6-10-2025, μάθημα 1

ΟΡΙΣΜΟΣ (Διαφορικής Εξίσωσης (Δ.Ε.))

Είναι μία εξίσωση που περιέχει μία ή περισσότερες παραγώγους μίας άγνωστης συνάρτησης.

Παράδειγμα Έστω η Δ.Ε. $u'(x) = u(x)$.

1) Η συνάρτηση $u(x) = e^x$ ικανοποιεί την Δ.Ε., αφού:
$\underline{\underline{u'(x)}} = (e^x)' = e^x = \underline{\underline{u(x)}}$

2) Η συνάρτηση $u(x) = e^x + c$, $c \neq 0$ δεν ικανοποιεί την Δ.Ε., αφού:
$u'(x) = (e^x + c)' = e^x \neq e^x + c = u(x)$

3) Η συνάρτηση $u(x) = c \cdot e^x$, $c \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί την Δ.Ε., αφού:
$\underline{\underline{u'(x)}} = (c \cdot e^x)' = c \cdot e^x = \underline{\underline{u(x)}}$

Συμβολισμοί:

→ $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ή $f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx}$.

→ $f''(x_0) = (f')'$, → $f'''(x_0) = (f'')'$

→ $f^{(k)}$ = k-οστή παράγωγος της f, άρα $f'''(x) = f^{(3)}(x)$

→ $f^{(k)}(x) = \frac{d^k f(x)}{dx^k}$

Για $k=1$: $f^{(1)}(x) = f'(x) = \frac{d^1 f(x)}{dx^1} = \frac{df(x)}{dx}$.

Για $k=2$: $f^{(2)}(x) = \ldots = \dfrac{d^2 F(x)}{dx^2}$

$$u'(x) = u(x) \Longleftrightarrow \frac{du(x)}{dx} = u(x)$$

$$f = m \cdot \frac{d^2 x(t)}{dt^2}$$

$\boxed{\text{Ταξινόμηση Δ.Ε.}}$

Διακρίνουμε δύο βασικούς τύπους Δ.Ε.:

1) Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις (ΣΔΕ) (1ο μέρος του μαθήματος, 2/3 της ύλης).

Περιλαμβάνουν παραγώγους μιας άγνωστης συνάρτησης, η οποία εξαρτάται από μία μοναδική ελεύθερη μεταβλητή.

π.χ.: $y = y(t)$, $t =$ ελεύθερη μεταβλητή

Η εξίσωση θα περιλαμβάνει $t, y(t), y'(t), \ldots$

2) Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις (ΜΔΕ) (2ο μέρος του μαθήματος, 1/3 της ύλης).

Περιλαμβάνουν (μερικές) παραγώγους μιας άγνωστης συνάρτησης, η οποία εξαρτάται από περισσότερες από μία ελεύθερες μεταβλητές.

π.χ.: $u = u(t,x)$, $t, x =$ ελεύθερες μεταβλητές

Θα δούμε σε άλλο μάθημα τον υπολογισμό μερικών παραγώγων.

$$u_t(t,x) = \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} \quad , \quad u_x(t,x) = \frac{\partial u(t,x)}{\partial x}$$

ως προς t — ως προς x

$$u_{tt}(t,x) = \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} \quad , \quad u_{xx}(t,x) = \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}$$

$$u_{xt}(t,x) = \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x \cdot \partial t} = \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t \cdot \partial x} = u_{tx}(t,x)$$

Παραδείγματα ΜΔΕ:

$u_{tt} - c^2 \cdot u_{xx} = 0$ (εξίσωση κύματος)

$u_t - \kappa \cdot u'_{xx} = 0$ (εξίσωση θερμότητας)

Τάξη ΣΔΕ

Η τάξη της ΣΔΕ προσδιορίζεται από την τάξη της μεγιστοβάθμιας παραγώγου της άγνωστης συνάρτησης.

(α) $y'(t) = y(t)$ (1ης τάξης)

(β) $y''(t) - 3y'(t) + y(t) = 0$ (2ης τάξης)

Κάθε ΣΔΕ p-τάξης μπορεί να εκφραστεί στη γενική μορφή:

$$F[t, y(t), y'(t), \dots, y^{(p)}(t)] = 0$$

η ελεύθερη μεταβλητή

Παράδειγμα:

1) Έστω $y'(t) = y(t)$. Μπορεί να γραφτεί ως:
$F[t, y(t), y'(t)] = y'(t) - y(t) = 0$

2) Έστω $y''(t) - 3y'(t) + y(t) = 0$. Γράφεται ως:
$F[t, y(t), y'(t), y''(t)] = y''(t) - 3y'(t) + y(t) = 0$

Γραμμικότητα ΣΔΕ

Γραμμική ΣΔΕ

(i) Όταν δεν υπάρχουν γινόμενα των $y, y', \dots, y^{(p)}$
(ii) Όταν δεν υπάρχουν δυνάμεις των $y, y', \dots, y^{(p)}$

Μη Γραμμική ΣΔΕ

Όταν παραβιάζεται τουλάχιστον μία συνθήκη (από τις (i) και (ii)) της γραμμικότητας.

Παραδείγματα:

1) $y'(t) = y(t)$ ($1^{ης}$ τάξης). Είναι γραμμική ή μη γραμμική;
Είναι γραμμική, διότι (i) ✓ και (ii) ✓

2) $y'(t) = t^2 y(t)$ ($1^{ης}$ τάξης).
Είναι γραμμική, διότι (i) ✓ και (ii) ✓

3) $y''(t) + t\cdot y'(t) + \underline{\underline{y^2(t)}} = 1$ ($2^{ης}$ τάξης)

Μη γραμμική, διότι (ii) ✗

4) $y'(t) + \underline{\underline{y(t)\cdot y'(t)}} = 0$ ($1^{ης}$ τάξης)

Μη γραμμική, διότι (i) ✗

Σχόλιο: Όταν οι εξισώσεις είναι μη γραμμικές λύνονται πιο δύσκολα. Εφαρμόζουμε αριθμητικές μεθόδους.

Γενική Μορφή Γραμμικών p-τάξης ΣΔΕ

$$\alpha_p(t)\cdot y^{(p)}(t) + \alpha_{p-1}(t)\cdot y^{(p-1)}(t) + \dots + \alpha_1(t)\cdot y'(t) + \alpha_0(t)\cdot y(t) = b(t)$$

, με $\alpha_p(t) \neq 0$

Γραμμική $1^{ης}$ τάξης ΣΔΕ

$$\alpha_1(t)\cdot y'(t) + \alpha_0(t)\cdot y(t) = b(t) \quad , \ \alpha_1(t) \neq 0$$

Διαιρώ με $\alpha_1(t)$: $y'(t) + \frac{\alpha_0(t)}{\alpha_1(t)}\cdot y(t) = \frac{b(t)}{\alpha_1(t)}$

Θέτω $p(t) = \frac{\alpha_0(t)}{\alpha_1(t)}$ και $q(t) = \frac{b(t)}{\alpha_1(t)}$ και έχουμε:

$$\boxed{y'(t) + p(t)\cdot y(t) = q(t)} \qquad (*)$$

(<u>Υπενθύμιση</u>: $\quad (f(t)\cdot g(t))' = f'(t)\cdot g(t) + f(t)\cdot g'(t)$)

<u>Μέθοδος Ολοκληρωτικού Παράγοντα</u>

Θέλουμε να λύσουμε εξισώσεις της μορφής $(*)$ για δωσμένες συναρτήσεις $p(t)$ και $q(t)$.

<u>Απόδειξη</u>:

Έστω μια συνάρτηση $\mu(t) \neq 0$ τ.ω. να είναι παραγωγίσιμη.
Πολ/ζουμε την $(*)$ με την $\mu(t)$:

$$\mu(t)\cdot y'(t) + \mu(t)\cdot p(t)\cdot y(t) = \mu(t)\cdot q(t) \qquad (**)$$

Θα θέλαμε να ήταν $\mu(t)\cdot y'(t) + \mu'(t)\cdot y(t) = \mu(t)\cdot q(t)$

Μπορούμε να επιλέξουμε το $\mu(t)$, ε.ω.: $\quad \mu'(t) = \mu(t)\cdot p(t) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{\mu'(t)}{\mu(t)} = p(t)$. Ολοκληρώνοντας τα δύο μέλη, έχουμε:

$$\int \frac{\mu'(t)}{\mu(t)}\,dt = \int p(t)\,dt \Rightarrow \ln|\mu(t)| = \int p(t)\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{\ln|\mu(t)|} = e^{\int p(t)\,dt} \Rightarrow |\mu(t)| = e^{\int p(t)\,dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu(t) = e^{\int p(t)\,dt} \qquad (\sim)$$

($\rightarrow$ Ο Ολοκληρωτικός Παράγοντας)

Για $\mu(t) = e^{\int p(t)\,dt}$ η (**) γράφεται:

$$(\mu(t)\cdot y(t))' = \mu(t)\cdot q(t) \quad (\approx)$$

Στόχος μας είναι να βρούμε την $y(t)$. Σκέφτομαι ότι το αντίθετο της παραγώγισης είναι η ολοκλήρωση, άρα ολοκληρώνουμε την $(\approx)$:

$$\int (\mu(t)\cdot y(t))'\,dt = \int \mu(t)\cdot q(t)\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu(t)\cdot y(t) = \int \mu(t)\cdot q(t)\,dt + c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{\mu(t)}\cdot\left(\int \mu(t)\cdot q(t)\,dt + c\right)$$

Γενική λύση: $\boxed{y(t) = e^{-\int p(t)dt}\cdot\left(\int e^{\int p(t)dt}\cdot q(t)\,dt + c\right)}$

Παράδειγμα Να λυθεί η ΣΔΕ:

$$y'(t) + \underbrace{2t}_{p(t)}\cdot y(t) = \underbrace{e^{-t^2}}_{q(t)} \qquad (1^{ης} \text{ τάξης, γραμμική})$$

Λύση: $p(t) = 2t$ και $q(t) = e^{-t^2}$

Υπολογίζω τα δύο ολοκληρώματα:

- $\int p(t)\,dt = \int 2t\,dt = 2\cdot\int t\,dt = \cancel{2}\cdot\frac{t^2}{\cancel{2}} = t^2$

- $\int e^{\int p(t)dt} \cdot q(t)\, dt = \int e^{t^2} \cdot e^{-t^2} dt = \int 1\, dt = t$

Γενική λύση: $y(t) = e^{-\int p(t)dt} \cdot \left(\int e^{\int p(t)dt} \cdot q(t)\, dt + c \right) =$

$= e^{-t^2} \cdot (t + c)$, $c \in \mathbb{R}$

Μου λείπει η απροσδιοριστία της τιμής c.

Για $t=1$, έχουμε: $y(t_0) = y(1) = e^{-1} \cdot (1+c) = 1 \Rightarrow 1 + c = e \Rightarrow$

$\Rightarrow c = e - 1$

Άρα, η γενική λύση: $\boxed{y(t) = e^{-t^2} \cdot (t + e - 1)}$