27-10-2025 , μάθημα 4

Πρόβλημα Αρχικών Τιμών (Π.Α.Τ.) (Για $\Delta>0$, $\Delta=0$ και $\Delta<0$)

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha\cdot y'' + b\cdot y' + c\cdot y = 0 \\ y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R} \\ y'(t_0) = y_0' \in \mathbb{R} \end{array}\right.$$

} έχουμε 2 αρχικές συνθήκες

π.χ. :
$$\left\{\begin{array}{l} y = c_1\cdot x + c_2 \\ y' = c_1 \\ y'' = 0 \end{array}\right.$$

ΣΙ ($\Delta>0$)

Γενική λύση : $\boxed{y(t) = c_1\cdot e^{r_1 t} + c_2\cdot e^{r_2 t}}$

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \quad , \quad r_1 \neq r_2$$

Για $t=t_0$: $y(t_0) = \boxed{c_1\cdot e^{r_1 t_0} + c_2\cdot e^{r_2 t_0} = y_0}$

μόνο δύο άγνωστοι, τα c_1 και c_2.

Παραγωγίζουμε την $y(t)$:

$$y'(t) = c_1\cdot r_1\cdot e^{r_1 t} + c_2\cdot r_2\cdot e^{r_2 t}$$

Για $t=t_0$: $y'(t_0) = \boxed{c_1\cdot r_1\cdot e^{r_1 t_0} + c_2\cdot r_2\cdot e^{r_2 t_0} = y_0'}$

μόνο δύο άγνωστοι, τα c_1 και c_2.

Έχουμε ένα γραμμικό σύστημα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους.
Θα το γράψουμε στη μορφή γινόμενο - πινάκων:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} e^{r_1 t_0} & e^{r_2 t_0} \\ r_1 \cdot e^{r_1 t_0} & r_2 \cdot e^{r_2 t_0} \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_0' \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = r_2 \cdot e^{(r_1+r_2)t_0} - r_1 \cdot e^{(r_1+r_2)t_0} = \underbrace{(r_2 - r_1)}_{\neq 0} \cdot \underbrace{e^{(r_1+r_2)\cdot t_0}}_{>0} \neq 0$$

Εφόσον $\det(A) \neq 0$, το σύστημα έχει μοναδική λύση.

(Υπενθύμιση: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$)

Το $B = \{ e^{r_1 t}, e^{r_2 t} \}$ αποτελεί μία βάση.

Παράδειγμα Να λυθεί η Δ.Ε.:

$$\begin{cases} y'' + 5y' + 6y = 0 & , t > 0 \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

Ψάχνουμε λύσεις της μορφής $y(t) = e^{rt}$

Προκύπτουν τα r από την χαρακτηριστική εξίσωση:

$$r^2 + 5r + 6 = 0$$

$\Delta = 5^2 - 4 \cdot 6 = 25 - 24 = 1 > 0$, $r_{1,2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{1}}{2} = \begin{cases} r_1 = -2 \\ r_2 = -3 \end{cases}$

Η γενική λύση της εξίσωσης είναι:

$$y(t) = c_1 \cdot e^{-2t} + c_2 \cdot e^{-3t}$$

$$y'(t) = -2c_1 \cdot e^{-2t} - 3c_2 \cdot e^{-3t}$$

Εφαρμόζουμε τις αρχικές συνθήκες:

$$y(0) = 1 \Leftrightarrow c_1 + c_2 = 1 \Leftrightarrow c_1 = 1 - c_2$$

$$y'(0) = 1 \Leftrightarrow -2c_1 - 3c_2 = 1 \Leftrightarrow -2 \cdot (1 - c_2) - 3c_2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 + 2c_2 - 3c_2 = 1 \Leftrightarrow -c_2 = 3 \Leftrightarrow c_2 = -3$$

, άρα $c_1 = 1 - (-3) \Leftrightarrow c_1 = 4$

Άρα η μοναδική λύση του ΠΑΤ είναι:

$$\boxed{y(t) = 4 \cdot e^{-2t} - 3 \cdot e^{-3t}}$$

ΣΙΙ $(\underline{\Delta = 0})$

$$\begin{cases} \alpha y'' + by' + c \cdot y = 0 & , t > t_0 \quad , \quad \alpha, b, c \text{ τ.ω. } \Delta = 0 \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_0' \end{cases}$$

$y(t) = e^{rt}$. Η διπλή ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης $\alpha r^2 + br + c = 0$, είναι: $r_* = \dfrac{-b}{2\alpha}$

Υποθέτουμε ότι η γενική λύση είναι η $y(t) = c \cdot e^{r_* t}$

Ορίζουμε την $y_*(t) = e^{r_* t}$, $y_*' = r_* \cdot e^{r_* t} = r_* \cdot y_*$

Ψάχνω μια δεύτερη λύση της μορφής: $\tilde{y}(t) = u(t) \cdot y_*(t)$

$$\tilde{y}'(t) = (u(t) \cdot y_*(t))' = u'(t) \cdot y_*(t) + u(t) \cdot y_*'(t)$$
$$\tilde{y}''(t) = (u'(t) \cdot y_*(t) + u(t) \cdot y_*'(t))' =$$
$$= u''(t) \cdot y_*(t) + u'(t) \cdot y_*'(t) + u'(t) \cdot y_*'(t) + u(t) \cdot y_*''(t)$$

Εφαρμόζουμε στην αρχική εξίσωση $\alpha y'' + by' + c \cdot y = 0$:

$$\alpha \cdot (u'' \cdot y_* + 2u' \cdot y_*' + u \cdot y_*'') + b \cdot (u' \cdot y_* + u \cdot y_*') + c \cdot u \cdot y_*' = 0 \iff$$

$$\xLeftrightarrow[y_*'' = r_*^2 \cdot y_*]{y_*' = r_* \cdot y_*} \alpha \cdot (u'' y_* + 2 r_* \cdot u' \cdot y_* + r_*^2 \cdot u \cdot y_*) + b \cdot (u' y_* + r_* \cdot u \cdot y_*) + c \cdot u \cdot y_* = 0 \iff$$

$$\iff \alpha \cdot (u'' + 2 r_* u' + r_*^2 \cdot u) + b \cdot (u' + r_* \cdot u) + c \cdot u = 0 \iff$$

$$\iff \alpha u'' + 2\alpha r_* \cdot u' + \alpha r_*^2 u + b \cdot u' + b r_* \cdot u + c \cdot u = 0 \iff$$

$$\iff \alpha \cdot u'' + \underbrace{(2\alpha \cdot r_* + b)}_{=0} \cdot u' + \underbrace{(\alpha \cdot r_*^2 + b \cdot r_* + c)}_{=0} \cdot u = 0 \iff$$

$$\left(2ar_* + b = 0 \Leftrightarrow 2\alpha \cdot \underbrace{\left(-\frac{b}{2\alpha}\right)}_{r_*} + b = 0 \quad \text{και} \quad \alpha r_*^2 + br_* + c = 0, \ \text{διότι} \right.$$

$$\left. \text{το } r_* \text{ είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης} \right)$$

$$\Leftrightarrow \alpha \cdot u'' = 0 \underset{\text{ως 2ης τάξης}}{\overset{\alpha \neq 0}{\Longleftrightarrow}} u'' = 0 \Longrightarrow u' = \xi \in \mathbb{R} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow u(t) = \xi \cdot t + n \quad , \ \xi, n \in \mathbb{R}$$

Επιλέγουμε $\xi = 1$, $n = 0$, άρα: $u(t) = t$

<u>Γενική λύση</u>: $\boxed{y(t) = c_1 \cdot e^{r_* t} + c_2 \cdot t \cdot e^{r_* t}}$

Για $t = t_0$: $y(t_0) = c_1 \cdot e^{r_* t_0} + c_2 \cdot t_0 \cdot e^{r_* t_0} = y_0$, $y_0 \in \mathbb{R}$

$$y'(t) = c_1 \cdot r_* \cdot e^{r_* t} + c_2 \cdot e^{r_* t} + c_2 \cdot t \cdot r_* \cdot e^{r_* t}$$

Για $t = t_0$: $y'(t_0) = c_1 \cdot r_* \cdot e^{r_* t_0} + c_2 \cdot (1 + r_* t_0) \cdot e^{r_* t_0} = y_0'$, $y_0' \in \mathbb{R}$

Σε μορφή πίνακα:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} e^{r_* t_0} & t_0 \cdot e^{r_* t_0} \\ r_* \cdot e^{r_* t_0} & (1 + r_* t_0) \cdot e^{r_* t_0} \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_0' \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = (1 + r_* t_0) \cdot e^{2r_* t_0} - r_* t_0 \cdot e^{2r_* t_0} = e^{2r_* t_0} > 0$$

, άρα για κάθε y_0, y_0' η εξίσωση έχει μοναδική λύση.

Παράδειγμα Να λυθεί το Π.Α.Τ. :

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι: $r^2 - 2r + 1 = 0$

$\Delta = 4 - 4 = 0$, $r_* = -\frac{-2}{2} = 1$

Γενική λύση: $y(t) = c_1 \cdot e^t + c_2 \cdot t \cdot e^t$

$$y'(t) = c_1 \cdot e^t + c_2 \cdot e^t + c_2 \cdot t \cdot e^t$$

Ισχύουν: $y(0) = 1 \Leftrightarrow c_1 = 1$

$y'(0) = 0 \Leftrightarrow 1 + c_2 = 0 \Leftrightarrow c_2 = -1$

Άρα, η γενική λύση γίνεται: $\boxed{y(t) = e^t - t \cdot e^t}$

Εισαγωγή στους μιγαδικούς αριθμούς (εισαγωγή της ΣΙΙΙ ($\Delta<0$))

$\mathbb{R}$.

Φανταστική μονάδα : i τ.ω. $i^2=-1$ ή $i=\sqrt{-1}$

→ ορισμός της i

Ορίζω $\mathbb{C}=\{z=\alpha+i\cdot\beta : \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$, $\mathbb{R}\subseteq\mathbb{C}$

π.χ.: $z=1+2i$, $\alpha=1$ και $\beta=2$

Ορίζω $Re(z)=\alpha$ να είναι το πραγματικό μέρος του $z=\alpha+i\beta$ και $Im(z)=\beta$ το φανταστικό μέρος του $z=\alpha+i\beta$

Ορίζω $\bar{z}=\alpha-i\beta$ συζυγής του $z=\alpha+i\beta$

Ισχύει : $\bar{z}+z=2Re(z)$ και $z-\bar{z}=2Im(z)\cdot i$

Έστω $\alpha z^2+bz+c=0$ με $\Delta=b^2-4\alpha c<0$.

Τότε : $z_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\dfrac{-b\pm\sqrt{-1|\Delta|}}{2\alpha}=\dfrac{-b\pm\sqrt{-1}\cdot\sqrt{|\Delta|}}{2\alpha}$

(διότι ισχύει $\Delta=-1\cdot|\Delta|$, π.χ. $-5=-1\cdot|5|$)

Αφού ορίσαμε $i=\sqrt{-1}$, έχουμε:

$$z_{1,2}=\frac{-b\pm i\sqrt{|\Delta|}}{2\alpha}=-\frac{b}{2\alpha}\pm i\cdot\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2\alpha}$$

Έχουμε 2 συζυγής μιγαδικές ρίζες, όπου:

$$z_1 = -\frac{b}{2\alpha} + i\cdot\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2\alpha} \quad \text{και} \quad z_2 = \bar{z}_1$$

Ισχύουν: $Re(z_1) = -\frac{b}{2\alpha}$ και $Im(z_1) = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2\alpha}$

Μέχρι στιγμής είδαμε λύσεις της μορφής:

$$e^{rt} \begin{cases} \xrightarrow{\Delta>0} e^{r_1 t},\ e^{r_2 t} \\ \xrightarrow{\Delta=0} e^{r_* t},\ t\cdot e^{r_* t} \\ \xrightarrow{\Delta<0} e^{(\mu+i\lambda)t},\ e^{(\mu-i\lambda)t} \end{cases}$$

Ταυτότητα του Euler: $\boxed{e^{it} = \cos(t) + i\cdot\sin(t)}$

Απόδειξη: Έστω $y(t) = e^{it}$. $y'(t) = i\cdot e^{it} = i\cdot y(t)$

Θα γράψουμε το Π.Α.Τ.:

$$\begin{cases} y'(t) - i\cdot y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

→ είναι Π.Α.Τ. με μοναδική λύση την $y(t) = e^{it}$

Ορίζουμε: $w(t) = \cos(t) + i\cdot\sin(t)$

$w'(t) = -\sin(t) + i\cdot\cos(t) =$

$$\overset{i^2=-1}{=} i^2\cdot\sin(t) + i\cdot\cos(t) = i\cdot(\cos(t) + i\cdot\sin(t)) = i\cdot w(t)$$

$$\begin{cases} w'(t) = -i\cdot w(t) = 0 \\ w(0) = 1 \end{cases}$$

→ είναι Π.Α.Τ. με μοναδική λύση την $w(t) = \cos(t) + i\cdot\sin(t)$

Τα δύο Π.Α.Τ. είναι ίδια, άρα και οι μοναδικές λύσεις θα είναι ίδιες, άρα $w(t) = y(t)$

Άρα: $e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$

<u>Για $t = \pi$</u> : $e^{i\pi} = \cancelto{1}{\cos(\pi)} + i \cdot \cancelto{0}{\sin(\pi)} \Leftrightarrow e^{i\pi} - 1 = 0$