10/11/2025

Άσκηση: $P_0\sin(2t)$ SOS εξέταση

$y''+2y'+5y=3\sin(2t)$

$y_h \ldots$

$y_p \begin{cases} \xrightarrow{S=0} A_0\sin(2t)+B_0\cos(2t) \\ \xrightarrow{S=1} A_0 t\sin(2t)+B_0 t\cos(2t) \\ \xrightarrow{S=2} A_0 t^2\sin(2t)+B_0 t^2\sin(2t) \end{cases}$

y_h / $y_{\text{γενικής}}$

όρος, πολυων

$y=y_h+y_p$

$\boxed{y''_h+2y'_h+5y_h=0}$ Διακρίνουσα για το y_h

y_p: Οποιοδήποτε y_p των $\boxed{y''_p+2y'_p+5y_p=3\sin(2t)}$

μηδενικού βαθμού

$g(t)=P_n(t)\sin(at)$ $\quad y_p(t)=(\text{Πολυων. βαθμού})\cos(at)+(\text{Πολυων. n βαθμού})\sin(at)$

$y_p(t)=(A_0\cos(2t)+B_0\sin(2t))t^S,\ S=0,1,2$

$S=0$ $\boxed{C(2t)=\cos(2t),\ S(2t)=\sin(2t)}$

$y'_p(t)=-2A_0S(2t)+2B_0C(2t)$

$y''_p(t)=-4A_0C(2t)-4B_0S(2t)$

Υπενθύμιση
$(\sin(at))'=a\cos(at)$
$(\cos(at))'=-a\sin(at)$

$-4A_0C(2t)-4B_0S(2t)-4A_0S(2t)+4B_0C(2t)+5A_0C(2t)+5B_0S(2t)=3S(2t)$

$(A_0+4B_0)C(2t)+(-4A_0+B_0)S(2t)=3S(2t)+0\cdot C(2t)$

Θέλουμε $\begin{cases} A_0+4B_0=0 \rightsquigarrow A_0=-4B_0 \\ -4A_0+B_0=3 \end{cases}$

Σαρώθηκε με το CamScanner

$\Rightarrow -4(-4B_0)+B_0=3 \Rightarrow 16B_0+B_0=3 \Rightarrow \boxed{B_0=\frac{3}{17}}$

$\boxed{A_0=-12/17}$

Άρα $y_p(t)=-\frac{12}{17}\cos(2t)+\frac{3}{17}\sin(2t)$

$y_h''+2y_h'+5y_h=0 \quad y_h(t)=e^{rt}$ θέτω $r=y_h$

$r^2-2r+5=0 \quad \Delta=4-4\cdot 5\cdot 1=-16<0$

$r_{1,2}=\frac{-2\pm i\sqrt{|-16|}}{2}=\frac{-2\pm 4}{2}=-1\pm 2i$

$(\lambda=-1 \quad \mu=\pm 2,\ r_{1,2}=\lambda\pm i\mu)$

$y_h(t)=c_1e^{-t}\cos(2t)+c_2\cdot e^{-t}\sin(2t)$ (Μπορώ να πάρεις είτε το αρνητικό αν θες)

$y(t)=c_1e^{-t}\cos(2t)+c_2\cdot e^{-t}\sin(2t)-\frac{12}{17}\cos(2t)+\frac{3}{17}\sin(2t)$

Παράδειγμα Άσκησης

$y''+y'+y=t^2+t+1$

$q(t)=\mathbb{P}_2(t) \quad y_p(t)=(A_2t^2+A_1t+A_0)t^s,\ s=0,1,2$

$s=0$

μηδενικό συντελεστή του 1

$y_p'=2A_2t+A_1 \qquad y_p''+y_p'+y_p=t^2+t+1$

$y_p''=2A_2 \qquad 2A_2+2A_2t+A_1+A_2t^2+A_1t+A_0=t^2+t+1$

$A_2t^2+(A_1+2A_2)t+2A_2+A_1+A_0=t^2+t+1$

A_2: $\boxed{A_2=1}$

$A_1+2A_2=1 \Rightarrow A_1+2=1 \Rightarrow A_1=-1$

t^0: A_0 $\Rightarrow$

$\Rightarrow 2A_2 t^{-1} + A_1 t^{-1} + A_0 = 1 \Rightarrow A_0 = 0$

άρα $y_p(t) = t^2 - t$

Για y_h: $r^2 + r + 1 = 0$ $\quad \Delta = 1 - 4 = -3$

$r_{1,2} = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ $\quad (\lambda = -1 \quad \mu = \pm 3)$

$y_h(t) = c_1 \cdot e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right) + c_2 \cdot e^{-t/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right)$

Άσκηση παράδειγμα

$y'' + 5y' = e^t$ $\quad$ (μορφή $P_n(t) \cdot e^{at}$)

$y_p(t) = A_0 e^t \cdot t^s$, $s = 0, 1, 2$

$s = 0$

$y_p' = A_0 e^t$ $\quad A_0 e^t + 5A_0 e^t = e^t \Rightarrow 6A_0 e^t = (1) e^t$

$y_p'' = A_0 e^t$ $\quad \Rightarrow A_0 = 1/6$

$y_p(t) = \frac{1}{6} e^t$ $\quad | \quad r^2 + 5r = 0 \Rightarrow r(r+5) = 0 \Rightarrow r = 0, \ r = -5$

$y_h(t) = c_1 \cdot e^{0t} + c_2 \cdot e^{-5t} = c_1 + c_2 \cdot e^{-5t}$

$y'' - y' = e^t$

$y_p = A_0 e^t$ $\quad y_p'(t) = y_p''(t) \quad A_0 e^t$

$A_0 e^t - A_0 e^t = e^t \Rightarrow 0 = e^t$ $\quad$ Αδύνατο

Σαρώθηκε με το CamScanner

$\hat{y}(\omega) = \int y(t) e^{-i\omega t} dt$ $\int_{-\infty}^{+\infty}$

δοκιμάσουμε $y_p(t) \equiv A_0 t \cdot e^t$ $\underline{S=1}$ $A_0 \in \mathbb{R}$

$y_p'(t) = A_0 e^t + A_0 t \cdot e^t$

$y_p''(t) = A_0 e^t + A_0 e^t + A_0 t e^t = 2A_0 e^t + A_0 t \cdot e^t$

από την εξίσωση $2A_0 e^t + A_0 t e^t - A_0 \cdot e^t - A_0 t e^t = e^t$

$A_0 e^t = e^t \Rightarrow \boxed{A_0 = 1}$

Μετασχηματισμός Fourier

Έστω $y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ορίζουμε τον μετασχηματισμό Fourier της y να είναι η $\hat{y}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\boxed{\hat{y}(\omega) = \mathcal{F}\{y\}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-i\omega t} dt}, \quad i = \sqrt{-1}$$

Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier

$$\boxed{y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{y}\}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{y}(\omega) e^{i\omega t} d\omega}$$

$t \xrightarrow{\mathcal{F}} \omega$, $\omega \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} t$

Συνέλιξη: Έστω $y_1, y_2: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ορίζουμε τη συνάρτηση $\underbrace{(y_1 * y_2)(t)}_{y(t)}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$(y_1 * y_2)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} y_1(\tau) y_2(t-\tau) d\tau$$

Θ.δ.ο $(y_1 * y_2)(t) = (y_2 * y_1)(t)$ $\quad \bar{\tau} = t - \tau$

$$(y_1 * y_2)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} y_1(\tau) y_2(t-\tau) d\tau \underset{d\bar{\tau} = -d\tau}{\overset{\bar{\tau} = t - \tau}{=}} \int_{+\infty}^{-\infty} y_1(t-\bar{\tau})$$

$$\underset{d\bar{\tau} = -d\tau}{\overset{\bar{\tau} = t - \tau}{=}} \int_{+\infty}^{-\infty} y_1(t-\bar{\tau}) y_2(\bar{\tau})(-d\bar{\tau}) =$$

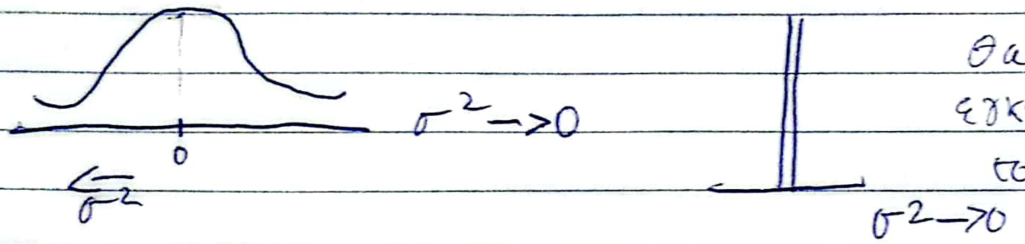
$$= -\int_{+\infty}^{-\infty} y_2(\bar{\tau}) y_1(t-\bar{\tau}) d\bar{\tau} = \int_{-\infty}^{+\infty} y_2(\bar{\tau}) y_1(t-\bar{\tau}) d\bar{\tau} = (y_2 * y_1)(t)$$

Σαρώθηκε με το CamScanner

δ του Dirac

$\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\delta(t) = 0 \ \forall t \neq 0$, και έχει την ιδιότητα
$\forall f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t)\, dt = f(0)$

Πόρισμα $f(t) = 1$ $\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, 1\, dt = 1 \Rightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, dt = 1}$



Θα έχει εγκεντεια απο το 0

Μετασχηματισμός Fourier του δ του Dirac

$$\hat{\delta}(\omega) = \mathcal{F}\{\delta\}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \underbrace{e^{-i\omega t}}_{f(t)} dt = e^{-i\omega 0} = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau) f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) \underbrace{f(t-\tau)}_{g(\tau)} d\tau = g(0) = f(t-0) = f(t)$$

$(\delta * f)(t) = (f * \delta)(t)$

Πίνακας Fourier

$g(t)$	$\hat{g}(\omega)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-\tau)$	$e^{-i\omega\tau}$
1	$2\pi\delta(\omega)$
$e^{i\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi[\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)]$
$\sin(\omega_0 t)$	$i\pi[\delta(\omega+\omega_0) - \delta(\omega-\omega_0)]$
$e^{-t^2/2}$	$\sqrt{2\pi}\, e^{-\omega^2/2}$

Σαρώθηκε με το CamScanner

Ιδιότητες

Γραμμικότητα $a y_1(t)+b y_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} a\hat{y}_1(w)+b\hat{y}_2(w)$

Μετατόπιση σε χρόνο $y(t-\tau) \to e^{-iw\tau}\hat{y}(w)$ ✓

Μετατόπιση στη συχνότητα $e^{iw_0 t}y(t) \to \hat{y}(w-w_0)$

Συνέλιξη $(y_1 * y_2)(t) \to \hat{y}_1(*)\hat{y}_2(w)$ ✓

Πολλαπλασιασμός $y_1(t)y_2(t) \to \frac{1}{2\pi}(\hat{y}_1+\hat{y}_2)(w)$ ✗

$\to \mathcal{F}\{y_1y_2\}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} y_1(t)y_2(t)e^{-iwt}dt =$

$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{y}_1(\underline{\sigma})\hat{y}_2(w-\underline{\sigma})ds$

Έστω $y(t)$ τ.ω. $\lim_{t\to\pm\infty} y(t)=0$ και $\exists y'$

$\mathcal{F}\{y'\}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} y'(t)e^{-iwt}dt = \left[y(t)e^{-iwt}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\left[e^{-iwt}\right]' dt$

$= \cancel{\lim_{t\to+\infty}(y(t)e^{-iwt})}^{\to 0} - \cancel{\lim_{t\to-\infty}(y(t)e^{-iwt})}^{\to 0} + iw\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-iwt}dt}_{\hat{y}(w)}$

$\mathcal{F}\{y'\}(t) = iw\hat{y}(w)$

Επιπλέον του $\exists y''$ και $\lim_{t\to+\infty} y(t)=0$

$\mathcal{F}\{y''\}(t) = iw\mathcal{F}\{y'\}(w) = iw\, iw\,\hat{y}(w) = i^2w^2\hat{y}(w) =$

$= -w^2\hat{y}(w)$

Σαρώθηκε με το CamScanner

$$a y''(t) + b y'(t) + c y(t) = q(t)$$

$$\mathcal{F}\{a y''(t) + b y'(t) + c y(t)\} = \hat{q}(w)$$

$$a \mathcal{F}\{y''\}(w) + b \mathcal{F}\{y'\}(w) + c \mathcal{F}\{y\}(w) = \hat{f}(w)$$

$$-a w^2 \hat{y}(w) + i w b \hat{y}(w) + c \hat{y}(w) = \hat{q}(w)$$

$$\hat{y}_p(w) = \frac{\hat{q}(w)}{-a w^2 + i w b + c}$$

Σαρώθηκε με το CamScanner