

(ΣIII) ($\Delta < 0$)

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2\alpha} = \lambda + i\mu \quad (\text{θέτω } \lambda = -\frac{b}{2\alpha} \text{ και } \mu = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2\alpha})$$

(Υπερθύμιση: $e^{it} = \cos(t) + i \cdot \sin(t) \rightarrow \text{Tautótna tou Euler}$)

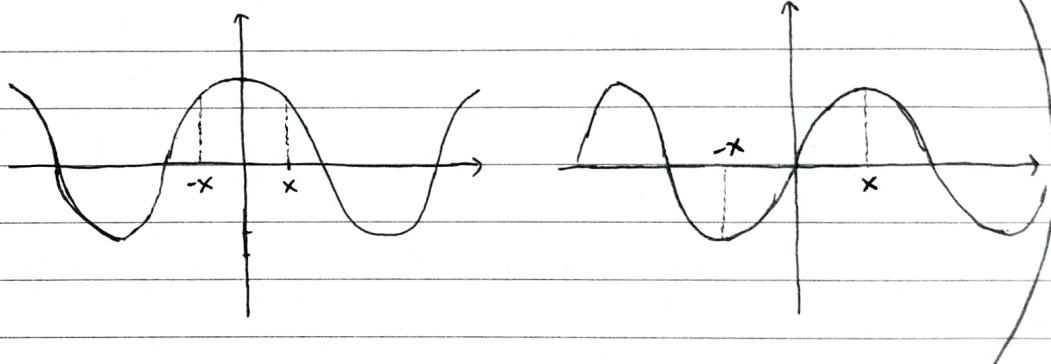
$$e^{rt} = e^{(\lambda \pm i\mu)t} = e^{\lambda t} \cdot e^{\pm i\mu t} \begin{cases} \xrightarrow{+} e^{\lambda t} \cdot (\cos(\mu t) + i \cdot \sin(\mu t)) \\ \xrightarrow{-} e^{\lambda t} \cdot (\cos(-\mu t) + i \cdot \sin(-\mu t)) = \\ = e^{\lambda t} \cdot (\cos(\mu t) - i \cdot \sin(\mu t)) \end{cases}$$

διότι ισχουν:

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

και

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$



Συναρπάστις βάσης:

$$v_1(t) = e^{\lambda t} \cdot (\cos(\mu t) + i \cdot \sin(\mu t))$$

$$v_2(t) = e^{\lambda t} \cdot (\cos(\mu t) - i \cdot \sin(\mu t))$$

Θέλουμε να συνέβουμε το i. Θα ορίσουμε τις κανονικές βάσης, χωρίς το i:

$$\bullet \quad u_1(t) = \frac{1}{2} \cdot (v_1(t) + v_2(t)) = \frac{1}{2} \cdot e^{\lambda t} \cdot (g \cdot \cos(\mu t) + i \cdot 0) = \\ = e^{\lambda t} \cdot \cos(\mu t)$$

$$\bullet \quad u_2(t) = \frac{1}{2i} \cdot (v_1(t) - v_2(t)) = \frac{1}{2i} \cdot e^{\lambda t} \cdot (g \cdot i \cdot \sin(\mu t)) = \\ = e^{\lambda t} \cdot \sin(\mu t)$$

, diea n γενική λύση της εξίσωσης σχετικά με:

Γενική λύση: $y(t) = C_1 \cdot e^{\lambda t} \cdot \cos(\mu t) + C_2 \cdot e^{\lambda t} \cdot \sin(\mu t)$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Θεωρούμε το Π.Α.Τ.:

$$\begin{cases} a \cdot y''(t) + b \cdot y'(t) + c \cdot y(t) = 0 & , t > t_0 \\ y(t_0) = y_0 & , y_0 \in \mathbb{R} \\ y'(t_0) = y'_0 & , y'_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Θέλουμε αυτό το Π.Α.Τ. να έχει μοναδική λύση.

$$y'(t) = C_1 \cdot \lambda \cdot e^{\lambda t} \cdot \cos(\mu t) - \mu \cdot C_1 \cdot e^{\lambda t} \cdot \sin(\mu t) + C_2 \cdot \lambda \cdot e^{\lambda t} \cdot \sin(\mu t) + \\ + \mu \cdot C_2 \cdot e^{\lambda t} \cdot \cos(\mu t)$$

Έφαγμός μας για $t = t_0$ (από της αρχικές συνθήκες):

$$y(t_0) = C_1 \cdot e^{\lambda t_0} \cdot \cos(\mu t_0) + C_2 \cdot e^{\lambda t_0} \cdot \sin(\mu t_0) = y_0 \in \mathbb{R}$$

$$y'(t_0) = c_1 \cdot e^{\lambda t_0} \cdot (\lambda \cdot \cos(\mu t_0) - \mu \cdot \sin(\mu t_0)) + c_2 \cdot e^{\lambda t_0} \cdot (\lambda \cdot \sin(\mu t_0) + \mu \cdot \cos(\mu t_0)) = \\ = y' \in \mathbb{R}$$

ΣΧΩΡΙΟ: Οι μόνοι δύκυνστοι στις δύο παραπάνω εξισώσεις είναι τα c_1, c_2 . Άρα, μπορεί να τις δράψου στη μορφή γινόμενο πινάκου.

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda t_0} \cdot \cos(\mu t_0) & e^{\lambda t_0} \cdot \sin(\mu t_0) \\ e^{\lambda t_0} \cdot (\lambda \cdot \cos(\mu t_0) - \mu \cdot \sin(\mu t_0)) & e^{\lambda t_0} \cdot (\lambda \cdot \sin(\mu t_0) + \mu \cdot \cos(\mu t_0)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y'_0 \end{pmatrix}$$

A

$$\det(A) = \dots = \mu \cdot e^{\lambda t_0} \neq 0$$

, αφού η εξίσωση έχει μοναδική λύση.

Παραδείγμα

Να λυθεί το Π.Α.Τ.:

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 5y = 0 & , t > 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

Χαρακτηριστική εξίσωση: $r^2 + 2r + 5 = 0$

$$\Delta = 4 - 4 \cdot 5 = -16 < 0$$

$$r_{1,2} = \frac{-2 \pm i\sqrt{1-16}}{2} = -1 \pm 2i$$

(είναι της μορφής $r_{1,2} = \lambda \pm i\mu$).

Έννοια λύσης: $y(t) = c_1 \cdot e^{-t} \cdot \cos(2t) + c_2 \cdot e^{-t} \cdot \sin(2t)$

Θα βρούμε τα c_1 και c_2 . Έχουμε:

$$y(0) = c_1 \cdot e^0 \cdot \cos(0) + c_2 \cdot e^0 \cdot \sin(0) = c_1 = 0$$

, από: $y(t) = c_2 \cdot e^{-t} \cdot \sin(2t)$

$$y'(t) = -c_2 \cdot e^{-t} \cdot \sin(2t) + 2c_2 \cdot e^{-t} \cdot \cos(2t)$$

$$y'(0) = -c_2 \cdot e^0 \cdot \sin(0) + 2 \cdot c_2 \cdot e^0 \cdot \cos(0) = 2c_2 = 1 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{2}$$

Η μοναδική λύση του Π.Α.Τ. είναι:

$$y(t) = \frac{1}{2} \cdot e^{-t} \cdot \sin(2t)$$

Διαφορικές Εξιώσεις για Τάξης - Mn Ομογενείς - με Σταθερούς Συντελεστές

Γενική μορφή:

$$\alpha \cdot y''(t) + b \cdot y'(t) + c \cdot y(t) = q(t)$$

(*)

, $\alpha, b, c \in \mathbb{R}$ και $q(t)$ μια δοθείση συνάρτηση.

Έστω $y_1(t)$, $y_2(t)$ τυχαίες λύσεις της (*)

$$\alpha \cdot y_1'' + b \cdot y_1' + c \cdot y_1 = q \quad (**)$$

$$\alpha \cdot y_2'' + b \cdot y_2' + c \cdot y_2 = q \quad (***)$$

Αφαιρούμε κατά μέλη τις (**) και (***):

$$\alpha \cdot (y_1'' - y_2'') + b \cdot (y_1' - y_2') + c \cdot (y_1 - y_2) = 0 \quad (=)$$

$$(\Rightarrow) \alpha \cdot (y_1 - y_2)'' + b \cdot (y_1 - y_2)' + c \cdot (y_1 - y_2) = 0 \quad (\textcircled{n})$$

Θέτουμε $y_h(t) = y_1(t) - y_2(t)$, τότε η (n) γράφεται ως:

$$\alpha \cdot y_h'' + b \cdot y_h' + c \cdot y_h = 0$$

Έχει χρωστή οικογένεια λύσεων (ζερν και τη λύνω).

• (Η y_h είναι η λύση της ομογενούς)

$$y_1(t) - y_2(t) = y_h(t) \Rightarrow y_1(t) = y_h(t) + y_2(t)$$

(≈)

Θέτουμε στην ≈ $y(t) = y_1(t)$ να είναι η γενική λύση της

(5)

εξιώσωνται και $y_p(t) = y_2(t)$ να είναι μια ειδική λύση της εξιώσωνται:

Εγκινή λύση:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

λύση της ομογενούς
εξιώσωνται

ειδική λύση του
αρχικού προβλήματος

Για την $y_p(t)$ διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

Περίπτωση 1

P_n πολυώνυμο της βαθμού

$$q(t)$$

$$y_p(t)$$

$$t^s \cdot (A_n t^n + A_{n-1} t^{n-1} + \dots + A_1 t + A_0)$$

$$, s = 0, 1, 2$$

π.χ.: Αν $q(t) = t^2 - t$, τότε:

$$y_p(t) = A_2 t^2 + A_1 t + A_0$$

$$(\text{για } s=0)$$

$$y_p(t) = t \cdot (A_2 t^2 + A_1 t + A_0) = A_2 t^3 + A_1 t^2 + A_0 \cdot t \quad (\text{για } s=1)$$

$$y_p(t) = t^2 \cdot (A_2 t^2 + A_1 t + A_0) = A_2 t^4 + A_1 t^3 + A_0 t^2 \quad (\text{για } s=2)$$

ΣΧΟΛΙΟ: Δοκιμάζω με τη σειρά ($\text{για } s=0, 1 \text{ και } 2$) πιο
“Θα δουλέψει” με σκοπό να προσδιορίσω τα
 A_2, A_1, A_0 , έτσι ώστε να βρω την ειδική λύση $y_p(t)$.

Περίπτωση 2

$q(t)$	$y_p(t)$
$P_n(t) \cdot e^{kt}$	$t^s \cdot (A_n t^n + A_{n-1} t^{n-1} + \dots + A_1 t + A_0) \cdot e^{kt}$ $, s = 0, 1, 2$

Περίπτωση 3

$q(t)$	$y_p(t)$
$P_n(t) \cdot \begin{cases} \sin(kt) \\ \cos(kt) \end{cases}$	$t^s \cdot (A_n t^n + A_{n-1} t^{n-1} + \dots + A_1 t + A_0) \cdot \cos(kt) +$ $+ t^s \cdot (B_n t^n + B_{n-1} t^{n-1} + \dots + B_1 t + B_0) \cdot \sin(kt)$ $, s = 0, 1, 2$

Παράδειγμα

Να βρεθεί η γενική λύση της εξιώσους:

$$y'' - 3y' - 4y = 2e^{-t}$$

ΛΥΣΗ

Η ομογενής εξίωση: $y_h'' - 3y_h' - 4y_h = 0$

$$\Delta = 9 - 4 \cdot (-4) = 25$$

$$r_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$$

Η λύση της ομογενούς:

$$y_h(t) = c_1 \cdot e^{4t} + c_2 \cdot e^{-t}$$

• Το πρώτο μέρος
της λύσης

ΣΧΟΛΙΟ: Είμαστε στην περίπτωση 2, διότι έχουμε $2e^{-t}$ ($P_0(t) \cdot e^{-t}$). Άρα για να βρούμε και το δεύτερο μέρος της λύσης, δυλαδή την ειδική λύση $y_p(t)$, θα ακολουθήσουμε την περίπτωση 2 και θα δοκιμάσουμε για $s=0, 1$ και 3 .

$$P_0(t) \cdot e^{-t} \begin{cases} s=0 \rightarrow y_p(t) = A_0 \cdot e^{-t} & (\text{Δοκιμή 1}) \\ s=1 \rightarrow y_p(t) = A_0 \cdot t \cdot e^{-t} & (\text{Δοκιμή 2}) \\ s=2 \rightarrow y_p(t) = A_0 \cdot t^2 \cdot e^{-t} & (\text{Δοκιμή 3}) \end{cases}$$

Δοκιμή 1: $y_p(t) = A_0 \cdot e^{-t}$, $y'_p(t) = -A_0 \cdot e^{-t}$, $y''_p(t) = A_0 \cdot e^{-t}$

Εφαρμόζουμε στην εξίσωση:

$$\underbrace{A_0 \cdot e^{-t}}_{y_p} - 3 \cdot \underbrace{(-A_0 \cdot e^{-t})}_{y'_p} - 4 \cdot \underbrace{A_0 \cdot e^{-t}}_{y''_p} = 2e^{-t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_0 \cdot e^{-t} + 3A_0 e^{-t} - 4A_0 \cdot e^{-t} = 2e^{-t} \Rightarrow 0 = 2e^{-t} \quad \text{αδύνατο}$$

(άρα δοκιμή 1 \times).

Δοκιμή 2: $y_p(t) = A_0 \cdot t \cdot e^{-t}$
 $y'_p(t) = A_0 \cdot e^{-t} - A_0 \cdot t \cdot e^{-t}$
 $y''_p(t) = -A_0 \cdot e^{-t} - A_0 \cdot e^{-t} + A_0 \cdot t \cdot e^{-t} = -2A_0 \cdot e^{-t} + A_0 \cdot t \cdot e^{-t}$

Εφαρμόζουμε στην εξίσωση:

$$-2A_0 \cdot e^{-t} + A_0 \cdot t \cdot e^{-t} - 3 \cdot (A_0 \cdot e^{-t} - A_0 \cdot t \cdot e^{-t}) - 4A_0 \cdot t \cdot e^{-t} = 2e^{-t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{-2A_0 \cdot e^{-t}}_{\text{term 1}} + \underbrace{A_0 \cdot t \cdot e^{-t}}_{\text{term 2}} - \underbrace{3A_0 \cdot e^{-t}}_{\text{term 3}} + \underbrace{3A_0 \cdot t \cdot e^{-t}}_{\text{term 4}} - \underbrace{4A_0 \cdot t \cdot e^{-t}}_{\text{term 5}} = 2e^{-t} \Rightarrow$$

To δύτικο
μέρος της
λύσης

$$\Rightarrow -5A_0 e^{-t} = 2e^{-t} \Rightarrow A_0 = -\frac{2}{5}, \text{ απα: } y_p(t) = -\frac{2}{5} \cdot t \cdot e^{-t}$$

(απα δοκιμή 2 ✓ , δεν χειρίζεται να είστειών τη δοκιμή 3)

Γενική λύση: $y(t) = y_h(t) + y_p(t) \Rightarrow$

$$\Rightarrow y(t) = c_1 \cdot e^{4t} + c_2 \cdot e^{-t} - \frac{2}{5} \cdot t \cdot e^{-t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t) = c_1 \cdot e^{4t} + \left(c_2 - \frac{2}{5} \cdot t \right) \cdot e^{-t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$y'(t) = 4 \cdot c_1 \cdot e^{4t} - \frac{2}{5} \cdot e^{-t} - \left(c_2 - \frac{2}{5} \cdot t \right) \cdot e^{-t}$$

$$\text{Έχουμε: } \begin{cases} y(0) = c_1 + c_2 = 1 \\ y'(0) = 4c_1 - \frac{2}{5} - c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ 4c_1 - c_2 = \frac{2}{5} \end{cases} \quad \textcircled{+}$$

$$5c_1 = 1 + \frac{2}{5} \Rightarrow c_1 = \frac{7}{25}$$

$$c_2 = 1 - c_1 \Rightarrow c_2 = 1 - \frac{7}{25} \Rightarrow c_2 = \frac{18}{25}$$

Άρα, η μοναδική λύση του προβλήματος:

$$y(t) = \frac{7}{25} \cdot e^{4t} + \left(\frac{18}{25} - \frac{2}{5} \cdot t \right) \cdot e^{-t}$$