24-11-2025 , μάθημα 7

Μετασχηματισμός Fourier:

$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\hat{y}(\omega) = \mathcal{F}\{y\}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\cdot e^{-i\omega t}\,dt$$

Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier:

$\hat{y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{y}\}(t) = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{y}(\omega)\cdot e^{i\omega t}\,d\omega$$

$$\begin{tikzcd} y \arrow[r, "\mathcal{F}"] & \hat{y} \arrow[l, bend left, "\mathcal{F}^{-1}"] \end{tikzcd}$$

Έστω $\alpha y'' + b\cdot y' + c\cdot y = q(t)$, $\alpha, b, c \in \mathbb{R}$

$$f\{y'\}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} y'(t)\cdot e^{-i\omega t}\,dt = \left[y(t)\cdot e^{-i\omega t}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\cdot(e^{-i\omega t})'\,dt =$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\underbrace{\cancel{(y(t)\cdot e^{-i\omega t})}}_{0} - \lim_{t\to-\infty}\underbrace{\cancel{(y(t)\cdot e^{-i\omega t})}}_{0} + i\omega\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\cdot e^{-i\omega t}\,dt =$$

$$= i\omega\cdot\mathcal{F}\{y\}(\omega)$$

Συμπέρασμα : $\mathcal{F}\{y^{(\kappa)}\}(\omega) = (i\omega)^{\kappa}\cdot\mathcal{F}\{y\}(\omega)$

Έστω το ολοκλήρωμα :

$$\boxed{I = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega \xi}}{\omega - z} d\omega} \quad , \omega \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}, \xi \neq 0, \quad z \in \mathbb{C}$$

Διακρίνουμε 3 περιπτώσεις :

(α) Αν $z \in \mathbb{R}$, $\text{Im}\{z\} = 0$, τότε:

$$I = \frac{i}{2} \cdot e^{i \cdot z \cdot \xi} \cdot \text{sgn}(\xi) \quad , \text{όπου} \quad \text{sgn}(\xi) = \begin{cases} 1 & , \text{αν } \xi \geq 0 \\ -1 & , \text{αν } \xi < 0 \end{cases}$$

η συνάρτηση προσήμου

(β) Αν $\text{Im}\{z\} > 0$, τότε :

$$I = \begin{cases} i \cdot e^{iz\xi} & , \text{αν } \xi > 0 \\ 0 & , \text{αν } \xi < 0 \end{cases}$$

(γ) Αν $\text{Im}\{z\} < 0$, τότε :

$$I = \begin{cases} 0 & , \text{αν } \xi > 0 \\ -i \cdot e^{iz\xi} & , \text{αν } \xi < 0 \end{cases}$$

Είχαμε ορίσει την $\delta(t)$ ως μια ειδική συνάρτηση , με

την ιδιότητα : $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau) \cdot f(t) dt = f(\tau)}$

Ο μετασχηματισμός Fourier της $\delta(t)$ είναι:

$$\hat{\delta}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-0)\cdot \underbrace{e^{-i\omega t}}_{F(t)}\, dt = F(0) = e^{-i\omega\cdot 0} = 1$$

Έστω $ay'' + b\cdot y' + cy = \delta(t-\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$ (*)

Το τ είναι παράμετρος από το οποίο θα εξαρτάται η (*)

Τη λύση της (*) την ονομάζουμε συνάρτηση Green της εξίσωσης.

$ay'' + by' + cy = q(t)$, για q τυχαία συνάρτηση

Τη λύση της (*) θα τη συμβολίζουμε ως:

$$G(t;\tau)$$

t → μεταβλητή, τ → παράμετρος

(Διαβάζεται ως: "Η συνάρτηση Green της t δοσμένου του τ")

Παράδειγμα Βρείτε τη συνάρτηση Green της:

$y'' - y = 0$ (→ ομογενής)

ΛΥΣΗ

$$G''(t;\tau) - G(t;\tau) = \delta(t-\tau) \xrightarrow{F}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{F}} \quad -\omega^2 \cdot \hat{G}(\omega;\tau) - \hat{G}(\omega;\tau) = e^{-i\omega\tau} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \hat{G}(\omega;\tau) = -\frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega^2+1}$$

Υπενθύμιση: $\mathcal{F}\{G''\}(\omega) = (i\omega^2)^2 \cdot \hat{G}(\omega;\tau) = i^2\omega^2 \cdot \hat{G}(\omega;\tau) =$

$$= -\omega^2 \cdot \hat{G}(\omega;\tau)$$

και $\mathcal{F}\{\delta(t-\tau)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau) \cdot e^{-i\omega t} dt = e^{-i\omega\tau}$

Θα υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier της $\hat{G}$:

$$G(t;\tau) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{G}(\omega;\tau) \cdot e^{i\omega t} d\omega =$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega^2+1} \cdot e^{i\omega t} d\omega =$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega \cdot \overbrace{(t-\tau)}^{\xi}}}{\omega^2+1} d\omega$$

Θέτω $\xi = t-\tau$.

$\omega^2+1 = 0 \Longrightarrow \omega^2 = -1 \longrightarrow \omega_1 = i, \ \omega_2 = -i$

Άρα, $\omega^2+1 = (\omega+i)\cdot(\omega-i)$

Άρα: $G(t;\tau) = -\frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega\xi}}{(\omega+i)\cdot(\omega-i)} d\omega$

Έχουμε: $$\frac{1}{(\omega+i)\cdot(\omega-i)} = \frac{A}{\omega+i} + \frac{B}{\omega-i} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \cancel{(\omega+i)\cdot(\omega-i)}\cdot\frac{1}{\cancel{(\omega+i)\cdot(\omega-i)}} = (\cancel{\omega+i})\cdot(\omega-i)\cdot\frac{A}{\cancel{\omega+i}} + (\omega+i)\cdot(\cancel{\omega-i})\cdot\frac{B}{\cancel{\omega-i}} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 1 = A\cdot\omega - i\cdot A + B\cdot\omega + i\cdot B \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 1 = (A+B)\cdot\omega + \underbrace{i\cdot(B-A)}_{}$$

Θέλω: $$\begin{cases} A+B=0 \Rightarrow B=-A \\ i\cdot(B-A)=1 \Rightarrow 2\cdot B\cdot i = 1 \Rightarrow B=\frac{1}{2i} \Rightarrow B=\frac{i}{2i^2} \Rightarrow B=-\frac{i}{2} \end{cases}$$

, άρα $A=-B \Rightarrow A=\frac{i}{2}$

, άρα: $$\frac{1}{(\omega+i)\cdot(\omega-i)} = \frac{i}{2}\cdot\frac{1}{\omega+i} - \frac{i}{2}\cdot\frac{1}{\omega-i}$$

Οπότε: $$G(t;\tau) = -\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\omega\xi}}{(\omega+i)\cdot(\omega-i)}\,d\omega =$$

$$= -\frac{i}{2}\cdot\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\omega\xi}}{\omega+i}\,d\omega + \frac{i}{2}\cdot\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\omega\xi}}{\omega-i}\,d\omega =$$

$$= -\frac{i}{2}\cdot\boxed{\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\omega\xi}}{\omega-(-i)}\,d\omega} + \frac{i}{2}\cdot\boxed{\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\omega\xi}}{\omega-i}\,d\omega}$$

Παρατηρούμε ότι τα δύο αυτά ολοκληρώματα είναι της μορφής:

$$I = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\omega\xi}}{\omega-z}\,d\omega.$$

Στο 1^{o} ολοκλήρωμα : $z=-i$, $Im\{z\} = -1 < 0$

Στο 2^{o} ολοκλήρωμα : $z=i$, $Im\{z\} = 1 > 0$

Άρα : $$G(t;\tau) = -\frac{i}{2}\cdot\underbrace{\begin{cases} 0 & , \xi>0 \\ -i\cdot e^{i\cdot(-i)\cdot\xi} & , \xi<0 \end{cases}}_{1^{o}\ \text{ολοκλήρωμα}} + \frac{i}{2}\cdot\underbrace{\begin{cases} i\cdot e^{i\cdot i\cdot\xi} & , \xi>0 \\ 0 & , \xi<0 \end{cases}}_{2^{o}\ \text{ολοκλήρωμα}} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow G(t;\tau) = \begin{cases} 0 - \frac{1}{2}\cdot e^{-\xi} & , \xi>0 \\ -\frac{1}{2}\cdot e^{\xi} + 0 & , \xi<0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow G(t;\tau) = -\frac{1}{2}\cdot e^{-|\xi|} \quad , \xi\neq 0$$

Όμως $\xi = t-\tau$, άρα η συνάρτηση Green είναι η :

$$\boxed{G(t;\tau) = -\frac{1}{2}\cdot e^{-|t-\tau|}} \quad , t\neq\tau$$

ΘΕΩΡΗΜΑ:

Έστω $ay''+by'+cy = q(t)$, $t\geq t_0$ και $G(t;\tau)$ είναι η συνάρτηση Green της εξίσωσης. Τότε, μια ειδική λύση για την εξίσωση δίνεται ως :

$$\boxed{y_p(t) = \int_{t_0}^{+\infty} G(t;\tau)\cdot q(\tau)\,d\tau}$$

Παράδειγμα Με χρήση της συνάρτησης Green, βρείτε μια ειδική λύση της $y'' - y = e^{-t}$, $t > 0$

ΛΥΣΗ

Από το προηγούμενο παράδειγμα έχουμε:

$$G(t;\tau) = -\frac{1}{2}\cdot e^{-|t-\tau|}$$

Από το Θεώρημα, μια ειδική λύση θα είναι:

$$y_p(t) = \int_0^{+\infty} G(t;\tau)\cdot e^{-\tau}\,d\tau = \int_0^{+\infty} -\frac{1}{2}\cdot e^{-|t-\tau|}\cdot e^{-\tau}\,d\tau =$$

$$= \int_0^{t} -\frac{1}{2}\cdot e^{-|t-\tau|}\cdot e^{-\tau}\,d\tau + \int_t^{+\infty} -\frac{1}{2}\cdot e^{-|t-\tau|}\cdot e^{-\tau}\,d\tau =$$

$$= \int_0^{t} -\frac{1}{2}\cdot e^{-(t-\tau)}\cdot e^{-\tau}\,d\tau + \int_t^{+\infty} -\frac{1}{2}\cdot e^{-(\tau-t)}\cdot e^{-\tau}\,d\tau =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\int_0^{t} e^{-t}\,d\tau - \frac{1}{2}\cdot\int_t^{+\infty} e^{t}\cdot e^{-2\tau}\,d\tau =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot e^{-t}\cdot\int_0^{t} d\tau - \frac{1}{2}\cdot e^{t}\cdot\int_t^{+\infty} e^{-2\tau}\,d\tau =$$

$$= -\frac{1}{2} t\cdot e^{-t} - \frac{1}{2}\cdot e^{t}\cdot\int_t^{+\infty} -\frac{1}{2}\cdot(e^{-2\tau})'\,d\tau =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot t\cdot e^{-t} + \frac{1}{4}\cdot e^{t}\cdot\left[e^{-2t}\right]_t^{+\infty} = -\frac{1}{2}\cdot t\cdot e^{-t} - \frac{1}{4}\cdot e^{t}\cdot e^{-2t} =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot e^{-t}\cdot\left(t + \frac{1}{2}\right)$$

Παράδειγμα Να βρεθεί η συνάρτηση Green της:

$$y'' - y' + y = 0$$

ΛΥΣΗ

$$G''(t;\tau) - G'(t;\tau) + G(t;\tau) = \delta(t-\tau) \xrightarrow{\mathcal{F}}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{F}} -\omega^2 \cdot \hat{G}(\omega;\tau) - i\omega \cdot \hat{G}(\omega;\tau) + \hat{G}(\omega;\tau) = e^{-i\omega\tau} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \hat{G}(\omega;\tau)\cdot(-\omega^2 - i\omega + 1) = e^{-i\omega\tau} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \hat{G}(\omega;\tau) = \frac{e^{-i\omega\tau}}{-\omega^2 - i\omega + 1}$$

Θα υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier της $\hat{G}$:

$$G(t;\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{G}\}(t) = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{G}(\omega;\tau)\cdot e^{i\omega t}\, d\omega =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega^2 + i\omega - 1}\cdot e^{i\omega t}\, d\omega =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega\cdot(t-\tau)}}{\omega^2 + i\omega - 1}\, d\omega \qquad \underline{\underline{\text{θέτω } \xi = t-\tau}}$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega\xi}}{\omega^2 + i\omega - 1}\, d\omega$$

$$\omega^2 + i\omega - 1 = 0$$

$$\Delta = i^2 - 4\cdot(-1) = -1 + 4 = 3 \qquad \omega_{1,2} = \frac{-i \pm \sqrt{3}}{2}$$

Έχουμε: $\frac{1}{\omega^2+i\omega-1} = \frac{1}{\left(\omega-\frac{-i+\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(\omega-\frac{-i-\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{A}{\omega-\frac{-i+\sqrt{3}}{2}} + \frac{B}{\omega+\frac{i+\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 1 = A\cdot\left(\omega+\frac{i+\sqrt{3}}{2}\right) + B\cdot\left(\omega-\frac{-i+\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (A+B)\cdot\omega + A\cdot\left(\frac{i+\sqrt{3}}{2}\right) - B\cdot\left(\frac{-i+\sqrt{3}}{2}\right) = 1 \Rightarrow$$ (Θέλουμε $A+B=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow A=-B$)

$$\xRightarrow{A=-B} A\cdot\frac{i+\sqrt{3}}{2} + A\cdot\frac{-i+\sqrt{3}}{2} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{A}{2}\cdot\left(\cancel{i}+\sqrt{3}-\cancel{i}+\sqrt{3}\right) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{A}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\sqrt{3} = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow A = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

, άρα $B = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

, άρα $\frac{1}{\omega^2+i\omega-1} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\omega-\frac{-i+\sqrt{3}}{2}} + \frac{-\frac{\sqrt{3}}{3}}{\omega+\frac{i+\sqrt{3}}{2}}$

Οπότε: $G(t;\tau) = -\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\omega\xi}}{\omega^2+i\omega-1}\,d\omega =$

$$= -\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\omega-\frac{-i+\sqrt{3}}{2}} + \frac{-\frac{\sqrt{3}}{3}}{\omega+\frac{i+\sqrt{3}}{2}}\right)\cdot e^{i\omega\xi}\,d\omega =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{e^{i\omega\xi}}{\omega-\frac{-i+\sqrt{3}}{2}} - \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{e^{i\omega\xi}}{\omega+\frac{i+\sqrt{3}}{2}}\right)d\omega =$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\boxed{\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\omega\xi}}{\omega-\underbrace{\left(-\frac{i}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}_{z\ ,\ \mathrm{Im}\{z\}<0}}d\omega} + \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\boxed{\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\omega\xi}}{\omega-\underbrace{\left(-\frac{i}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}_{z\ ,\ \mathrm{Im}\{z\}<0}}d\omega}$$

Παρατηρούμε ότι τα δύο ολοκληρώματα είναι της μορφής:

$I = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\omega\xi}}{\omega-z}d\omega$. Και τα δύο έχουν $\mathrm{Im}\{z\}<0$, άρα:

$$G(t;\tau) = -\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\begin{cases}0 & ,\ \text{αν } \xi>0\\ -i\cdot e^{i\cdot\left(-\frac{i}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\xi} & ,\ \text{αν } \xi<0\end{cases} + \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\begin{cases}0 & ,\ \text{αν } \xi>0\\ -i\cdot e^{i\cdot\left(-\frac{i}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\xi} & ,\ \text{αν } \xi<0\end{cases} =$$

$$= \begin{cases}0 & ,\ \text{αν } \xi>0\\ \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot i\cdot\left(e^{\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i\right)\cdot\xi} - e^{\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i\right)\cdot\xi}\right) & ,\ \text{αν } \xi<0\end{cases}$$

$\underline{\underline{\xi = t-\tau}}$

$$= \begin{cases}0 & ,\ \text{αν } t>\tau\\ \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot i\cdot\left(e^{\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i\right)\cdot(t-\tau)} - e^{\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i\right)\cdot(t-\tau)}\right) & ,\ \text{αν } t<\tau\end{cases}$$