

03/11/2025

3^ο Σενάριο συνήχας και εταναλμης

$$ay'' + by' + cy = 0$$

$$i^2 = -1 \quad \mathbb{C} = \{z = a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

$$e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$$

$$y(t) = e^{rt}$$

$$ar^2 + br + c = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac < 0$$

$$-\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \lambda \pm i\mu$$

$$\lambda = \frac{-b}{2a} \quad \mu = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

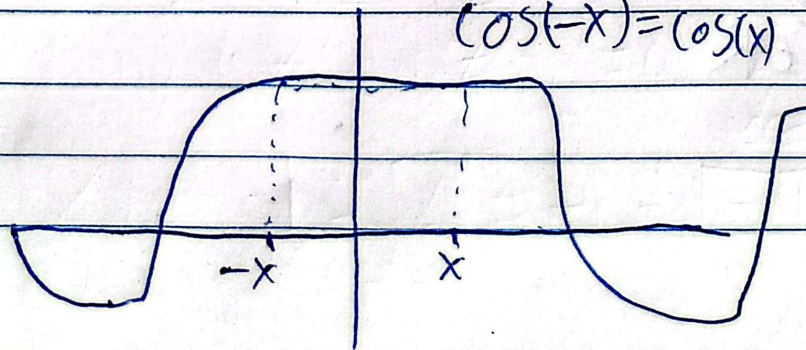
$$e^{i\mu t} = \cos(\mu t) + i\sin(\mu t)$$

$$e^{rt} = e^{(\lambda \pm i\mu)t} = e^{\lambda t} e^{\pm i\mu t}$$

$$+ e^{\lambda t} (\cos(\mu t) + i\sin(\mu t))$$

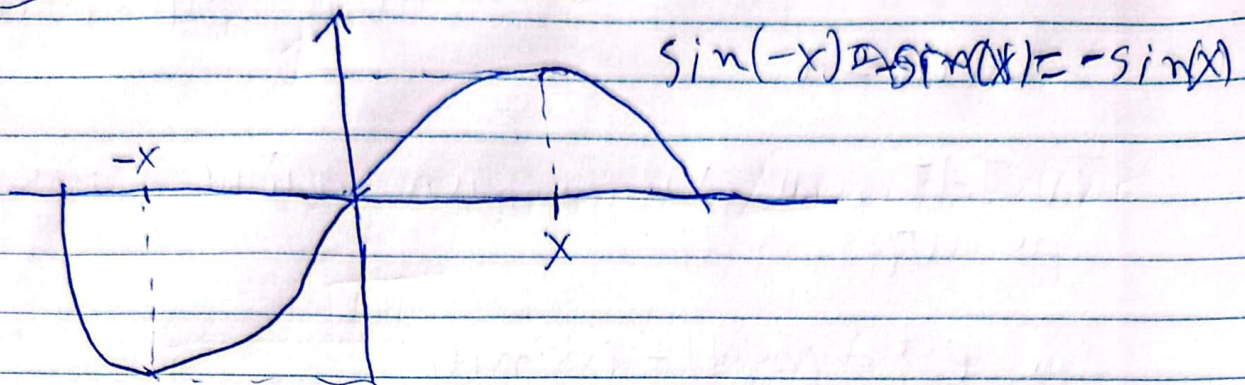
$$- e^{\lambda t} (\underbrace{\cos(-\mu t)}_{\cos(\mu t)} + i\sin(-\mu t))$$

$$\cos(-x) = \cos(x)$$



Ταυτότητα του Euler

$$e^{it} = \cos(t) + i \sin(t)$$



Συνάρτησες Βάσης

$$v_1(t) = e^{\lambda t} (\cos(\mu t) + i \sin(\mu t))$$

$$v_2(t) = e^{\lambda t} (\cos(\mu t) - i \sin(\mu t))$$

ορίζουμε
$$u_1(t) = \frac{1}{2} (v_1(t) + v_2(t)) = \frac{1}{2} e^{\lambda t} (2 \cos(\mu t) + i 0) = e^{\lambda t} \cos(\mu t)$$

$$u_2(t) = \frac{1}{2i} (v_1(t) - v_2(t)) = \frac{1}{2i} e^{\lambda t} (2i \sin(\mu t)) = e^{\lambda t} \sin(\mu t)$$

ήδη η γενική λύση της εξίσωσης γραμμικής ως

$$y(t) = C_1 e^{\lambda t} \cos(\mu t) + C_2 e^{\lambda t} \sin(\mu t), [C_1, C_2 \in \mathbb{R}]$$

Θεωρούμε το IVP

Θεωρούμε το IVP

$$\begin{cases} ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0, t > t_0 \\ y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R} \\ y'(t_0) = y'_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$y'(t) = (c_1 \lambda e^{\lambda t} \cos(\mu t) - \mu c_1 e^{\lambda t} \sin(\mu t)) + (c_2 \lambda e^{\lambda t} \sin(\mu t) + \mu c_2 e^{\lambda t} \cos(\mu t))$$

εφαρμόζουμε για $t = t_0$

$$c_1 e^{\lambda t_0} \cos(\mu t_0) + c_2 e^{\lambda t_0} \sin(\mu t_0) = y_0$$

$$c_1 e^{\lambda t_0} (\lambda \cos(\mu t_0) - \mu \sin(\mu t_0)) + c_2 e^{\lambda t_0} (\lambda \sin(\mu t_0) + \mu \cos(\mu t_0)) = y'_0$$

παράγωγο
α1 και α2

y'_0

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda t_0} \cos(\mu t_0) & e^{\lambda t_0} \sin(\mu t_0) \\ e^{\lambda t_0} (\lambda \cos(\mu t_0) - \mu \sin(\mu t_0)) & e^{\lambda t_0} (\lambda \sin(\mu t_0) + \mu \cos(\mu t_0)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y'_0 \end{pmatrix}$$

A

$$\det(A) = e^{\lambda t_0} (\lambda \sin(\mu t_0) \cos(\mu t_0) + \mu \cos^2(\mu t_0))$$

$$- e^{\lambda t_0} (\lambda \sin(\mu t_0) \cos(\mu t_0) - \mu \sin^2(\mu t_0)) =$$

$$= e^{\lambda t_0} \mu (\underbrace{\cos^2(\mu t_0) + \sin^2(\mu t_0)}_1) = \mu e^{\lambda t_0} \neq 0$$

Να λύσω το ΠΑΤ

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 5y = 0, t \geq 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Χαρακτ. εξίσωση $r^2 + 2r + 5 = 0$, $\Delta = 4 - 4 \cdot 5 = -16 < 0$

$$r_{1,2} = \frac{-2 \pm i\sqrt{16}}{2} = -1 \pm 2i \quad (\lambda = -1, \mu = 2), (r_{1,2} = \lambda \pm i\mu)$$

[Ενικν λύση

~~$e^{\lambda t}$~~ $e^{\lambda t} \cdot e^{i\mu t}$

$$y(t) = C_1 e^{-t} (\cos(2t)) + C_2 e^{-t} \sin(2t)$$

$$y(0) = C_1 \underbrace{e^0}_{1} \cdot \underbrace{\cos(0)}_1 + C_2 \cdot \underbrace{e^0}_{1} \cdot \underbrace{\sin(0)}_0 = C_1 = 0$$

$$\text{Άρα } y(t) = C_2 e^{-t} \sin(2t)$$

$$y'(t) = -C_2 e^{-t} \sin(2t) + 2C_2 e^{-t} \cos(2t)$$

$$y'(0) = -C_2 \underbrace{e^0}_{1} \cdot \underbrace{\sin(0)}_0 + 2C_2 \underbrace{e^0}_{1} \cdot \underbrace{\cos(0)}_1 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2C_2 = 1 \Rightarrow C_2 = \frac{1}{2}$$

Η μοναδική λύση του ΠΑΤ είναι $y(t) = \frac{1}{2} e^{-t} \sin(2t)$

Μη ομογενές ΔΕ 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές.
 $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = q(t)$
 $a, b, c \in \mathbb{R}, q(t)$ μια δοσμένη συνάρτηση

Έστω $y_1(t), y_2(t)$ τυχόντες λύσεις της (*)

$$\begin{aligned} ay_1' + by_1' + cy_1 &= q \quad (**), (ay_1 + cy_2)' \\ ay_2' + by_2' + cy_2 &= q \quad (***) = cy_1' + cy_2' \end{aligned}$$

Αφαιρούμε κατά μέλη τις (**), (***)
 $a(y_1' - y_2') + b(y_1 - y_2) + c(y_1 - y_2) = q - q = 0$

$$\Leftrightarrow a(y_1 - y_2)'' + b(y_1 - y_2)' + c(y_1 - y_2) = 0 \quad (\sim)$$

Θέτουμε $y_h(t) = y_1(t) - y_2(t)$
 τότε η (\sim) γραφείται ως

$$ay_h'' + by_h' + cy_h = 0 \quad \leftarrow \text{έχει γνωστή αλγεβρική λύση}$$

$$\text{οπρ } y_1^{(h)} - y_2^{(h)} = y_h(t) \Rightarrow y_1(t) = y_h(t) + y_2(t) \quad (\sim)$$

$y(t) = y_h(t)$ η γενική λύση της εξίσωσης
 $y_p(t) = y_2(t)$ μια ειδική λύση της εξίσωσης

Γενική λύση: $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$
 \uparrow
 λύση της ομογενούς εξίσωσης \leftarrow ειδική λύση του αρχικού προβλήματος

$q(t)$	$y_p(t)$
P_n πολυώνυμο n βαθμού	$t^S (A_n t^n + A_{n-1} t^{n-1} + \dots + A_1 t + A_0)$, $S=0,1,2$
$P_n(t) e^{kt}$	$t^S (A_n t^n + A_{n-1} t^{n-1} + \dots + A_1 t + A_0) e^{kt}$, $S=0,1,2$
$P_n(t) \begin{cases} \sin(kt) \\ \cos(kt) \end{cases}$	$t^S (A_n t^n + A_{n-1} t^{n-1} + \dots + A_1 t + A_0) (\cos(kt) + \sin(kt))$
	$S=1,2,3$

Παραρ. $q(t) = t^2 - t$

$$A_2 t^2 + A_1 t + A_0$$

$$t(A_2 t^2 + A_1 t + A_0) \stackrel{t^2 t}{=} A_2 t^3 + A_1 t^2 + A_0 t$$

$$t^2(A_2 t^2 + A_1 t + A_0) = A_2 t^4 + A_1 t^3 + A_0 t^2$$

Παράδειγμα

Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης

$$y'' - 3y' - 4y = 2e^{-t} \quad y = y_h + y_p$$

$c_1 e^{4t} + c_2 e^{-t}$

Λύση $y_h'' - 3y_h' - 4y_h = 0 \quad \Delta = 9 - 4(-4) = 25 > 0$

$$r_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$$

Η λύση $y_h(t) = c_1 e^{4t} + c_2 e^{-t}$

Περίπτωση: $P_0(t)e^{-t}$

- $s=0 \rightarrow y_p(t) = A_0 e^{-t}$
- $s=1 \rightarrow y_p(t) = A_0 t e^{-t}$
- $s=2 \rightarrow y_p(t) = A_0 t^2 e^{-t}$

Δοκιμή 1: $y_p(t) = A_0 e^{-t}$

$$y_p'(t) = -A_0 e^{-t}$$

$$y_p''(t) = A_0 e^{-t}$$

Εφαρμόζουμε στην εξίσωση

$$\underbrace{A_0 e^{-t}}_{y''_p} - 3 \underbrace{(-A_0 e^{-t})}_{y'_p} - 4 \underbrace{A_0 e^{-t}}_{y_p} = 2e^{-t}$$

$$A_0 e^{-t} + 3A_0 e^{-t} - 4A_0 e^{-t} = 2e^{-t} \Rightarrow 0 = 2e^{-t}$$

Βοήθημα 2

$$y_p(t) = A_0 t e^{-t}$$

$$y'_p(t) = A_0 e^{-t} - A_0 t e^{-t}$$

$$y''_p(t) = -A_0 e^{-t} - A_0 e^{-t} + A_0 t e^{-t} = -2A_0 e^{-t} + A_0 t e^{-t}$$

Εφαρμόσουμε στην εξίσωση

$$-2A_0 e^{-t} + A_0 t e^{-t} - 3(A_0 e^{-t} - A_0 t e^{-t}) = 2e^{-t}$$
$$-4A_0 t e^{-t} = 2e^{-t}$$

$$\underline{-2A_0 e^{-t} + A_0 t e^{-t} - 3A_0 e^{-t} + 3A_0 t e^{-t}}$$
$$-4A_0 t e^{-t} = 2e^{-t}$$

$$-5A_0 e^{-t} = 2e^{-t} \Rightarrow \boxed{A_0 = -\frac{2}{5}} \quad \boxed{2.^\circ \checkmark}$$

Άρα η γενική λύση της εξίσωσης

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = (c_1 e^{4t} + (c_2 e^{-t} - \frac{2}{5} t e^{-t})) = c_1 e^{4t} + (c_2 - \frac{2}{5} t) e^{-t} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

Παραδείγμα το ίδιο που κάνουμε πριν

Να βρούμε η γεν. λύση του ΗΑ1

$$\begin{cases} y'' - 3y' - 4y = 2e^{-t} & y(t) = (c_1 e^{4t} + (c_2 - \frac{2}{5} t) e^{-t}) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$
$$y'(t) = 4c_1 e^{4t} - \frac{2}{5} e^{-t} - (c_2 - \frac{2}{5} t) e^{-t}$$

$$y(0) = c_1 + c_2 = 1 \rightarrow \text{Εξίσωση}$$
$$y'(0) = 4c_1 - \frac{2}{5} - c_2 = 0$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ 4c_1 - \frac{2}{5} - c_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ 4c_1 - c_2 = \frac{2}{5} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Προσθέτω} \\ \text{C} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{κατά} \\ \text{C} \end{array}$$

Προσθέτω κατά μέλη

$$5c_1 = 1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5} \Rightarrow \boxed{c_1 = \frac{7}{25}}$$

$$c_2 = 1 - \frac{7}{25} = \frac{18}{25}$$

Άρα η μοναδική λύση του ΗΑ1

$$y(t) = \frac{7}{25} e^{4t} + (\frac{18}{25} - \frac{2}{5} t) e^{-t}$$

Assume:

$$P_0 \sin(2t)$$

SOS εξίσωση

$$y'' + 4y' + 5y = 3 \sin(2t)$$

$y_h \dots$

$$s=0 \rightarrow A_0 \sin(2t) + B_0 \cos(2t)$$

$$y_p \begin{cases} s=1 \rightarrow A_0 + \sin(2t) + B_0 + \cos(2t) \end{cases}$$

$$s=2 \rightarrow A_0 t^2 \sin(2t) + B_0 t^2 \sin(2t)$$