29/03/2024

$$\mathcal{L}(f(x))(p) = \int_0^\infty e^{-px} f(x)\,dx$$

$$e^{ax} \underset{x \xleftarrow{\mathcal{L}^{-1}} p}{\overset{x \xrightarrow{\mathcal{L}} p}{\rightleftarrows}} \frac{1}{p-a} \quad , p>a$$

Ορισμός

$$(f*g)(x) = \int_0^x f(t)\, g(x-t)\,dt = \int_0^x g(t)\, f(x-t)\,dt = (g*f)(x)$$

$$\boxed{\mathcal{L}((f*g)(x))(p) = \mathcal{L}(f(x))(p)\,\mathcal{L}(g(x))(p)}$$

Άσκηση

$$\eta(p) = \frac{1}{(p+2)(p+3)} = \mathcal{L}(f(x))(p) \qquad f(x) = ;$$

Λύση: 1ος τρόπος

$$\frac{1}{(p+2)(p+3)} = \frac{A}{p+2} + \frac{B}{p+3} = \frac{A(p+3)+B(p+2)}{(p+2)(p+3)} = \frac{(A+B)p+3A+2B}{(p+2)(p+3)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \Rightarrow A=-B \Rightarrow \boxed{A=1} \\ 3A+2B=1 \Rightarrow -3B+2B=1 \Rightarrow \boxed{B=-1} \end{cases}$$

$$\frac{1}{(p+2)(p+3)} = \frac{1}{p+2} - \frac{1}{p+3} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(p+2)(p+3)}\right)(x) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+2}\right)(x) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+3}\right)(x)$$

$$= e^{-2x} - e^{-3x}$$

$p+2 = p-(-2)$

2^{os} τρόπος

$$\mathcal{L}((f*g)(x))(p) = \mathcal{L}(f(x))(p)\,\mathcal{L}(g(x))(p)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}((f*g)(x))(p) = (f*g)(x) = \mathcal{L}^{-1}\left(\mathcal{L}(f(x))(p)\,\mathcal{L}(g(x))(p)\right)$$

$$\eta(p) = \frac{1}{(p+2)(p+3)} = \eta_1(p)\,\eta_2(p)$$

$$\eta_1(p) = \frac{1}{p+2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f_1(x) = e^{-2x}$$

$$\eta_2(p) = \frac{1}{p+3} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f_2(x) = e^{-3x}$$

$$\eta(p) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} (f_1 * f_2)(x) = f(x)$$

$$(f_1*f_2)(x) = \int_0^x f_1(t)\,f_2(x-t)\,dt = \int_0^x e^{-2t}\cdot e^{-3(x-t)}\,dt$$

$$= e^{-3x}\int_0^x e^{t}\,dt = e^{-3x}\left[e^t\right]_0^x$$

$$= e^{-3x}\left(e^x - e^0\right)$$

$$= e^{-3x+x} - e^{-3x}$$

$$= e^{-2x} - e^{-3x}$$

ΣΕΙΡΕΣ ΣΤΟ $\mathbb{R}$

Ακολουθίες → Σειρές : $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών

$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ $\quad a_n \xrightarrow{n\to\infty} a\in\mathbb{R}$ συγκλίνει

$a_n \xrightarrow{n\to\infty} \pm\infty$ αποκλίνει

$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$

ΜΕΡΙΚΑ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΑ

Ορίζω μία ακολουθία $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ με τύπο $\sum_{k=1}^{n} a_k$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει στο $a\in\mathbb{R}$, αν $\lim_{n\to\infty} S_n = a\in\mathbb{R}$.

Εάν $a=\pm\infty$ ή δεν υπάρχει το όριο, τότε θα λέμε ότι η σειρά αποκλίνει.

Παράδειγμα

ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΣΕΙΡΑ :

$a_n = \frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ $\qquad$ Θα δούμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$

Είχαμε δει ότι εάν $\int_{a_1}^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει, τότε $\int_{a_2}^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Αν $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, $\forall n_0$, και ισχύει και το αντίστροφο.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{n_0-1} a_n + \sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$$

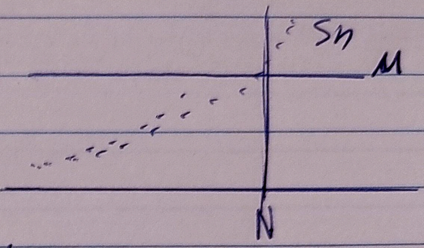
$S_n = \sum_{n=1}^{n_0-1} a_n + t_n$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_n$, $t_n = \sum_{k=n_0}^{n} a_n$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{n_0-1} a_n + \lim_{n\to\infty} t_n$

Έστω ότι $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ αποκλίνει, τότε $\lim_{n\to\infty} t_n$ $\begin{cases} \text{δεν υπάρχει} \\ \pm\infty \end{cases}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n$ $\begin{cases} \text{δεν υπάρχει} \\ \pm\infty \end{cases}$, ΑΤΟΠΟ.

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ δεν είναι άνω φραγμένη, όταν $\forall M>0$, $\exists N\in\mathbb{N}$ τ.ω $\forall n \geq N$, να ισχύει $S_n > M$. Αν δεν ισχύει το παραπάνω $\nexists N$, τότε είναι άνω φραγμένη.



ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda \cdot a_n = \lambda \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Αν $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ αποκλίνει, τότε $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ αποκλίνει.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Έστω $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ συγκλίνει, τότε $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}(b_n + a_n - a_n)$

$$= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)}_{\text{συγκλίνει}} - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}_{\text{συγκλίνει}} \in \mathbb{R}$$

Άρα, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ πρέπει να συγκλίνει. Άτοπο.
Επομένως, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ αποκλίνει.

Τηλεσκοπικές Σειρές: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n = b_n - b_{n+1}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots = b_1 - \cancel{b_2} + \cancel{b_2} - \cancel{b_3} + \cancel{b_3} - \cancel{b_4} + \dots$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = b_1 - \cancel{b_2} + \cancel{b_2} - \cancel{b_3} + \dots + \cancel{b_n} - b_{n+1} = b_1 - b_{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_{n+1} = b_1 - \lim_{1+n\to\infty} b_{n+1} \overset{n+1=n'}{=\!=} b_1 - \lim_{n'\to\infty} b_{n'} = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_n$$

Παράδειγμα

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$$

Λύση: $a_n = (-1)^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)} \overset{\text{θέλω}}{=\!=} b_n - b_{n+1}$

$$\frac{2n+1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} = \frac{A(n+1) + Bn}{n(n+1)} = \frac{(A+B)n + A}{n(n+1)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B = 2 \Rightarrow \boxed{B=1} \\ \boxed{A=1} \end{cases}$$

$$a_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + (-1)^{n-1} \frac{1}{n+1} = (-1)^{n-1} \frac{1}{n} - (-1)^{n-1} \cdot (-1) \frac{1}{n+1}$$

$$= (-1)^{n-1} \frac{1}{n} - (-1)^{n} \frac{1}{n+1} = b_n - b_{n+1} , \quad b_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$$

$$\sum (-1)^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)} = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_n = 1 - \lim_{n\to\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$$

$$-\frac{1}{n} \le (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \le \frac{1}{n}$$

$n\to\infty$: $-\frac{1}{n} \to 0$, $\frac{1}{n} \to 0$; 1^{n-1}

Τότε $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, άρα $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)} = 1$.

Ερώτηση: $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}}$ συγκλίνει ή αποκλίνει;

Απάντηση: [redacted]
(Δεν είναι τηλεσκοπική)

$$-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n(n+1)} \Big\} \ -\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4}$$

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ

$(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, $0 \leq a_n \leq b_n$, $\forall n \geq n_0$

(1) Εάν $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει

(2) Εάν $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ αποκλίνει $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΣΥΜΠΥΚΝΩΣΗΣ CAUCHY

$(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq 0$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει ανν $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ συγκλίνει.

Παράδειγμα

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

$a_n = \frac{1}{n}$ $\quad a_{2^n} = \frac{1}{2^n} \Rightarrow 2^n a_{2^n} = 1$

$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} = 1+1+\ldots = \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$

Παράδειγμα

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p>1$ $\quad a_{2^n} = \frac{1}{(2^n)^p} = \frac{1}{2^{np}} = 2^{-np}$

$2^n a_{2^n} = 2^{n-np} = \left(2^{1-p}\right)^n$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p>1$ $a_{2^n} = \frac{1}{(2^n)^p} = \frac{1}{2^{np}} = 2^{-np}$

$2^n a_{2^n} = 2^{n-np} = (2^{1-p})^n$

$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (2^{1-p})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n$, $\lambda = 2^{1-p}$ <u>ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΣΕΙΡΑ</u>

Εάν $|\lambda|<1$, τότε $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n = \frac{1}{1-\lambda}$ $2^{1-p} = \frac{1}{2^{p-1}} < 1$

άρα συγκλίνει η $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ</u> Μπορούμε να υπολογίσουμε το $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$, αλλά όχι το $\sum_{n=1}^{\infty} = a_n$