10-11-2025 , μάθημα 6

sos

Άσκηση Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης :

$$y'' + 2y' + 5y = 3\cdot \sin(2t)$$

ΛΥΣΗ

Η ομογενής εξίσωση είναι: $y_h'' + 2y_h' + 5y_h = 0$

Χαρακτηριστική εξίσωση: $r^2 + 2r + 5 = 0$

$\Delta = 4 - 4\cdot 5 = -16 < 0$ $\quad r_{1,2} = \dfrac{-2 \pm i\cdot\sqrt{|-16|}}{2} = \dfrac{-2 \pm 4\cdot i}{2} = -1 \pm 2i$

(δηλαδή είναι της μορφής $r_{1,2} = \lambda \pm i\cdot\mu$)

(Υπενθύμιση: Αν $\Delta < 0$, τότε η γενική λύση της (ομογενούς) εξίσωσης είναι:
$y(t) = c_1\cdot e^{\lambda t}\cdot\cos(\mu t) + c_2\cdot e^{\lambda t}\cdot\sin(\mu t)$)

Άρα, η γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης είναι:

$$\boxed{y_h(t) = c_1\cdot e^{-t}\cdot\cos(2t) + c_2\cdot e^{-t}\cdot\sin(2t)}$$

Για να βρούμε την ειδική λύση $y_p(t)$, είμαστε στην περίπτωση 3, διότι η συνάρτηση $3\cdot\sin(2t)$ είναι της μορφής $\underbrace{P_n(t)}_{3}\cdot\sin(kt)$.

$$y_p'' + 2y_p' + 5y_p = 3\cdot\sin(2t)$$

περίπτωση 3

$$y_p(t)\begin{cases} \xrightarrow{s=0} A_0\cdot\cos(2t) + B_0\cdot\sin(2t) & (\text{δοκιμή } 1)\\ \xrightarrow{s=1} A_0\cdot t\cdot\cos(2t) + B_0\cdot t\cdot\sin(2t) & (\text{δοκιμή } 2)\\ \xrightarrow{s=2} A_0\cdot t^2\cdot\cos(2t) + B_0\cdot t^2\cdot\sin(2t) & (\text{δοκιμή } 3)\end{cases}$$

Δοκιμή 1 (Για $s=0$)

Έχουμε: $y_p(t) = A_0\cdot\cos(2t) + B_0\cdot\sin(2t)$

$$y_p'(t) = -2A_0\cdot\sin(2t) + 2B_0\cdot\cos(2t)$$

$$y_p''(t) = -4A_0\cdot\cos(2t) - 4B_0\cdot\sin(2t)$$

Εφαρμόζουμε στην εξίσωση:

$$y_p'' + 2y_p' + 5y_p = 3\sin(2t) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow -4A_0\cdot\cos(2t) - 4B_0\cdot\sin(2t) - 4A_0\cdot\sin(2t) + 4B_0\cdot\cos(2t) + 5A_0\cdot\cos(2t) +$$

$$+ 5B_0\cdot\sin(2t) = 3\cdot\sin(2t) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (A_0 + 4B_0)\cdot\cos(2t) + (-4A_0 + B_0)\cdot\sin(2t) = 0\cdot\cos(2t) + 3\cdot\sin(2t)$$

$$A_0 + 4B_0 = 0 \Rightarrow A_0 = -4B_0$$

$$-4A_0 + B_0 = 3 \Rightarrow -4\cdot(-4B_0) + B_0 = 3 \Rightarrow 17B_0 = 3 \Rightarrow B_0 = \frac{3}{17}$$

, άρα: $A_0 = -4\cdot\frac{3}{17} \Longrightarrow A_0 = -\frac{12}{17}$

(Αφού βρήκα αποτέλεσμα με τη δοκιμή 1, δεν χρειάζεται να πάω στις δοκιμές 2 και 3).

Άρα, η ειδική λύση της εξίσωσης είναι:

$$\boxed{y_p(t) = -\frac{12}{17}\cdot\cos(2t) + \frac{3}{17}\cdot\sin(2t)}$$

Γενική λύση : $y(t) = y_h(t) + y_p(t) \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \boxed{y(t) = c_1\cdot e^{-t}\cdot\cos(2t) + c_2\cdot e^{-t}\sin(2t) - \frac{12}{17}\cdot\cos(2t) + \frac{3}{17}\cdot\sin(2t)}$$

sos sos

Άσκηση

Να λυθεί η εξίσωση:

$$y'' + y' + y = \underbrace{t^2 + t + 1}_{q(t) = \mathbb{P}_2(t)}$$

ΛΥΣΗ

Εφόσον $q(t) = \mathbb{P}_2(t)$, είμαστε στην περίπτωση 1 για τον υπολογισμό της $y_p(t)$. Άρα:

$$y_p(t) = (A_2t^2 + A_1t + A_0)\cdot t^s \quad , \quad s = 0, 1, 2$$

Για $s = 0$:

$$y_p(t) = A_2t^2 + A_1t + A_0$$

$$y_p'(t) = 2A_2t + A_1$$

$$y_p'' = 2A_2$$

Εφαρμόζουμε στην εξίσωση:

$$2A_2 + \underbrace{2A_2 t} + A_1 + A_2 t^2 + \underbrace{A_1 t} + A_0 = t^2 + t + 1 \iff$$

$$\iff A_2 t^2 + \underbrace{(A_1 + 2A_2)} \cdot t + \underbrace{2A_2 + A_1 + A_0} = 1 \cdot t^2 + 1 \cdot t + 1$$

Έχουμε: $A_2 = 1$

$$A_1 + 2A_2 = 1 \Rightarrow A_1 + 2 = 1 \Rightarrow A_1 = -1$$

$$2A_2 + A_1 + A_0 = 1 \Rightarrow 2 \cdot 1 + (-1) + A_0 = 1 \Rightarrow A_0 = 0$$

Άρα: $\boxed{y_p(t) = t^2 - t}$

Για τον υπολογισμό της $y_h(t)$, έχουμε:

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι: $r^2 + r + 1 = 0$

$\Delta = 1 - 4 = -3$, $\quad r_{1,2} = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{|-3|}}{2} = -\dfrac{1}{2} \pm i \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(είναι της μορφής $r_{1,2} = \lambda \pm i \cdot \mu$)

Άρα: $\boxed{y_h(t) = c_1 \cdot e^{-\frac{t}{2}} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot t\right) + c_2 \cdot e^{-\frac{t}{2}} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot t\right)}$

Άρα, η γενική λύση της εξίσωσης είναι:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = \boxed{c_1 \cdot e^{-\frac{t}{2}} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right) + c_2 \cdot e^{-\frac{t}{2}} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right) + t^2 - t}$$

Άσκηση Να λυθεί η εξίσωση:

$$y'' + 5y' = \underbrace{e^t}_{q(t)}$$

ΛΥΣΗ

Για τον υπολογισμό της $y_p(t)$, είμαστε στην περίπτωση 2, διότι το $q(t) = \mathbb{P}_n(t) \cdot e^{at}$ (είναι αυτής της μορφής). Άρα:

$$y_p(t) = A_0 \cdot e^t \cdot t^s \quad , \quad s = 0, 1, 2$$

Για $s=0$:

$$y_p(t) = A_0 \cdot e^t$$

$$y_p'(t) = A_0 \cdot e^t$$

$$y_p''(t) = A_0 \cdot e^t$$

Εφαρμόζουμε στην εξίσωση:

$$y'' + 5y' = e^t \Rightarrow A_0 \cdot e^t + 5 \cdot A_0 \cdot e^t = e^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6A_0 \cdot e^t = 1 \cdot e^t \Rightarrow 6A_0 = 1 \Rightarrow A_0 = \frac{1}{6}$$

Άρα: $\boxed{y_p(t) = \frac{1}{6} \cdot e^t}$

Για τον υπολογισμό της $y_h(t)$, έχουμε:

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο: $r^2 + 5r = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow r \cdot (r+5) = 0 \Rightarrow r_1 = 0 \text{ ή } r_2 = -5$$

Άρα: $y_h(t) = c_1 \cdot e^{0 \cdot t} + c_2 \cdot e^{-5t} \Rightarrow \boxed{y_h(t) = c_1 + c_2 \cdot e^{-5t}}$

Γενική λύση: $y(t) = y_h(t) + y_p(t) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = c_1 + c_2 \cdot e^{-5t} + \frac{1}{6} \cdot e^t}$$

Άσκηση Να λυθεί η:

$y'' - y' = e^t$ (Παρόμοια με την προηγούμενη)

ΛΥΣΗ

Έχουμε: $y_p(t) = A_0 \cdot e^t \cdot t^s$, $s = 0, 1, 2$

Για $s=0$: $y_p(t) = A_0 \cdot e^t$, $y_p'(t) = A_0 \cdot e^t$, $y_p''(t) = A_0 \cdot e^t$

Εφαρμόζουμε στην εξίσωση:

$A_0 \cdot e^t - A_0 \cdot e^t = e^t \Rightarrow 0 = e^t$ αδύνατο

Για $s=1$: $y_p(t) = A_0 \cdot t \cdot e^t$

$y_p'(t) = A_0 \cdot e^t + A_0 \cdot t \cdot e^t$

$y_p''(t) = A_0 \cdot e^t + A_0 \cdot e^t + A_0 \cdot t \cdot e^t = 2A_0 \cdot e^t + A_0 \cdot t \cdot e^t$

Εφαρμόζοντας στην εξίσωση, έχουμε:

$2A_0 e^t + \cancel{A_0 t \cdot e^t} - A_0 e^t - \cancel{A_0 t \cdot e^t} = e^t \Rightarrow A_0 = 1$

Άρα: $y_p(t) = t \cdot e^t$

Χαρακτηριστική εξίσωση: $r^2 - r = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow r \cdot (r-1) = 0 \Rightarrow r_1 = 0$ ή $r_2 = 1$

Άρα: $y_h(t) = c_1 \cdot e^{0 \cdot t} + c_2 \cdot e^{1 \cdot t} = c_1 + c_2 \cdot e^t$

Γενική λύση: $y(t) = y_h(t) + y_p(t) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = c_1 + c_2 \cdot e^t + t \cdot e^t}$$

Μετασχηματισμός Fourier

Έστω $y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ορίζουμε τον μετασχηματισμό Fourier της y να είναι η $\hat{y}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\hat{y}(\omega) = \mathcal{F}\{y\}(\omega) = \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \cdot e^{-i\omega t}\, dt} \quad , i = \sqrt{-1}$$

Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{y}\}(t) = \boxed{\frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{y}(\omega) \cdot e^{i\omega t}\, d\omega} \quad , i = \sqrt{-1}$$

$$\begin{tikzcd} t \arrow[r, "\mathcal{F}"] & \omega \arrow[l, bend left, "\mathcal{F}^{-1}"] \end{tikzcd}$$

Συνέλιξη

Έστω $y_1, y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $(y_1 * y_2)(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$(y_1 * y_2)(t) = \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} y_1(\tau) \cdot y_2(t-\tau)\, d\tau}$$

Απόδειξη:

Θ.δ.ο $\boxed{(y_1 * y_2)(t) = (y_2 * y_1)(t)}$. Έχουμε:

$$(y_1 * y_2)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} y_1(\tau) \cdot y_2(t-\tau)\, d\tau \;\; \frac{\text{Θέτω } \bar{\tau} = t - \tau \Rightarrow \tau = t - \bar{\tau}}{\text{με } d\bar{\tau} = -d\tau}$$

$$= \int_{+\infty}^{-\infty} y_1(t-\bar{\tau}) \cdot y_2(\bar{\tau}) \cdot (-d\bar{\tau}) = -\int_{+\infty}^{-\infty} y_2(\bar{\tau}) \cdot y_1(t-\bar{\tau})\, d\bar{\tau} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} y_2(\bar{\tau}) \cdot y_1(t-\bar{\tau})\, d\bar{\tau} = (y_2 * y_1)(t) \quad \blacksquare$$

δ του Dirac

$\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\delta(t) = 0$ $\forall\ t \neq 0$ και έχει την ιδιότητα $\forall\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \cdot f(t)\, dt = f(0)}$$

Πόρισμα:

Αν $f(t) = 1$, τότε : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \cdot 1\, dt = 1 \Rightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, dt = 1}$

Θα βρω τον μετασχηματισμό Fourier της δ του Dirac :

$$\hat{\delta}(\omega) = \mathcal{F}\{\delta\}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \cdot \underbrace{e^{-i\omega t}}_{f(t)}\, dt = f(0) = e^{-i\omega \cdot 0} = 1$$

Ιδιότητα:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau) \cdot f(\tau)\, d\tau = \qquad \big(\text{ισχύει: } (\delta * f)(\tau) = (f * \delta)(\tau)\big)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) \cdot \underbrace{f(t-\tau)}_{g(\tau)}\, d\tau = g(0) = f(t-0) = \boxed{f(t)}$$

Παραδείγματα μετασχηματισμού Fourier για κάποιες βασικές συναρτήσεις (Θα δίνεται αν χρειαστεί στην εξεταστική) :

$y(t)$	$\hat{y}(\omega)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-\tau)$	$e^{-i\omega\tau}$
1	$2\pi \cdot \delta(\omega)$
$e^{i\omega_0 t}$	$2\pi \cdot \delta(\omega-\omega_0)$
$\cos(\omega_0 \cdot t)$	$\pi \cdot (\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0))$
$\sin(\omega_0 \cdot t)$	$i\pi \cdot (\delta(\omega+\omega_0) - \delta(\omega-\omega_0)$
$e^{-t^2/2}$	$\sqrt{2\pi} \cdot e^{-\omega^2/2}$

Ιδιότητες: (με ✓ θα τις χρησιμοποιήσουμε περισσότερο)

✓ Γραμμικότητα : $\alpha \cdot y_1(t) + b \cdot y_2(t) \xrightarrow{F} \alpha \cdot \hat{y}_1(\omega) + b \cdot \hat{y}_2(\omega)$

✓ Μετατόπιση στο χρόνο: $y(t-\tau) \xrightarrow{F} e^{-i\omega\tau} \cdot \hat{y}(\omega)$

Μετατόπιση στη συχνότητα : $e^{i\omega_0 t} \cdot y(t) \xrightarrow{F} \hat{y}(\omega-\omega_0)$

✓ Συνέλιξη : $(y_1 * y_2)(t) \xrightarrow{F} \hat{y}_1(\omega) \cdot \hat{y}_2(\omega)$

Πολλ/σμός : $y_1(t) \cdot y_2(t) \xrightarrow{F} \frac{1}{2\pi} \cdot (\hat{y}_1 * \hat{y}_2)(\omega)$

Ισχύει (χωρίς απόδειξη):

$$\mathcal{F}\{y_1 \cdot y_2\}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} y_1(t) \cdot y_2(t) \cdot e^{-i\omega t}\, dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{y}_1(\Omega) \cdot \hat{y}_2(\omega - \Omega)\, d\Omega$$

Έστω $y(t)$ τ.ω. $\lim_{t \to \pm\infty} y(t) = 0$ και $\exists$ η y'.

$$\mathcal{F}\{y'\}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} y'(t) \cdot e^{-i\omega t}\, dt = \left[y(t) \cdot e^{-i\omega t} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \cdot \left(e^{-i\omega t}\right)' dt =$$

$$= \cancelto{0}{\lim_{t \to +\infty} \left(y(t) \cdot e^{-i\omega t} \right)} - \cancelto{0}{\lim_{t \to -\infty} \left(y(t) \cdot e^{-i\omega t} \right)} + i\omega \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \cdot e^{-i\omega t}\, dt}_{\hat{y}(\omega)}$$

, άρα: $\mathcal{F}\{y'\}(\omega) = i\omega \cdot \hat{y}(\omega)$

Επιπλέον, αν $\exists$ και η y'' και $\lim_{t \to \pm\infty} y'(t) = 0$, τότε:

$$\mathcal{F}\{y''\}(\omega) = i\omega \cdot \mathcal{F}\{y'\}(\omega) = i\omega \cdot i\omega \cdot \hat{y}(\omega) = i^2 \cdot \omega^2 \cdot \hat{y}(\omega) =$$

$$\overset{i^2 = -1}{=\!=} -\omega^2 \cdot \hat{y}(\omega)$$

Αν έχουμε την $\alpha \cdot y''(t) + b \cdot y'(t) + c \cdot y(t) = q(t)$, τότε:

$$\mathcal{F}\{\alpha \cdot y_p''(t) + b \cdot y_p'(t) + c \cdot y_p(t)\} = \hat{q}(\omega) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha \cdot \mathcal{F}\{y_p''\}(\omega) + b \cdot \mathcal{F}\{y_p'\}(\omega) + c \cdot \mathcal{F}\{y_p\}(\omega) = \hat{q}(\omega) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\alpha \cdot \omega^2 \cdot \hat{y}_p(\omega) + i\omega \cdot b \cdot \hat{y}_p(\omega) + c \cdot \hat{y}_p(\omega) = \hat{q}(\omega) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{y}_p(\omega) = \frac{\hat{q}(\omega)}{-\alpha\omega^2 + i\omega b + c}$$