

## Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

$u(t, x)$  (τοποχιστού 2 ελεύθερες μεταβλητές)

(Υπενθύμιση:  $\sum \Delta E \rightarrow y = y(t)$  (1 ελεύθερη μεταβλητή))

1<sup>η</sup> μερική παράγωγος ως προς  $x$ :  $u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \partial_x u$

και ως προς  $t$ :  $u_t = \frac{\partial u}{\partial t} = \partial_t u$

2<sup>η</sup> μερική παράγωγος ως προς  $x$ :  $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

και ως προς  $t$ :  $u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

3<sup>η</sup> μικτή μερική παράγωγος :  $u_{xt} = u_{tx}$ , σιγά:

$$u_{xt} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \cdot \partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t \cdot \partial x} = u_{tx}$$

(συμπερικές μεταβλητές !)

(συμπερικές μεταβλητές !)

(Παράδειγμα)

$$u(t, x) = x \cdot \cos(t)$$

Βρείτε τις:  $u_x, u_{xx}, u_t, u_{tt}, u_{xt}$  και  $u_{tx}$

### ΛΥΣΗ

$$u_x = \cos(t), \quad u_{xx} = (u_x)_x = 0$$

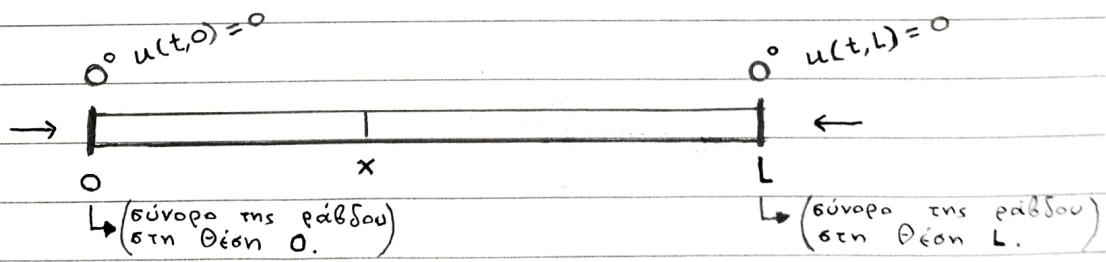
$$u_t = -x \cdot \sin(t), \quad u_{tt} = (u_t)_t = -x \cdot \cos(t)$$

$$u_{xt} = (u_x)_t = (\cos(t))_t = -\sin(t)$$

$$u_{tx} = (u_t)_x = (-x \cdot \sin(t))_x = -\sin(t)$$

Παρατηρώ ότι  $u_{xt} = u_{tx}$ .

(Ξίσων Διάχυσης (ή Θερμότητας) στη 1 χωρική διάσταση



Ψάχνουμε μια συνάρτηση  $u(t, x)$ , η οποία εκφράζει την Θερμοκρασία σε κάθε σημείο της ράβδου χιλιάδες χρονική στιγμή  $t$ .

Μορφή:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t = k \cdot u_{xx} \quad (*) \\ u(0, x) = f(x) \rightarrow \text{αρχική θερμοκρασία του μέσου} \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0 \\ \rightarrow (\text{αρχική συνθήκη}) \\ \rightarrow (\text{συνοριακές συνθήκες}) \end{array} \right.$$

,  $k > 0$ ,  $x \in [0, L]$ ,  $L > 0$ ,  $t \geq 0$

## Μέθοδος των Χωριζομένων Μεταβλητών

Ψάχνουμε για λύσεις της μορφής :

$$u(t, x) = X(x) \cdot T(t), \quad x \in [0, L], t \geq 0$$

$$u_t(t, x) = (\underbrace{X(x) \cdot T(t)}_{\substack{\text{σταθερά ως} \\ \text{προς } t}})_t = X(x) \cdot (\underbrace{T(t)}_{\frac{dT(t)}{dt}})_t = X(x) \cdot T'(t)$$

$$u_{xx}(t, x) = (\underbrace{X(x) \cdot T(t)}_{\substack{\text{σταθερά ως} \\ \text{προς } x}})_{xx} = T(t) \cdot (\underbrace{X(x)}_{\frac{dX(x)}{dx}})_{xx} = T(t) \cdot X''(x)$$

$$(*) \Rightarrow X(x) \cdot T'(t) = k \cdot T(t) \cdot X''(x) \implies (\text{Θέλουμε } u(t, x) \neq 0)$$

$$\implies \frac{X(x) \cdot T'(t)}{X(x) \cdot T(t)} = k \cdot \frac{T(t) \cdot X''(x)}{X(x) \cdot T(t)} \implies$$

$$\implies \frac{T'(t)}{T(t)} = k \cdot \frac{X''(x)}{X(x)} \implies$$

$$\Rightarrow \frac{T'(t)}{k \cdot T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \Rightarrow$$

↓ συνάρτηση του  $x$ .  
↓ συνάρτηση του  $t$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{T'(t)}{k \cdot T(t)}} = \boxed{\frac{X''(x)}{X(x)}} = \text{αρνητική σταθερά} = -\mu^2, \mu \neq 0$$

Σχόλιο: Αν  $n$  σταθερά ήταν θετική ή μηδέν, η λύση που θα προέκυπτε δεν θα ικανοποιούσε τις συνθήκες.

ΣΔΕ - 1<sup>st</sup> τάξης - Γραμμική

ΠΡΟΒΛΗΜΑ I:  $\frac{T'(t)}{k \cdot T(t)} = -\mu^2 \Leftrightarrow \boxed{T'(t) + \underbrace{\mu^2 \cdot k \cdot T(t)}_{\text{σταθερά}} = 0}$

ΣΔΕ - 2<sup>nd</sup> τάξης - με σταθερούς συντελεστές

ΠΡΟΒΛΗΜΑ II:  $\frac{X''(x)}{X(x)} = -\mu^2 \Leftrightarrow \boxed{X''(x) + \mu^2 \cdot X(x) = 0}$

Συνοριακές συνθήκες:  $u(t, 0) = u(t, L) = 0$

Όμως:  $u(t, x) = X(x) \cdot T(t)$ , αφα:

$$u(t, 0) = X(0) \cdot T(t) = 0, \forall t \Rightarrow X(0) = 0$$

$$u(t, L) = X(L) \cdot T(t) = 0, \forall t \Rightarrow X(L) = 0$$

ΣΔΕ - 2<sup>nd</sup> τάξης - με σταθερούς συντελεστές

Άρα:  $\boxed{X''(x) + \mu^2 \cdot X(x) = 0}, X(0) = 0, X(L) = 0$

## ΛΥΣΗ (ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ II)

Χαρακτηριστική έξιωση:  $r^2 + \mu^2 = 0 \Rightarrow r^2 = -\mu^2 < 0$

$$r_{1,2} = \pm i \cdot \sqrt{\mu^2} \stackrel{\mu > 0}{=} \pm i \cdot \sqrt{\mu^2} = \pm i\mu, \mu > 0$$

, αρα  $X(x) = c_1 \cdot \cos(\mu \cdot x) + c_2 \cdot \sin(\mu \cdot x)$

Θέλουμε  $X(0) = 0$        $\left. \begin{array}{l} X(0) = c_1 \cdot \cos(0) + c_2 \cdot \sin(0) = c_1 \\ \end{array} \right\} \Rightarrow c_1 = 0$

Άρα:  $X(x) = c_2 \cdot \sin(\mu x)$

$$\left. \begin{array}{l} X(x) = c_2 \cdot \sin(\mu x) \\ X(L) = 0 \end{array} \right| \Rightarrow X(L) = c_2 \cdot \sin(\mu \cdot L) \Rightarrow$$

αν  $c_2 = 0$ , τότε η

λύση θα είναι η

$$\xrightarrow{\text{μη δεν ικανοποιεί}} \sin(\mu \cdot L) = 0 \Rightarrow \mu_n \cdot L = n \cdot \pi \Rightarrow$$

μη δεν ικανοποιεί  
(που δεν το θέλουμε)

$$\Rightarrow \mu_n = \frac{n \cdot \pi}{L}, n = 1, 2, \dots$$

Λύση:  $X_n(x) = c_{2n} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L} \cdot x\right), \mu_n = \frac{n\pi}{L}$

# ΛΥΣΗ (ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ I)

Αρχικά έχουμε  $\mu_n = \frac{n\pi}{L}$  και αντίστοιχες λύσεις του

προβλήματος II της  $x_n$ , το πρόβλημα I θα γράψεται:

$$T'_n(t) + k \cdot \mu_n^2 \cdot T_n(t) = 0$$

Μπορούμε ν.δ.ο. η λύση είναι  $n$ :

$$T_n(t) = c \cdot e^{-k\mu_n^2 t}, \quad \forall n = 1, 2, \dots$$

Άρα, η λύση για σταθερά  $\mu_n$  είναι:

$$u_n(t, x) = X_n(x) \cdot T_n(t) = \underbrace{c_n \cdot c_{2n}}_{\text{bm σταθερά}} \cdot e^{-k \cdot \mu_n^2 \cdot t} \cdot \sin(\mu_n \cdot x)$$

,  $\forall n = 1, 2, \dots$  ικανοποιούν την εξίσωση και τις 2 συνοριακές συνθήκες.

Αρχική συνθήκη:  $u(0, x) = f(x)$

$$\text{Οπιζουμε } u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t, x)$$

$$\left. \begin{aligned} u_t &= \sum_{n=1}^{\infty} (u_n(t, x))_t \\ u_{xx} &= \sum_{n=1}^{\infty} (u_n(t, x))_{xx} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (u_n(t, x))_t = k \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (u_n(t, x))_{xx}$$

Όπότε η υικανοποιεί την εξίσωση και τις 2 συνοπιακές συνθήκες.

Άρα:  $u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot e^{-\kappa \cdot \mu_n^2 \cdot t} \cdot \sin(\mu_n \cdot x)$ ,  $\forall t \geq 0$ ,  $\forall x \in [0, L]$

Για  $t=0$ :  $u(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot e^0 \cdot \sin(\mu_n \cdot x) =$   
 $= \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin(\mu_n \cdot x) = f(x)}$

Ανότιας Fourier έχουμε:

$$b_n = \frac{2}{L} \cdot \int_0^L f(x) \cdot \sin(\mu_n \cdot x) dx = \frac{2}{L} \cdot \int_0^L f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L} \cdot x\right) dx$$

Η μοναδική λύση του προβλήματος είναι:

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot e^{-\kappa \cdot \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \cdot t} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L} \cdot x\right)$$

, ιδίως  $b_n = \frac{2}{L} \cdot \int_0^L f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L} \cdot x\right) dx$

Υπενθύμιση: Το πρόβλημα είναι της μορφής:

$$\begin{cases} u_t = \kappa \cdot u_{xx} \\ u(0, x) = f(x) \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0 \end{cases}$$

Μια καλή προσέγγιση της λύσης είναι για  $n=1$ :

$$u(t, x) \approx b_1 \cdot e^{-\kappa \cdot \frac{\pi^2}{L^2} \cdot t} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{L} \cdot x\right)$$

, ιδίως  $b_1 = \frac{2}{L} \cdot \int_0^L f(x) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{L} \cdot x\right) dx$

## Παράδειγμα

Βρείτε μια προσεχγιστική λύση του προβλήματος:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(0, x) = 100 \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0 \end{cases}$$

$$, \text{ με } L = 1, K = 1, f(x) = 100 \quad (\text{Κ: Θερμική αγωγήμότητα})$$

## ΛΥΣΗ

$$b_1 = 2 \cdot \int_0^1 100 \cdot \sin(nx) dx = 200 \cdot \int_0^1 \sin(nx) dx =$$

$$= -\frac{200}{n} \cdot \int_0^1 (\cos(nx))' dx = -\frac{200}{n} \cdot [\cos(\overbrace{n}^{-1}) - \cos(\overbrace{0}^1)] =$$

$$= \frac{400}{n}$$

$$\text{Γενική λύση: } u(t, x) \approx \frac{400}{n} \cdot e^{-\frac{n^2 \cdot t}{L^2}} \cdot \sin(nx)$$

✓ Σημείωση: Να ξέρω ιστι η γενική μορφή της λύσης είναι:

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot e^{-K \frac{n^2 \cdot \pi^2}{L^2} \cdot t} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L} \cdot x\right)$$

$$\text{, οπου } b_n = \frac{2}{L} \cdot \int_0^L f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L} \cdot x\right) dx$$

↳ (Εφαρμόζω μόνο για  $n=1$ ).