13-10-2025, μάθημα 2

Πρόβλημα Αρχικών Τιμών (Π.Α.Τ.) - 1ης τάξης, Γραμμικές

$$\begin{cases} y'(t) + p(t)\cdot y(t) = q(t) & , \ t > t_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Τότε το ΠΑΤ έχει μοναδική λύση την:

$$y(t) = e^{-\int p(t)dt} \cdot \left(\int e^{\int p(t)dt} \cdot q(t)\, dt + c \right) \quad , \text{ όπου } c \in \mathbb{R}.$$

Η c προσδιορίζεται μοναδικά από την αρχική συνθήκη:

$$y(t_0) = \underset{\text{γνωστό}}{y_0} = \underbrace{e^{-\int p(t)dt}}_{\text{γνωστό}} \cdot \left(\underbrace{\int e^{\int p(t)dt} \cdot q(t)\, dt}_{\text{γνωστό}} + \underset{\text{άγνωστος}}{c} \right)$$

Παράδειγμα Να λυθεί το ΠΑΤ:

$$\begin{cases} y' + \frac{2}{t}\cdot y = 4t & , \ t > 1 \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

Έχουμε $p(t) = \frac{2}{t}$ και $q(t) = 4t$

Υπολογίζω τα 2 ολοκληρώματα:

- $\int p(t)\,dt = \int \frac{2}{t}\,dt = 2\cdot\ln|t| \overset{t>0}{=\!=} 2\cdot\ln t$

- $\int e^{\int p(t)dt}\cdot q(t)\,dt = \int e^{2\ln t}\cdot 4t\,dt = \int e^{\ln(t^2)}\cdot 4t\,dt =$

$= \int t^2\cdot 4t\,dt = 4\cdot\int t^3\,dt = \cancel{4}\cdot\frac{t^4}{\cancel{4}} = t^4$

Γενική λύση: $y(t) = e^{-2\ln t}\cdot(t^4+c) = e^{\ln\frac{1}{t^2}}\cdot(t^4+c) =$

$= \frac{1}{t^2}\cdot(t^4+c) \Rightarrow \boxed{y(t) = t^2 + \frac{c}{t^2}}$, $c\in\mathbb{R}$

Ισχύει ότι $y(1)=2$, άρα:

$y(1) = 1^2 + \frac{c}{1^2} \Rightarrow 2 = 1 + c \Rightarrow c=1$

, άρα η λύση της εξίσωσης είναι:

$\boxed{y(t) = t^2 + \frac{1}{t^2}}$, $t\geq 1$

Παράδειγμα Να λυθεί το ΠΑΤ:

$$\begin{cases} y' - \frac{1}{2}\cdot y = e^{-t} & , t>0 \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

Έχουμε $p(t) = -\frac{1}{2}$ και $q(t) = e^{-t}$

Υπολογίζουμε τα 2 ολοκληρώματα:

- $\int p(t)\,dt = \int \cos(t)\,dt = \sin(t)$

- $\int e^{\int p(t)dt} \cdot q(t)\,dt = \int e^{\sin(t)} \cdot \cos(t)\,dt = \int \left(e^{\sin(t)}\right)' dt = e^{\sin(t)}$

Γενική λύση: $y(t) = e^{-\sin(t)} \cdot \left(e^{\sin(t)} + c\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = 1 + c \cdot e^{-\sin(t)}}, \quad c \in \mathbb{R}$$

Για να βρούμε το c:

Ισχύει ότι $y(0) = 2 \Rightarrow 1 + c \cdot e^{-\sin(0)} = 2 \Rightarrow 1 + c = 2 \Rightarrow c = 1$

Άρα, η μοναδική λύση είναι:

$$\boxed{y(t) = 1 + e^{-\sin(t)}}$$

Παράδειγμα Να λυθεί το ΠΑΤ:

$$\begin{cases} y' + \frac{1}{t} \cdot y = 5t^2, & t > 0 \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

Έχουμε $p(t) = \frac{1}{t}$ και $q(t) = 5t^2$

Υπολογίζω τα 2 ολοκληρώματα :

- $\int p(t)\,dt = -\frac{1}{2}\int dt = -\frac{1}{2}t$

- $\int e^{\int p(t)dt} \cdot q(t)\,dt = \int e^{-\frac{t}{2}} \cdot e^{-t}\,dt = \int e^{-\frac{3t}{2}}\,dt = -\frac{2}{3} \cdot e^{-\frac{3t}{2}}$

(Υπενθύμιση: $\int e^{\alpha t}\,dt = \frac{1}{\alpha} \cdot e^{\alpha t}$).

Γενική λύση : $y(t) = e^{-\left(-\frac{t}{2}\right)} \cdot \left(-\frac{2}{3} \cdot e^{-\frac{3t}{2}} + c\right)$, $c \in \mathbb{R}$

Ισχύει $y(0) = -1$, άρα :

$y(0) = -\frac{2}{3} + c = -1 \Rightarrow c = -1 + \frac{2}{3} \Rightarrow c = -\frac{1}{3}$

Άρα, η (μοναδική) λύση του προβλήματος είναι:

$y(t) = e^{\frac{t}{2}} \cdot \left(-\frac{2}{3} \cdot e^{-\frac{3t}{2}} - \frac{1}{3}\right) \Rightarrow \boxed{y(t) = -\frac{2}{3} \cdot e^{-t} - \frac{1}{3} \cdot e^{\frac{t}{2}} \quad , \ t > 0}$

Παράδειγμα Να λυθεί το ΠΑΤ:

$$\begin{cases} y'(t) + \cos(t) \cdot y = \cos(t) & , \ t > 0 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

Έχουμε $p(t) = q(t) = \cos(t)$.

- $\int p(t)\,dt = \int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t| \overset{t>0}{=} \ln t$

- $\int e^{\int p(t)dt} \cdot q(t)\,dt = \int e^{\ln t} \cdot 5t^2\,dt = 5 \cdot \int t^3\,dt = \frac{5}{4} \cdot t^4$

Γενική λύση: $y(t) = e^{-\ln t} \cdot \left(\frac{5}{4} \cdot t^4 + c\right) =$

$= \frac{1}{t} \cdot \left(\frac{5}{4} \cdot t^4 + c\right) = \boxed{\frac{5}{4} t^3 + \frac{c}{t}}$, $c \in \mathbb{R}$

Ισχύει, $y(1) = 2 \Rightarrow \frac{5}{4} + c = 2 \Rightarrow c = \frac{3}{4}$

Άρα, $\boxed{y(t) = \frac{5}{4} \cdot t^3 + \frac{3}{4} \cdot t}$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω $p(t)$, $q(t)$ συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα (α, b) και $t_0 \in (\alpha, b)$. Τότε $\exists$ μοναδική λύση $y(t)$, η οποία ικανοποιεί το Π.Α.Τ. :

$$\begin{cases} y'(t) + p(t) \cdot y(t) = q(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Διαχωρίσιμες Εξισώσεις

μορφή: $\boxed{M(t) + N(y)\cdot y'(t) = 0}$

π.χ: $t + y\cdot y' = 0$ ($1^{ης}$ τάξης, μη γραμμική)

$t^2\cdot \sin(t) + y^2\cdot y' = 0$ ($1^{ης}$ τάξης, μη γραμμική)

Κανόνας της Αλυσίδας

$$\frac{d(f(y(t)))}{dt} = (f(y(t)))' = \frac{df(y)}{dy}\cdot\frac{dy(t)}{dt}$$

Παράδειγμα Έστω $f(y) = y^2$ και $y(t) = e^t$

$$\frac{d(f(y(t)))}{dt} = ;$$

ΛΥΣΗ

$$\frac{df(y)}{dy} = 2y \quad \text{και} \quad \frac{dy(t)}{dt} = e^t$$

, άρα από τον κανόνα της αλυσίδας, έχουμε:

$$\frac{d(f(y(t)))}{dt} = \frac{df(y)}{dy}\cdot\frac{dy(t)}{dt} = 2y\cdot e^t \overset{y=e^t}{=\!=} 2\cdot e^t\cdot e^t = \boxed{2e^{2t}}$$

Για επαλήθευση:

Έχουμε $\dfrac{d(F(y(t)))}{dt} = \dfrac{d((F\circ y)(t))}{dt}$, άρα:

$(f\circ y)(t) = (e^t)^2 = e^{2t}$

$\dfrac{d((f\circ y)(t))}{dt} = (e^{2t})' = (2t)' \cdot e^{2t} = \underline{\underline{2\cdot e^{2t}}}$

Η διαχωρίσιμες εξισώσεις είναι της μορφής: $\boxed{M(t) + N(y)\cdot y'(t) = 0}$ ⊛

Έστω ότι $\exists$ συνάρτηση $H_1(t)$, τ.ω.:

$\boxed{H_1'(t) = M(t)}$ (δηλαδή $\dfrac{dH_1(t)}{dt} = M(t)$)

και έστω ότι $\exists$ συνάρτηση $H_2(y)$, τ.ω.:

$\boxed{H_2'(y) = N(y)}$ (δηλαδή $\dfrac{dH_2(y)}{dy} = N(y)$)

Τότε, η ⊛ μπορεί να γραφτεί ως:

$\dfrac{dH_1(t)}{dt} + \underbrace{\dfrac{dH_2(y)}{dy}\cdot\dfrac{dy(t)}{dt}} = 0 \Rightarrow$ (βλέπε κανόνα της αλυσίδας)

$\Rightarrow \dfrac{dH_1(t)}{dt} + \dfrac{d(H_2(y(t)))}{dt} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{d}{dt}\left(H_1(t) + H_2(y(t))\right) = 0 \Rightarrow$ (διότι $f'(t) + g'(t) = (f(t)+g(t))'$)

$\Rightarrow H_1(t) + H_2(y(t)) = c$, $c \in \mathbb{R}$ (διότι, αν $f'(t) = 0 \Rightarrow f(t) = c$)

Παράδειγμα Έστω το Π.Α.Τ:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{3t^2+4t+2}{2\cdot(y-1)} , & t>0 \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

Να εξετάσετε αν η εξίσωση είναι διαχωρίσιμη.

ΛΥΣΗ

Παρατηρούμε ότι δεν μπορούμε να την φέρουμε στην μορφή $y' + p(t)\cdot y = q(t)$. Θα προσπαθήσουμε να την φέρουμε στην μορφή:

$$M(t) + N(y)\cdot \frac{dy(t)}{dt} = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{3t^2+4t+2}{2\cdot(y-1)} \Rightarrow 2\cdot(y-1)\cdot\frac{dy}{dt} = 3t^2+4t+2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{(3t^2+4t+2)}_{M(t)} + \underbrace{2\cdot(1-y)}_{N(y)}\cdot y'(t) = 0$$

Θέλω ν.δ.ο $\exists$ οι $H_1(t)$ και $H_2(t)$, τ.ω:
$H_1'(t) = M(t)$ και $H_2'(y) = N(y)$

Έχουμε: $H_1'(t) = 3t^2+4t+2 \xrightarrow[\text{για να φύγει η παράγωγος}]{\text{ολοκληρώνω ως προς } t} \boxed{H_1(t) = t^3+2t^2+2t}$

$H_2'(y) = 2-2y \xrightarrow[\text{προς } y]{\text{ολοκληρώνω ως}} \boxed{H_2(y) = 2y-y^2}$

Γενική λύση: $H_1(t) + H_2(t) = c \Rightarrow t^3+2t^2+2t+2y-y^2 = c$, $c\in\mathbb{R}$

Ισχύει ότι $y(0) = -1$, άρα για $t=0$ και $y=-1$ έχουμε:

$$0^3 + 2\cdot 0^2 + 2\cdot 0 + 2\cdot(-1) - (-1)^2 = c \Rightarrow c = -3$$

Άρα: $(t^3 + 2t^2 + 2t + 3) + 2y(t) - y^2(t) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow y^2(t) - 2y(t) - (t^3 + 2t^2 + 2t + 3) = 0$$

Σκέφτομαι: $y^2 - 2y + \gamma = 0$

$\Delta = 4 - 4\gamma = 4\cdot(1-\gamma) > 0$ (έστω $\Delta > 0$).

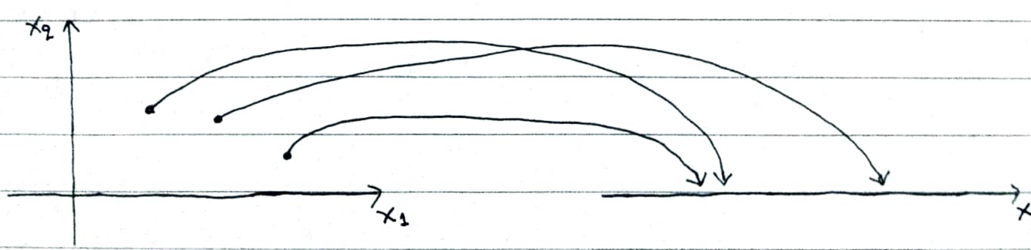
$$y = \frac{2 \pm \sqrt{4\cdot(1-\gamma)}}{2} = 1 \pm \sqrt{1-\gamma}$$

Άρα: $y(t) = 1 \pm \sqrt{1 - t^3 - 2t^2 - 2t - 3} = 1 \pm \sqrt{-t^3 - 2t^2 - 2t - 2}$

Έχουμε $-t^3 - 2t^2 - 2t - 2 \leq 0$, $\forall\, t \geq 0$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad \dfrac{df(x)}{dx} = f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$



$f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$

$f(1,1) = 1\cdot 1 = 1$

$f(1,0) = 1\cdot 0 = 0$

$f(-5,5) = -5\cdot 5 = -25$

$$\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1,x_2+h) - f(x_1,x_2)}{h} = f_{x_2}(x_1,x_2)$$

$$\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1+h,x_2) - f(x_1,x_2)}{h} = f_{x_1}(x_1,x_2)$$

π.χ.: $f(x_1,x_2) = x_1 + x_2$, τότε $f_{x_1}(x_1,x_2) = 1 + 0 = 1$

και $f_{x_2}(x_1,x_2) = 0 + 1 = 1$

Παράδειγμα Έστω $f(x,y) = x\cdot y + 5y + e^x$

$f_x(x,y) = ;$ και $f_y(x,y) = ;$

(Η μερική παράγωγος της f ως προς x) (Η μερική παράγωγος της f ως προς y)

ΛΥΣΗ

$$f_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(xy + 5y + e^x) = \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(5y)}_{} + \frac{\partial}{\partial x}(e^x) =$$

η παράγωγος αυτή ως προς x, είναι μηδέν, αφού το 5y το "βλέπει" σαν σταθερά.

$$= y + 0 + e^x = \boxed{y + e^x}$$

$$f_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(xy + 5y + e^x) = \frac{\partial}{\partial y}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(5y) + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}(e^x)}_{} =$$

είναι μηδέν ως προς y, γιατί το e^x το "βλέπει" σαν σταθερά.

$$= x + 5 + 0 = \boxed{x + 5}$$

Παράδειγμα Έστω $f(t,x) = t^3 + t\cdot x$

$f_t(t,x) =$; και $f_x(t,x) =$;

ΛΥΣΗ

$$f_t(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}(t^3 + t\cdot x) = \frac{\partial}{\partial t}(t^3) + \frac{\partial}{\partial t}(tx) = \boxed{3t^2 + x}$$

$$f_x(t,x) = \frac{\partial}{\partial x}(t^3 + tx) = \frac{\partial}{\partial x}(t^3) + \frac{\partial}{\partial x}(tx) = 0 + t = \boxed{t}$$