

03/11/2025

3ο Σειρά προ συνέχειας και επανέργησης

$$ay'' + by' + cy = 0$$

$$i^2 = 1 \quad \mathbb{C} = \{ z = a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}, i^2 = 1 \}$$

$$e^{it} = \cos(t) + i \sin(t)$$

$$y_r(t) = e^{rt}$$

$$ar^2 + br + c = 0$$

$$\frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac < 0$$

$$\gamma_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = x \pm iy$$

$$x = \frac{-b}{2a}, \quad \mu = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

$$e^{rt} = e^{(x \pm iy)t} = e^{xt} e^{\pm iyt}$$

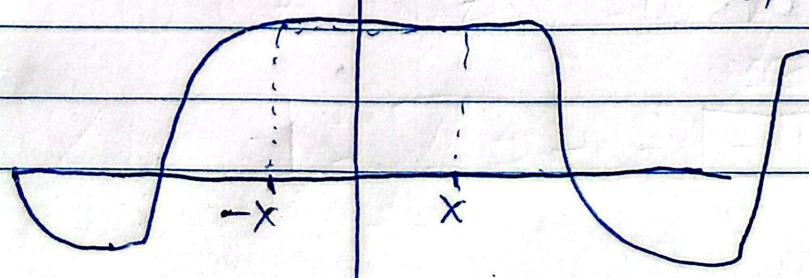
$$e^{i\mu t} = e^{i(\mu t)}$$

$$e^{xt} (\cos(\mu t) + i \sin(\mu t))$$

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

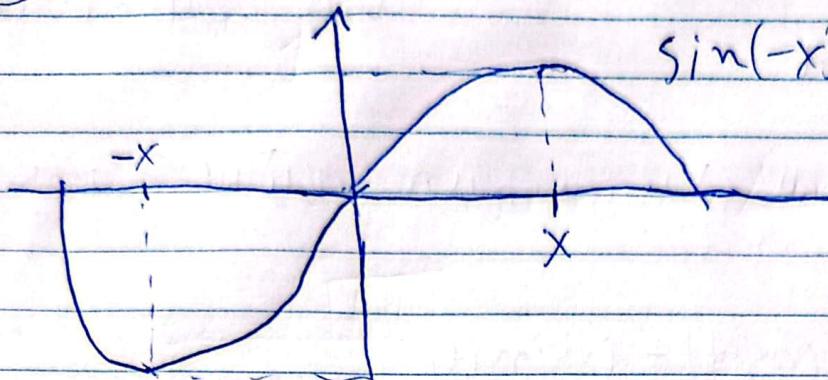
$$- e^{xt} (\cos(-\mu t) + i \sin(-\mu t))$$

$$\cos(\mu t)$$



Touγtina tou Euler

$$e^{it} = \cos(t) + i \cdot \sin(t)$$



$$\sin(-x) \rightarrow \sin(x) = -\sin(x)$$

Exponentielle Bewegung

$$v_1(t) = e^{\lambda t} (\cos(\mu t) + i \cdot \sin(\mu t))$$

$$v_2(t) = e^{\lambda t} (\cos(\mu t) - i \cdot \sin(\mu t))$$

$$\text{Optische } v_1(t) = \frac{1}{2} (v_1(t) + v_2(t)) = \frac{1}{2} e^{\lambda t} (2 \cos(\mu t) + i \omega) = \\ = e^{\lambda t} \cos(\mu t)$$

$$v_2(t) = \frac{1}{2i} (v_1(t) - v_2(t)) = \frac{1}{2i} e^{\lambda t} (2i \sin(\mu t)) = e^{\lambda t} \sin(\mu t)$$

απλή γενική λύση της Εξίσωσης γραμμικής WS
 $y(t) = (C_1 e^{\lambda t} \cos(\mu t) + C_2 e^{\lambda t} \sin(\mu t)) [C_1, C_2 \in \mathbb{R}]$

Θεωρούμε το HAT

Θεωρούμε το HAT

$$\begin{cases} a y''(t) + b y'(t) + c y(t) = 0, t > t_0 \\ y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R} \\ y'(t_0) = y'_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$y'(t) = (c_1 \lambda e^{\lambda t} \cos(\mu t) - \mu c_1 e^{\lambda t} \sin(\mu t)) \\ + (c_2 \lambda e^{\lambda t} \sin(\mu t) + \mu c_2 e^{\lambda t} \cos(\mu t))$$

εφαρμοσούμε για $t = t_0$

$$c_1 e^{\lambda t_0} \cos(\mu t_0) + c_2 e^{\lambda t_0} \sin(\mu t_0) = y_0$$

$$(c_1 e^{\lambda t_0} \lambda \cos(\mu t_0) - \mu \sin(\mu t_0)) + (c_2 e^{\lambda t_0} \lambda \sin(\mu t_0) + \mu \cos(\mu t_0)) =$$

παραγωγή
από την ε2

γένη

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda t_0} \cos(\mu t_0) & e^{\lambda t_0} \sin(\mu t_0) & (1) & (y_0) \\ e^{\lambda t_0} (\lambda \cos(\mu t_0) - \mu \sin(\mu t_0)) & e^{\lambda t_0} (\lambda \sin(\mu t_0) + \mu \cos(\mu t_0)) & (2) & (y'_0) \end{pmatrix} =$$

A

$$\det(A) = e^{\lambda t_0} (\lambda \sin(\mu t_0) \cos(\mu t_0) + \mu \cos^2(\mu t_0))$$

$$- e^{\lambda t_0} (\lambda \sin(\mu t_0) \cos(\mu t_0) - \mu \sin^2(\mu t_0)) =$$

$$= e^{\lambda t_0} \underbrace{\mu (\cos^2(\mu t_0) + \sin^2(\mu t_0))}_{1} = \mu \cdot e^{\lambda t_0} \neq 0$$

Na zvouc to MAT

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 5y = 0, t \geq 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Xarakt. ekwazon $r^2 + 2r + 5 = 0$, $\Delta = 4 - 4 \cdot 5 = -16 < 0$

$$r_{1,2} = \frac{-2 \pm i\sqrt{|-16|}}{2} = -1 \pm 2i \quad (\lambda = -1, \mu = 2), \quad (r_{1,2} = \lambda \pm i\mu)$$

[εvikm zvouc $\Re^t e^{xt} \cdot e^{imt}$

$$\begin{aligned} y(t) &= (c_1 e^{-t} \cos(2t) + c_2 e^{-t} \sin(2t)) \\ y(0) &= c_1 \underset{1}{e^0} \cdot \underset{1}{\cos(0)} + c_2 \underset{1}{e^0} \cdot \underset{0}{\sin(0)} = (1 = y_0) \end{aligned}$$

$$\text{Alpou } y(t) = (2 e^{-t} \cdot \sin(2t))$$

$$y'(t) = -(2 e^{-t} \sin(2t)) + 2(2 e^{-t} \cos(2t))$$

$$y'(0) = -(2 \underset{1}{e^0} \cdot \underset{0}{\sin(0)}) + 2(2 \underset{1}{e^0} \cdot \underset{1}{\cos(0)}) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2c_2 = 1 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{2}$$

H považkun zvouc tuz MAT εivaz $y(t) = \frac{1}{2} e^{-t} \sin(2t)$

Mn oμορφών ΔΕ 2ns τις με σταθμούς αυτές εστες.
 $a\ddot{y}_1(t) + b\dot{y}_1(t) + c y_1(t) = q(t)$
 $a, b, c \in \mathbb{R}$, $q(t)$ μία δομή συνόψης

Eπων $y_1(t), y_2(t)$ τυχαίες λύσεις της *

$$\begin{aligned} a\ddot{y}_1 + b\dot{y}_1 + c y_1 &= q \quad (*) \\ a\ddot{y}_2 + b\dot{y}_2 + c y_2 &= q \quad (***) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a(y_1'' + b y_1' + c y_1) &= q \\ a(y_2'' + b y_2' + c y_2) &= q \end{aligned}$$

$$= c_1 y_1' + c_2 y_2'$$

Αρμόδιας κατα μέλη της (*), (***)

$$a(y_1'' - y_2'') + b(y_1' - y_2') + c(y_1 - y_2) = q - q = 0$$

$$\Leftrightarrow a(y_1 - y_2)'' + b(y_1 - y_2)' + c(y_1 - y_2) = 0 \quad (\sim)$$

Θέτουμε $y_{th}(t) = y_1(t) - y_2(t)$

τότε $n \sim$ γραφή των

$$a\ddot{y}_{th} + b\dot{y}_{th} + c y_{th} = 0 \quad \leftarrow \text{Έκτη ημερη συνάριθμος}$$

$$a\ddot{y}_1^{(t)} - y_2^{(t)} = y_{th}(t) \Rightarrow [y_{th}(t) = y_1(t) - y_2(t)] \quad (\approx)$$

$y_1(t) = y_{th}(t)$ ή γρήγορη λύση της εξισώσεων

$y_2(t) = y_{th}(t)$ ή αλλαγή λύση της εξισώσεων

Έγκεκη λύση: $y_j(t) = y_{th}(t) + y_{pl}(t)$ \leftarrow έως πότε οι αριθμοί της προβλημάτου
 \uparrow λύση της αρμόδιων εξισώσεων

$q(t)$	$y_{pl}(t)$
P_n ή άλλων n βαθμών	$t^s (A_n t^n + A_{n-1} t^{n-1} + \dots + A_1 t + A_0)$, $s = 0, 1, 2$
$P_n(t) e^{kt}$	$t^s (A_n t^n + A_{n-1} t^{n-1} + \dots + A_1 t + A_0) e^{kt}$, $s = 0, 1, 2, \dots$
$P_n(t) \begin{cases} \sin(kt) \\ \cos(kt) \end{cases}$	$t^s (A_n t^n + A_{n-1} t^{n-1} + \dots + A_1 t + A_0) (\cos(kt) + \frac{t}{k} \sin(kt))$ $t^s (B_n t^n + B_{n-1} t^{n-1} + \dots + B_1 t + B_0) \sin(kt)$ $s = 1, 2, 3$

$$\text{Ταριχ. } q_2(t) = t^2 - t$$

$$t(A_2t^2 + A_1t + A_0) \stackrel{?}{=} A_2t^3 + A_1t^2 + A_0t$$

$$t^2(A_2t^2 + A_1t + A_0) = A_2t^4 + A_1t^3 + A_0t^2$$

Ταριχ. Διάλυση

Να βρεθει η γενικη λύση της εξισωσης

$$y'' - 3y' - 4y = 2e^{-t} \quad Y - Y_p + Y_p$$

$$c_1 e^{4t} + c_2 e^{-t}$$

$$\Delta_{λ\text{ών}} y_h'' - 3y_h' - 4y_h = 0 \quad \Delta = 9 - 4(-4) = 25 > 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} \Rightarrow \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$$

$$\text{Ογκή λύση } y_h(t) = c_1 e^{4t} + c_2 e^{-t}$$

$$\text{Υπότιτυση: } P_0(t)e^{-t} \begin{cases} s=0 \rightarrow Y_p(t) = A_0 e^{-t} \\ s=1 \rightarrow Y_p(t) = A_1 t e^{-t} \\ s=2 \rightarrow Y_p(t) = A_2 t^2 e^{-t} \end{cases}$$

$$\text{Συγκλ. 1: } Y_p(t) = A_0 e^{-t}$$

$$Y_p'(t) = -A_0 e^{-t}$$

$$Y_p''(t) = A_0 e^{-t}$$

Επαρρόφουμε στην εξισωση

$$\underbrace{A_0 e^{-t}}_{Y_p''} - 3\underbrace{(-A_0 e^{-t})}_{Y_p'} - 4\underbrace{A_0 e^{-t}}_{Y_p} = 2e^{-t}$$

$$A_0 e^{-t} + 3A_0 e^{-t} - 4A_0 e^{-t} = 2e^{-t} \Rightarrow 0 = 2e^{-t}$$

$$\text{Σορκημα} \quad y_p(t) = A_0 t e^{-t}$$

$$y'_p(t) = A_0 e^{-t} - A_0 t e^{-t}$$

$$y''_p(t) = -A_0 e^{-t} - A_0 t e^{-t} + A_0 t e^{-t} = -2A_0 e^{-t} + A_0 t e^{-t}$$

Επαρπασσουγε απων εξιώνων

$$-2A_0 e^{-t} + A_0 t e^{-t} - 3(A_0 e^{-t} - A_0 t e^{-t}) \\ -4A_0 t e^{-t} = 2e^{-t}$$

$$-2A_0 e^{-t} + A_0 t e^{-t} - 3A_0 e^{-t} + 3A_0 t e^{-t} \\ -4A_0 t e^{-t} = 2e^{-t}$$

$$-5A_0 e^{-t} + 2e^{-t} \Rightarrow A_0 = -\frac{2}{5}$$

$2^m \checkmark$

Αριθμητική ζύγων της εξιώνων

$$y(t) = y_n(t) + y_p(t) = (1e^{4t} + (2e^{-t} - \frac{2}{5}t)e^{-t}) = \\ = (1e^{4t} + (2 - \frac{2}{5}t)e^{-t}) \quad (1, 2 \in \mathbb{R})$$

Παραδίγματα της λύσης κλινικής ΗΠΕV

Να βραχιονίσεται η λύση του ΗΑΤ

$$\begin{cases} y'' - 3y' - 4y = 2e^{-t} & y(t) = (1e^{4t} + (2 - \frac{2}{5}t)e^{-t}) \\ y(0) = 1 & y'(t) = 4(1e^{4t} - \frac{2}{5}e^{-t}) - (2 - \frac{2}{5}t)e^{-t} \\ y'(0) = 0 & \end{cases}$$

$$y(0) = 1 + (2 - 1) \rightarrow \text{εστημα} \\ y'(0) = 4(1 - \frac{2}{5}) - 2$$

$$\begin{cases} 1 + (2 - 1) = 1 \\ 4(1 - \frac{2}{5}) - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2 - 1 = 1 \\ 4 - \frac{8}{5} - 2 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{Ηροοδίτω κατα}} \begin{cases} 1 + 2 - 1 = 1 \\ 4 - \frac{8}{5} = \frac{2}{5} \end{cases} \xrightarrow{\text{Ηροοδίτω κατα}}$$

Ηροοδίτω κατα μέχι

$$5 \cdot 1 = 1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5} \Rightarrow 1 = \frac{7}{25}$$

Υπόθεση κατα λύση του προβ

$$2 - 1 - \frac{7}{25} = \frac{18}{25}$$

$$y(t) = \frac{7}{25}e^{4t} + \left(\frac{18}{25} - \frac{2}{5}t\right)e^{-t}$$

Acknowledgment:

Posin(2t)

SOS

Σύγχρονη

$$y'' + 2y' + 5y = 3 \sin(2t)$$

Yrh.

$$\xrightarrow{s=0} A_0 \sin(2t) + B_0 \cos(2t)$$

$$Y_P \xrightarrow{s=1} A_0 t \sin(2t) + B_0 t \cos(2t)$$

$$\xrightarrow{s=2} A_0 t^2 \sin(2t) + B_0 t^2 \cos(2t)$$