20.10.25 **Ακριβείς Διαφορικές Εξισώσεις**

Τύπος: $M(t,y(t)) + N(t,y(t))\cdot y'(t) = 0$,

όπου $\exists$ συνάρτηση $\varphi(t,y)$ τέτοια ώστε $\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} = M(t,y)$

και $\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} = N(t,y)$

• $M(t,y) + N(t,y)\cdot y'(t) = 0 \iff \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}(t,y) + \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}(t,y)\cdot \dfrac{dy(t)}{dt} = 0$

$\xLeftrightarrow{\text{από τον κανόνα παραγώγισης (1)}} \dfrac{d\varphi}{dt}(t,y(t)) = 0 \Rightarrow \varphi(t,y(t)) = c,\ c \in \mathbb{R}$

→ Ακριβείς Διαφορικές Εξισώσεις, είναι η διαδικασία όπου:

Διαφορική Εξίσωση ⟶ Αλγεβρική Εξίσωση

Θεώρημα: Θα υπάρχει η συνάρτηση $\varphi(t,y(t))$ τέτοια ώστε $\overset{1^o \text{ μέλος } (\Rightarrow)}{\boxed{\varphi_t = M \text{ και } \varphi_y = N}}$

αν και μόνο αν $\overset{2^o \text{ μέλος } (\Leftarrow)}{\boxed{M_y = N_t}}$

Απόδειξη:

• 1^o μέλος ($\Rightarrow$): Έστω ότι $\exists\ \varphi$ τέτοια ώστε $\varphi_t = M$ (*) και $\varphi_y = N$ (**)

Παραγωγίζω τη (*) ως προς y και τη (**) ως προς t

$$\varphi_{ty} = M_y \quad \text{και} \quad \varphi_{yt} = N_t$$

όμως, $\varphi_{ty} = \varphi_{yt}$ άρα $M_y = N_t$

• 2^o μέλος ($\Leftarrow$): Έστω $M_y = N_t$ θα δείξω ότι $\exists\ \varphi$ τέτοια ώστε $\varphi_t = M$ και $\varphi_y = N$

και έστω φ τέτοια ώστε $\varphi_t = M(t,y)$

$$\varphi_t = M(t,y) \Rightarrow \int \varphi_t\, dt = \int M(t,y(t))\, dt \Rightarrow \varphi(t,y(t)) = \int M(t,y(t))\, dt + \underbrace{c(y)}_{\text{σταθερά ως προς } y}$$

$\dfrac{\partial}{\partial t} c(y) = 0$. Παραγωγίζω ως προς y.

$$\varphi_y(t,y) = \frac{\partial}{\partial y}\int M(t,y(t))\, dt + c'(y)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\varphi_y(t,y)}_{\text{συνάρτηση } (t,y)} = \underbrace{\int \frac{\partial}{\partial y} M(t,y(t))\, dt}_{\text{συνάρτηση } (t,y)} + \underbrace{c'(y)}_{\text{συνάρτηση του } y}$$

$$c'(y) = \varphi_t(t,y) - \int \frac{\partial}{\partial y} M(t,y)\, dt$$

(Ο μόνος τρόπος για την ισότητα είναι το $\varphi_y(t,y) = \int \dfrac{\partial}{\partial y} M(t,y)\, dt$

να είναι συνάρτηση μόνο του y)

Παραγωγίζουμε ως προς t:

$$\varphi_{yt}(t,y) - \frac{\partial}{\partial t}\int \frac{\partial}{\partial y} M\, dt = 0 \Rightarrow \varphi_{yt}(t,y) = M_y$$

άρα $\varphi_{yt}(t,y) = N(t)$ άρα $(\varphi_y)_t = N_t$ άρα $N = \varphi_y$.

<u>Παράδειγμα</u>

$(y\cos t + 2te^y) + (\sin t + t^2 e^y - 1)\, y' = 0$

Ξέρουμε ότι $M(t,y) = y\cos t + 2te^y$ και $N(t,y) = \sin t + t^2e^y - 1$

αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι ακριβείς: $M_y = N_t$

• $M_y = y\cos t + 2te^y \Rightarrow M_y = (y\cos t + 2te^y)_y \Rightarrow M = (y\cos t)_y + (2te^y)_y \Rightarrow$

$\Rightarrow M_y = \cos t \overbrace{(y)_y}^{1} + 2t\overbrace{(e^y)_y}^{e^y} \Rightarrow M_y = \cos t + 2te^y$

• $N_t = (\sin t + t^2e^y - 1)_t \Rightarrow N_t = (\sin t)_t + (t^2e^y)_t + \overbrace{(-1)_t}^{0} \Rightarrow N_t = \cos t + e^y(t^2)_t \Rightarrow$

$\Rightarrow N_t = \cos t + 2te^y$

Άρα, $M_y = N_t$ οπότε η διαφορική εξίσωση είναι ακριβείς. Άρα, $\exists \psi$ τέτοια ώστε $\psi_t = M$ και $\psi_y = N$.

$$\psi_t = \underbrace{y\cos t + 2te^y}_{M(t,y)}$$

Ολοκληρώνω ως προς t:

$$\int \psi_t \, dt = \int (y\cos t + 2te^y) \cdot dt + c(y) \Rightarrow \psi(t,y) = y\int \cos t \, dt + 2e^y \int t \, dt + c(y)$$

οπότε, $\psi(t,y) = y \cdot \sin t + t^2 e^y + c(y)$

Επίσης θέλουμε $\psi_y(t,y) = N(t,y)$

$$\psi_y(t,y) = \sin t + t^2 e^y + c'(y) = \underbrace{\sin t + t^2 e^y - 1}_{N(t,y)}$$

άρα, $c'(y) = -1$ μπορούμε να πάρουμε $c(y) = -y$

Τελικά, η γενική λύση $\psi(t,y) = c$, $c \in \mathbb{R}$

και η αλγεβρική εξίσωση που δίνει τη λύση είναι: $\sin t + t^2 e^y - 1 = c$

<u>Παράδειγμα</u>

$2t + y^2 + 2tyy' = 0$

Ξέρουμε ότι $M(t,y) = 2t + y^2$ και $N(t,y) = 2ty$

αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι ακριβείς: $M_y = N_t$

- $M_y = 2t + y^2 \Rightarrow M_y = (2t + y^2) \Rightarrow M_y = 2y$
- $N_t = 2ty \Rightarrow N_t = (2ty)' \Rightarrow N_t = 2y$

Άρα, $M_y = N_t$ οπότε η διαφορική εξίσωση είναι ακριβείς. Άρα, $\exists \psi$ τέτοια ώστε $\psi_t = M$ και $\psi_y = N$

$$\psi_t = M_y = 2t + y^2 \xrightarrow{\text{ολοκληρώνω ως προς } t} \psi(t,y) = 2 \cdot \frac{t^2}{2} + y^2 t + c(y) \xrightarrow{\text{παραγωγίζω ως προς } y}$$

$$\Rightarrow \psi_y(t,y) = 0 + 2ty + c'(y) = 2ty = N(t,y)$$

$c'(y) = 0$ άρα μπορούμε να επιλέξουμε $c(y) = 0$

Τελικά, η γενική λύση της εξίσωσης είναι $\psi(t,y) = c \in \mathbb{R}$

και η αλγεβρική εξίσωση που δίνει την $y(t)$ είναι: $t^2 + y^2 t = c$, $c \in \mathbb{R}$

Διαφορικές Εξισώσεις – $2^{ης}$ Τάξης, Ομογενής με σταθερούς συντελεστές

<u>Γενική Μορφή</u>: $ay''(t) + by'(t) + c \cdot y(t) = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$

Θα ψάξουμε για λύσεις της μορφής $y(t) = e^{rt}$, $y'(t) = r \cdot e^{rt}$, $y''(t) = r^2 e^{rt}$

Εφαρμόζουμε στη γενική μορφή της εξίσωσης.

$$ar^2 e^{rt} + br \cdot e^{rt} + c \cdot e^{rt} = 0 \Rightarrow e^{rt}(a \cdot r^2 + br + c) = 0$$

Γνωρίζω $e^{rt} > 0$ οπότε $ar^2 + br + c = 0$

1η συνθήκη: $\Delta > 0$: 2 ρίζες $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$

2η συνθήκη: $\Delta = 0$: 1 διπλή ρίζα $r_1 \in \mathbb{R}$

3η συνθήκη: $\Delta < 0$: μιγαδικές ρίζες.

Ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης	Γενική λύση του ομογενούς
$r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, με $r_1 \neq r_2$	$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$
$r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, με $r_1 = r_2 = r$	$y(t) = c_1 e^{rt} + c_2 t e^{rt}$
$r_1, r_2 \in \mathbb{C}$, με $r_{1,2} = \kappa \pm \nu i$	$y(t) = e^{\kappa t}(c_1 \cos(\nu t) + c_2 \sin(\nu t))$

Παράδειγμα:

$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 0$

χαρακτηριστική εξίσωση : $r^2 + 5r + 6 = 0$

- $\Delta = \beta^2 - 4a\gamma$

$\Delta = 25 - 4 \cdot 1 \cdot 6$

$\Delta = 1 > 0$

- $r_1, r_2 = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-5 \pm 1}{2}$ $r_1 = -2$, $r_2 = -3$

Γενική μορφή της λύσης είναι : $y(t) = c_1 \cdot e^{-2t} + c_2 \cdot e^{-3t}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$