1-12-2025 , μάθημα 8

Σειρές Fourier

Υπενθύμιση

Σειρές Taylor : $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$ → Άπειρη βάση

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + \dots$$

Σειρές Fourier : $\{1, \sin(x), \cos(x), \sin(2x), \cos(2x), \dots\}$

$$\boxed{f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin(nx)}$$

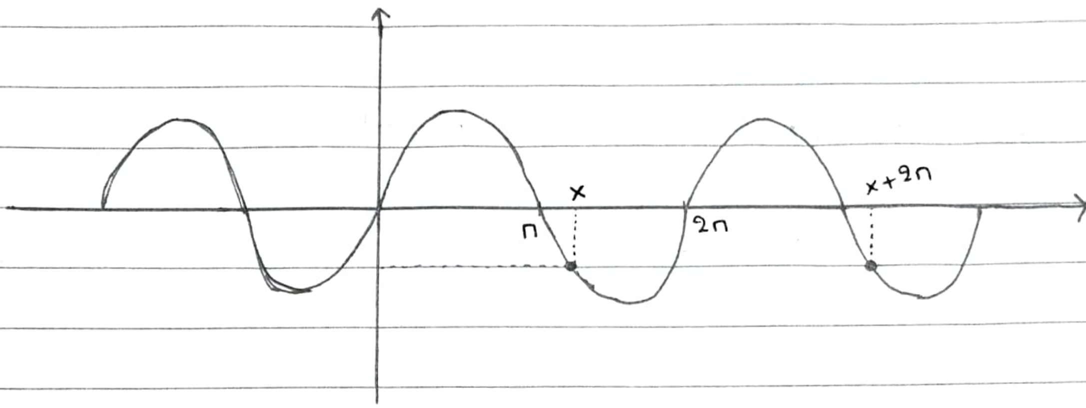
Χρήσιμα Ολοκληρώματα :

$$\frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cdot \cos(nx)\, dx = \delta_{mn} = \begin{cases} 1, & \text{αν } m = n \\ 0, & \text{αν } m \neq n \end{cases}$$

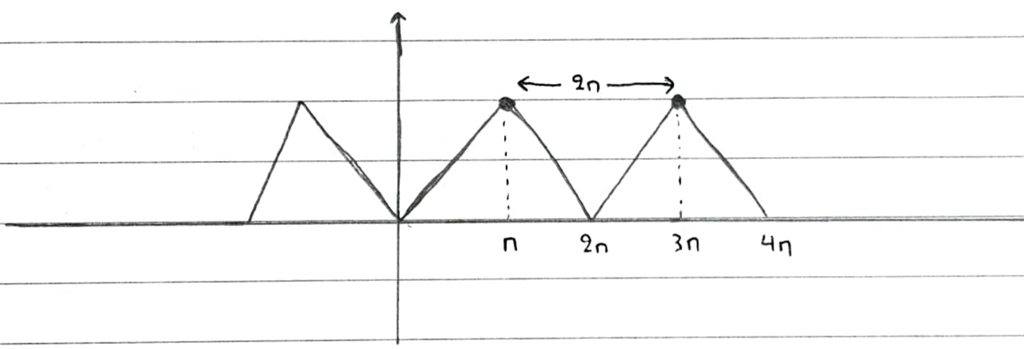
$$\frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \cdot \sin(nx)\, dx = \delta_{mn}$$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f 2π - περιοδική

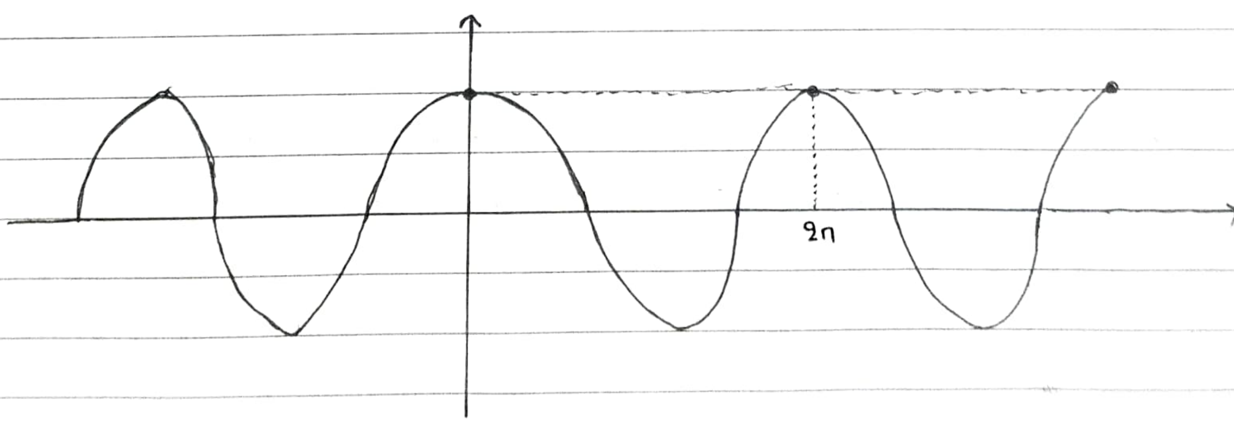
<u>f 2π- περιοδική</u> είναι αν $f(x+2\pi) = f(x)$



ή



ή



✓ (Θα δούμε πως να βρούμε τους συντελεστές μιας 2π- περιοδικής συνάρτησης.)

Θέλουμε να γράψουμε την f ως σειρά Fourier :

$$\boxed{f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin(nx)} \quad (*)$$

και θέλουμε να υπολογίσουμε τις τιμές των συντελεστών $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ και $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$

(γιατί έχω και το a_0)

Ολοκληρώνουμε την $(*) \cdot \cos(mx)$, από $-\pi$ έως π :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(mx)\, dx = \underbrace{\boxed{\int_{-\pi}^{\pi} a_0 \cdot \cos(mx)\, dx}}_{\text{I}} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \underbrace{\boxed{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cdot \cos(nx)\, dx}}_{\text{II}} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \underbrace{\boxed{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cdot \sin(nx)\, dx}}_{\text{III}}$$

$$\text{I} = \int_{-\pi}^{\pi} a_0 \cdot \cos(mx)\, dx = a_0 \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\, dx \overset{m \neq 0}{=}$$

$$= \frac{1}{m} \cdot a_0 \cdot \int_{-\pi}^{\pi} (\sin(mx))'\, dx = \frac{1}{m} \cdot a_0 \cdot [\cancelto{0}{\sin(mx)}]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\text{II} = \pi \cdot \delta_{mn}$$

$$\text{III} = \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\cos(mx) \cdot \sin(nx)}_{\text{περιττή συνάρτηση}}\, dx = 0$$

Σχόλιο: Το $\cos(mx)$ είναι άρτια συνάρτηση. Το $\sin(nx)$ είναι περιττή συνάρτηση. Το γινόμενο άρτια * περιττή είναι περιττή συνάρτηση.

Άρα, για $m \neq 0$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos(mx)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cdot\pi\cdot\delta_{mn} = a_m\cdot\pi$$

, άρα: $a_m = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos(mx)\,dx \quad , \ m \neq 0$

$$\left(\underline{\text{διότι:}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cdot\pi\cdot\delta_{mn} = a_1\cdot\pi\cdot\cancelto{0}{\delta_{m1}} + a_2\cdot\pi\cdot\cancelto{0}{\delta_{m2}} + \ldots + a_{m-1}\cdot\pi\cdot\cancelto{0}{\delta_{m(m-1)}} + a_m\cdot\pi\cdot\underbrace{\delta_{mm}}_{1} + a_{m+1}\cdot\pi\cdot\cancelto{0}{\delta_{m(m+1)}} + \ldots \right)$$

Άρα:

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos(nx)\,dx} \quad , \ n \neq 0$$

Βρήκαμε το $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ και θέλουμε να βρούμε τα a_0 και $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Εύρεση των $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin(mx)\,dx = a_0\cdot\cancelto{0 \text{ (ως περιττή)}}{\int_{-\pi}^{\pi}\sin(mx)\,dx} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cdot\cancelto{0 \text{ (ως γινόμενο άρτιας * περιττής)}}{\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\cdot\sin(mx)\,dx} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin(mx)\cdot\sin(nx)\,dx \implies$$

$$\implies \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin(mx)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\cdot\pi\cdot\delta_{mn} = b_m\cdot\pi \implies$$

$$\implies b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin(mx)\,dx \implies \boxed{b_n = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin(nx)\,dx}$$

Μέχρι τώρα βρήκαμε:

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(nx)\, dx \quad , \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(nx)\, dx \quad , \quad n = 1, 2, \ldots$$

$\alpha_0 =$;

Ολοκληρώνω την ⊛ από $-\pi$ έως π:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \alpha_0\, dx}_{2\pi \cdot \alpha_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cancel{\cos(nx)\, dx}}_{0} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cancel{\sin(nx)\, dx}}_{0}$$

$\left(\underline{\text{διότι:}} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\, dx = \frac{1}{n} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} (\sin(nx))'\, dx = \frac{1}{n} \cdot \underbrace{\left[\cancel{\sin(nx)} \right]_{-\pi}^{\pi}}_{0} \right)$

<u>Άρα</u>: $\boxed{\alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx}$

Έστω <u>f - 2L περιοδική</u>, δηλαδή $f(x+2L) = f(x)$, $\forall x$

Ορίζουμε $g(x) = f(\frac{\pi}{L}\cdot x)$. Η g είναι 2π- περιοδική, διότι:

$$g(x+2\pi) = f\left(\frac{L}{\pi}\cdot(x+2\pi)\right) = f\left(\frac{L}{\pi}\cdot x + 2\cancel{\pi}\cdot\frac{L}{\cancel{\pi}}\right) =$$

$$= f\left(\frac{L}{\pi}\cdot x + 2L\right) = f\left(\frac{L}{\pi}\cdot x\right) = g(x)$$

Αφού η g είναι 2π- περιοδική, μπορεί να γραφτεί σαν σειρά Fourier:

$$g(\tilde{x}) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cdot\cos(n\tilde{x}) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\cdot\sin(n\tilde{x})$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} g(\tilde{x})\,d\tilde{x}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} g(\tilde{x})\cdot\cos(n\tilde{x})\,d\tilde{x}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} g(\tilde{x})\cdot\sin(n\tilde{x})\,d\tilde{x}$$

$$g(\tilde{x}) = f\left(\frac{L}{\pi}\cdot\tilde{x}\right)$$

Αλλάζουμε μεταβλητή από $\tilde{x}$ σε x ως $\tilde{x} = \frac{\pi}{L}\cdot x$, άρα:

$$f\left(\frac{\cancel{L}}{\cancel{\pi}}\cdot\frac{\cancel{\pi}}{\cancel{L}}\cdot x\right) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{L}\cdot x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{L}\cdot x\right)$$

Άρα, $\left\{1, \sin\left(\frac{\pi}{L}\cdot x\right), \cos\left(\frac{\pi}{L}\cdot x\right), \sin\left(\frac{2\pi}{L}\cdot x\right), \cos\left(\frac{2\pi}{L}\cdot x\right), \dots\right\}$

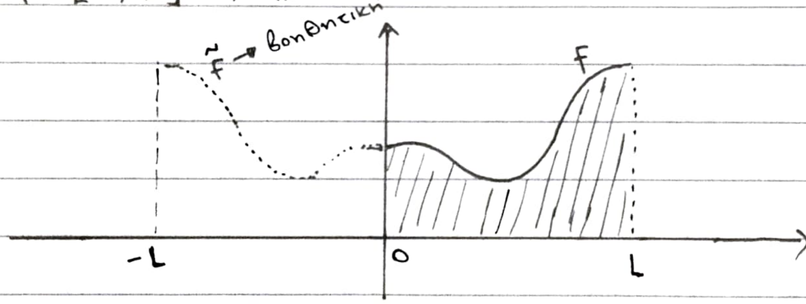
$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} g(\tilde{x})\,d\tilde{x} \;\; \overset{\tilde{x}=\frac{\pi}{L}\cdot x \;\Rightarrow\; x=\frac{L}{\pi}\cdot\tilde{x}}{\underset{d\tilde{x}=\frac{\pi}{L}dx}{=\!=\!=}} \;\; \frac{1}{2\cancel{\pi}}\cdot\frac{\cancel{\pi}}{L}\cdot\int_{-L}^{L} f\left(\frac{\cancel{L}}{\cancel{\pi}}\cdot\frac{\cancel{\pi}}{\cancel{L}}\cdot x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2L}\cdot\int_{-L}^{L} f(x)\,dx$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} g(\tilde{x})\cdot\cos(n\tilde{x})\,d\tilde{x} = \underbrace{\frac{1}{\cancel{\pi}}\cdot\frac{\cancel{\pi}}{L}}_{\frac{1}{L}}\cdot\int_{-L}^{L} f(x)\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{L}\cdot x\right)dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} g(\tilde{x})\cdot\sin(n\tilde{x})\,d\tilde{x} = \frac{1}{L}\cdot\int_{-L}^{L} f(x)\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{L}\cdot x\right)dx$$

Έστω $f:[0,L]\rightarrow\mathbb{R}$



Η $\tilde{f}$ 2L - περιοδική $\quad \tilde{f}:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$

$\tilde{f}\big|_{[0,L]} = f$ (δηλαδή η $\tilde{f}$ ταυτίζεται με την f στο $[0,L]$).

✓ <u>Η $\tilde{f}$ ονομάζεται άρτια επέκταση της f στο $\mathbb{R}$.</u>

$$\tilde{f}(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{L}\cdot x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{L}\cdot x\right)$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{2L}\cdot\int_{-L}^{L} \tilde{f}(x)\,dx = 2\cdot\frac{1}{2L}\cdot\int_{0}^{L}\tilde{f}(x)\,dx = \frac{1}{L}\cdot\int_0^L f(x)\,dx$$

$$\alpha_n = \frac{1}{L}\cdot\int_{-L}^{L} \underbrace{\tilde{f}(x)}_{\text{άρτια}}\cdot\underbrace{\cos\left(\frac{n\pi}{L}\cdot x\right)}_{\text{άρτια}}dx = \frac{2}{L}\cdot\int_0^L f(x)\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{L}\cdot x\right)dx$$

$$b_n = \frac{1}{L}\cdot\int_{-L}^{L} \underbrace{\tilde{f}(x)}_{\text{άρτια}}\cdot\underbrace{\sin\left(\frac{n\pi}{L}\cdot x\right)}_{\text{περιττή}}dx = 0$$

Άρα έχουμε ότι $\forall \; x \in \mathbb{R}$:

$$\tilde{f}(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{L}\cdot x\right) \qquad (\sim)$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{L}\cdot\int_0^L f(x)\,dx$$

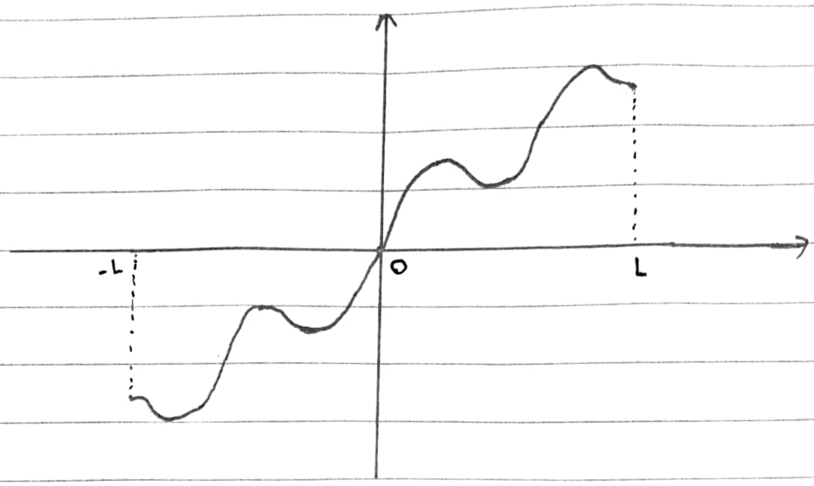
$$\alpha_n = \frac{2}{L}\cdot\int_0^L f(x)\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{L}\cdot x\right)dx$$

Για $x \in [0, L]$ η $(\sim)$ γράφεται ως :

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{L}\cdot x\right)\\ \alpha_0 &= \frac{1}{L}\cdot\int_0^L f(x)\,dx\\ \alpha_n &= \frac{2}{L}\cdot\int_0^L f(x)\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{L}\cdot x\right)dx \end{aligned}}$$

→ (Παρατηρώ ότι έχει εξαφανιστεί η βοηθητική συνάρτηση $\tilde{f}(x)$)

Έστω $f: [0, L] \to \mathbb{R}$ τ.ω. $f(0) = 0$ (αν $f(0) = A \neq 0$, θα μπορούσαμε να ορίσουμε την $g(x) = f(x) - A$).



Έστω η βοηθητική :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad x \in [0, L] \\ -f(-x) & , \quad x \in [-L, 0) \\ f(x+2L) & , \quad \text{αλλού} \end{cases}$$

$$\tilde{f}(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{L} \cdot x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L} \cdot x\right)$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{2L} \cdot \int_{-L}^{L} \underbrace{\tilde{f}(x)}_{\text{περιττή}} \, dx = 0$$

$$\alpha_n = \frac{1}{L} \cdot \int_{-L}^{L} \underbrace{\tilde{f}(x)}_{\text{περιττή}} \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{n\pi}{L} \cdot x\right)}_{\text{άρτια}} \, dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{L} \cdot \int_{-L}^{L} \underbrace{\tilde{f}(x)}_{\text{περιττή} \, *} \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{n\pi}{L} \cdot x\right)}_{\text{περιττή}} \, dx \; = \text{άρτια} \; = \frac{2}{L} \cdot \int_{0}^{L} f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L} \cdot x\right) dx$$

Αν $f(0) = 0$: $\quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L} \cdot x\right)$

$$b_n = \frac{2}{L} \cdot \int_0^L f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L} \cdot x\right) dx$$

Αν $f(0) = A \neq 0$: $\quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L} \cdot x\right)$

$$b_n = \frac{2}{L} \cdot \int_0^L (f(x) - A) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L} \cdot x\right) dx =$$

$$= \frac{2}{L} \cdot \int_0^L f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L} \cdot x\right) dx - \frac{2A}{L} \cdot \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L} \cdot x\right) dx$$

Έχουμε: $\quad \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L} \cdot x\right) dx = \frac{L}{n\pi} \cdot \int_0^L \left(\cos\left(\frac{n\pi}{L} \cdot x\right)\right)' dx =$

$$= \frac{L}{n\pi} \cdot \left(\cos(n\pi) - \overset{1}{\cancel{\cos(0)}}\right) = \begin{cases} -\frac{2L}{n\pi} & , \text{ αν } n \text{ περιττός} \\ 0 & , \text{ αν } n \text{ άρτιος} \end{cases}$$

Άρα: $\quad b_n = \frac{2}{L} \cdot \int_0^L f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L} \cdot x\right) dx + \begin{cases} \frac{4A}{n\pi} & , \text{ αν } n \text{ περιττός} \\ 0 & , \text{ αν } n \text{ άρτιος} \end{cases}$