20-10-2025, μάθημα 3

Κανόνες Παραγώγισης

(I) $$\frac{d f(t,y(t))}{dt} = \frac{\partial f(t,y)}{\partial t} + \frac{\partial f(t,y)}{\partial y} \cdot \frac{dy(t)}{dt}$$

(ή συνοπτικά: $f'(t,y(t)) = f_t + f_y \cdot y'$)

(II) $$\frac{d f(x(t),y(t))}{dt} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \cdot \frac{dx(t)}{dt} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \cdot \frac{dy(t)}{dt}$$

(ή συνοπτικά: $f'(x(t),y(t)) = f_x \cdot x'(t) + f_y \cdot y'(t)$)

ΣΧΟΛΙΟ: Για $x(t) = t$ (I) = (II)

Θα επαληθεύσουμε αν ισχύει η (I):

Έστω: $f(t,y(t)) = t \cdot y(t)$ και $y(t) = t^2 + 2$

Αριστερό μέλος: $f(t,y(t)) = t \cdot (t^2+2) = t^3 + 2t$

$$\frac{d f(t,y(t))}{dt} = (t^3+2t)' = \boxed{3t^2+2}$$

Δεξί μέλος: $\frac{\partial f(t,y)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(t \cdot y) = y$

$$\frac{\partial f(t,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(t\cdot y) = t$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = (t^2+2)' = 2t$$

Άρα: $y + t\cdot 2t = y + 2t^2 = \underbrace{t^2+2}_{y(t)} + 2t^2 = 3t^2+2$

Ακριβείς Διαφορικές Εξισώσεις

μορφή: $\boxed{M(t,y(t)) + N(t,y(t))\cdot y'(t) = 0}$

, όπου υπάρχει συνάρτηση $\psi(t,y)$, τ.ω.:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = M(t,y) \quad \text{και} \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = N(t,y)$$

$$M(t,y) + N(t,y)\cdot y'(t) = 0 \iff$$

$$\iff \frac{\partial \psi(t,y)}{\partial t} + \frac{\partial \psi(t,y)}{\partial y}\cdot \frac{dy(t)}{dt} = 0 \iff$$

$$\iff \frac{d\psi(t,y(t))}{dt} = 0 \implies$$ (από κανόνα παραγώγισης (I))

$\Rightarrow \quad \psi(t, y(t)) = c \quad , c \in \mathbb{R}$

ΣΧΟΛΙΟ: Η διαδικασία της Ακριβής:

Δ.Ε. $\longrightarrow$ αλγεβρική εξίσωση

ΘΕΩΡΗΜΑ

Θα υπάρχει η συνάρτηση $\psi(t, y(t))$, τ.ω. $\psi_t = M$ και $\psi_y = N$, αν και μόνο αν $M_y = N_t$

Απόδειξη:

$(\Rightarrow)$ Έστω ότι $\exists \ \psi$ τ.ω. $\boxed{\psi_t = M}$ ⊛ και $\boxed{\psi_y = N}$ ⊛⊛.

Παραγωγίζουμε την ⊛ ως προς y και την ⊛⊛ ως προς t:

$\psi_{ty} = M_y$ και $\psi_{yt} = N_t$

Όμως: $\psi_{ty} = \psi_{yt}$, άρα: $M_y = N_t$.

$(\Leftarrow)$ Έστω $M_y = N_t$ (υπόθεση).

Θ.δ.ο. $\exists \ \psi$ τ.ω. $\psi_t = M$ και $\psi_y = N$.

Έστω ψ τ.ω. $\psi_t = M(t, y) \Longrightarrow$

$\Rightarrow \int \psi_t \, dt = \int M(t, y(t)) \, dt \Longrightarrow \boxed{\psi(t, y) = \int M(t, y(t)) dt + c(y)}$

Παραγωγίζουμε ως προς y:

$$\psi_y(t,y) = \frac{\partial}{\partial y}\int M(t,y(t))\,dt + c'(y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \psi_y(t,y) = \int \frac{\partial}{\partial y} M(t,y)\,dt + c'(y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c'(y) = \underbrace{\psi_y(t,y) - \int \frac{\partial}{\partial y} M(t,y)\,dt}$$

(**ΣΧΟΛΙΟ**: Ο μόνος τρόπος για να ισχύει η ισότητα είναι το δεύτερο μέλος να είναι συνάρτηση μόνο του y.)

Παραγωγίζω ως προς t:

$$\psi_{yt}(t,y) - \cancel{\frac{\partial}{\partial t}}\int \frac{\partial}{\partial t} M\,\cancel{dt} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \psi_{yt}(t,y) = M_y = N_t \quad \text{(από υπόθεση)}$$

, άρα $\psi_{yt}(t,y) = N_t$, $(\psi_y)_t = N_t$

Άρα: $N = \psi_y$ ▨

Παράδειγμα   Να λυθεί η εξίσωση:

$$\underbrace{(y\cdot \cos t + 2t\cdot e^y)}_{M(t,y)} + \underbrace{(\sin t + t^2\cdot e^y - 1)}_{N(t,y)}\cdot y' = 0$$

ΛΥΣΗ

Αρχικά, εξετάζουμε αν είναι ακριβής από την ικανή και αναγκαία συνθήκη: $M_y = N_t$

$$M_y = (y\cdot\cos t + 2t\cdot e^y)_y = (y\cdot\cos t)_y + (2t\cdot e^y)_y =$$

$$= \cos t + 2t\cdot e^y$$

$$N_t = (\sin t + t^2\cdot e^y - 1)_t = (\sin t)_t + (t^2\cdot e^y)_t + \cancel{(-1)_t}^{\,0} =$$

$$= \cos t + 2t\cdot e^y$$

Άρα, $M_y = N_t$, οπότε ακριβής Δ.Ε.

Άρα $\exists$ μια συνάρτηση $\psi(t,y)$, τ.ω. $\psi_t = M$ και $\psi_y = N$

Θα βρούμε την ψ.

Έχουμε: $\psi_t = M \Leftrightarrow \psi_t = y\cdot\cos t + 2t\cdot e^y \xRightarrow{\text{Ολοκληρώνω ως προς } t}$

$$\Rightarrow \int \psi_t\, dt = \int (y\cdot\cos t + 2t\cdot e^y)\, dt + c(y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \psi(t,y) = y\cdot\int \cos t + 2\cdot e^y\cdot\int t\, dt + c(y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \psi(t,y) = y\cdot\sin t + \cancel{2}e^y\cdot\frac{t^2}{\cancel{2}} + c(y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \psi(t,y) = y\cdot\sin t + t^2\cdot e^y + c(y)$$

Επίσης θέλουμε να ισχύει $\psi_y = N(t,y)$

$$\psi_y(t,y) = N(t,y) \Leftrightarrow (y\cdot\sin t + t^2\cdot e^y + c(y))_y = \sin t + t^2\cdot e^y - 1 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \quad (y\cdot \sin t)_y + (t^2\cdot e^y)_y + (c(y))_y = \sin t + t^2\cdot e^y - 1 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad \cancel{\sin t} + \cancel{t^2\cdot e^y} + c'(y) = \cancel{\sin t} + \cancel{t^2\cdot e^y} - 1 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad c'(y) = -1 \quad \Longrightarrow \quad c(y) = -y$

Γενική λύση: $\quad \Psi(t,y) = c \quad \Rightarrow \quad , \; c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \quad \boxed{y\cdot \sin t + t^2\cdot e^y - y = c} \quad , \; c \in \mathbb{R}$

αλγεβρική εξίσωση που δίνει τη λύση.
(Θα μπορούσα να λύσω και ως προς y).

Παράδειγμα Να λυθεί η εξίσωση:

$$\underbrace{2t + y^2}_{M(t,y)} + \underbrace{2ty}_{N(t,y)}\cdot y' = 0$$

ΛΥΣΗ

Πρώτα εξετάζω αν είναι ακριβής, από την ικανή και αναγκαία συνθήκη: $M_y = N_t$

$M_y = (2t + y^2)_y = 2y \quad$ και $\quad N_t = (2ty)_t = 2y$

Άρα είναι ακριβής, δηλαδή $\exists$ μια συνάρτηση $\Psi(t,y)$, τ.ω.:

$\Psi_t = M \quad$ και $\quad \Psi_y = N$

Τώρα θα προσδιορίσουμε την ψ:

$$\psi_t = M \iff \psi_t = 2t + y^2 \xrightarrow{\text{ολοκληρωνω ως προς } t}$$

$$\Rightarrow \int \psi_t \, dt = \int (2t + y^2)\, dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \psi(t,y) = t^2 + y^2 t + c(y)$$

Επίσης, θέλουμε: $\psi_y = N$

$$\psi_y(t,y) = N(t,y) \iff (t^2 + y^2 t + c(y))_y = 2ty \iff$$

$$\iff 0 + \cancel{2ty} + c'(y) = \cancel{2ty} \iff c'(y) = 0 \Rightarrow c(y) = 0$$

Γενική λύση: $\psi(t,y) = c \Rightarrow, \; c \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \boxed{t^2 + y^2 t = c}, \quad c \in \mathbb{R}$$

αλγεβρική εξίσωση που δίνει την $y(t)$.

Διαφορικές Εξισώσεις $2^{ας}$ Τάξης - Ομογενείς - με Σταθερούς Συντελεστές

Γενική μορφή: $\boxed{\alpha \cdot y''(t) + b \cdot y'(t) + c \cdot y(t) = 0}$, $\alpha, b, c \in \mathbb{R}$

Θα ψάξουμε για λύσεις της μορφής : $y(t) = e^{r \cdot t}$

$y'(t) = r \cdot e^{rt}$, $y''(t) = r^2 \cdot e^{rt}$

Εφαρμόζουμε στη γενική μορφή της εξίσωσης :

$\alpha \cdot r^2 \cdot e^{rt} + b \cdot r \cdot e^{rt} + c \cdot e^{rt} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow e^{rt} \cdot (\alpha r^2 + br + c) = 0 \xRightarrow{e^{rt}>0}$

$\Rightarrow \boxed{\alpha r^2 + br + c = 0}$

Σ I Αν $\Delta > 0$, τότε $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$

Σ II Αν $\Delta = 0$, τότε $r_1 \in \mathbb{R}$ διπλή ρίζα

Σ III Αν $\Delta < 0$, τότε μιγαδικές ρίζες

ΣΙ)

Οι συναρτήσεις $e^{r_1 t}$ και $e^{r_2 t}$ ικανοποιούν την εξίσωση $\alpha \cdot y'' + b \cdot y' + c \cdot y = 0$

Η γενική μορφή μπορεί να γραφτεί ως:

$y(t) = c_1 \cdot e^{r_1 t} + c_2 \cdot e^{r_2 t}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$\alpha \cdot (c_1 \cdot e^{r_1 t} + c_2 \cdot e^{r_2 t})'' + b \cdot (c_1 \cdot e^{r_1 t} + c_2 \cdot e^{r_2 t})' + c \cdot (c_1 \cdot e^{r_1 t} + c_2 \cdot e^{r_2 t}) =$$

$$= c_1 \cdot [\underbrace{\alpha \cdot (e^{r_1 t})'' + b \cdot (e^{r_1 t})' + c \cdot (e^{r_1 t})}_{=0}] + c_2 \cdot [\underbrace{\alpha \cdot (e^{r_2 t})'' + b \cdot (e^{r_2 t})' + c \cdot (e^{r_2 t})}_{=0}] = 0$$

(διότι τα $e^{r_1 t}$ και $e^{r_2 t}$ είναι λύση της εξίσωσης).

Παράδειγμα Να λυθεί η εξίσωση:

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 0$$

ΛΥΣΗ

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο (ή εξίσωση): $r^2 + 5r + 6 = 0$

$\Delta = 5^2 - 4 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$ $\quad r_{1,2} = \frac{-5 \pm 1}{2} = \begin{cases} -2 \\ -3 \end{cases}$

Η γενική μορφή της λύσης είναι:

$$y(t) = c_1 \cdot e^{r_1 t} + c_2 \cdot e^{r_2 t} = c_1 \cdot e^{-2t} + c_2 \cdot e^{-3t} \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$