27/10/2025

$ay'' + by' + cy = 0$ Επανάληψη

$y = e^{rt}$

$ar^2 + br + c = 0$

$\Delta > 0$ $y_1(t) = c_1 e^{r_1 t}$, $y_2(t) = c_2 e^{r_2 t}$, $r_1, r_2 \in R$

$\Delta = 0$ $r_1 \in R$ $y_1(t) = c_1 \cdot e^{r_1 t}$

$\Delta < 0$ μιγαδικοί αριθμοί

Πρόβλημα αρχικών τιμών 1ο σενάριο

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = 0, \ t > t_0 \\ y(t_0) = y_0 \in R \\ y'(t_0) = y_0' \end{cases}$$

~~$y(x;c_1c_2)$ $c_1x + c_2$, $y' = c_1$ $y'' = 0$~~

Π.χ

$y(x;c_1c_2)$ $c_1x + c_2$, $y' = c_1$, $y'' = 0$

$\Delta > 0$ 1ο σενάριο

Γενική λύση $y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$ $r_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$r_1 \neq r_2$

για $t = t_0$

$y(t_0) = \boxed{c_1 e^{r_1 t_0} + c_2 e^{r_2 t_0} = y_0}$

αγνωσ. γνωστός

Παραγ των $y(t)$

$$y'(t) = c_1 r_1 \cdot e^{r_1 t} + c_2 r_2 \cdot e^{r_2 t}$$

γνωστα αριθμοί

για $t = t_0$

$$y'(t_0) = c_1 \cdot \boxed{r_1 e^{r_1 t_0}} + c_2 \cdot \boxed{r_2 e^{r_2 t_0}} = y'_0 \in \mathbb{R}$$

Έχουμε ένα γραμμικό σύστημα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους

$$\begin{pmatrix} e^{r_1 t_0} & e^{r_2 t_0} \\ r_1 e^{r_1 t_0} & r_2 e^{r_2 t_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y'_0 \end{pmatrix}$$

Μορφή
$AX = B$

$\Delta > 0 \quad r_1 \neq r_2$

$$B = \{e^{r_1 t}, e^{r_2 \cdot t}\}$$

Εφόσον $\det(A) \neq 0$ το σύστημα έχει μοναδική λύση

$$\det(A) = r_2 e^{(r_1+r_2)t_0} - r_1 e^{(r_1+r_2)t_0} = \underbrace{(r_2 - r_1)}_{\neq 0} \cdot \underbrace{e^{(r_1+r_2)t_0}}_{>0}$$

$$= \underbrace{(r_2 - r_1)}_{\neq 0} \cdot \underbrace{e^{(r_1+r_2) \cdot t_0}}_{>0} \neq 0 \qquad B = \{e^{r_1 t}, e^{r_2 \cdot t}\}$$

βάση

Υπενθύμιση γραμμικής 1

$$\det(A^{-1}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα

$$\begin{cases} y''+5y'+6y=0 \;, t>0 \\ y(0)=y'(0)=1 \end{cases}$$

t_0

Λύση

Ψάχνουμε λύση της μορφής $y(t)=e^{rt}$

Προκύπτει το r από τη χαρακτηριστική εξίσωση

$$r^2+5r+6=0$$

$\Delta=25-24=1>0$

αφού $\Delta>0$ $r_{1,2}=\dfrac{-5\pm\sqrt{1}}{2\cdot 1}$ → $r_1=-2$, → $r_2=3$

Η γενική λύση της εξίσωσης είναι

$$y(t)=c_1\cdot e^{-2t}+c_2e^{-3t}$$
$$y'(t)=-2c_1e^{-2t}+-3c_2e^{-3t}$$

εφαρμόζω αρχικές συνθήκες

$$\begin{cases} c_1+c_2=1 \\ -2c_1-3c_2=1 \end{cases} \Leftrightarrow -2(1-c_2)-3c_2=1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow -2+2c_2-3c_2=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow -c_2=3 \Rightarrow \boxed{c_2=-3}$

άρα $c_1=1-(-3)=4 \Leftrightarrow \boxed{c_1=4}$

άρα η μοναδική λύση του ΠΑΤ είναι

$$\boxed{y(t)=4\cdot e^{-2t}-3e^{-3t}}$$

2ο Σενάριο $\Delta = 0$

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = 0, \ t > t_0 \\ y(t_0) = y_0 \quad a, b, c \ \text{των} \ \Delta = 0 \\ y'(t_0) = y_0' \quad y(t) = e^{rt} \end{cases}$$

$r_1 = -\dfrac{b}{2a}$ διπλή ρίζα της χαρακτ. εξίσωσ

Έστω ότι η γενική λύση $y(t) = c_1 e^{r_0 t}$

Ορίζουμε την $y_0(t) = e^{r_0 t} \rightarrow y_*' = r_* e^{r_0 t} = r_0 y_0'$

Ψάχνουμε μια 2η λύση $\tilde{y}(t) = u(t)\, y_0(t)$

περιοχή $\tilde{y}'(t) = (u(t) \cdot y_0(t))' = u'(t) y_0(t) + u(t) \cdot y_0'(t)$

y_* $\downarrow$ περιοχή

$\tilde{y}''(t) = (u'(t) \cdot y_0(t) + u(t) \cdot y_0'(t))' =$
$= u''(t) y_0(t) + u'(t) y_0'(t) + u'(t) y_0'(t) + u(t) y_0''(t)$

$\{ ay'' + by' + cy = 0, \ t > t_0$

$a(u'' y_* + 2u' y_*' + u y_*'') + b(u' y_* + u y_*') + c u y_* = 0$
$a(u'' \cancel{y_*} - 2r_* u' \cancel{y_*} + r_*^2 u \cancel{y_*}) + b(u' \cancel{y_*} + r_* u \cancel{y_*}) +$
$+ c u \cancel{y_*} = 0$

$a(u'' + 2r_* u' + r_*^2 u) + b(u' + r_* u) + cu = 0$
$au'' + 2ar_* u' + ar_*^2 u + bu' + br_* u + cu = 0$

$$au'' + (\underbrace{2ar_* + b}_{=0})u' + (\underbrace{ar_*^2 + br_* + c}_{=0})u = 0$$

αφού r_0 είναι ρίζα της χαρακτ. εξίσωσης

$r_* = -\dfrac{b}{2a}$ $\rightarrow 2a\left(-\dfrac{b}{2a}\right) + b = 0$ $\rightarrow$

$\Rightarrow a u'' = 0 \overset{a \neq 0}{\Rightarrow} u'' = 0 \Rightarrow u' = \xi \in R \Rightarrow u(t) = \xi t + n$
$\xi \in R, n \in R$

επιλέγουμε $\xi = 1$, $n = 0$ $\boxed{u(t) = t}$

Γενική λύση: $\boxed{y_\Gamma(t) = c_1 \cdot e^{r_* t} + c_2 t \cdot e^{r_* t}}$

Σχόλιο: γεν. λύση: $y_{\Gamma *}(t) = e^{r_0 t}$ $\tilde{y}_\Gamma(t) = u(t)\, y_{\Gamma *}(t) = t \cdot e^{r_* t}$ ανεξάρτητη

$y_\Gamma(t) = c_1 y_{\Gamma *}(t) + c_2 \tilde{y}_\Gamma(t)$

για $t = t_0$

$y_\Gamma(t_0) = c_1 \cdot e^{r_* t_0} + c_2 t_0 e^{r_2 t_0} = y_0 \in R$

$y_\Gamma'(t) = c_1 \cdot r_* e^{r_* t_0} + c_2 e^{r_* t} + c_2 r_* t e^{r_* t}$

για $t = t_0$

$y_\Gamma'(t_0) = c_1 r_* e^{r_* t_0} + c_2 (1 + r_0 t_0) e^{r_0 t_0} = y_0'$

$$\begin{pmatrix} e^{r_* t_0} & t_0 e^{r_* t_0} \\ r_* e^{r_* t_0} & (1 + r_* t_0) \cdot e^{r_* t_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_0' \end{pmatrix}$$

$A \cdot X = B$

$\det(A) = (1 + r_* t_0) e^{2 r_* t_0} - r_* t_0 e^{2 r_0 t_0}$
$= e^{2 r_* t_0} > 0$

άρα για κάθε y_0, y_0' η εξίσωση έχει μοναδική λύση

Παράδειγμα

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

$r^2 - 2r + 1 = 0$

$\Delta = 4 - 4 = 0$

$r_* = \frac{-2}{2} = 1$

Γενική λύση $y(t) = C_1 e^t + C_2 \cdot t \cdot e^t$

$y'(t) = C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot e^t + C_2 \cdot t \cdot e^t$

$y(0) = C_1 = 1$

$y'(0) = 1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -1$

άρα η λύση είναι $y(t)$

$y(t) = e^t - t \cdot e^t$

3ο Σενάριο $\Delta < 0$

$\mathbb{R}$

φανταστική μονάδα $= i$ τ.ω. $i^2 = -1$ ή $i \overset{\text{ορισμός}}{=} \sqrt{-1}$

$\mathbb{C} = \{ z = a + i\beta : a, \beta \in \mathbb{R} \}$

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

π.χ. $z = 1 + 2i$, $\bar{z} = 1 - 2i$

$a = 1, \beta = 2$

$Re(z) = a$ το πραγματοποιούμε μέρος του $z = a + i\beta$

$Im(z) = \beta$ το φανταστικό μέρος του $z = a + i\beta$

$\bar{z} = a - i\beta$ συζηγής του z

$\bar{z} + z = 2a = 2Re(z)$

$z - \bar{z} = 2Im(z)i$

Έστω $az^2 + bz + c = 0$, $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, $\Delta = -1|\Delta|$

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{-b \pm \sqrt{-1|\Delta|}}{2 \cdot a} = \frac{-b \pm \sqrt{-1}\sqrt{|\Delta|}}{2 \cdot a}$$

άρα ορίζουμε $\sqrt{-1} = i$

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2 \cdot a} = \frac{-b}{2a} \pm i\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

Έχουμε 2 συζυγής μιγαδικές ρίζες

$\cancel{z_{x}} = z_1 = \frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}$, $z_2 = \bar{z}_1$

$Re(z_i) = \frac{-b}{2a}$ $\quad Im(z_i) = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}$

Για e^{rt}

$\Delta > 0 \rightarrow e^{r_1 t}, e^{r_2 t}$

$\Delta = 0 \rightarrow e^{r_* t}, t \cdot e^{r_* t}$

$\Delta < 0 \rightarrow e^{(\mu + i\lambda)t}, e^{(\mu - i\lambda)t}$

Ταυτότητα Euler

$e^{it} = \cos(t) + i \cdot \sin(t)$

~~Αποδ~~

$y(t) = e^{it}$

$y'(t) = i e^{it} = i\, y(t)$

Θα γράψουμε ΠΑΤ

$$\begin{cases} y'(t) - i y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Έχουμε ΠΑΤ με μοναδική λύση $y(t) = e^{it}$

ορίζουμε $w(t) = \cos(t) + i \sin(t)$

$w'(t) = -\sin(t) + i\cos(t) \overset{i^2 = -1}{=}$

$= i^2 \sin(t) + i\cos(t) = i(\cos(t) + i \sin(t)) = i w(t)$

Σαρώθηκε με το CamScanner

$$\Rightarrow \begin{cases} w'(t) - i\,w(t) = 0 \\ w(t) = 1 \end{cases}$$

Έχουμε το ΠΑΤ με μοναδική λύση $w(t) = \cos(t) + i \cdot \sin(t)$

Τα ΠΑΤ είναι ίδια άρα και η μοναδική λύσης της ίδια

άρα $w(t) = y(t)$

άρα $e^{it} = \cos(t) + i \cdot \sin(t)$

για $t = \pi$

$$e^{i\pi} = \underbrace{\cancel{\cos}(\pi)}_{\to 1} + \underbrace{\cancel{\sin}(\pi)}_{\to 0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{e^{i\pi} - 1 = 0}$$