13/10/2025

ΠΑΤ – Πρόβλημα αρχικών τιμών

Διαφορική Εξίσωση $1^η$ τάξη γραμμική ΣΔΕ
\+
Αρχική Συνθήκη $\Rightarrow$ Μοναδική λύση

$$\begin{cases} y'(t) + p(t)\,y(t) = q(t), & t > t_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Τότε το ΠΑΤ έχει μοναδική λύση

$$y(t) = e^{-\int p(t)dt}\left(\int e^{\int p(t)dt} q(t)dt + C_1\right),\ C \in \mathbb{R}$$

Η C προσδιορίζει μοναδική από την αρχική συνθήκη

$$y(t_0) = \overset{\text{γνωστό}}{y_0} = \underbrace{e^{-\int p(t)dt}}_{\text{γνωστό}}\left(\int \underbrace{e^{\int p(t)dt}}_{\text{γνωστό}} q(t)dt + \underbrace{C_1}_{\text{άγνωστο}}\right)$$

Παράδειγμα

$$\begin{cases} y' + \frac{2}{t} y = 4t, & t>1 \\ y(1)=2 \end{cases}$$

$p(t) = \frac{2}{t}$, $q(t) = 4t$

① $\mu(t) = \int p(t)\,dt = \int \frac{2}{t}\,dt = 2\ln|t| \overset{t>0}{=} 2\ln t$

② $\int e^{\int p(t)dt} q(t)\,dt = \int e^{2\ln t} \cdot 4t\,dt = \int e^{\ln(t^2)} \cdot 4t\,dt =$
$= \int t^2 \cdot 4t\,dt = 4\int t^3\,dt = 4\frac{t^4}{4}$

③ Γενική λύση: $y(t) = \underbrace{e^{-2\ln t}}_{\substack{\shortparallel \\ e^{\ln \frac{1}{t^2}} = \frac{1}{t^2}}} (t^4 + c) \Rightarrow$

$\Rightarrow y(t) = t^2 + \frac{c}{t^2}$, $y \geq 1$

Γνωρίζω ότι $y(1)=2$
$y(1) = 1 + \frac{c}{1} = 1 + c = 2 \Rightarrow c = 1$

άρα η λύση της εξίσωσης $y(t) = t^2 + \frac{1}{t^2}$, $t \geq 1$

Παράδειγμα Να λυθεί το ΠΑΤ

$$\begin{cases} y' - \frac{1}{2}y = e^{-t}, \; t>0 \\ y(0)=1 \end{cases}$$

$P(t) = -\frac{1}{2}$ $\quad q(t) = e^{-t}$

(1) $\int p(t)\,dt = -\frac{1}{2}\int p(t)\,dt = -\frac{1}{2}\int dt = -\frac{t}{2}$

(2) $\int e^{P(t)} q(t)\,dt = \int e^{-\frac{t}{2}} \cdot e^{-t}\,dt = \int e^{-3t/2}\,dt = \cancel{\int e}$

$= \int e^{-3t/2}\,dt = -\frac{2}{3} e^{-3t/2}$

(3) Γενική λύση

$y(t) = e^{-(-t/2)}\left(-\frac{2}{3}e^{-3t/2} + C_1\right), \; C \in \mathbb{R}$

$y(0) = -\frac{2}{3} + C_1 = 1 \Rightarrow C_1 = -1 + 2/3 = -1/3$

Η λύση του προβλήματος είναι

$y(t) = e^{t/2}\left(-2/3 \cdot e^{-3t/2} - 1/3\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{y(t) = -\frac{2}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{t/2}, \; t \geq 0}$

SOS **Παράδειγμα** Να λυθεί το ΠΑΤ

$$\begin{cases} y'(t)+\cos(t)y=\cos(t), & t\geq 0 \\ y(0)=2 \end{cases}$$

Έχουμε $p(t)=q(t)=\cos(t)$

① $\int p(t)dt = \int \cos(t)dt = \sin(t)$

$= \int \sin(t)dt = -\cos(t)$

② $\cancel{\int e^{\sin(t)}\cos(t)dt}$ $\boxed{e^{\sin(t)}\cdot(\sin(t))' = e^{\sin(t)}\cos(t)}$

$\int e^{\sin(t)}\cos(t)dt = \int (e^{\sin(t)})'dt = e^{\sin(t)}\cdot\cos(t)$

Γενική λύση: $y(t)=e^{-\sin(t)}(e^{\sin(t)}+c_1)=$
$=1+c_1\cdot e^{-\sin(t)}, \; c_1\in\mathbb{R}$

$y(0)=2=1+c_1 e^{-\sin(0)}=1+c_1$

$\Rightarrow c=1$ άρα η μοναδική λύση είναι

$y(t)=1+e^{-\sin(t)}$

$$\begin{cases} y' + \frac{1}{t} y = 5t^2, \; t > 0 & p(t) = 1/t \\ & q(t) = 5t^2 \\ y(1) = 2 & \end{cases}$$

θέτω το $\mu(t)$

$$\mu(t) \cdot y' + \mu(t) \cdot p(t) \cdot y = \mu(t) \cdot q(t)$$

① $\frac{\mu'(t)}{\mu(t)} = \frac{1}{t} \Rightarrow \ln|\mu(t)| = \ln|t| + c_1 \Rightarrow \mu(t) = e^{\ln|t|} \cdot e^{c_1}$

$= e^{\ln|t|} \cdot c_2, \; c_2 = e^{c_1} > 0$

κ' $\int p(t)\,dt = e^{\ln(t)} = t$

② $\cancel{c_2 \cdot e^{\ln(t)} \cdot y' + c_2 \cdot e^{\ln t} (1/t) \cdot y = c_2 \cdot e^{\ln(t)} \cdot 5t^2} \Leftrightarrow$

$\cancel{\Leftrightarrow (c_2 \cdot e^{\ln(t)} y)' = c_2 \cdot e^{\ln(t)} \cdot 5t^2} \Leftrightarrow$

$\cancel{\Leftrightarrow e^{\ln(t)} y = e^{\ln(t)} \cdot 5t^2} \Rightarrow e^{\ln(t)} y = 5t^3$

② $\int e^{\ln(t)} \cdot 5t^2\,dt = 5\int t^3\,dt = 5\frac{t^4}{4} + c$

③ Γενική λύση: $y(t) = e^{-\ln t}\left(5\frac{t^4}{4} + c\right) =$

$\Rightarrow e^{\ln \frac{1}{t}}\left(5\frac{t^4}{4} + c\right) \Rightarrow y(t) = 5\frac{t^3}{4} + \frac{c}{t}$

Γνωρίζω ότι $y(1) = 2$ τότε

$y(1) = 2 = 5 \cdot \frac{1^3}{4} + \frac{c}{1} \Rightarrow 8 = 5 + 4c \Rightarrow$

$\Rightarrow c = \frac{3}{4}$ Άρα η λύση είναι $y(t) = \frac{5t^3}{4} + \frac{3}{4}$

Θεώρημα: Έστω $p(t), q(t)$ συνεχής συναρτήσεις στο διάστημα (α, β) και $t_0 \in (a,b)$
Τότε $\exists$ μοναδική λύση $y(t)$ η οποία ικανοποιεί το ΠΑΤ

$$\begin{cases} y'(t) + p(t) \cdot y(t) = q(t) \\ y(t_0) = t_0 \end{cases}$$

Διαχωρίσιμες εξισώσεις
Μορφή $M(t) + N(y) \cdot y'(t) = 0$
~~Μορφή: $M(t)$~~

Π.χ $(t + y y' = 0)$ ← Μη γραμμική $1^{ης}$ τάξης

$(t^2 \sin(t) + y^2 \cdot y' = 0)$ ←

Κανόνας της Αλυσίδας

$$\frac{d}{dt}(f(y(t))) = \frac{df(y)}{dy} \cdot \frac{dy(t)}{dt}$$

Παράδειγμα: Έστω $f(y) = y^2$ και $y(t) = e^t$

$$\frac{d}{dt}(f(y(t))) = \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = 2\underset{e^t}{\underset{\shortparallel}{y}} \cdot e^t = 2e^{2t}$$

$$\frac{df}{dy} = 2y \qquad \frac{dy}{dt} = e^t$$

Εξισώσεις

μορφή: $M(t) + N(y) \cdot y'(t) = 0$ (*)

$$\frac{d}{dt}\cdot(f(y(t)))' = \frac{d}{dt}((f\circ y)(t)')$$

$$(f\circ y)(t) = (e^{t})^{2} = e^{2t}$$

$$\frac{d}{dt}((f\circ y)(t)) = (e^{2t})' = (2t)'\cdot e^{2t} = 2\cdot e^{2t}$$

Έστω ότι $\exists$ συνάρτηση $H_1(t)$ τ.ω $\boxed{H_1'(t) = M(t)}$

$$\left(\frac{dH_1(t)}{dt} = M(t)\right)$$

και ότι $\exists$ συνάρτηση $H_2(y)$ τ.ω $\boxed{H_2'(y) = N(y)}$

$$\left(\frac{dH_2(y)}{dy} = N(y)\right)$$

τότε η (*) μπορεί να γραφεί ως

$$\frac{dH_1(t)}{dt} + \frac{dH_2(y)}{dy}\cdot\frac{dy(t)}{dt} = 0 \quad (**)$$

$$\frac{dH_1(t)}{dt} + \frac{dH_2(y(t))}{dt} = 0$$

$$f'(t) + g'(t) = (f(t) + g(t))' \qquad f'(t) = 0 \Rightarrow f(t) = c$$

$$\frac{d}{dt}\left(H_1(t) + H_2(y(t))\right) = 0$$

Άρα $H_1(t) + H_2(y(t)) = c,\ c \in \mathbb{R}$

~~Παράδειγμα~~

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{3t^2+4t+2}{2(y-1)}, \quad t>0 \\ y(0)=-1 \end{cases} \qquad \underset{\dfrac{dy}{dt}}{\overset{y'}{\shortparallel}} + P(t)y = q(t)$$

$$M(t) + N(y)\frac{dy}{dt} = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{3t^2+4t+2}{2(y-1)} \Rightarrow 2(y-1)\frac{dy}{dt} = 3t^2+4t+2$$

$$\Rightarrow \underbrace{(3t^2+4t+2)}_{M(t)} + \underbrace{2(1-y)}_{N(y)}\, y'(t) = 0$$

Θ νδιο $\exists$ $H_1(t)$ και $H_2(y)$ των $H_1'(t)=M(t)$ και $H_2'(y)=N(y)$

$H_1'(t)=3t^2+4t+2 \xrightarrow[\text{κατα 2 μέλη}]{\text{ολοκληρ ως προς } t}$ ~~$H_1(t)=t$~~

$$\boxed{H_1(t)=t^3+2t^2+2t}$$

$H_2'(y)=2-2y \xrightarrow[\text{ως προς } y]{\text{ολοκληρ και για τα δύο μέλη}}$

$$\Rightarrow \boxed{H_2(y)=2y-y^2}$$

Γενική λύση: $H_1(t) + H_2(y) = c,\ c \in \mathbb{R}$

$(t^3+2t^2+2t) + (2y-y^2) = c$

γνωρίζουμε $y(0)=1$

για $t=0$ $y=-1$

$0^2+2\cdot 0+2\cdot 0+2\cdot(-1)-(-1)^2 = c \Rightarrow c=-3$

$(t^3+2t^2+2t+3) + 2y(t) - y^2(t) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y^2(t) - 2y(t) - (t^3+2t^2+2t+3) = 0$

$y^2 - 2y + \gamma = 0$

$\Delta = 4 - 4\gamma = 4(1-\gamma) \geq 0$

$\hookrightarrow y = \frac{2 \pm \sqrt{4(1-\gamma)}}{2} = 1 \pm \sqrt{1-\gamma}$

$y(t) = 1 \pm \sqrt{1-t^3-2t^2-2t-3} = 1 \pm \sqrt{-t^3-2t^2-2t-2}$

Εδώ $-t^3-2t^2-2t-2 \leq 0\ \forall\ t \geq 0$

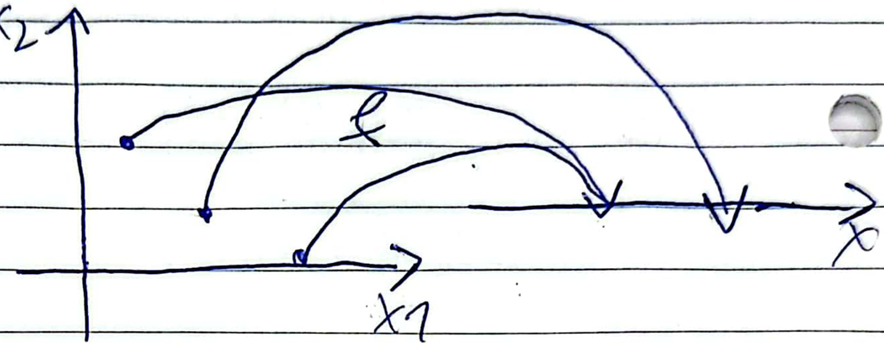
Επανάληψη Παραγώγων

$f: R \to R$

Παράγωγος της f στο x_0

$$\frac{d f(x)}{dx} = f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x)}{h}$$

$f: R^2 \to R$



Π.χ $f(x_1, x_2) = x_1, x_2$

$f(1,1) = 1 \cdot 1 = 1$ $\quad$ $f(-5,5) = -5 \cdot 5 = -25$

$f(1,0) = 1 \cdot 0 = 0$

$$\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, x_2+h) - f(x_1,x_2)}{h} =$$

$$= f_{x_2}(x_1, x_2)$$

$$\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1+h, x_2) - f(x_1,x_2)}{h} = f_{x_1}(x_1,x_2)$$

Πχ $f(x_1,x_2) = x_1 + x_2$

$f_{x_1}(x_1,x_2) = 1+0 = 1$

$f_{x_2}(x_1,x_2) = 0+1 = 1$

Παράδειγμα

$f(x,y) = xy + 5y + e^x$

σταθερα ως προς x

$f_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(x\cdot y + 5y + e^x) = \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial x}(5y) + \frac{\partial}{\partial x}(e^x)$

$= y + e^x$

$f_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(x\cdot y + 5y + e^x) = x + 5$

Παράδειγμα

$f(t,x) = t^3 + tx$

$f_t(t,x) =$;

$f_x(t,x) =$;

$f_t(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}(t^3 + tx) = \frac{\partial}{\partial t}(t^3) + \frac{\partial}{\partial t}(tx) = 3t^2 + x$

$f_x(t,x) = \frac{\partial}{\partial x}(t^3 + tx) = t$

Κανόνες Παραγώγου

(I) $$\frac{d f(t, y(t))}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t}(t, y) + \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} \frac{d y(t)}{dt}$$

Για $\boxed{f(t, y(t)) = t \cdot y(t)}$

και $\boxed{y(t) = t^2 + 2}$

Βρες αριστερό μέλος

1º βρες $f(t, y(t)) = t(t^2+2) = t^3 + 2t$

2º βρες $\frac{d}{dt}(f(t, y(t)) = (t^3 + 2t) = 3t^2 + 2$

Δεξί μέλος

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, y) = \frac{\partial}{\partial t}(t, y) = y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(t, y) = \frac{\partial}{\partial y}(t, y) = t$$

$$\frac{d y(t)}{d(t)} = (t^2 + 2)' = 2t \rightarrow \text{από } y(t) = t^2 + 2$$

$$y + t \cdot \frac{d y(t)}{d(t)} = y + t \cdot 2t = y + 2t^2 = \underbrace{t^2 + 2}_{y(t)} + 2t^2 =$$

$$= 3t^2 + 2$$