06/10/2025

Διαφορικές Εξισώσεις (ΔΕ)

η τελική εξέταση
Βιβλίο Σπουχτιώδης ΔΕ και προβλήματα συνοριακών τιμών Boyce Di Prima

Τι είναι η ΔΕ;

Μια εξίσωση που περιέχει μια ή περισσότερες παραγώγους μιας άγνωστης συνάρτησης

Παράδειγμα: $u'(x) = u(x)$
Η συνάρτηση $u(x) = e^x$ ικανοποιεί τη εξίσωση

$$u'(x) = (e^x)' = e^x = u(x)$$

Π.χ: $u(x) = e^x + c$, $c \neq 0$
$u'(x) = e^x \neq \underbrace{e^x + c}_{u(x)} = u^x$ Δεν ικανοποιείται

Π.χ: $u(x) = c \cdot e^x$ $c \in \mathbb{R}$
$u'(x) = (c \cdot e^x)' = c(e^x)' = c \cdot e^x = u(x)$ Ικανοποιείται

Συμβολισμός:
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx}$$

$f^{(k)}$ κ-οστή παράγωγο του f

$f'' = (f')'$ $f''' = (f'')'$

$f'''(x) = f^{(3)}(x)$

$f^{(k)} = \frac{d^k f(x)}{dx^k}$, για $k=1$ $f^{(1)}(x) = f'(x) = \frac{d^1 f(x)}{dx^1} = \frac{df(x)}{dx}$

για $k=2$ $f^{(2)}(x) = f''(x)$, $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$

Στο παράδειγμα είχαμε $u'(x) = u(x)$

$\Leftrightarrow \frac{du(x)}{dx} = u(x)$

$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = f$

Ταξινόμηση ΔΕ

Διακρίνουμε 2 μεθοδικούς τύπους ΔΕ

I. Συνήθεις ΔΕs (1ο μέρος του μαθήματος) (ΣΔΕ)

Περιλαμβάνει ~~άγνωστους~~ παραγώγους μιας άγνωστης συνάρτησης η οποία εξαρτάται από μια μοναδική ελεύθερη μεταβλητή

$y = y(t)$, $t =$ ελεύθερη μεταβλητή

Η εξίσωση θα περιλαμβάνει, $t, y(t), y'(t) \ldots$

II. Μερικές ΔΕ (ΜΔΕ) 2ο μέρος μαθήματος

Περιλαμβάνουν παραγώγους (μερικές) μιας άγνωστης συνάρτησης, η οποία εξαρτάται από περισσότερες από μια ελεύθερη μεταβλητή

$u = u(t, x)$

Θα δούμε αργότερα τις μερικές παραγώγους

$u_t(t,x) = \frac{\partial u}{\partial t}(t,x)$

~~$u_x(t,x)$~~

~~$u_x(t,x)$~~

$u_x(t,x) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,x)$

Σαρώθηκε με το CamScanner

$$u_{tt}(t,x) = \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}$$

$$u_{xx}(t,x) = \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}$$

$$u_{xt}(t,x) = \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t \cdot \partial x} = u_{tx}(t,x)$$

π.χ. $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$

$u_t - k \cdot u_{xx} = 0$

Τάξη ΣΔΕ

Η τάξη της ΣΔΕ προσδιορίζεται από τη τάξη της μεγιστοβάθμιας παραγώγου της γνωστής συν/σης

(α) $y'(t) = y(t)$ 1^{η} τάξη

(β) $y''(t) - 3y'(t) + y(t) = 0$ 2^{η} τάξη

Κάθε ΣΔΕ p τάξης μπορεί να εκφραστεί στη γενική μορφή

$$F[t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(\kappa)}(t)] = 0$$

Παράδειγμα $y'(t) = y(t)$

α) $F[t, y(t), y'(t)] = y'(t) - y(t) \overset{!}{=} 0$

β) $F[t, y(t), y'(t), y''(t)] = y''(t) - 3y'(t) + y(t) = 0$

Γραμμικότητα

Γραμμική: (i) Όταν δεν υπάρχουν γινόμενα των $y, y', \dots, y^{(p)}$

(ii) Όταν δεν υπάρχουν δυνάμεις των $y, y', \dots, y^{(p)}$

Μη γραμμική: Όταν παραβιάζονται τουλ. μια συνθήκη (από (i) και (ii)) της γραμμικότητας

Παραδείγματα

① $y'(t) = y(t)$ 1ης τάξεως γραμμική

② $y'(t) = t^2 y(t)$ 1ης τάξεως γραμμική

③ $y''(t) + t y'(t) + y^2(t) = 1$ 2ης τάξεως μη γραμμική

④ $y'(t) + y(t) y'(t) = 0$ 1ης τάξεως μη γραμμική

Γενική μορφής γραμμικών β τάξεως ΣΔΕ

$$\begin{cases} a_p(t) y^{(p)}(t) + a_{p-1}(t) y^{(p-1)}(t) + \dots + a_1(t) y'(t) + a_0(t) y(t) = \\ = \beta(t) \\ a_p(t) \neq 0 \end{cases}$$

ΣΔΕ - 1ης τάξεως - Γραμμική

$$\boxed{\begin{array}{l} a_1(t) y'(t) + a_0 y(t) = \beta(t) \\ a_1(t_0) \neq 0 \end{array}}$$

$$y'(t) + \frac{a_0(t)}{a_1(t)} y(t) = \frac{\beta(t)}{a_1(t)}$$

θέλουμε $p(t) = \dfrac{a_0(t)}{a_1(t)}$, $q(t) = \dfrac{\beta(t)}{a_1(t)}$

$$\boxed{y'(t)+p(t)y(t)=q(t)} \quad (*)$$

$$[f(t)\cdot g(t)]' = f'(t)\cdot g(t) + f(t)\cdot g'(t)$$

Μέθοδος Ολοκληρωματικού Παράγοντα

Θέλουμε να λύσουμε την $(*)$ για δοσμένες συναρτήσεις $p(t)$, $q(t)$

Έστω μια συνάρτηση $\mu(t) \neq 0$ τ.ω να είναι παραγωγίσιμη $(\exists \mu'(t))$

Πολλαπλασιάζουμε την $(*)$ με την $\mu(t)$

$$y'(t)+p(t)y(t)=q(t) \iff \boxed{\mu(t)y'(t)+\mu(t)p(t)y(t)=\mu(t)q(t)} \quad (**)$$

Θα θέλουμε $\mu(t)\cdot y'(t)+\mu'(t)y(t)=\mu(t)q(t)$

Μπορούμε να επιλέξουμε το $\mu(t)$ ώστε $\boxed{\mu'(t)=\mu(t)p(t)}$

$$\mu'(t)=\mu(t)\cdot p(t) \iff \frac{\mu'(t)}{\mu(t)} = p(t) \iff$$

$$\iff \int \frac{\mu'(t)}{\mu(t)}\,dt = \int p(t)\,dt \iff \cancel{\ln|\mu(t)|=}$$

$$\iff \ln|\mu(t)| = \int p(t)\,dt \iff e^{\ln|\mu(t)|} = e^{\int p(t)\,dt}$$

$$\implies |\mu(t)| = e^{\int p(t)\,dt} \implies \boxed{\mu(t) = e^{\int p(t)\,dt}} \quad (\sim)$$

Υπενθύμιση $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(x) \implies \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln f(x)$

για $\mu(t) = e^{\int p(t)\,dt}$ $\quad \mu(t)y'(t) + \mu'(t)y(t) = \mu(t)\,q(t)$

(**) γράφεται ως $(\mu(t)y(t))' = \mu(t)\,q(t)$

Ολοκλήρωμα ($\cong$) $\int (\mu(t)y(t))'\,dt = \int \mu(t)\,q(t)\,dt$

$\mu(t)y(t) = \int \mu(t)\,q(t)\,dt + c \Rightarrow$

$\Rightarrow y(t) = \dfrac{1}{\mu(t)}\left(\int \mu(t)\,q(t)\,dt + c\right)$

Γενική λύση

$$y(t) = e^{\int p(t)\,dt}\left(\int e^{\int p(t)\,dt}\,q(t)\,dt + c\right)$$
$c \in \mathbb{R}$

<u>Παράδειγμα</u>

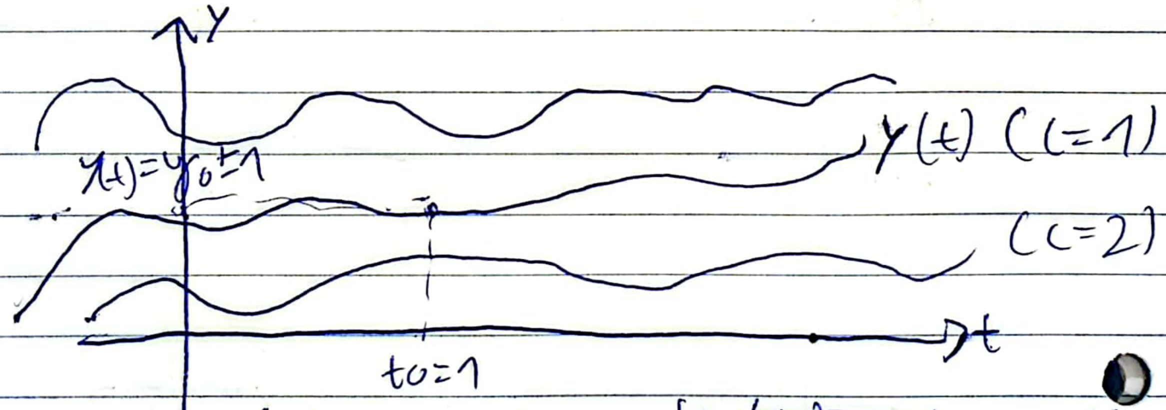
Να λυθεί η ΣΔΕ $y'(t) + 2t\,y(t) = e^{-t^2}$

$p(t) = 2t$ $\qquad \int p(t)\,dt = \int 2t\,dt = 2\dfrac{t^2}{2} = t^2$

$q(t) = e^{-t^2}$

$$\int e^{t^2}\cdot e^{-t^2}\,dt = \int dt = \boxed{t}$$

Γενική λύση: $y(t) = e^{-t^2}(t+c),\ t \in \mathbb{R}$



$Y(t_0) - Y(t) = e^{-1}(1+c) = 1$ $\cancel{y(t_0) - y(t) = e^{-1}(1+c)}$

$y(t_0) = y(1) = e^{-1}(1+c) = 1 \Rightarrow 1+c = e \Rightarrow c = e-1$

$y(t) = e^{-t^2}(t+e-1)$

ΠΑΤ - Πρόβλημα αρχικών τιμών

Διαφορική Εξίσωση $1^{η}$ τάξη γραμμική ΣΔΕ
+
Αρχική Συνθήκη $\Rightarrow$ Μοναδική λύση