15/03/2024

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΕΙΔΟΥΣ ΙΙ

1) $f: (a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε $[t,b]$, $t>0$, $t \leq b$

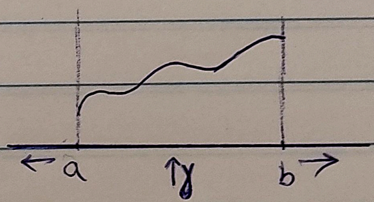
$$\int_{a^+}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+} \int_{t}^{b} f(x)\,dx \quad \text{στο } (a^+, b]$$

2) $f: [a,b) \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε $[a,t]$, $a \leq t < b$

$$\int_{a}^{b^-} f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-} \int_{a}^{t} f(x)\,dx \quad \text{στο } [a, b^-)$$

3) $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε $[t_1,t_2]$, $a < t_1 \leq t_2 < b$

$$\int_{a^+}^{b^-} f(x)\,dx = \int_{a^+}^{\gamma} f(x)\,dx + \int_{\gamma}^{b^-} f(x)\,dx$$



4) $f: (a_1,a_2) \cup (a_2,a_3) \cup \ldots \cup (a_{n-1},a_n) \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε $[t_1,t_2]$, $a_{j-1} < t_1 \leq t_2 < a_j$, $j=2,\ldots$

$$\int_{a_1^+}^{a_n^-} f(x)\,dx = \int_{a_1^+}^{a_2^-} f(x)\,dx + \int_{a_2^+}^{a_3^-} f(x)\,dx + \ldots + \int_{a_{n-1}^+}^{a_n^-} f(x)\,dx$$

Επιλέγω $\gamma_i \in (a_j, a_{j+1})$, $j=1,\ldots,n-1$

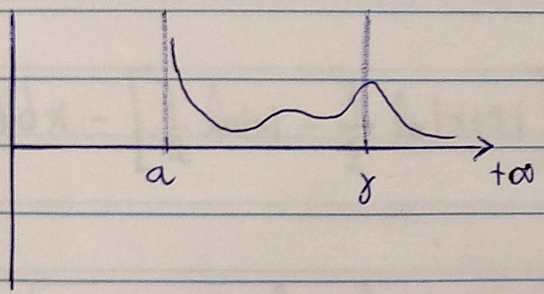
$$= \int_{a_1^+}^{\gamma_1} f(x)\,dx + \int_{\gamma_1}^{a_2^-} f(x)\,dx + \ldots + \int_{a_{n-1}^+}^{\gamma_{n-1}} f(x)\,dx + \int_{\gamma_{n-1}}^{a_n^-} f(x)\,dx$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} \left(\int_{a_j}^{\gamma_j} f(x)\,dx + \int_{\gamma_j}^{a_{j+1}^-} f(x)\,dx \right)$$

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΕΙΔΟΥΣ III

$f:(a,+\infty)\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε $[t_1,t_2]$, $a<t_1\le t_2<+\infty$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \underbrace{\int_{a^+}^{\gamma} f(x)\,dx}_{\text{είδους II}} + \underbrace{\int_{\gamma}^{+\infty} f(x)\,dx}_{\text{είδους I}}, \quad \gamma>a.$$

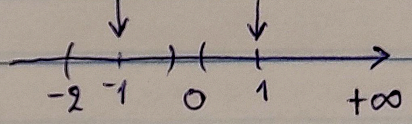


$$\int_{-\infty}^{-\beta} f(x)\,dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{\gamma} f(x)\,dx}_{\text{είδους I}} + \underbrace{\int_{\gamma}^{-\beta} f(x)\,dx}_{\text{είδους II}}$$

Παράδειγμα

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_{-2^+}^{+\infty} \frac{1}{x(x+2)}\,dx$.

Λύση: Είναι $f(x)=\dfrac{1}{x(x+2)}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,0\}$



$$\int_{-2}^{+\infty} f(x)\,dx = \underbrace{\int_{-2^+}^{0^-} f(x)\,dx}_{(*)} + \underbrace{\int_{0^-}^{+\infty} f(x)\,dx}_{(**)}$$

$$= \underbrace{\int_{-2^+}^{-1} f(x)\,\overset{\text{II}}{dx} + \int_{-1}^{0^-} f(x)\,\overset{\text{II}}{dx}}_{(*)} + \underbrace{\int_{0^+}^{1} f(x)\,\overset{\text{II}}{dx} + \int_{1}^{+\infty} f(x)\,\overset{\text{I}}{dx}}_{(**)}.$$

$$f(x)=\frac{1}{x(x+2)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+Bx}{x(x+2)} = \frac{(A+B)x+2A}{x(x+2)}$$

$\Rightarrow A+B=0 \to B=-1/2$, $\quad 2A=1 \Rightarrow A=1/2$

Άρα, $f(x) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2(x+2)} = f_1(x) - f_2(x)$

Θα θέσω $g(x) = \frac{1}{2(x+k)}$.

$$\int g(x)\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+k} = \frac{1}{2}\ln|x+k| + c \quad \begin{cases} \int f_1(x)\,dx = \frac{1}{2}\ln|x| + c \\ \int f_2(x)\,dx = \frac{1}{2}\ln|x+2| + c \end{cases}$$

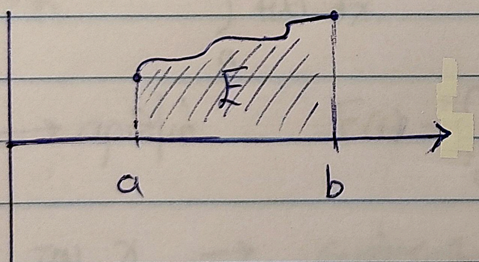
$$(*) \int_t^{-1} f(x)\,dx = \left[\frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x+2|\right]_t^{-1} = \cancel{\frac{1}{2}\ln 1} - \cancel{\frac{1}{2}\ln 1} - \frac{1}{2}\ln|t| + \frac{1}{2}\ln|t+2|$$

$$\int_{-2^+}^{-1} f(x)\,dx = -\frac{1}{2}\lim_{t\to -2^+}\ln|t| + \frac{1}{2}\lim_{t\to -2^+}\ln|t+2| = \frac{1}{2}\ln 2 + (-\infty) = -\infty$$

Επομένως το ολοκλήρωμα αποκλίνει.

ΕΜΒΑΔΟΝ ΜΗ ΦΡΑΓΜΕΝΟΥ ΧΩΡΙΟΥ

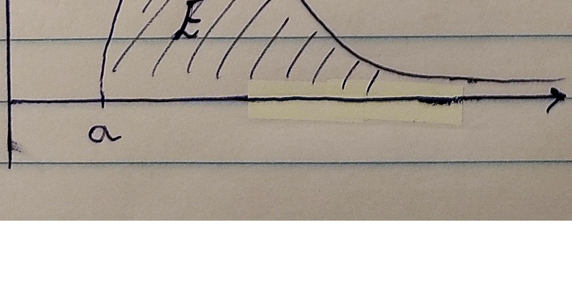
(a)



$f(x) \geq 0, \ \forall x \in [a,b]$

$E = \int_a^b f(x)\,dx < \infty$

(β)

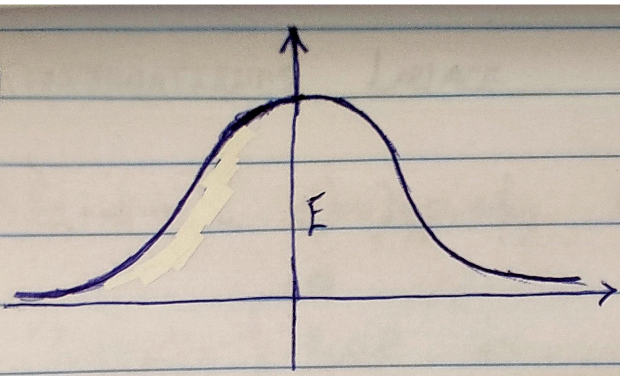


$f: [a, +\infty) \to \mathbb{R}$

$f(x) \geq 0, \ \forall x \geq a$

$E = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx < \infty$, όταν το Γ.Ο συγκλίνει

(γ)



$f(x) \geq 0$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

$E = 1.$

Είναι: $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $\xrightarrow[\text{περίπτωση}]{\text{ειδική}}$ $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = j$$

$y = \sqrt{2}x \rightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} y$

$dx = \dfrac{1}{\sqrt{2}} dy$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2}\,dy$$

$$= \sqrt{\pi}\, \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2}\,dy}_{= 1} = j$$

$f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ $\quad \int_a^b f(x)\,dx$

συνάρτηση $\longrightarrow$ αριθμό $\quad F(t) = \int_a^t f(x)\,dx \;,\; t \geq a$

συνάρτηση του x $\longrightarrow$ συνάρτηση του t $\quad \int_0^{+\infty} e^{-px}\,dx$

συνάρτηση του x $\longrightarrow$ συνάρτηση του p

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

$f: [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη σε όλα τα $[0,t]$, $t \geq 0$.

$$\mathcal{L}(f(x))(p) = \int_0^{+\infty} f(x) e^{-px} dx$$ καλείται μετασχηματισμός Laplace της f για $p \in \mathbb{R}$ τ.ω να συγκλίνει το ολοκλήρωμα.

ή

$h(p)$

$$F(t,p) = \int_0^t f(x) e^{-px} dx$$ (για κάθε συνδυασμό του t,p έχουμε διαφορετική τιμή)

$$\mathcal{L}(f(x))(p) = \lim_{t \to +\infty} F(t,p)$$

Παράδειγμα (1)

$f(x) = 1 \quad x \in [0,+\infty)$

$$F(t,p) = \int_0^t 1 \cdot e^{-xp} dx = \int_0^t e^{-px} dx = -\frac{1}{p} \int_0^t (e^{-px})' dx = -\frac{1}{p} \left[e^{-px} \right]_0^t$$

$$= -\frac{1}{p} \left[e^{-pt} - 1 \right]$$

$$\boxed{(e^{-px})' = -pe^{-px} \Rightarrow e^{-px} = -\frac{1}{p} (e^{-px})', \; p \neq 0}$$

$$h(p) = \lim_{t \to +\infty} \left[-\frac{1}{p} e^{-pt} + \frac{1}{p} \right] = \frac{1}{p} - \frac{1}{p} \lim_{t \to +\infty} e^{-pt}, \; p \neq 0.$$

το $\lim_{t \to +\infty} e^{-pt}$ συγκλίνει αν $p \geq 0$, αλλά $p \neq 0$.

άρα $h(p)$ ορίζεται για $p > 0$. Επομένως, $\mathcal{L}(f(x))(p) = \frac{1}{p}$, $p > 0$

Παράδειγμα (2)

$f(x) = x \quad , \quad x \geq 0$

$$F(t,p) = \int_0^t x e^{-px}\, dx \overset{p\neq 0}{=\!=} -\frac{1}{p}\int_0^t x (e^{-px})'\, dx$$

$$= -\frac{1}{p}\left[x e^{-px}\right]_0^t + \frac{1}{p}\int_0^t e^{-px}\, dx$$

$$= -\frac{1}{p} t e^{-pt} + \frac{1}{p}\left(-\frac{1}{p}\right)\left[e^{-pt} - 1\right]$$

$$= -\frac{1}{p} t e^{-pt} - \frac{1}{p^2} e^{-pt} + \frac{1}{p^2} \quad , \quad p \neq 0.$$

$$n(p) = \lim_{t\to+\infty} F(t,p) = \frac{1}{p^2} - \cancel{\frac{1}{p}\lim_{t\to+\infty}(te^{-pt})}^{\to 0} - \cancel{\frac{1}{p^2}\lim_{t\to+\infty}(e^{-pt})}^{\to 0}$$

Επομένως, $\mathcal{L}(f(x))(p) = \frac{1}{p^2} \quad , \quad p > 0$

* $\lim\limits_{t\to+\infty}(te^{-pt}) = 0$, τρέχει πιο γρήγορα στο 0 από το t στο +∞.

ΙΔΕΑ του Μετασχηματισμού Laplace

Δύσκολο Πρόβλημα (x)

↓

Μετασχηματισμός Laplace

$(x \to p)$ ↓

Πρόβλημα p

↓

Λύνω το πρόβλημα

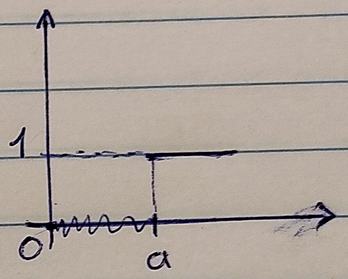
$(p \to x)$ ↓

Αντίστροφο Μετασχηματισμό Laplace.

Παράδειγμα

(unit step function)

$$u_a(t) = \begin{cases} 1 & , x \geq a \\ 0 & , 0 \leq x < a \end{cases}$$



$$\mathcal{L}(u_a(x))(p) = \int_0^{a} u_a(x) e^{-px}\, dx$$

$$= \cancel{\int_0^{a} 0 \cdot e^{-px}\, dx}^{\,0} + \int_0^{+\infty} 1 \cdot e^{-px}\, dx$$

$$F(t,p) = -\frac{1}{p}\left[e^{-px}\right]_a^t \overset{p \neq 0}{=\!=} -\frac{1}{p} e^{-pt} + \frac{1}{p} e^{-pa}$$

$$\boxed{\mathcal{L}(u_a(x))(p) = \frac{1}{p} e^{-pa} \quad , p > 0}$$

$1 \rightleftarrows \frac{1}{p} \quad , p > 0$

$x \rightleftarrows \frac{1}{p^2} \quad , p > 0.$

$u_a(x) \rightleftarrows \frac{1}{p} e^{-pa} \quad , p > 0$