27/10/25

Πρόβλημα Αρχικών Τιμών (Π.Α.Τ) - $2^{ης}$ τάξης

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = 0 \\ y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}, \quad t > t_0 \\ y'(t_0) = y_0' \end{cases}$$

Για $\Delta > 0$: Γενική λύση $y(t) = c_1 \cdot e^{r_1 t} + c_2 \cdot e^{r_2 t}$, $r_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, $r_1 \neq r_2$

για $t = t_0$: $y(t_0) = c_1 \cdot \underbrace{e^{r_1 t_0}}_{\text{γνωστός αριθμός}} + c_2 \cdot \underbrace{e^{r_2 t_0}}_{\text{γνωστός αριθμός}} = \underbrace{y_0}_{\text{γνωστός αριθμός}}$

• Παραγωγίζω τη γενική λύση:

$y'(t_0) = (c_1 \cdot e^{r_1 t_0} + c_2 \cdot e^{r_2 t_0})' = c_1 \cdot \underbrace{r_1 \cdot e^{r_1 \cdot t_0}}_{\text{γνωστός αριθμός}} + c_2 \cdot \underbrace{r_2 \cdot e^{r_2 \cdot t_0}}_{\text{γνωστός αριθμός}} = \underbrace{y_0'}_{\text{γνωστός αριθμός}} \in \mathbb{R}$

• Έχουμε ένα γραμμικό σύστημα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους

$$\begin{pmatrix} e^{r_1 t_0} & e^{r_2 t_0} \\ r_1 e^{r_1 t_0} & r_2 e^{r_2 t_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_0' \end{pmatrix} : \underline{\text{Μορφή}} \quad Ax = B$$

$\det(A) = e^{r_1 t_0} \cdot r_2 e^{r_2 t_0} - e^{r_2 t_0} \cdot r_1 \cdot e^{r_1 t_0} = r_2 \cdot e^{(r_1+r_2)t_0} - r_1 \cdot e^{(r_1+r_2)t_0} = e^{(r_1+r_2)t_0}(r_1 - r_2)$

$$\left.\begin{matrix} \to \text{Γνωρίζω ότι: } e^{(r_1+r_2)t_0} > 0 \\ r_1 - r_2 \neq 0 \text{ γιατί } r_1 \neq r_2 \end{matrix}\right\} \det(A) \neq 0$$

Εφόσον, $\det(A) \neq 0$ το σύστημα έχει μοναδική λύση

Άρα $\det(A) = (r_1 - r_2) e^{(r_1+r_2)t_0} \neq 0$

Αντίστροφος

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα ($\Delta > 0$)

$$\begin{cases} y'' + 5y' + 6y = 0, \quad t > 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Ψάχνουμε λύσεις της μορφής: $y(t) = e^{rt}$

Προκύπτουν τα r από τη χαρακτηριστική εξίσωση

$r^2 + 5r + 6 = 0$

$\Delta = b^2 - 4a\gamma$

$= 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1 > 0$

αφού $\Delta > 0$: $r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 \pm 1}{2}$ ⟨ $r_1 = -2$, $r_2 = -3$

Η γενική λύση της εξίσωσης είναι

$$(*) \begin{cases} y(t) = c_1 \cdot e^{-2t} + c_2 \cdot e^{-3t} \\ y'(t) = -2c_1 \cdot e^{-2t} - 3c_2 \cdot e^{-3t} \end{cases}$$

Εφαρμόζω αρχικές συνθήκες στο (*)

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = y(0) = 1 \\ -2c_1 - 3c_2 = y'(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 - c_2 \\ -2(1 - c_2) - 3c_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 - c_2 \\ -2 + 2c_2 - 3c_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 - c_2 \\ -c_2 = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 - c_2 \\ c_2 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 4 \\ c_2 = -3 \end{cases}$$

Άρα, μοναδική λύση του Π.Α.Τ: $y(t) = 4e^{-2t} - 3e^{-3t}$

Παράδειγμα ($\Delta=0$)

$$\begin{cases} ay''+by'+cy=0 \ , \ t>t_0 \\ y(t_0)=y_0 \\ y'(t_0) \end{cases}$$

Έστω λύση της εξίσωσης: $y(t)=c\cdot e^{r_* t}$, όπου r_* διπλή ρίζα ($\Delta=0$) και $r_*=\frac{-b}{2a}$

Ορίζουμε $y_*(t)=e^{r_* t}$

$$y_*'(t)=r_* e^{r_* t}=r_*\cdot y_*(t)$$

Ψάχνουμε για $2^{η}$ λύση: $\tilde{y}(t)=u(t)\cdot y_*(t)$

• $\tilde{y}'(t)=(u(t)\cdot y_*(t))'$

$\tilde{y}'(t)=u'(t)y_*(t)+u(t)\cdot y_*'(t)$

• $\tilde{y}''(t)=(u'(t)y_*(t)+u(t)\cdot y_*'(t))'$

$\tilde{y}''(t)=u''(t)\cdot y_*(t)+u'(t)\cdot y_*'(t)+u'(t)\cdot y_*'(t)+u(t)y_*''(t)$

$a(u''(t)\cdot y_*(t)+2u'(t)\cdot y_*'(t))+b(u'(t)\cdot y_*(t)+u(t)\cdot y_*'(t))+c\cdot u(t)\cdot y_*(t)=0$

$a(u''(t)\cdot y_*(t)+2r_* u'(t)y_*(t)+r_*^2 u(t)\cdot y_*(t))+b(u'(t)y_*(t)+r_* u(t)\cdot y_*(t))+c\cdot u(t)\cdot y_*(t)=0$

Διαιρώ με $y_*>0$

$a(u''(t)+2r_*\cdot u'(t)+r_*^2 u(t))+b(u'(t)+r_* u(t))+c\cdot u(t)=0$

$a\cdot u''(t)+2a\cdot r_* u'(t)+a\cdot r_*^2\cdot u(t)+b\cdot u'(t)+br_* u(t)+c\cdot u(t)=0$

$a\cdot u''(t)+\underbrace{(2ar_*+b)}u'(t)+\underbrace{(ar_*^2+br_*+c)}u(t)=0$

→ Αντικαθιστώ $r_*=-\frac{b}{2a}$ στο $2ar_*+b$

Άρα, $2a\left(\frac{-b}{\cancel{2a}}\right)+b=-b+b=0$

→ Το $ar_*^2+br_*+c=0$ καθώς r_* είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης.

Άρα, $a\cdot u''(t)=0 \xRightarrow{a\neq 0} u''(t)=0 \Rightarrow u'(t)=\xi\in\mathbb{R} \Rightarrow u(t)=\xi t+n \ , \ \xi, n\in\mathbb{R}$

Επιλέγουμε $\xi=1, n=0, u(t)=t$

Άρα, γενική λύση: $y(t)=c_1\cdot e^{r_* t}+c_2\cdot t\cdot e^{r_* t}$

για $t=t_0$: $y(t_0)=c_1\cdot e^{r_* t_0}+c_2\cdot t_0\cdot e^{r_* t_0}=y_0\in\mathbb{R}$

$$y'(t)=c_1\cdot r_*\cdot e^{r_* t}+c_2 e^{r_* t}+c_2 r_* t e^{r_* t}$$

για $t=t_0$: $y'(t_0)=c_1\cdot r_*\cdot e^{r_* t_0}+c_2\cdot e^{r_*\cdot t_0}+c_2 r_* t_0 e^{r_* t_0}=y_0'$

$$\begin{pmatrix} e^{r_* t_0} & t_0\cdot e^{r_* t_0} \\ r_* e^{r_* t_0} & (1+r_* t_0)e^{r_* t_0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_0 \\ y_0' \end{pmatrix}$$: Μορφή $AX=B$

$\det(A) = (1 + r_* t_0) e^{2r_* t_0} - r_* t_0 e^{2r_* t_0} = e^{2r_* t_0}(1 + r_* t_0 - r_* t_0) = e^{2r_* t_0} > 0$

Άρα, για κάθε y_0, y_0' η εξίσωση έχει μοναδική λύση

Παράδειγμα ($\Delta = 0$)

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

- $r^2 - 2r + r = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 \Rightarrow \Delta = 0$

$r_* = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$

Γενική λύση: $y(t) = c_1 \cdot e^t + c_2 \cdot t \cdot e^t$

$y'(t) = c_1 \cdot e^t + c_2 \cdot e^t + c_2 \cdot t \cdot e^t$

$y(0) = 1 \Rightarrow c_1 + 0 \cdot c_2 = 1 \Rightarrow c_1 = 1$

$y'(0) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -1$

Άρα, η μοναδική λύση είναι: $y(t) = e^t - t \cdot e^t$

Εισαγωγή στους Μιγαδικούς Αριθμούς

i: φανταστική μονάδα τέτοια ώστε $i^2 = -1$ ή $i = \sqrt{-1}$

$\mathbb{C} = \{ z = a + ib : a, b \in \mathbb{R} \}$

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

π.χ. $z = 1 + 2i$, $\bar{z} = 1 - 2i$

$a = 1, b = 1$

- $Re(z) = a$, πραγματικό μέρος του $z = a + ib$
- $Im(z) = b$, φανταστικό μέρος του $z = a + ib$
- $\bar{z} = a - ib$, συζυγής του z
- $z + \bar{z} = 2a = 2Re(z)$
- $z - \bar{z} = 2 \cdot ib = 2Im(z) \cdot i$

Παράδειγμα ($\Delta < 0$)

$az^2 + bz + c = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac < 0$

$\Delta = -1|\Delta|$

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{-1|\Delta|}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{-1}\cdot\sqrt{|\Delta|}}{2a} \overset{\sqrt{-1}=i}{=\!=} \frac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = -\frac{b}{2a} \pm i\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

Έχουμε δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες

$z_1 = -\frac{b}{2a} + i\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}$, $z_1 = \overline{z}_1$

$Re(z_1) = \frac{-b}{2a}$

$Im(z_1) = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}$

$e^{rt} \xrightarrow{\Delta>0} e^{r_1 t}, e^{r_2 t}$

$e^{rt} \xrightarrow{\Delta=0} e^{r_* t}, te^{r_* t}$

$e^{rt} \xrightarrow{\Delta<0} e^{(\mu+i\lambda)t}, e^{(\mu-i\lambda)t}$

Ταυτότητα Euler

$e^{it} = \cos(t) + i\cdot\sin(t)$

Απόδειξη

$y(t) = e^{it}$

$y'(t) = i\cdot e^{it} = iy(t)$

Θα γράψουμε το Π.Α.Τ

$$(*)\begin{cases} y'(t) - iy(t) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

→ είναι Π.Α.Τ με μοναδική λύση $y(t) = e^{it}$

ορίζουμε $w(t) = \cos(t) + i\cdot\sin(t)$

$$w'(t) = -\sin(t) + i\cdot\cos(t) \overset{i^2=-1}{=\!=} i^2\cdot\sin(t) + i\cos(t) = i(\cos(t) + i\sin(t)) = iw(t)$$

$$(*) \Rightarrow \begin{cases} w'(t) - iw(t) = 0 \\ w(0) = 1 \end{cases}$$

→ είναι Π.Α.Τ με μοναδική λύση $w(t) = \cos(t) + i\sin(t)$

Τα Π.Α.Τ είναι ίδια άρα και οι μοναδικές λύσεις θα είναι ίδιες άρα:

$w(t) = y(t)$

άρα $e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$

για $t=\pi$: $e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) \Rightarrow e^{i\pi} - 1 = 0$