}(f(x))(p) - \cancel{f(0)}^{\,0} + 3\mathcal{L}(f(x))(p)$$
$$= (p+3)\,\mathcal{L}(f(x))(p)$$

$\mathcal{L}(e^{-2x})(p) = \dfrac{1}{p+2}$ $\left(e^{ax} \leftrightarrow \dfrac{1}{p-a}\right)$ άρα $(p+3)\mathcal{L}(f(x))(p) = \dfrac{1}{p+2}$

$\Rightarrow \mathcal{L}(f(x))(p) = \dfrac{1}{(p+2)(p+3)}$ $\quad p\neq -2,\ p\neq -3$

$\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{p+2}\right) = e^{-2x}$ $\qquad \dfrac{1}{(p+2)(p+3)} = \dfrac{1}{p+2} - \dfrac{1}{p+3}$

$\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{p+3}\right) = e^{-3}$ $\qquad$ Άρα, $\mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}(f(x))) = f'(x) = e^{-2x}-e^{-3x}$

ΠΡΟΤΑΣΗ
$f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ κατά τμήματα συνεχής στο $[0,+\infty)$ $\exists\, M>0$, $p_0\in\mathbb{R}$ και $x_0\geq 0$ τ.ω $|f(x)|\leq M\cdot e^{p_0\cdot x}$, $x\geq x_0$. Εάν $\mathcal{L}(f(x))(p)=\eta(p)$, $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=l\in\mathbb{R}$

τότε $\mathcal{L}\left(\frac{f(x)}{x}\right)(p)=\int_p^{+\infty}\eta(y)\,dy$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

$$\int_p^{+\infty}\eta(y)\,dy=\lim_{t\to+\infty}\int_p^t\eta(y)\,dy=\lim_{t\to+\infty}\int_0^t\int_0^{+\infty}e^{-yx}f(x)\,dx\,dy$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\int_0^{+\infty}\int_p^t-e^{yx}f(x)\,dx\,dy=\lim_{t\to+\infty}\int_0^{\infty}f(x)\int_p^t e^{-yt}dy\,dx$$

$$=\ldots=-\frac{1}{x}\left[e^{-yx}\right]_p^t$$

$$(e^{-yx})'=xe^{-yx}$$
$$\Rightarrow e^{-yx}=-\frac{1}{x}(e^{-yx})$$

$$=-\frac{1}{x}e^{-px}+\frac{1}{x}e^{-tx}$$

$$\ldots=-\int_0^{+\infty}f(x)\frac{1}{x}e^{-px}\,dx-\lim_{t\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{f(x)}{x}e^{-tx}\,dx$$

$$=\mathcal{L}\left(\frac{f(x)}{x}\right)(p)-\lim_{t\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{f(x)}{x}e^{-tx}\,dx\;=0.$$

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty}e^{-x}\frac{\sin x}{x}\,dx=j$

$$\int_0^{+\infty}e^{-px}f(x)\,dx$$

(θα δεις πως μοιάζουν αυτά τα δύο ολ/ματα)

$$\int_0^{+\infty}e^{-x}\frac{\sin x}{x}\,dx=\mathcal{L}\left(\frac{\sin x}{x}\right)(1)\qquad(p=1)$$

$$\int_0^{+\infty}e^{-px}f(x)\,dx=\mathcal{L}(f(x))(p)$$

Άρα, ο μετασχηματισμός $\mathcal{L}\left(\frac{\sin x}{x}\right)(p)=\int_p^{+\infty}\mathcal{L}(\sin x)(y)\,dy=\int_p^{+\infty}\frac{1}{y^2+1}\,dy$

$$= \lim_{t\to+\infty}\int_p^t \frac{1}{y^2+1}\,dy$$

* Από το $\mathcal{L}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)(p) = \int_p^{+\infty} \mathcal{L}(f(x))(y)\,dy$

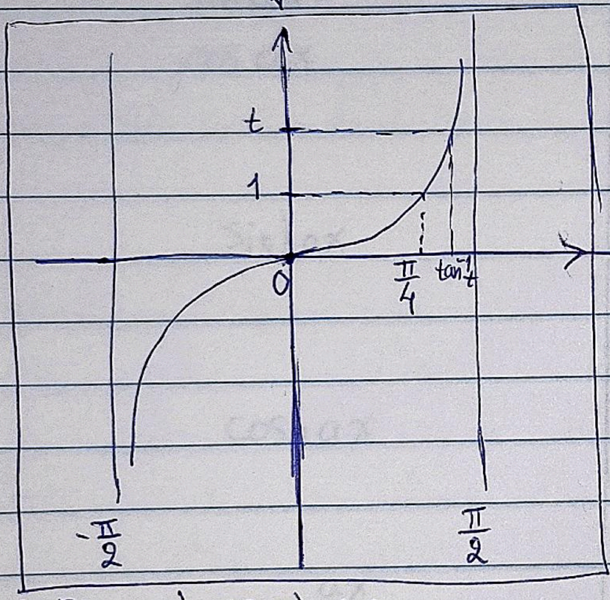
** $y = \tan\theta \qquad dy = \frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad \frac{d}{d\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}.$$

για $p=1$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\tan^{-1}t} \frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\tan^{-1}t} d\theta = \tan^{-1}t - \frac{\pi}{4}$$



Γραφική παράσταση εφαπτομένης

$$\mathcal{L}\left(\frac{\sin x}{x}\right)(p) = \lim_{t\to+\infty} \tan^{-1}t - \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Άρα, $\int_0^{+\infty} e^{-x}\frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{4}$.

ΣΥΝΕΛΙΞΗ (Convolution)

Έστω $f,g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ κατά τμήματα συνεχής $(f*g)(x)$ δίνεται από το εξής ολοκλήρωμα

$$(f*g)(x) = \int_0^x f(t)\,g(x-t)\,dt = \int_0^x g(t)\,f(x-t)\,dt = (g*f)(x)$$

Υποθέτω ότι έστω $\exists M_1, M_2 > 0$ και $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$, $x_1, x_2 \geq 0$ τ.ω.

$|f(x)| \leq M_1 e^{p_1 x} \quad x \geq x_1$

$|g(x)| \leq M_2 e^{p_2 x}, \quad x \geq x_2$ Ισχύει ότι, $\mathcal{L}((f*g)(x))(p) = \mathcal{L}(f(x))(p)\,\mathcal{L}(g(x))(p)$, $p > \max(p_1,p_2)$