24/11/2025

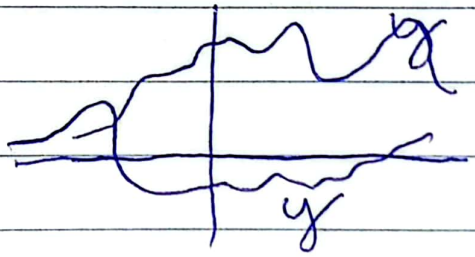
$y: R \to R$ Επανάληψη

$$\hat{y}(w) = \mathcal{F}\{y\}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-iwt} dt$$

$\hat{y}: R \to R$

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{y}\}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{y}(w) e^{iwt} dw$$

$y \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{y}$



$ay'' + by' + cy = q(t)$ $a, b, c \in R$

$$\mathcal{F}\{y'\}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} y'(t) e^{-iwt} dt =$$

$$= [y(t) e^{-iwt}]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \cdot (e^{-iwt})' dt =$$

$\neq 0$

Σαρώθηκε με το CamScanner

$$= -\lim_{t\to+\infty} y(t)\cdot e^{-iwt} - \lim_{t\to-\infty} y(t)e^{-iwt} + iw\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-iwt}dt =$$

($\lim_{t\to+\infty} y(t)\to 0$, $\lim_{t\to-\infty} y(t)\to 0$)

$$\mathcal{F}\{y^{(k)}\}(t) = (iw)^k \mathcal{F}\{y\}(t)$$

$$\boxed{y''=(k\cdot 2) \quad y'''=(k=3)}$$

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iw\xi}}{w-z}dw$$

$w\in\mathbb{R}$, $\xi\in\mathbb{R}$, $\xi\neq 0$, $z\in\mathbb{C}$

α) $z\in\mathbb{R}$, $Im\{z\}=0$

τότε $I = \frac{1}{2}e^{iz\xi}sgn(\xi)$

$$sgn(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi\geq 0 \\ -1, & \xi<0 \end{cases}$$

β) $Im\{z\}>0$

$$I = \begin{cases} ie^{iz\xi}, & \text{αν } \xi>0 \\ 0, & \text{αν } \xi\leq 0 \end{cases}$$

γ) $Im\{z\}<0$

$$I = \begin{cases} 0, & \text{αν } \xi\geq 0 \\ -ie^{iz\xi}, & \xi<0 \end{cases}$$

Σαρώθηκε με το CamScanner

$\delta(t)$ ειδική συνάρτηση με την ιδιότητα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau) f(t)\,dt = f(\tau)$$

Για $\hat{\delta}(w)=1$

$$\hat{\delta}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-iwt}\,dt = f(0) = e^{-iw\cdot 0} = 1$$

$ay'' - by' + cy = \delta(t-\tau)$ (*), για κάποιο $\tau \in \mathbb{R}$

το τ είναι παράμετρος

την λύση της (*) την ονομάζουμε συνάρτηση Green της εξίσωσης

$ay'' + by' + cy = f(t)$, για f τυχαία συνάρτηση

την λύση της (*) την συμβολίζουμε ως $G_\tau(t;\tau)$ (παράμετρος)

Παράδειγμα: Βρείτε την συνάρτηση Green της

$y'' - y = 0$

$$G_\tau''(t;\tau) - G_\tau(t;\tau) = \delta(t-\tau) \xrightarrow{\mathcal{F}} -w^2 \hat{G}_\tau(w;\tau) - \hat{G}_\tau(w;\tau)$$

$$\mathcal{F}\{G_\tau''\}(w) = (iw)^2 \hat{G}_\tau(w;\tau) = i^2 w^2 \hat{G}_\tau(w;\tau) = -w^2 \hat{G}_\tau(w;\tau)$$

$$\mathcal{F}\{\delta(t-\tau)\}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau) e^{-iwt}\,dt = e^{-iw\tau}$$

$$\Rightarrow -(w^2+1)\hat{G}_\tau(w,\tau) = e^{-iw\tau}$$

$$-w^2 \hat{G}_\tau(w,\tau) - \hat{G}_\tau(w,\tau) = e^{-iw\tau} \Rightarrow \hat{G}_\tau(w;\tau) = -\frac{e^{-iw\tau}}{w^2+1}$$

Σαρώθηκε με το CamScanner

$$g(t,\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(\omega;\tau)\, e^{i\omega t}\, d\omega =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega^2+1}\, e^{i\omega t}\, d\omega$$

$$g(t,\tau) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega(t-\tau)}}{\omega^2+1}\, d\omega \overset{(1)}{=}$$ θέτω $\xi = t-\tau$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega\xi}}{\omega^2+1}\, d\omega \overset{(2)}{=}$$

$$\overset{(2)}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega\xi}}{(\omega+i)(\omega-i)}\, d\omega \overset{(3)}{=}$$

(2) $\omega^2+1=0 \to \omega^2=-1 \to \omega i = i$ ή $\omega i = -i$

$(\omega+i)(\omega-i) = (\omega+i)^2 =$
$= \omega^2 + i^2 - 2i\omega =$
$= \omega^2 - 1 + 2i\omega$

(3) $$\frac{1}{(\omega+i)(\omega-i)} = \frac{A}{(\omega+i)} + \frac{B}{(\omega-i)} = \frac{A(\omega-i)+B(\omega+i)}{(\omega+i)\cdot(\omega-i)} =$$

πολυων 1ου βαθμού

$$= \frac{A\omega - iA + B\omega + iB}{(\omega+i)(\omega-i)} = \frac{(A+B)\omega + i(B-A)}{(\omega+i)(\omega-i)} =$$

$$\begin{cases} A+B=0 \Rightarrow B=-A \\ i(B-A)=1 \Rightarrow 2Bi=1 \Rightarrow B = \frac{1}{2i} = \frac{i}{2i^2} = -\frac{i}{2} \end{cases}$$

$$A = -B = \frac{i}{2}$$

άρα $$\frac{1}{(\omega+i)(\omega-i)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\omega+i} - \frac{i}{2}\cdot\frac{1}{\omega-i}$$

Σαρώθηκε με το CamScanner

3) Άρα $G_1(t;t) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iw\xi}}{(w+i)(w-i)}\,dw =$

$$= -\frac{i}{2}\underbrace{\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iw\xi}}{w+i}\,dw\right]}_{*} + \frac{i}{2}\underbrace{\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iw\xi}}{w-i}\,dw\right]}_{**}$$

$w = -i$

$z = -i$, $\mathrm{Im}\{z\} = -1 < 0$ *

$z = i$, $\mathrm{Im}\{z\} = 1 > 0$ **

Άρα $G_1(t;t) = -\frac{i}{2}\left\{\begin{array}{ll} 0, & \text{αν } \xi \geq 0 \\ \frac{i}{2}e^{i(-i)\xi}, & \xi < 0 \end{array}\right. +$

$$+\frac{i}{2}\left\{\begin{array}{ll} \frac{i}{2}e^{i\cdot i\cdot\xi}, & \xi > 0 \\ 0, & \xi < 0 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow G_1(t;z) = \left\{\begin{array}{l} 0 - \frac{1}{2}e^{-\xi} \\ -\frac{i}{2}e^{\xi} + 0 \end{array}\right. = \boxed{\xi = t - \tau}$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-|\xi|},\ \xi \neq 0 = -\frac{1}{2}e^{-|t-\tau|},\ t \neq \tau$$

άρα η συνάρτηση Green είναι ~~$G(t;t) = -\frac{1}{2}e^{-|t-t|}, t \neq t$~~

$$\boxed{G_1(t;t) = -\frac{1}{2}e^{-|t-t|},\ t \neq t}$$

Σαρώθηκε με το CamScanner

Θεώρημα Έστω $ay''+by'+cy=q(t)$, $t>t_0$ και $G(t;t)$ είναι η συνάρτηση Green της εξίσωσης τότε μια ειδική λύση της εξίσωσης δίνεται ως $\boxed{y_p(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} G(t;t)q(t)\,dt}$

Παράδειγμα Με χρήση της συνάρτησης Green βρείτε μια ειδική λύση της $y''-y=e^{-t}$, $t\geq 0$

Από το προηγούμενο παράδειγμα έχουμε $G(t;t)=-\frac{1}{2}e^{-|t-\tau|}$

Από το θεώρημα $y_p(t)=\int_0^{+\infty} G(t,t)e^{-\tau}\,dt=$

$$=\int_0^{+\infty} -\frac{1}{2}e^{-|t-\tau|}e^{-\tau}\,dt=$$

$$=\int_0^{t} -\frac{1}{2}e^{-(t-\tau)}e^{-\tau}\,dt+\int_t^{+\infty} -\frac{1}{2}e^{-(\tau-t)}e^{-\tau}\,dt=$$

$$=\int_0^{t} \frac{1}{2}e^{-(t-\tau)}e^{-\tau}\,dt+\int_t^{+\infty} -\frac{1}{2}e^{-(\tau-t)}e^{-\tau}\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{t} e^{-t}\,d\tau-\frac{1}{2}\int_t^{+\infty} e^{t}\cdot e^{-2\tau}\,d\tau=$$

$$=-\frac{1}{2}e^{-t}\int_0^{t} d\tau-\frac{1}{2}e^{t}\int_t^{+\infty} e^{-2\tau}\,d\tau=$$

$$=-\frac{1}{2}t\cdot e^{-t}-\frac{1}{2}e^{t}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{-2\tau})\,d\tau=$$

$$=-\frac{1}{2}te^{-t}+\frac{1}{4}\left[e^{-2\tau}\right]_t^{+\infty}=-\frac{1}{2}te^{-t}-\frac{1}{4}e^{t}\cdot e^{-2t}=$$

$$=-\frac{1}{2}t\cdot e^{-t}-\frac{1}{4}e^{-t}=-\frac{1}{2}e^{-t}\left(t+\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}e^{-t}\left(t+\frac{1}{2}\right)$$

Σαρώθηκε με το CamScanner

Παράδειγμα Να βρεθεί η συνάρτηση σχίση της

$$y'' - y' + y = 0$$

$$G''(t;\tau) - G'(t;\tau) + G(t;\tau) = \delta(t-\tau)$$

$$\xrightarrow{\mathcal{F}} (i\omega)^2 \hat{G} - i\omega \hat{G} + \hat{G} = e^{-i\omega\tau}$$

$$(-\omega^2 - i\omega + 1)\hat{G} = e^{-i\omega\tau}$$

$$\hat{G} = \frac{e^{-i\omega\tau}}{-\omega^2 - i\omega + 1}$$

από $\mathcal{F}^{-1}$

$$G(t;\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega\tau}}{-\omega^2 + i\omega + 1} e^{i\omega t} d\omega$$

$$\omega^2 + i\omega - 1 = 0$$

$$\Delta = i^2 - 4(-1) = -1 + 4 = 3$$

$$\omega_{1,2} = \frac{-i \pm \sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{1}{\omega^2 + i\omega - 1} = \frac{A}{\left(\omega - \frac{-i+\sqrt{3}}{2}\right)} + \frac{B}{\left(\omega - \frac{-i-\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$A\left(\omega - \frac{-i+\sqrt{3}}{2}\right) + B\left(\omega - \frac{-i-\sqrt{3}}{2}\right) = 1$$

$$(A+B)\omega - A\frac{-i+\sqrt{3}}{2} - B\frac{-i-\sqrt{3}}{2} = 1 \Rightarrow$$

$$A = -B$$

$$\Rightarrow -A\frac{-i+\sqrt{3}}{2} + A\frac{-i-\sqrt{3}}{2} = 1 \Rightarrow$$

Σαρώθηκε με το CamScanner

$$\frac{A}{2}\left(-i-\sqrt{3}-i+\sqrt{3}\right)=1 \Rightarrow -iA=1 \Rightarrow A=i,\ B=-i.$$

$$\overset{\oplus}{=} -\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iw(t-\tau)}}{\left(w-\left(\frac{-i+\sqrt{3}}{2}\right)\right)}dw + \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iw(t-\tau)}}{\left(w-\left(\frac{i+\sqrt{3}}{2}\right)\right)}dw$$

z $\qquad$ z

Άσκηση $\qquad$ $Im\{z\}<0$ $\qquad$ $Im\{z\}>0$

Σαρώθηκε με το CamScanner