

## Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

$u(t, x)$  (τουλάχιστον 2 ελεύθερες μεταβλητές)

(Υπενθύμιση: ΣΔΕ  $\rightarrow$   $y = y(t)$  (1 ελεύθερη μεταβλητή))

1<sup>η</sup> μερική παράγωγος ως προς  $x$ :  $u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \partial_x u$

και ως προς  $t$ :  $u_t = \frac{\partial u}{\partial t} = \partial_t u$

2<sup>η</sup> μερική παράγωγος ως προς  $x$ :  $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

και ως προς  $t$ :  $u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

(ίδια μεταβλητή!)

2<sup>η</sup> μικτή μερική παράγωγος:  $u_{xt} = u_{tx}$ , διότι:

$$u_{xt} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \cdot \partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t \cdot \partial x} = u_{tx}$$

(διαφορετικές μεταβλητές!)

### Παράδειγμα

$$u(t, x) = x \cdot \cos(t)$$

Βρείτε τις :  $u_x, u_{xx}, u_t, u_{tt}, u_{xt}$  και  $u_{tx}$

### ΛΥΣΗ

$$u_x = \cos(t) \quad , \quad u_{xx} = (u_x)_x = 0$$

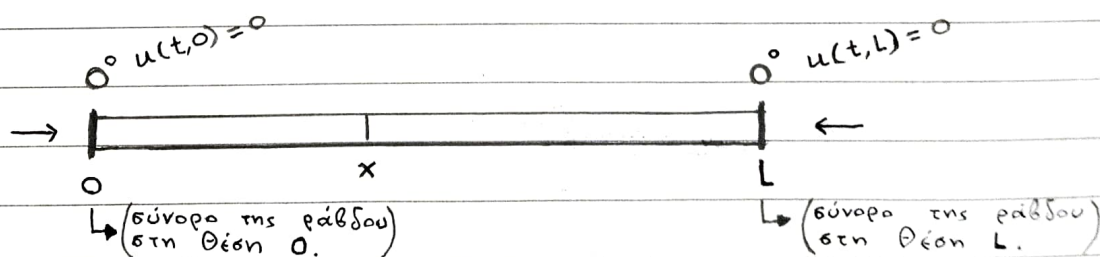
$$u_t = -x \cdot \sin(t) \quad , \quad u_{tt} = (u_t)_t = -x \cdot \cos(t)$$

$$u_{xt} = (u_x)_t = (\cos(t))_t = -\sin(t)$$

$$u_{tx} = (u_t)_x = (-x \cdot \sin(t))_x = -\sin(t)$$

Παρατηρώ ότι  $u_{xt} = u_{tx}$ .

Εξίσωση Διάχυσης (ή Θερμότητας) στη 1 χωρική διάσταση



Ψάχνουμε μία συνάρτηση  $u(t, x)$ , η οποία εκφράζει την θερμοκρασία σε κάθε σημείο της ράβδου για κάθε χρονική στιγμή  $t$ .

Μορφή:

$$\begin{cases} u_t = \kappa \cdot u_{xx} \quad (*) & , \quad \kappa > 0, x \in [0, L], L > 0, t \geq 0 \\ u(0, x) = f(x) & \rightarrow \text{αρχική θερμοκρασία του μέσου} \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0 & \\ & \rightarrow \text{(αρχική συνθήκη)} \\ & \rightarrow \text{(συνοριακές συνθήκες)} \end{cases}$$

## Μέθοδος των Χωριζομένων Μεταβλητών

Ψάχνουμε για λύσεις της μορφής :

$$u(t, x) = X(x) \cdot T(t), \quad x \in [0, L], t \geq 0$$

$$u_t(t, x) = \underbrace{(X(x) \cdot T(t))_t}_{\text{σταθερά ως προς } x} = X(x) \cdot \underbrace{(T(t))_t}_{\frac{\partial T(t)}{\partial t} = \frac{dT(t)}{dt}} = X(x) \cdot T'(t)$$

$$u_{xx}(t, x) = \underbrace{(X(x) \cdot T(t))_{xx}}_{\text{σταθερά ως προς } t} = T(t) \cdot \underbrace{(X(x))_{xx}}_{\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = \frac{d^2 X(x)}{dx^2}} = T(t) \cdot X''(x)$$

$$(*) \Rightarrow X(x) \cdot T'(t) = \kappa \cdot T(t) \cdot X''(x) \Rightarrow (\text{Θέλουμε } u(t, x) \neq 0)$$

$$\Rightarrow \frac{X(x) \cdot T'(t)}{X(x) \cdot T(t)} = \kappa \cdot \frac{T(t) \cdot X''(x)}{X(x) \cdot T(t)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{T'(t)}{T(t)} = \kappa \cdot \frac{X''(x)}{X(x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{T'(t)}{\kappa \cdot T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \Rightarrow$$

↓  
συνάρτηση του t
↓  
συνάρτηση του x.

$$\Rightarrow \frac{T'(t)}{\kappa \cdot T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \text{αρνητική σταθερά} = -\mu^2, \mu \neq 0$$

Σχόλιο: Αν η σταθερά ήταν θετική ή μηδέν, η λύση που θα προέκυπτε δεν θα ικανοποιούσε τις συνθήκες.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ I:

$$\frac{T'(t)}{\kappa \cdot T(t)} = -\mu^2 \Leftrightarrow$$

ΣΔΕ - 1<sup>ης</sup> τάξης - γραμμική

$$T'(t) + \underbrace{\mu^2 \cdot \kappa}_{\text{σταθερά}} \cdot T(t) = 0$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ II:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\mu^2 \Leftrightarrow$$

ΣΔΕ - 2<sup>ης</sup> τάξης - με σταθερούς συντελεστές

$$X''(x) + \mu^2 \cdot X(x) = 0$$

Συνοριακές συνθήκες:  $u(t, 0) = u(t, L) = 0$

Όμως:  $u(t, x) = X(x) \cdot T(t)$ , άρα:

$$u(t, 0) = X(0) \cdot T(t) = 0, \forall t \Rightarrow X(0) = 0$$

$$u(t, L) = X(L) \cdot T(t) = 0, \forall t \Rightarrow X(L) = 0$$

ΣΔΕ - 2<sup>ης</sup> τάξης - με σταθερούς συντελεστές

Άρα:

$$X''(x) + \mu^2 \cdot X(x) = 0, X(0) = 0, X(L) = 0$$

## ΛΥΣΗ (ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ II)

Χαρακτηριστική Εξίσωση:  $r^2 + \mu^2 = 0 \Rightarrow r^2 = -\mu^2 < 0$

$$r_{1,2} = \pm i \cdot \sqrt{\mu^2} \stackrel{\mu > 0}{=} \pm i \cdot \sqrt{\mu^2} = \pm i\mu, \quad \mu > 0$$

, άρα  $X(x) = c_1 \cdot \cos(\mu \cdot x) + c_2 \cdot \sin(\mu \cdot x)$

Θέλουμε  $X(0) = 0$   $\left. \begin{array}{l} X(0) = c_1 \cdot \overset{1}{\cos(0)} + c_2 \cdot \overset{0}{\sin(0)} = c_1 \end{array} \right\} \Rightarrow c_1 = 0$

Άρα:  $X(x) = c_2 \cdot \sin(\mu x)$

$$\left\{ \begin{array}{l} X(x) = c_2 \cdot \sin(\mu \cdot x) \\ X(L) = 0 \end{array} \right. \Rightarrow X(L) = c_2 \cdot \sin(\mu \cdot L) \Rightarrow$$

αν  $c_2 = 0$ , τότε η

λύση θα είναι η

μηδενική συνάρτηση  
(που δεν το θέλουμε)

$$\Rightarrow \sin(\mu \cdot L) = 0 \Rightarrow \mu_n \cdot L = n \cdot \pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu_n = \frac{n \cdot \pi}{L}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Λύση:  $X_n(x) = c_{2n} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L} \cdot x\right), \quad \mu_n = \frac{n\pi}{L}$

## ΛΥΣΗ (ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ I)

Αφού έχουμε  $\mu_n = \frac{n \cdot \pi}{L}$  και αντίστοιχες λύσεις του

προβλήματος II της  $X_n$ , το πρόβλημα I θα γράφεται:

$$T_n'(t) + \kappa \cdot \mu_n^2 \cdot T_n(t) = 0$$

Μπορούμε ν.δ.ο. η λύση είναι η:

$$T_n(t) = c \cdot e^{-\kappa \mu_n^2 t}, \quad \forall n = 1, 2, \dots$$

Άρα, η λύση για σταθερά  $\mu_n$  είναι:

$$u_n(t, x) = X_n(x) \cdot T_n(t) = \underbrace{c_n \cdot c_{2n}}_{\text{bm σταθερά}} \cdot e^{-\kappa \cdot \mu_n^2 \cdot t} \cdot \sin(\mu_n \cdot x)$$

,  $\forall n = 1, 2, \dots$  ικανοποιούν την εξίσωση και τις 2 συνοριακές συνθήκες.

Αρχική συνθήκη:  $u(0, x) = f(x)$

Ορίσουμε  $u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t, x)$

$$\left. \begin{aligned} u_t &= \sum_{n=1}^{\infty} (u_n(t, x))_t \\ u_{xx} &= \sum_{n=1}^{\infty} (u_n(t, x))_{xx} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (u_n(t, x))_t = \kappa \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (u_n(t, x))_{xx}$$

Οπότε η  $u$  ικανοποιεί την εξίσωση και τις 2 συνοριακές συνθήκες.

$$\text{Άρα: } u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot e^{-\kappa \mu_n^2 t} \cdot \sin(\mu_n x), \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x \in [0, L]$$

$$\begin{aligned} \text{Για } t=0: \quad u(0, x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot e^0 \cdot \sin(\mu_n x) = \\ &= \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin(\mu_n x) = f(x)} \end{aligned}$$

Από σειρές Fourier έχουμε:

$$b_n = \frac{2}{L} \cdot \int_0^L f(x) \cdot \sin(\mu_n x) dx = \frac{2}{L} \cdot \int_0^L f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx$$

Η μοναδική λύση του προβλήματος είναι:

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot e^{-\kappa \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \\ , \text{ όπου } b_n &= \frac{2}{L} \cdot \int_0^L f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx \end{aligned}$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{Υπενθύμιση: Το πρόβλημα είναι της μορφής:} \\ \left\{ \begin{array}{l} u_t = \kappa \cdot u_{xx} \\ u(0, x) = f(x) \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0 \end{array} \right. \end{array} \right)$$

Μια καλή προσέγγιση της λύσης είναι για  $n=1$ :

$$u(t, x) \approx b_1 \cdot e^{-\kappa \cdot \frac{\pi^2}{L^2} t} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right)$$

$$, \text{ όπου } b_1 = \frac{2}{L} \cdot \int_0^L f(x) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right) dx$$

### Παράδειγμα

Βρείτε μια προεχριστική λύση του προβλήματος:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(0, x) = 100 \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0 \end{cases}$$

, με  $L=1$ ,  $\kappa=1$ ,  $f(x)=100$  ( $\kappa$ : θερμική αγωγιμότητα)

### ΛΥΣΗ

$$b_1 = 2 \cdot \int_0^1 100 \cdot \sin(\pi x) dx = 200 \cdot \int_0^1 \sin(\pi x) dx =$$

$$= -\frac{200}{\pi} \cdot \int_0^1 (\cos(\pi x))' dx = -\frac{200}{\pi} \cdot [\cos(\pi) - \cos(0)] =$$

$$= \frac{400}{\pi}$$

Γενική λύση:  $u(t, x) \approx \frac{400}{\pi} \cdot e^{-\pi^2 t} \cdot \sin(\pi x)$

✓ Σημείωση: Να ξέρω ότι η γενική μορφή της λύσης είναι:

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot e^{-\kappa \cdot \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \cdot t} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L} \cdot x\right)$$

οπότε  $b_n = \frac{2}{L} \cdot \int_0^L f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L} \cdot x\right) dx$

↳ (εφαρμόζω μόνο για  $n=1$ ).