13/10/25 Προβλήματα Αρχικών Τιμών (Π.Α.Τ) - 1ης τάξης - Γραμμικές

$$\begin{cases} y'(t)+p(t)y(t)=q(t), \ t \geq t_0 \\ y(t_0)=y_0 \end{cases}$$

Τότε το Π.Α.Τ έχει μοναδική λύση $y(t) = e^{-\int p(t)dt}\left(\int e^{\int p(t)dt} q(t)dt + c\right)$, $c \in \mathbb{R}$

Η c προσδιορίζεται μοναδικά από την αρχική συνθήκη

$$\underbrace{y(t_0) = y_0 = e^{-\int p(t)dt}\left(\int e^{\int p(t)dt} q(t)dt\right.}_{\text{γνωστά}} + \underbrace{c}_{\text{άγνωστο}}\Big)$$

SOS **Παράδειγμα**

$$\begin{cases} y'(t) + \frac{2}{t}y = 4t, & t>1 \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

Ξέρουμε ότι $p(t) = \frac{2}{t}$, $q(t) = 4t$

1° Βήμα: Βρίσκω το $\int p(t)dt$

$\rightarrow \int p(t)dt = \int \frac{2}{t}dt = 2\ln|t| \xlongequal{t>1} 2\ln t$

2° Βήμα: Βρίσκω το $\int e^{\int p(t)dt} \cdot q(t)dt$

$\rightarrow \int e^{\int p(t)dt} \cdot q(t)dt = \int e^{2\ln t} \cdot 4t\,dt \xlongequal{n\cdot \ln t = \ln(t^n)} \int e^{\ln t^2} \cdot 4t\,dt = \int t^2 \cdot 4t\,dt =$

$= 4\int t^2 dt = 4\frac{t^4}{4} = t^4$

Γενική λύση: $y(t) = e^{-2\ln t}(t^4 + c) \Rightarrow y(t) = e^{\ln \frac{1}{t^2}}(t^4 + c) \Rightarrow y(t) = \frac{1}{t^2}(t^4 + c)$

3° Βήμα: Βρίσκω το c

$\rightarrow$ Γνωρίζουμε ότι $y(1) = 2$: $\frac{1}{1^2}(1^4 + c) = 2 \Rightarrow 1 + c = 2 \Rightarrow c = 1$

Άρα, η λύση της εξίσωσης: $y(t) = t^2 + \frac{1}{t^2}$, $t>1$

Παράδειγμα

$$\begin{cases} y'(t) - \frac{1}{2}y(t) = e^{-t}, & t \geq 0 \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

Ξέρουμε ότι $p(t) = -\frac{1}{2}$, $q(t) = e^{-t}$

1° Βήμα: Βρίσκω το $\int p(t)dt$

$\rightarrow \int p(t)dt = \int -\frac{1}{2}dt = -\frac{1}{2}\int dt = -\frac{t}{2}$

2° Βήμα: Βρίσκω το $\int e^{\int p(t)dt} q(t)\,dt$

$$\to \int e^{\int p(t)dt} q(t)dt = \int e^{-\frac{t}{2}}\cdot e^{-t} \xlongequal{e^{a}\cdot e^{b} = e^{a+b}} \int e^{-3t/2}\,dt \xlongequal{\int e^{at}dt=\frac{1}{a}e^{at}}$$

$$= -\frac{2}{3}e^{-3t/2}$$

Γενική λύση: $y(t)=e^{-(-t/2)}\left(-\frac{2}{3}e^{-3t/2}+c\right),\ c\in\mathbb{R}$

3° Βήμα: Βρίσκω το c

$\to$ Γνωρίζω ότι $y(0)=-1$: $-\frac{2}{3}+c=-1 \Rightarrow c=-1+\frac{2}{3} \Rightarrow c=-\frac{1}{3}$

Άρα, η λύση της εξίσωσης είναι: $y(t)=e^{t/2}\left(-\frac{2}{3}e^{3t/2}-\frac{1}{3}\right)=$

$$= y(t) = -\frac{2}{3}e^{-t}-\frac{1}{3}e^{t/2},\quad t\geq 0$$

SOS Παράδειγμα

$$\begin{cases} y'(t)+\cos(t)y(t)=\cos(t), & t>0 \\ y(0)=2 \end{cases}$$

Ξέρουμε ότι $p(t)=\cos(t)$, $q(t)=\cos(t)$

1° Βήμα: Βρίσκω το $\int p(t)dt$

$$\to \int p(t)dt = \int \cos(t)dt = \sin(t)$$

$$\boxed{\begin{aligned}\int \cos(t)dt &= \sin(t)\\ \int \sin(t)dt &= -\cos(t)\end{aligned}}$$

2° Βήμα: Βρίσκω το $\int e^{\int p(t)dt} q(t)\,dt$

$$\to \int e^{\int p(t)dt} q(t)\,dt = \int e^{\sin(t)}\cdot \cos(t)\,dt = \int e^{\sin(t)}(\sin(t))'\,dt =$$

$$= \int \left(e^{\sin(t)}\right)' = e^{\sin(t)}$$

Γενική λύση: $y(t)=e^{-\sin(t)}\left(e^{\sin(t)}+c\right) \Rightarrow y(t)=e^{-\sin(t)}\cdot e^{\sin(t)}+e^{-\sin(t)}\cdot c \Rightarrow$

$$\Rightarrow y(t)=1+e^{-\sin(t)}\cdot c$$

3° Βήμα: Βρίσκω το c

$\to$ Γνωρίζω ότι $y(0)=2$: $1+e^{-\sin(0)}\cdot c=2 \Rightarrow 1+c=2 \Rightarrow c=1$

Άρα, η λύση της εξίσωσης είναι: $y(t)=1+e^{-\sin(t)}$

Παράδειγμα

$$\begin{cases} y'(t) + \frac{1}{t} y(t) = 5t^2, \ t>0 \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

Ξέρουμε ότι $p(t) = \frac{1}{t}$, $q(t) = 5t^2$

1° Βήμα: Βρίσκω το $\int p(t)\,dt$

$$\to \int p(t)dt = \int \frac{1}{t} dt = \ln|t| \overset{t>0}{=\!=} \ln t$$

2° Βήμα: Βρίσκω το $\int e^{\int p(t)dt} q(t)\,dt$

$$\to \int e^{\int p(t)dt} q(t)dt = \int e^{\ln t} \cdot 5t^2 dt = \int t^3 dt = \frac{5}{4} t^4$$

Γενική λύση: $y(t) = e^{-\ln t}\left(\frac{5}{4}t^4 + c\right) \Rightarrow y(t) = \frac{1}{t}\left(\frac{5}{4}t^4 + c\right) \Rightarrow y(t) = \frac{5}{4}t^3 + \frac{c}{t}$

3° Βήμα: Βρίσκω το c

$\to$ Γνωρίζω ότι $y(1) = 2$: $\frac{5}{4} 1^3 + \frac{c}{1} = 2 \Rightarrow c = 2 - \frac{5}{4} \Rightarrow c = \frac{3}{4}$

Άρα, η λύση της εξίσωσης είναι: $y(t) = \frac{5}{4}t^3 + \frac{3}{4t}$

Θεώρημα: Έστω $p(t)$, $q(t)$ συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα (a,b) και $t_0 \in (a,b)$ τότε $\exists$ μοναδική λύση $y(t)$ η οποία ικανοποιεί το Πρόβλημα Αρχικών Τιμών (Π.Α.Τ)

$$\begin{cases} y'(t) + p(t)y(t) = q(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Διαχωρίσιμες Εξισώσεις

Μορφή: $M(t) + N(y)\,y'(t) = 0$

Π.χ $\bullet\ (t + yy' = 0) \to$ μη γραμμική - 1ης τάξης

$\bullet\ (t^2\sin(t) + y^2 \cdot y' = 0) \to$ μη γραμμική - 1ης τάξης

Κανόνας της Αλυσίδας

$$\frac{d}{dt}\left(f(y(t))\right) = \frac{d f(y)}{dy} \cdot \frac{dy(t)}{dt} \quad \underline{\underline{\acute{\eta}}} \quad \left(f(y(t))\right)'$$

Σαρώθηκε με το CamScanner

Παράδειγμα

Έστω $f(y)=y^2$ και $y(t)=e^t$

1ος τρόπος: $\frac{d}{dt}\left(f(y(t))\right)=\frac{df(y)}{dy}\cdot\frac{dy(t)}{dt}=2y\cdot e^t=2e^t\cdot e^t=2e^{2t}$

$\rightarrow \frac{df(y)}{dy}=2y$

$\rightarrow \frac{dy(t)}{dt}=e^t$

2ος τρόπος: $\frac{d}{dt}\left(f(y(t))\right)=\frac{d}{dt}\left((f\circ y)(t)'\right)=\left(e^{2t}\right)'=e^{2t}\cdot\frac{d}{dt}(2t)=2e^{2t}$

$\rightarrow (f\circ y)(x)=(e^t)^2=e^{2t}$

▶ $M(t)+N(y)y'=0$ (*)

Έστω ότι $\exists$ συνάρτηση $H_1(t)$ τέτοια ώστε $H_1'=M(t)$ $\left(\frac{dH_1(t)}{dt}=M(t)\right)$ και $\exists$ συνάρτηση $H_2(y)$ τέτοια ώστε $H_2'=N(y)$ $\left(\frac{dH_2(y)}{dy}=N(y)\right)$ τότε η (*) μπορεί να γραφτεί ως:

$$\frac{dH_1(t)}{dt}+\underbrace{\frac{dH_2(y)}{dy}\cdot\frac{dy(t)}{dt}}_{\text{κανόνας Αλυσίδας}}=0$$

$$\frac{dH_1(t)}{dt}+\frac{dH_2(y(t))}{dt}=0 \xRightarrow{f'(x)+g'(x)=(f(x)+g(x))'}$$

$$\frac{d}{dt}\left(H_1(t)+H_2(y(t))\right)=0 \xRightarrow{f(x)=0,\ f'(x)=c} H_1(t)+H_2(y(t))=c,\ c\in\mathbb{R}$$

Παράδειγμα

$$\begin{cases}\frac{dy}{dt}=\frac{3t^2+4t+2}{2(y-1)}, & t>0\\ y(0)=-1\end{cases}$$

$M(t)+N(y)\frac{dy}{dt}=0$ (πρέπει να τη φέρω σε αυτή τη μορφή)

$$\frac{dy}{dt}=\frac{3t^2+4t+2}{2(y-1)} \Rightarrow 2(y-1)\frac{dy}{dt}=3t^2+4t+2 \Rightarrow \underbrace{(3t^2+4t+2)}_{M(t)}+\underbrace{2(1-y)}_{N(y)}y'(t)=0$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι $\exists H_1(t)$ και $H_2(y)$ τέτοια ώστε $H_1'(t)=M t$ και $H_2'(y)=N(y)$

$H_1'(t)=3t^2+4t+2 \xrightarrow[\text{και τα δύο μέλη}]{\text{ολοκληρώνω ως προς } t} H_1(t)=t^3+2t^2+2t$

$H_2'(y)=2(1-y) \xrightarrow[\text{και τα δύο μέλη}]{\text{ολοκληρώνω ως προς } y} H_2(y)=2y-y^2$

Γενική λύση: $H_1(t)+H_2(y)=c$, $c\in\mathbb{R}$

$t^3+2t^2+2t+2y-y^2=c$

Γνωρίζω ότι $y(0)=-1$:

για $t=0$ & $y=-1$: $0^3+2 0^2+2\cdot 0+2(-1)-(-1)^2=c \Rightarrow c=-3$

$(t^3+2t^2+2t+3)+2y(t)-y^2(t)=0 \Rightarrow y^2(t)-2y(t)-(t^3+2t^2+2t+3)=0$

$y^2-2y+\gamma=0$, $\gamma=+t^3+2t^2+2t+3$

$\Delta=4-4\gamma=4(1-\gamma)$

$y=\frac{2\pm\sqrt{\Delta}}{2} \Rightarrow y=1\pm\sqrt{1-\gamma}$

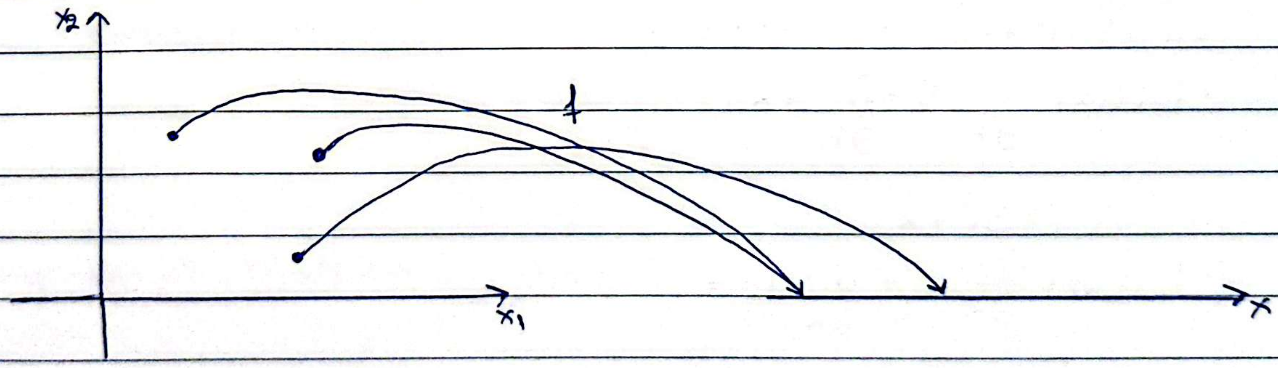
$y(t)=1\pm\sqrt{-t^3-2t^2-2t-2}$

Εδώ $-t^2-2t^2-2t-2\leq 0$ $\forall t\geq 0$

▶ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

Η παράγωγος της f στο x: $\frac{df(x)}{dx}=f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$



<u>Π.χ</u> $f(x_1,x_2)=x_1x_2$

- $f(1,1)=1\cdot 1=1$
- $f(1,0)=1\cdot 0=0$
- $f(-5,5)=-5\cdot 5=-25$

<u>Μερικές Παράγωγος</u>

$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_1,x_2+h)-f(x_1,x_2)}{h}=f_{x_1}(x_1,x_2)$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_1+h,x_2)-f(x_1,x_2)}{h}=f(x_1,x_2)$$

Παράδειγμα

$f(x_1,x_2)=x_1+x_2$

- $f_{x_1}(x_1,x_2)=1+0=1$
- $f_{x_2}(x_1,x_2)=0+1=1$

Παράδειγμα

$f(x,y)=xy+5y+e^x$

- $f_x(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}(xy+5y+e^x)=\frac{\partial}{\partial x}(xy)+\frac{\partial}{\partial x}(5y)+\frac{\partial}{\partial x}(e^x)$ ▷ $y\frac{\partial}{\partial x}x$ ▷ σταθερά ως προς x

$=y+0+e^x$

- $f_y(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}(xy+5y+e^x)=\frac{\partial}{\partial y}(xy)+\frac{\partial}{\partial x}(5y)+\frac{\partial}{\partial x}(e^x)$

$=x+5+0$

Παράδειγμα

$f(t,x)=t^3+tx$

- $f_t(t,x)=\frac{\partial}{\partial t}t^3+\frac{\partial}{\partial t}tx$

$=3t^2+x$

- $f_x(t,x)=\frac{\partial}{\partial x}t^3+\frac{\partial}{\partial x}tx$

$=0+t$

Κανόνες Παραγώγισης

1. $$\frac{df(t,y(t))}{dt}=\frac{\partial f(t,y)}{\partial t}+\frac{\partial f(t,y)}{\partial y}\cdot\frac{dy(t)}{dt}$$

Π.χ $f(t,y(t))=t\,y(t)$ και $y(t)=t^2+2$

Αριστερό μέλος:

1ο Βήμα: Βρες το $f(t,y(t))$

$\rightarrow f(t, y(t)) = t\,(t^2+2) = t^3 + 2t$

2° Βήμα: $\frac{d}{dt}(f(t), y(t)) = (t^3+2t)' = 3t^2+2$

Δεξί μέλος:

1° Βήμα: $\frac{\partial f}{\partial t}(t,y) = \frac{\partial}{\partial t}(ty) = y$

2° Βήμα: $\frac{\partial f}{\partial y}(t,y) = \frac{\partial}{\partial y}(ty) = t$

3° Βήμα: $\frac{dy(t)}{dt} = (t^2+2)' = 2t$

$\rightarrow y + t \cdot 2t = y + 2t^2 = \underbrace{t^2+2}_{y(t)} + 2t^2 = 3t^2+2$

(2) $\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \cdot \frac{dx(t)}{dt} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \cdot \frac{dy(t)}{dt}$

ή

$f'(x(t), y(t)) = f_x\, x'(t) + f_y\, y'(t)$

• για $x(t) = t$ η (2) = (1)