

ΣIII ($\Delta < 0$)

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \lambda \pm i\mu$$

$$(\text{Θέτω } \lambda = -\frac{b}{2a} \text{ και } \mu = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a})$$

$$\left(\text{Υπενθύμιση: } e^{it} = \cos(t) + i\sin(t) \rightarrow \text{Ταυτότητα του Euler} \right)$$

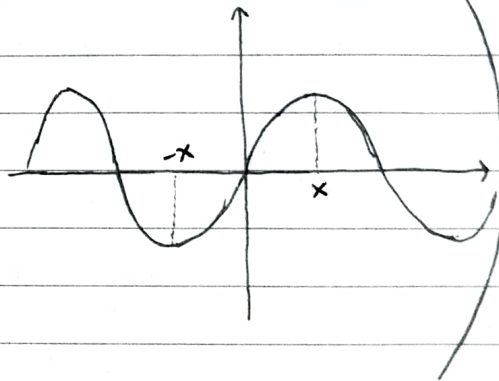
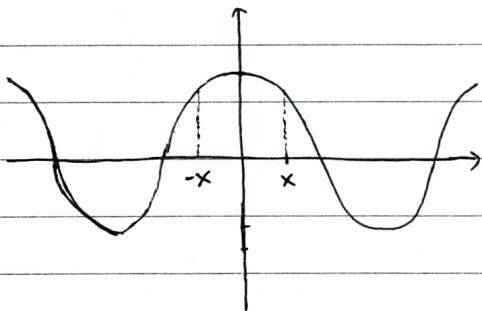
$$e^{rt} = e^{(\lambda \pm i\mu)t} = e^{\lambda t} \cdot e^{\pm i\mu t} \begin{cases} + \rightarrow e^{\lambda t} \cdot (\cos(\mu t) + i\sin(\mu t)) \\ - \rightarrow e^{\lambda t} \cdot (\cos(-\mu t) + i\sin(-\mu t)) = \\ = e^{\lambda t} \cdot (\cos(\mu t) - i\sin(\mu t)) \end{cases}$$

Διότι ισχύουν:

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

και

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$



Συναρτήσεις βάσης:

$$v_1(t) = e^{\lambda t} \cdot (\cos(\mu t) + i\sin(\mu t))$$

$$v_2(t) = e^{\lambda t} \cdot (\cos(\mu t) - i\sin(\mu t))$$

Θέλουμε να διώσουμε το i . Θα ορίσουμε τις καινούργιες βάσεις, χωρίς το i :

$$\begin{aligned} \bullet \quad u_1(t) &= \frac{1}{2} \cdot (V_1(t) + V_2(t)) = \frac{1}{2} \cdot e^{\lambda t} \cdot (\cancel{2} \cdot \cos(\mu t) + i \cdot 0) = \\ &= e^{\lambda t} \cdot \cos(\mu t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad u_2(t) &= \frac{1}{2i} \cdot (V_1(t) - V_2(t)) = \frac{1}{2i} \cdot e^{\lambda t} \cdot (2 \cdot i \cdot \sin(\mu t)) = \\ &= e^{\lambda t} \cdot \sin(\mu t) \end{aligned}$$

, άρα η γενική λύση της εξίσωσης γράφεται ως :

Γενική λύση: $y(t) = c_1 \cdot e^{\lambda t} \cdot \cos(\mu t) + c_2 \cdot e^{\lambda t} \cdot \sin(\mu t)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Θεωρούμε το Π.Α.Τ. :

$$\begin{cases} a \cdot y''(t) + b \cdot y'(t) + c \cdot y(t) = 0 & , t > t_0 \\ y(t_0) = y_0 & , y_0 \in \mathbb{R} \\ y'(t_0) = y'_0 & , y'_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Θέλουμε αυτό το Π.Α.Τ. να έχει μοναδική λύση.

$$\begin{aligned} y'(t) &= c_1 \cdot \lambda \cdot e^{\lambda t} \cdot \cos(\mu t) - \mu \cdot c_1 \cdot e^{\lambda t} \cdot \sin(\mu t) + c_2 \cdot \lambda \cdot e^{\lambda t} \cdot \sin(\mu t) + \\ &+ \mu \cdot c_2 \cdot e^{\lambda t} \cdot \cos(\mu t) \end{aligned}$$

Εφαρμόζω για $t = t_0$ (από τις αρχικές συνθήκες) :

$$y(t_0) = c_1 \cdot e^{\lambda t_0} \cdot \cos(\mu t_0) + c_2 \cdot e^{\lambda t_0} \cdot \sin(\mu t_0) = y_0 \in \mathbb{R}$$

$$y'(t_0) = c_1 \cdot e^{\lambda t_0} \cdot (\lambda \cdot \cos(\mu t_0) - \mu \cdot \sin(\mu t_0)) + c_2 \cdot e^{\lambda t_0} \cdot (\lambda \cdot \sin(\mu t_0) + \mu \cdot \cos(\mu t_0)) = y'_0 \in \mathbb{R}$$

(ΣΧΟΛΙΟ: Οι μόνοι άγνωστοι στις δύο παραπάνω εξισώσεις είναι τα c_1, c_2 . Άρα, μπορώ να τις γράψω στη μορφή δινόμενο πινάκων.)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} e^{\lambda t_0} \cdot \cos(\mu t_0) & e^{\lambda t_0} \cdot \sin(\mu t_0) \\ e^{\lambda t_0} \cdot (\lambda \cdot \cos(\mu t_0) - \mu \cdot \sin(\mu t_0)) & e^{\lambda t_0} \cdot (\lambda \cdot \sin(\mu t_0) + \mu \cdot \cos(\mu t_0)) \end{pmatrix}}_A \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y'_0 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \dots = \mu \cdot e^{\lambda t_0} \neq 0$$

, άρα η εξίσωση έχει μοναδική λύση.

Παράδειγμα

Να λυθεί το Π.Α.Τ.:

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 5y = 0 & , t > 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

Χαρακτηριστική εξίσωση: $r^2 + 2r + 5 = 0$

$$\Delta = 4 - 4 \cdot 5 = -16 < 0$$

$$r_{1,2} = \frac{-2 \pm i \cdot \sqrt{1-16}}{2} = -1 \pm 2i$$

(είναι της μορφής $r_{1,2} = \lambda \pm i\mu$).

Γενική λύση: $y(t) = c_1 \cdot e^{-t} \cdot \cos(2t) + c_2 \cdot e^{-t} \cdot \sin(2t)$

Θα βρούμε τα c_1 και c_2 . Έχουμε:

$$y(0) = c_1 \cdot e^0 \cdot \overset{1}{\cos(0)} + c_2 \cdot e^0 \cdot \overset{0}{\sin(0)} = \boxed{c_1 = 0}$$

, άρα: $y(t) = c_2 \cdot e^{-t} \cdot \sin(2t)$

$$y'(t) = -c_2 \cdot e^{-t} \cdot \sin(2t) + 2c_2 \cdot e^{-t} \cdot \cos(2t)$$

$$y'(0) = -c_2 \cdot e^0 \cdot \overset{0}{\sin(0)} + 2 \cdot c_2 \cdot e^0 \cdot \overset{1}{\cos(0)} = 2c_2 = 1 \Rightarrow \boxed{c_2 = \frac{1}{2}}$$

Η μοναδική λύση του Π.Α.Τ. είναι:

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{2} \cdot e^{-t} \cdot \sin(2t)}$$

Διαφορικές Εξισώσεις 2^{ης} Τάξης - Μη Ομογενείς - με Σταθερούς Συντελεστές

Γενική μορφή:

$$\alpha \cdot y''(t) + b \cdot y'(t) + c \cdot y(t) = q(t)$$

(*)

, $\alpha, b, c \in \mathbb{R}$ και $q(t)$ μία δοσμένη συνάρτηση.

Έστω $y_1(t)$, $y_2(t)$ τυχαίες λύσεις της (*)

$$\alpha \cdot y_1'' + b \cdot y_1' + c \cdot y_1 = q \quad (**)$$

$$\alpha \cdot y_2'' + b \cdot y_2' + c \cdot y_2 = q \quad (***)$$

Αφαιρούμε κατά μέλη τις (**) και (***) :

$$\alpha \cdot (y_1'' - y_2'') + b \cdot (y_1' - y_2') + c \cdot (y_1 - y_2) = 0 \quad (\Rightarrow)$$

$$\Rightarrow \alpha \cdot (y_1 - y_2)'' + b \cdot (y_1 - y_2)' + c \cdot (y_1 - y_2) = 0 \quad (\approx)$$

Θέτουμε $y_h(t) = y_1(t) - y_2(t)$, τότε η (\approx) γράφεται ως:

$$\alpha \cdot y_h'' + b \cdot y_h' + c \cdot y_h = 0$$

→ (Έχει γνωστή οικογένεια λύσεων (ξέρω να τη λύνω).)

→ (Η y_h είναι η λύση της ομογενούς)

$$y_1(t) - y_2(t) = y_h(t) \Rightarrow y_1(t) = y_h(t) + y_2(t) \quad (\approx)$$

Θέτουμε στην (\approx) $y(t) = y_1(t)$ να είναι η γενική λύση της

Εξίσωσης και $y_p(t) = y_2(t)$ να είναι μια ειδική λύση της εξίσωσης:

Γενική λύση:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

λύση της ομογενούς
εξίσωσης

Ειδική λύση του
αρχικού προβλήματος

Για την $y_p(t)$ διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

Περίπτωση 1

$q(t)$	$y_p(t)$
P_n πολυώνυμο n βαθμού	$t^S \cdot (A_n t^n + A_{n-1} t^{n-1} + \dots + A_1 t + A_0)$, $S = 0, 1, 2$

π.χ.: Αν $q(t) = t^2 - t$, τότε:

$$y_p(t) = A_2 t^2 + A_1 t + A_0$$

(για $S=0$)

$$\hat{=}$$
$$y_p(t) = t \cdot (A_2 t^2 + A_1 t + A_0) = A_2 t^3 + A_1 t^2 + A_0 t$$

(για $S=1$)

$$\hat{=}$$
$$y_p(t) = t^2 \cdot (A_2 t^2 + A_1 t + A_0) = A_2 t^4 + A_1 t^3 + A_0 t^2$$

(για $S=2$)

ΣΧΟΛΙΟ:

Δοκιμάζω με τη σειρά (για $S=0, 1$ και 2) πιο "θα δουλέψει" με σκοπό να προσδιορίσω τα A_2, A_1, A_0 , έτσι ώστε να βρω την ειδική λύση $y_p(t)$.

Περίπτωση 2

$q(t)$	$y_p(t)$
$P_n(t) \cdot e^{kt}$	$t^{s'} \cdot (A_n t^n + A_{n-1} t^{n-1} + \dots + A_1 t + A_0) \cdot e^{kt}$, $s' = 0, 1, 2$

Περίπτωση 3

$q(t)$	$y_p(t)$
$P_n(t) \cdot \begin{cases} \sin(kt) \\ \text{ή} \\ \cos(kt) \end{cases}$	$t^{s'} \cdot (A_n t^n + A_{n-1} t^{n-1} + \dots + A_1 t + A_0) \cdot \cos(kt) +$ $+ t^{s'} \cdot (B_n t^n + B_{n-1} t^{n-1} + \dots + B_1 t + B_0) \cdot \sin(kt)$, $s' = 0, 1, 2$

Παράδειγμα

Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης:

$$y'' - 3y' - 4y = 2e^{-t}$$

ΛΥΣΗ

Η ομογενής εξίσωση : $y_h'' - 3y_h' - 4y_h = 0$

$$\Delta = 9 - 4 \cdot (-4) = 25$$

$$r_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \begin{matrix} \textcircled{4} \\ \textcircled{-1} \end{matrix}$$

Η λύση της ομογενούς:

$$y_h(t) = c_1 \cdot e^{4t} + c_2 \cdot e^{-t}$$

→ Το πρώτο μέρος της λύσης

ΣΧΟΛΙΟ: Είμαστε στην περίπτωση 2, διότι έχουμε $2e^{-t}$ ($P_h(t) \cdot e^{st}$). Άρα, για να βρούμε και το δεύτερο μέρος της λύσης, δηλαδή την ειδική λύση $y_p(t)$, θα ακολουθήσουμε την περίπτωση 2 και θα δοκιμάσουμε για $s=0, 1$ και 3 .

$$P_h(t) \cdot e^{-t} \begin{cases} s=0 \rightarrow y_p(t) = A_0 \cdot e^{-t} & (\text{Δοκιμή 1}) \\ s=1 \rightarrow y_p(t) = A_0 \cdot t \cdot e^{-t} & (\text{Δοκιμή 2}) \\ s=2 \rightarrow y_p(t) = A_0 \cdot t^2 \cdot e^{-t} & (\text{Δοκιμή 3}) \end{cases}$$

Δοκιμή 1: $y_p(t) = A_0 \cdot e^{-t}$, $y_p'(t) = -A_0 \cdot e^{-t}$, $y_p''(t) = A_0 \cdot e^{-t}$

Εφαρμόσουμε στην εξίσωση:

$$\underbrace{A_0 \cdot e^{-t}}_{y_p''} - 3 \cdot \underbrace{(-A_0 \cdot e^{-t})}_{y_p'} - 4 \cdot \underbrace{A_0 \cdot e^{-t}}_{y_p} = 2e^{-t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_0 \cdot e^{-t} + 3A_0 e^{-t} - 4A_0 e^{-t} = 2e^{-t} \Rightarrow 0 = 2e^{-t} \quad \underline{\text{αδύνατο}}$$

(άρα δοκιμή 1 X).

Δοκιμή 2: $y_p(t) = A_0 \cdot t \cdot e^{-t}$
 $y_p'(t) = A_0 \cdot e^{-t} - A_0 \cdot t \cdot e^{-t}$
 $y_p''(t) = -A_0 \cdot e^{-t} - A_0 \cdot e^{-t} + A_0 \cdot t \cdot e^{-t} = -2A_0 e^{-t} + A_0 t \cdot e^{-t}$

Εφαρμόσουμε στην εξίσωση:

$$-2A_0 \cdot e^{-t} + A_0 t e^{-t} - 3 \cdot (A_0 \cdot e^{-t} - A_0 t e^{-t}) - 4A_0 t \cdot e^{-t} = 2e^{-t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{-2A_0 e^{-t}} + \underline{A_0 t \cdot e^{-t}} - \underline{3A_0 e^{-t}} + \underline{3A_0 t \cdot e^{-t}} - \underline{4A_0 t \cdot e^{-t}} = 2e^{-t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5A_0 e^{-t} = 2e^{-t} \Rightarrow \boxed{A_0 = -\frac{2}{5}}, \text{ άρα: } y_p(t) = -\frac{2}{5} \cdot t \cdot e^{-t}$$

Το δεύτερο
μέρος της
λύσης

(άρα δοκιμή 2 ✓ , δεν χρειάζεται να εξετάσω τη δοκιμή 3)

Γενική λύση: $y(t) = y_h(t) + y_p(t) \Rightarrow$

$$\Rightarrow y(t) = c_1 \cdot e^{4t} + c_2 \cdot e^{-t} - \frac{2}{5} \cdot t \cdot e^{-t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = c_1 \cdot e^{4t} + \left(c_2 - \frac{2}{5} \cdot t \right) \cdot e^{-t}}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$y'(t) = 4 \cdot c_1 \cdot e^{4t} - \frac{2}{5} \cdot e^{-t} - \left(c_2 - \frac{2}{5} \cdot t \right) \cdot e^{-t}$$

$$\text{Έχουμε: } \begin{cases} y(0) = c_1 + c_2 = 1 \\ y'(0) = 4c_1 - \frac{2}{5} - c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + \cancel{c_2} = 1 \\ 4c_1 - \cancel{c_2} = \frac{2}{5} \end{cases} \quad \oplus$$

$$5c_1 = 1 + \frac{2}{5} \Rightarrow \boxed{c_1 = \frac{7}{25}}$$

$$c_2 = 1 - c_1 \Rightarrow c_2 = 1 - \frac{7}{25} \Rightarrow \boxed{c_2 = \frac{18}{25}}$$

Άρα, η μοναδική λύση του προβλήματος:

$$\boxed{y(t) = \frac{7}{25} \cdot e^{4t} + \left(\frac{18}{25} - \frac{2}{5} \cdot t \right) \cdot e^{-t}}$$