14/12/2025

(I) $\frac{d}{dt} f(t, y(t)) = \frac{\partial f}{\partial t}(t,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(t,y)\frac{dy(t)}{dt}$ ή *

(II) $\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{dx(t)}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\cdot\frac{dy(t)}{dt}$

ή

$\boxed{f'(x(t), y(t)) = f_x x'(t) + f_y y'(t)}$

για $x(t) = t$ η (II) = (I)

ή (I) $f(t, y(t)) = f_t + f_y \cdot y'$ ή *

Ακριβείς Διαφορικές Εξισώσεις

$\boxed{M(t, y(t)) + N(t, y(t))\, y'(t) = 0}$

όπου υπάρχει συνάρτηση $\psi(t,y)$ τ.ω

$\frac{\partial \psi}{\partial t} = M(t,y)$ και $\frac{\partial \psi}{\partial y} = N(t,y)$

$M(t,y) + N(t,y)\, y'(t) = 0$

$\Updownarrow \quad \Updownarrow$

$\frac{\partial \psi(t,y)}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y}(t,y)\frac{dy(t)}{dt} = 0$

από το κανόνα παραγώγισης (I) $\frac{d\psi}{dt}\cdot[t \cdot y(t)]$

$\boxed{\frac{d}{dt}\psi(t, y(t)) = 0} \Rightarrow \psi(t, y(t)) = c, \ c \in \mathbb{R}$

Ακριβείς: ΔΕ $\rightarrow$ αλγεβρική εξίσωση

Θεώρημα Θα υπάρχει η συνάρτηση $\psi(t,y(t))$
τ.ω. $\psi_t = M$, $\psi_y = N$
ανν $M_y = N_t \leftarrow$ Πρόταση B

Αποδ.: $(\Rightarrow)$ $A \Rightarrow B$

Έστω ότι $\exists \psi$ τ.ω. $\boxed{\psi_t = M}^{*}$ και $\boxed{\psi_y = N}^{**}$

Παραγωγίζουμε την * και προς y και ** ως προς t

$$\psi_{ty} = M_y \quad \text{και} \quad \psi_{yt} = N_t$$

όμως $\psi_{ty} = \psi_{yt}$ άρα $\underbrace{M_y = N_t}_{B}$

$(\Leftarrow)$ $B \to A$

Έστω $M_y = N_t$ Θ.δ.ο. $\overbrace{\exists \psi \text{ τ.ω. } \psi_t = M^{*} \text{ και } \psi_y = N^{**}}^{A}$

Έστω ψ τ.ω. $\psi_t = M(t,y) \Longrightarrow \int \psi_t \, dt = \int M(t,y(t))\, dt$

$$\Rightarrow \boxed{\psi(t,y(t)) = \int M(t,y(t))\, dt + C(y)}$$ σταθερά ως προς t

$$\frac{\partial}{\partial t} C(y) = 0$$

Παραγ. ως προς y

$$\psi_y(t,y) = \frac{\partial}{\partial y} \int M(t,y(t))\, dt + C'(y)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\psi_y(t,y)}_{\text{συνάρτηση } (t,y)} = \underbrace{\int \frac{\partial}{\partial y} M(t,y)\, dt}_{\text{συνάρτηση } (t,y)} + \overbrace{C'(y)}^{\text{συνάρτηση του } y}$$

$$C'(y) = \psi_y(t,y) - \int \frac{\partial}{\partial y} M(t,y)\, dt$$

Ο μόνος τρόπος για την ισότητα είναι

$\psi_y(t,y) - \int \frac{\partial}{\partial y} M(t,y)\,dt$ να είναι συνάρτηση μόνο του y

Παραγωγίζοντας ως προς t

$$\psi_{yt}(t,y) - \frac{\partial}{\partial t}\int \frac{\partial}{\partial y} M\,dt = 0$$

$M_y = N_t$

$\psi_{yt}(t,y) = M_y = N_t$ άρα $\psi_{yt}(t,y) = N_t$ άρα $(\psi_y)_t = N_t$

άρα $N = \psi_y$

Παράδειγμα: Να λυθεί η εξίσωση

$$\underbrace{(y\cos t + 2te^y)}_{M(t,y)} + \underbrace{(\sin t + t^2 e^y - 1)}_{N(t,y)} y' = 0$$

$\psi_{ty} = M_y$ $\qquad$ $\psi_{yt} = N_t$

αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι ακριβώς

$M_y = N_t$

Για $M_y \overset{*}{=} \cos t + 2te^y$

Αναλυτικά: $M_y = (y\cos t + 2te^y)_y = (y\cos t)_y + (2t\cdot e^y)_y =$

$= \cos t\,(y)_y + 2t(e^y)_y \overset{*}{=}$ $\quad (y)_y \to 1,\ (e^y)_y \to e^y$

Για $N_t = (\sin t + t^2 e^y - 1)_t = (\sin t)_t + (t^2 \cdot e^y) + \cancel{(-1)_t}^{0} =$

$= \cos t + e^y (t^2)_t =$

$= \cos t + 2t\cdot e^y$

άρα $M_y = N_t$ επομένως ακριβώς ΔΕ

άρα, $\exists \psi$ τέτοιο $\psi_t = M$ και $\boxed{\psi_y = N}$

$\psi_t = M(t,y) = y\cos t + 2te^y$

Ολοκληρ. ως προς t

$\psi = \int \psi_t\,dt = \int (y\cos t + 2te^y)\,dt + C(y) \Leftrightarrow$

Σαρώθηκε με το CamScanner

$\Leftrightarrow \psi(t,y) = y \underbrace{\int \cos t\, dt}_{\sin t} + 2e^y \underbrace{\int t\, dt}_{t^2/2} + c(y)$

οπότε $\psi(t,y) = y\sin t + t^2 \cdot e^y + c(y)$

επίσης θέλουμε $\psi_y(t,y) = N(t,y)$

$\psi_y(t,y) = \sin t + t^2 \cdot e^y + c'(y) = \overbrace{\sin t + t^2 e^y - 1}^{N(t,y)}$

άρα $c'(y) = -1$, άρα μπορούμε να πάρουμε $c(y) = -y$

Γενική λύση $\psi(t,y) = c \in \mathbb{R}$

$\boxed{\sin t + t^2 \cdot e^y - 1 \quad c \in \mathbb{R}}$ Α.Ε που δίνει τη λύση

2ο Παράδειγμα

$\underbrace{2t + y^2}_{M(t,y)} + \underbrace{2ty}_{N(t,y)} y' = 0$ Πρέπει $M_y = N_t$ να εξετάσουμε

$M_y = 2y$, $N_t = 2y$ άρα είναι ακριβής ΔΕ, άρα $\exists \psi \cdot \psi(t,y)$ τ.ω

$\psi_t = M$ και $\psi_y = N$

Για $\psi_t = M = 2t + y^2 \xrightarrow[\text{ολοκληρ. ως προς } t]{2\int t\, dt} \psi(t,y) = \cancel{2}\frac{t^2}{\cancel{2}} + y^2 t + c(y)$

παραγ. ως προς y

$\Rightarrow \psi_y(t,y) = 2ty + c'(y) = 2ty = N(t,y) \Rightarrow$

$\Rightarrow c'(y) = 0$ άρα μπορούμε να επιλ. $c(y) = 0$

Τότε η γενική λύση της εξίσωσης είναι

$\psi(t,y) = c \in \mathbb{R}$ $\boxed{t^2 + y^2 t = c \in \mathbb{R}}$ αλγεβρική εξίσωση που δίνει τον $y(t)$

Διαφ. Εξισ. 2ης τάξεως, ομογενούς με σταθερούς συντελ.

Γενική Μορφή $ay''(t)+by'(t)+cy(t)=0,\ a,b,c\in\mathbb{R}$

Θα ψάξουμε για λύση της μορφής $\boxed{y(t)=e^{r\cdot t}}$

$y'(t)=r\cdot e^{rt} \to y''(t)=r^2\cdot e^{rt}$

$y''(t)=(y'(t))'=(re^{rt})'=r(e^{rt})'=r\cdot re^{rt}=r^2\cdot e^{rt}$

Εφαρμόζουμε στη γενική μορφή της εξίσωσης

$ar^2e^{rt}+bre^{rt}+ce^{rt}=0$

$e^{rt}(ar^2+br+c)=0 \Leftrightarrow \boxed{ar^2+br+c=0}$

$r=0$

$\Leftrightarrow \boxed{ar^2+br+c=0}$
- $\Delta>0$, $r_1,r_2\in\mathbb{R}$ ΣΙ
- $\Delta=0$, $r_1\in\mathbb{R}$ διπλή ρίζα ΣΙΙ
- $\Delta<0$, $\boxed{\text{μιγαδικούς αριθμούς}}$ ΣΙΙΙ

(ΣΙ) Οι συναρτήσεις e^{r_1t} και $e^{r_2\cdot t}$ ικανοποιούν την εξίσωση
$ay''+by'+cy=0$

Η γενική μορφή μπορεί να γραφεί ως $y(t)$
$y(t)=c_1e^{r_1t}+c_2\cdot e^{r_2t},\ c_1,c_2\in\mathbb{R}$

$a(c_1\cdot e^{r_1t}+c_2\cdot e^{r_2t})''+b(c_1e^{r_1t}+c_2\cdot e^{r_2t})'+c(c_1\cdot e^{r_1t}+c_2\cdot e^{r_2t})=$

$=c_1\underbrace{[a(e^{r_1t})''+b(e^{r_1t})'+c(e^{r_1t})]}_{0}+c_2\underbrace{[a(e^{r_2t})''+b(e^{r_2t})'+c(e^{r_2t})]}_{0}=0$

ΣΔΕ ΙΙ Παράδειγμα Σ1. Να λυθεί η εξίσωση

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 0$$

Χαρακτηριστική Εξίσωση $r^2 + 5r + 6 = 0$

$$\Delta = 25 - 4 \cdot 6 \cdot 1 = 1 > 0$$

$$r_{1,2} = \frac{-5 \pm 1}{2} \rightarrow r_1 = -2, \quad r_2 = -3$$

Γενική μορφή της λύσης είναι

$$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$