08/12/2025

ΣΔΕ $y = y(t)$

Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

$u(t,x)$

$u_x = \dfrac{\partial u}{\partial x} = \partial_x u$

$u_t = \dfrac{\partial u}{\partial t} = \partial_t u$

$u_{xt} = u_{tx}$

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}$

$u_{xx} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

$u_{tt} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

Παράδειγμα

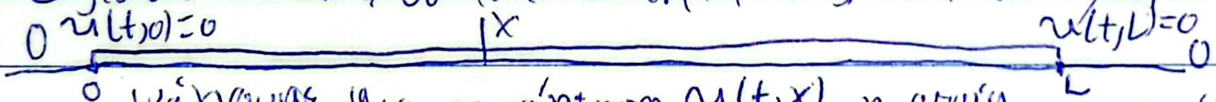
$u(t,x) = x \cdot \cos(t)$

$u_x = \cos(t) \quad u_{xx} = (u_x)_x = 0$

$u_t = -x \cdot \sin(t) \quad u_{tt} = (u_t)_t = -x\cos(t)$

$\left.\begin{aligned} u_{xt} &= (u_x)_t = (\cos t)_t = -\sin(t) \\ u_{tx} &= (u_t)_x = (-x \cdot \sin(t))_x = -\sin(t) \end{aligned}\right\}$ Άρα $u_{xt} = u_{tx}$

Εξίσωση Διάχυσης (ή Θερμότητας) στη 1 χωρική διάσταση



ψάχνουμε μια συνάρτηση $u(t,x)$ η οποία εκφράζει την θερμοκρασία σε κάθε σημείο της ράβδου $\forall$ χρονική στιγμή t. $\forall \to$ (για κάθε)

$$\begin{cases} \boxed{u_t = k \cdot u_{xx}}^{\circledast}, \ k > 0, \ x \in [0, L], \ L > 0, \ t \geq 0 \\ u(0,x) = f(x) \text{ (αρχική θερμοκρασία του μέσου)} \leftarrow \text{αρχική συνθήκη} \\ u(t,0) = u(t,L) = 0 \leftarrow \text{συναρτησιακή συνθήκη} \end{cases}$$

Μέθοδος των Χωρισμένων μεταβλητών

Ψάχνουμε για λύσεις της μορφής:

$$u(t,x) = X(x)T(t), \ x \in [0,L], \ t \geq 0$$

$$u_t(t,x) = (\underbrace{X(x)}_{\text{σταθερά ως προς } t} T(t))_t = X(x)(T(t))_t = X(x)T'(t)$$

$$\frac{\partial T(t)}{\partial t}(t) = \frac{dT(t)}{dt}$$

$$(t^3+2t^2+t)' = (t^3+2t^2+t)_t$$

$$u_{xx}(t,x) = (X(x)\underbrace{T(t)}_{\text{σταθερά ως προς } x})_{xx} = T(t)(X(x))_{xx} = T(t)X''(x)$$

$$\circledast \Rightarrow X(x)T'(t) = kT(t)X''(x), \text{ θέλουμε } u(t,x) \neq 0$$

$$\Rightarrow \frac{X(x)T'(t)}{X(x)T(t)} = \frac{k \cdot T(t) \cdot X''(x)}{X(x)T(t)} \Rightarrow \frac{T'(t)}{T(t)} = k \cdot \frac{X''(x)}{X(x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\underbrace{\frac{T'(t)}{k \cdot T(t)}}_{\text{συνάρτηση του } t} = \underbrace{\frac{X''(x)}{X(x)}}_{\text{συνάρτηση του } x}} \Rightarrow \frac{T'(t)}{kT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \text{σταθερά (αρνητική)} = -\mu^2, \ \mu \neq 0$$

Αν η σταθερά είναι θετική ή μηδέν η λύση δεν θα ικανοποιεί τις συνθήκες.

Πρόβλημα Ι

ΣΔΕ 1ης τάξεως, γραμμική

$$\frac{T'(t)}{kT(t)} = -\mu^2 \iff \boxed{T'(t) + \underbrace{\mu^2 k}_{\text{σταθερά}} T(t) = 0}$$

Πρόβλημα ΙΙ

ΣΔΕ 2ης τάξεως με σταθερούς συντελεστές

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\mu^2 \iff \boxed{X''(x) + \mu^2 X(x) = 0} \quad \boxed{\begin{array}{l} X(0)=0 \\ X(L)=0 \end{array}}$$

Συναρτησιακές συνθήκες

$u(t,0)=u(t,L)=0$

$u(t,x)=X(x)T(t)$

$u(t,0)=X(0)T(t)=0 \ \forall t \Rightarrow X(0)=0$

$u(t,L)=X(x)T(t)=0 \ \forall t \Rightarrow X(L)=0$

Λύση του Προβλήματος 2

Χαρακτηριστική Εξίσωση: $r^2+\mu^2=0 \Rightarrow r^2=-\mu^2<0$

$\Rightarrow r_{1,2}=\pm i\sqrt{|\mu|} \overset{\mu>0}{=} \pm i\sqrt{\mu^2}=$

$=\pm i\mu, \ \mu>0$

άρα $\boxed{X(x)=c_1\cos(\mu x)+c_2\sin(\mu x)}$

θέλουμε $X(0)=0$

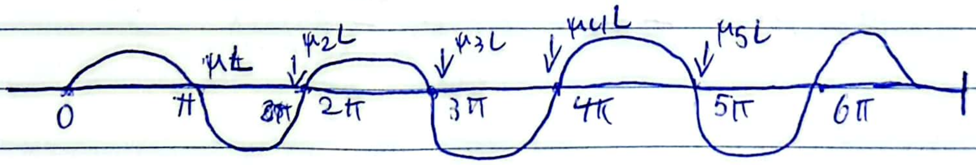
$X(0)=c_1\underbrace{\cos(0)}_{1}+c_2\cdot\underbrace{\sin(0)}_{0}=c_1$ $\Rightarrow c_1=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} X(x)=c_2\sin(\mu x) \\ X(L)=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Λύση}} \boxed{X(x)=c_{2n}\sin\left(\frac{n\pi}{L}\cdot x\right)}, \ \mu_n=\frac{n\pi}{L}$

Αν $c_2=0$ τότε η λύση θα είναι η μηδενική συνάρτηση

$X(L)=c_2\cdot\boxed{\sin(\mu_n L)}=0 \Rightarrow \sin(\mu\cdot L)=0 \Rightarrow \mu_n L=n\pi, \ n\geq 0$

$n=1,2,3,\dots$



αφού έχουμε $\mu_n=\frac{n\pi}{L}$ και αντίστοιχες λύση του ΠρΙΙ X_n το πρόβλημα Ι θα γράφεται:

Μπορούμε να ο η λύση είναι

$T_n'(t)+k\mu_n^2\cdot T_n(t)=0 \Rightarrow \boxed{T_n(t)=c_{1n}e^{-k\mu_n^2 t}} \quad \forall n=1,2,\dots$

Άρα η λύση για σταθερά μ_n

$\boxed{u_n(t,x)=X_n(x)T_n(t)=c_{1n}c_{2n}e^{-k\mu_n^2 t}\sin(\mu_n x)}$

↳ $\forall n=1,2,\dots$ ικανοποιεί την εξίσωση και τις 2 συνοριακές συνθήκες

Αρχική Συνθήκη: $u(0,x) = f(x)$

ορίζουμε
$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t,x)$$

$$\left.\begin{aligned} u_t &= \sum_{n=1}^{\infty} (u_n(t,x))_t \\ u_{xx} &= \sum_{n=1}^{\infty} (u_n(t,x))_{xx} \end{aligned}\right\} \sum_{n=1}^{\infty} (u_n(t,x))_t = k \sum_{n=1}^{\infty} (u_n(t,x))_{xx}$$

Η u ικανοποιεί την εξίσωση και τις συνοριακές συνθήκες

άρα $u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-k\mu_n^2 t} \sin(\mu_n x), \forall t \geq 0, \forall x \in [0,L]$

για $\underline{t=0}$ $u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{0} \sin(\mu_n x) =$
$= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\mu_n x) = f(x)$

από Σειρές Fourier $b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(\mu_n x)\, dx =$
$= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$

Η μοναδική λύση του προβλήματος είναι $\boxed{\text{ΠΟΣ}}$

$$\boxed{\begin{aligned} u(t,x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \\ \text{όπου } b_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx \end{aligned}}$$

$$\begin{cases} u_t = k \cdot u_{xx} \\ u(0,x) = f(x) \\ u(t,0) = u(t,L) = 0 \end{cases}$$

Μια καλή προσέγγιση της λύσης είναι

$$u(t,x) \simeq b_1 e^{-k \cdot \frac{\pi^2}{L^2} t} \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right)$$

$$b_1 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right) dx =$$

$$= 2 \int_0^1 100 \sin(\pi x)\, dx = 200 \int_0^1 \sin(\pi x)\, dx =$$

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(0,x) = 100 \\ u(t,0) = u(t,1) = 0 \end{cases}$$

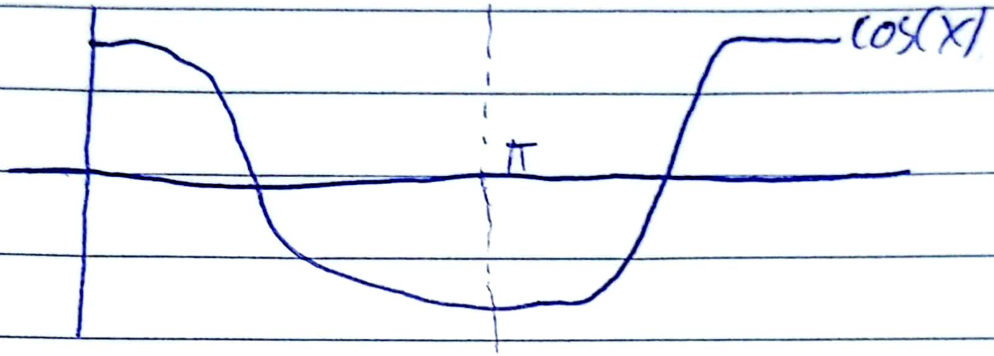
$L=1, k=1$
$f(x) = 100$

$$= \frac{200}{\pi}\int_0^1 [\cos(\pi x)]' dx = \frac{200}{\pi}[\cancel{\cos}(\pi) - \cancel{\cos}(0)] = \frac{400}{\pi}$$

$$u(t,x) \simeq \frac{400}{\pi} e^{-\pi^2 t} \sin(\pi x)$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \mu_1 = 1\cdot\pi/L \\ -\mu_n^2 = X''_0/X_n \end{array}}$$

$$u(t,x) = X(x)\cdot T(t)$$



$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-k\cdot\frac{n^2\pi^2}{L^2}\cdot t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$ SOS

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$