06.10.25 **Τι είναι Διαφορική Εξίσωση;**

Μια εξίσωση η οποία περιέχει μία ή περισσότερες παραγώγους μια άγνωστης συνάρτησης

Παράδειγμα ⊛

$u'(x)=u(x)$

- $u(x)=e^x$

  $u'(x)=(e^x)'=e^x=u(x)$ ικανοποιεί την εξίσωση

- $u(x)=e^x+c$

  $u'(x)=e^x \neq e^x+c=u(x)$ δεν ικανοποιεί την εξίσωση

- $u(x)=c\cdot e^x,\ c\in\mathbb{R}$

  $u'(x)=(c\cdot e^x)'=c(e^x)'=c\cdot e^x=u(x)$ ικανοποιεί την εξίσωση

▷ Συμβολισμοί: $f'(x)=\lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

$$f'(x_0)=\frac{df(x_0)}{dx}$$

$f''=(f')'$, $f'''=(f'')'$, $f^{(k)}$: k-οστή παράγωγο της f

π.χ. $f'''(x)=f^{(3)}(x)$

$$f^{(k)}(x)=\frac{d^k f(x)}{dx^k}$$

π.χ. για $k=1$, $f^{(1)}(x)=\dfrac{d^1 f(x)}{dx^1}=\dfrac{df(x)}{dx}$

για $k=2$, $f^{(2)}(x)=\dfrac{d^2 f(x)}{dx^2}$

⊛ Στο παράδειγμα είχαμε $u'(x)=u(x) \iff \dfrac{du(x)}{dx}=u(x)$

→ Δεύτερος Νόμος Νεύτωνα: $F=m\cdot a \iff F=m\cdot\dfrac{d^2x(t)}{dt^2}$

Ταξινόμηση Διαφορικών Εξισώσεων

Διακρίνουμε δύο βασικούς τύπους:

1) Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις (Σ.Δ.Ε)

περιλαμβάνουν παραγώγους μιας άγνωστης συνάρτησης η οποία εξαρτάται από μία μοναδική ελεύθερη μεταβλητή

Π.χ $y=y(t)$, t, $y'(t)$: Η εξίσωση θα περιλαμβάνει $t, y(t), y'(t)$

2) Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις (Μ.Δ.Ε)

περιλαμβάνουν (μερικές) παραγώγους μιας άγνωστης συνάρτησης η οποία εξαρτάται από περισσότερες από μία ελεύθερες μεταβλητές

Π.χ $u=u(t,x)$

- $u_t(t,x) = \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t}$

- $u_x(t,x) = \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial x}$

- $u_{tt}(t,x) = \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}$

- $u_{xx}(t,x) = \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}$

- $u_{xt}(t,x) = \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x \cdot \partial t}$

Παράδειγμα

$u_{tt} - c^2 \cdot u_{xx} = 0$

$u_t - k u'_{xx} = 0$

Τάξη Σύνηθων Διαφορικών Εξισώσεων

Η τάξη Σύνηθων Διαφορικών Εξισώσεων προσδιορίζεται από την τάξη της μεγιστοβάθμιας παραγώγου της άγνωστης συνάρτησης.

Π.χ α) $y'(t) = y(t)$: $1^{ης}$ τάξης

β) $y''(t) - 3y'(t) + y(t) = 0$: $2^{ης}$ τάξης

Παραδείγματα

1) $y'(t) = y(t)$

$F[t, y(t), y'(t)] = y'(t) - y(t) = 0$

2) $F[t, y(t), y'(t), y''(t)] = y'(t) - 3y'(t) + y(t) = 0$

Γραμμικότητα

Γραμμική πρέπει: i) Όταν δεν υπάρχουν γινόμενα των $y, y', \dots, y^{(p)}$

ii) Όταν δεν υπάρχουν δυνάμεις των $y, y', \dots, y^{(p)}$

Μη γραμμική: Όταν παραβιάζεται τουλάχιστον μία συνθήκη γραμμικότητας i) και ii)

Παραδείγματα

1) $y'(t)=y(t)$: 1ης τάξης, γραμμική
2) $y'(t)=t^2 y(t)$: 1ης τάξης, γραμμική
3) $y''(t)+ty'(t)+y^2(t)$: 2ης τάξης, μη γραμμική παραβιάστηκε η ii)
4) $y'(t)+y(t)\cdot y'(t)=0$: 1ης τάξης, μη γραμμική παραβιάστηκε η i)

Γενική μορφή γραμμικών p-τάξης Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων

$$a_p(t)y^{(p)}(t)+a_{p-1}(t)y^{(p-1)}(t)+\dots+a_1(t)y'(t)+a_0(t)y(t)=b(t), \quad a_0(t)\neq 0$$

→ Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις 1ης τάξης - Γραμμικές (για $p=1$)

$a_1(t)y'(t)+a_0y(t)=b(t)$, $a_1(t)\neq 0$

$$y'(t)+\frac{a_0(t)}{a_1(t)}y(t)=\frac{b(t)}{a_1(t)}$$

Θέλουμε $p(t)=\dfrac{a_0(t)}{a_1(t)}$, $q(t)=\dfrac{b(t)}{a_1(t)}$

$$\boxed{y'(t)+p(t)y(t)=q(t)} \quad (1)$$

Θέλουμε να φέρουμε την (1) στη μορφή $(f(t)+g(t))'=f'(t)g(t)+f(t)g'(t)$

Μέθοδος Ολοκληρωτικού Παράγοντα

Θέλουμε να λύσουμε την (1) για δοσμένες συναρτήσεις $p(t), q(t)$

Έστω μία συνάρτηση $\mu(t)$ τέτοια ώστε να είναι παραγωγίσιμη και $\exists\ \mu'(t)$. Πολλαπλασιάζουμε την (1) με την $\mu(t)$.

$$y'(t)+p(t)y(t)=q(t) \Longleftrightarrow \mu(t)y'(t)+\mu(t)y(t)=\mu(t)\cdot q(t)$$

(Θα θέλαμε $\mu(t)y'(t)+\mu'(t)y(t)=\mu(t)\cdot q(t)$) (2)

μπορούμε να επιλέξουμε κατάλληλα το $\mu(t)$ έτσι ώστε το $\mu'(t)=\mu(t)p(t)$

$$\mu'(t)=\mu(t)p(t) \Longleftrightarrow \frac{\mu'(t)}{\mu(t)}=p(t)$$

ολοκληρώνουμε και τα δύο μέλη

$$\int\frac{\mu'(t)}{\mu(t)}dt=\int p(t)dt \xleftrightarrow{\int\frac{f'(x)}{f(x)}=\ln|f(x)|} \ln|\mu(t)|=\int p(t)dt \Longleftrightarrow e^{\ln|\mu(t)|}=e^{\int p(t)dt} \Longleftrightarrow$$

$|\mu(t)| = e^{\int p(t)dt} \Leftrightarrow \mu(t) = e^{\int p(t)dt}$

η (2) γράφεται ως $(\mu(t)y(t))' = \mu(t)q(t)$ (3)

Ολοκληρώνουμε την (3):

$\int (\mu(t)y(t))'\,dt = \int \mu(t)q(t)\,dt \Rightarrow \mu(t)y(t) = \int \mu(t)q(t)\,dt + c \Rightarrow$

$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{\mu(t)}\left(\int \mu(t)q(t)\,dt + c\right)$

Γενική λύση: $y(t) = e^{-\int p(t)dt}\left(\int e^{\int p(t)dt}\, q(t)\,dt + c\right)$

<u>Παράδειγμα</u>

Να λυθεί η Σύνηθης Διαφορική Εξίσωση $y'(t) + 2ty(t) = e^{-t^2}$

- $p(t) = 2t$
- $q(t) = e^{-t^2}$

<u>1ο Βήμα</u>: Βρίσκω το $\int p(t)dt$

$\rightarrow \int p(t)dt = \int 2t\,dt = 2\frac{t^2}{2} = t^2$

<u>2ο Βήμα</u>: Βρίσκω το $\int e^{\int p(t)dt} \cdot q(t)\,dt$

$\rightarrow \int e^{\int p(t)dt} \cdot q(t)dt = \int e^{t^2} \cdot e^{-t^2}\,dt = \int e^0\,dt = \int dt = t$

Γενική λύση: $y(t) = e^{-t^2}(t + c)$, $c \in \mathbb{R}$

<u>3ο Βήμα</u>: Βρίσκω το c

$y(t_0) = y(1) = e^{-1}(1 + c) = 1 \Rightarrow 1 + c = e \Rightarrow c = e - 1$

άρα η λύση της εξίσωσης: $y(t) = e^{-t^2}(t + e - 1)$