03.11.25 Παράδειγμα $(\Delta<0)$

$y(t)=e^{rt}$

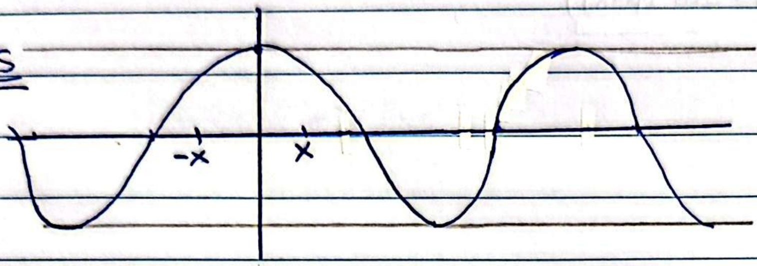
$ar^2+br+c=0$

$\Delta=b^2-4a\cdot c<0$

$r_{1,2}=\dfrac{-b\pm i\cdot\sqrt{|\Delta|}}{2a}=\lambda\pm i\cdot\mu \;\begin{cases}\to \lambda=-\dfrac{b}{2a}\\[4pt] \to \mu=\dfrac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}\end{cases}$

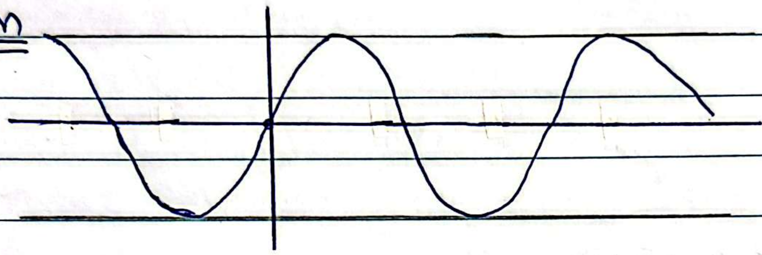
$e^{rt}=e^{(\lambda\pm i\mu)t}=e^{\lambda t}\cdot e^{\pm i\mu t}\;\begin{cases}+\;\to e^{\lambda t}(\cos(\mu t)+i\cdot\sin(\mu t))\\ -\;\to e^{\lambda t}(\cos(-\mu t)+i\cdot\sin(\mu t))\;(*)\end{cases}$ } Από ταυτότητα Euler

cos



: Άρα $\cos(-x)=\cos(x)$

sin



: Άρα $\sin(-x)=-\sin(x)$

$(*)\Rightarrow e^{\lambda t}(\cos(\mu t)-i\cdot\sin(\mu t))$

Συναρτήσεις βάσεις

$u_1(t)=e^{\lambda t}(\cos(\mu t)+i\cdot\sin(\mu t))$

$u_2(t)=e^{\lambda t}(\cos(\mu t)-i\cdot\sin(\mu t))$

$\to$ Ορίζουμε:

$$v_1(t)=\frac{1}{2}(u_1(t)+u_2(t))=\frac{1}{2}e^{\lambda t}(2\cos(\mu t)+i\cdot 0)=e^{\lambda t}\cdot\cos(\mu\cdot t)$$

$\to$ Ορίζουμε:

$$v_2(t)=\frac{1}{2i}(u_1(t)-u_2(t))=\frac{1}{2i}e^{\lambda t}(2i\cdot\sin(\mu t))=e^{\lambda t}\cdot\sin(\mu\cdot t)$$

Άρα, η γενική λύση της εξίσωσης είναι: $y(t)=c_1e^{\lambda t}\cdot\cos(\mu t)+c_2\cdot e^{\lambda t}\cdot\sin(\mu t),\; c_1,c_2\in\mathbb{R}$

Θεωρούμε το Π.Α.Τ

$$\begin{cases}ay''(t)+by'(t)+cy(t)=0, & t>t_0\\ y(t_0)=y_0\in\mathbb{R}\\ y'(t_0)=y_0'\in\mathbb{R}\end{cases}$$

$\bullet\ y'(t) = c_1\left(e^{\lambda t}\cdot\cos(\mu t)\right)' + c_2\left(e^{\lambda t}\cdot\sin(\mu t)\right)'$

$= c_1\left(\lambda\cdot e^{\lambda t}\cdot\cos(\mu t) + e^{\lambda t}(-\mu\cdot\sin(\mu t))\right) + c_2\left(\lambda\cdot e^{\lambda t}\cdot\sin(\mu t)\right) + c_2\left(e^{\lambda t}\cdot\mu\cdot\cos(\mu\cdot t)\right)$

$= c_1\lambda\cdot e^{\lambda t}\cdot\cos(\mu t) - c_1\cdot\mu\cdot e^{\lambda t}\cdot\sin(\mu t) + c_2\cdot\lambda\cdot e^{\lambda t}\cdot\sin(\mu t) + \mu\cdot c_2\cdot e^{\lambda t}\cdot\cos(\mu t)$

για $t=t_0$: $y(t_0) = c_1\cdot e^{\lambda t_0}\cdot\cos(\mu t_0) + c_2 e^{\lambda t_0}\sin(\mu t_0)$

$y'(t_0) = c_1\cdot e^{\lambda t_0}\left(\lambda\cdot\cos(\mu t_0) - \mu\cdot\sin(\mu t_0)\right) + c_2 e^{\lambda t_0}\left(\lambda\cdot\sin(\mu t_0) + \mu\cdot\cos(\mu t_0)\right)$

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda t_0}\cdot\cos(\mu\cdot t_0) & e^{\lambda t_0}\cdot\sin(\mu t_0) \\ e^{\lambda t_0}(\lambda\cdot\cos(\mu t_0) - \mu\sin(\mu t_0)) & e^{\lambda t_0}(\lambda\cdot\sin(\mu t_0) + \mu\cdot\cos(\mu t_0)) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_0' \end{pmatrix}$$

$\det(A) = e^{\lambda t_0}\left(\cancel{\lambda\cdot\sin(\mu t_0)\cdot\cos(\mu t_0)} + \mu\cdot\cos^2(\mu t_0)\right) - e^{\lambda t_0}\left(\cancel{\lambda\cdot\cos(\mu t_0)\cdot\sin(\mu t_0)} - \mu\sin^2(\mu t_0)\right)$

$= e^{\lambda t_0}\cdot\mu\underbrace{\left(\cos^2(\mu t_0) + \sin^2(\mu t_0)\right)}_{=1\ (\text{ταυτότητα}}$

$= \mu\cdot e^{\lambda t_0} \neq 0$

Παράδειγμα

Να λυθεί το Π.Α.Τ

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Χαρακτηριστική εξίσωση: $r^2 + 2r + 5 \neq 0$

$\Delta = b^2 - 4a\cdot c$

$\Delta = 4 - 4\cdot 1\cdot 5$

$\Delta = -16 < 0$

$r_{1,2} = \dfrac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \dfrac{-2 \pm i\cdot\sqrt{16}}{2} = \dfrac{-2 \pm i\cdot 4}{2} = -1 \pm 2i$

$\bullet\ \lambda = -1,\ \mu = 2$

$r_{1,2} = \lambda \pm i\mu$

Γενική λύση: $y(t) = c_1\cdot e^{-t}\cdot\cos(2\cdot t) + c_2 e^{-t}\cdot\sin(2t)$

για $t=0$: $y(0) = c_1\cdot\underbrace{e^0}_{=1}\cdot\underbrace{\cos(0)}_{=1} + c_2\cdot\underbrace{e^0}_{=1}\cdot\underbrace{\sin(0)}_{=0}$

$y(0) = c_1 \xrightarrow{y(0)=0} c_1 = 0$

Άρα, $y(t) = c_2\cdot e^{-t}\cdot\sin(2t)$

$\bullet\ y'(t) = -c_2\cdot e^{-t}\cdot\sin(2t) + c_2\cdot e^{-t}\cdot 2\cdot\cos(2t)$

για $t=0$: $y'(0) = -c_2\cdot\underbrace{e^0}_{=1}\cdot\underbrace{\sin(0)}_{=0} + c_2\cdot\underbrace{e^0}_{=1}\cdot 2\cdot\underbrace{\cos(0)}_{=1}$

$$y'(0) = 2c_2 \xrightarrow{y'(0)=1} 2c_2 = 1 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{2}$$

Άρα, μοναδική λύση του Π.Α.Τ είναι: $y(t) = \frac{1}{2}\cdot e^{-t}\cdot \sin(2t)$

Διαφορικές Εξισώσεις - $2^{ης}$ Τάξης, Μη ομογενείς με σταθερούς συντελεστές

Γενική Μορφή: $a\cdot y''(t) + b\cdot y'(t) + cy(t) = q(t)$ (*)

$a, b, c \in \mathbb{R}$, $q(t)$: μια δοσμένη συνάρτηση.

* Έστω $y_1(t), y_2(t)$ τυχαίες λύσεις της (*)

$$ay_1'' + by_1' + cy_1 = q \quad (**)$$

$$ay_2'' + by_2' + cy_2 = q \quad (***)$$

Αφαιρώ κατά μέλη τις (**) και (***)

$$a(y_1'' - y_2'') + b(y_1' - y_2') + c(y_1 - y_2) = \underbrace{0}_{q-q}$$

Γνωρίζω ότι $(c_1y_1 + c_2y_2)' = c_1y_1' + c_2y_2'$

Άρα, $a(y_1 - y_2)'' + b(y_1 - y_2)' + c(y_1 - y_2) = 0$ (~)

Θέτω $y_h(t) = y_1(t) - y_2(t)$

Τότε η (~) $\Rightarrow ay_h'' + by_h' + cy_h = 0$: έχει γνωστή οικογένεια λύσεων

$y_1(t) - y_2(t) = y_h(t) \Rightarrow y_1(t) = y_h(t) + y_2(t)$ (≈)

$y(t) = y_1(t)$: η γενική λύση της εξίσωσης

$y_p(t) = y_2(t)$: μία ειδική λύση της εξίσωσης

Γενική λύση: $y(t) = \underbrace{y_h(t)}_{\text{λύση της ομογενούς εξίσωσης}} + \underbrace{y_p(t)}_{\text{ειδική λύση του αρχικού προβλήματος}}$

$q(t)$	$y_p(t)$
1) $P_n(t)$: Πολυώνυμο n βαθμού	$t^s(A_nt^n + A_{n-1}t^{n-1} + \dots + A_1t + A_0)$, $s = 0, 1, 2$
2) $P_n(t)$: e^{kt}	$t^s(A_nt^n + A_{n-1}t^{n-1} + \dots + A_1t + A_0)e^{kt}$, $s = 0, 1, 2$
3) $P_n(t) = \begin{cases} \sin(kt) \\ \text{ή} \\ \cos(kt) \end{cases}$	$t^s(A_nt^n + A_{n-1}t^{n-1} + \dots + A_1t + A_0)\cos(kt) + t^s(A_nt^n + A_{n-1}t^{n-1} + \dots + A_1t + A$ $\cdot \sin(kt)$, $s = 0, 1, 2$

π.χ 1) $q(t) = t^2 - t$

για $s=0$:

$$A_2 t^2 + A_1 t + A_0$$

για $s=1$:

$$t(A_2 t^2 + A_1 t + A_0) = A_2 t^3 + A_1 t^2 + A_0 t$$

για $s=2$:

$$t^2(A_2 t^2 + A_1 t + A_0) = A_2 t^4 + A_1 t^3 + A_0 t^2$$

Παράδειγμα

Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης

$y'' - 3y' - 4y = 2e^{-t}$

• $y_h'' - 3y_h' - 4y_h = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 9 - 4(-4)\cdot 1$

$\Delta = 25 > 0$

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} \quad r_1 = \frac{3+5}{2} = 4, \quad r_2 = \frac{3-5}{2} = -1$$

Η λύση $y_h(t) = c_1 \cdot e^{4t} + c_2 \cdot e^{-t}$

→ Περίπτωση 2:

$\xrightarrow{s=0} y_p(t) = A_0 e^{-t}$

$\xrightarrow{s=1} y_p(t) = A_0 t \cdot e^{-t}$

$\xrightarrow{s=2} y_p(t) = A_0 t^2 \cdot e^{-t}$

Δοκιμή 1 $(s=0)$: $y_p(t) = A_0 e^{-t}$

$y_p'(t) = -A_0 \cdot e^{-t}$

$y_p''(t) = A_0 \cdot e^{-t}$

Εφαρμόζουμε στην εξίσωση (στην μη ομογενή)

$$\underbrace{A_0 e^{-t}}_{y''(t)} - 3\underbrace{(-A_0 e^{-t})}_{y'(t)} - 4\underbrace{(A_0 e^{-t})}_{y(t)} = \underbrace{2e^{-t}}_{q(t)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_0 e^{-t} + 3(A_0 e^{-t}) - 4(A_0 e^{-t}) = 2e^{-t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = 2e^{-t} \Rightarrow e^{-t} = 0$$: Αδύνατο γιατί $e^{-t} > 0$

Δοκιμή 2 $(s=1)$: $y_p(t) = A_0 \cdot t \cdot e^{-t}$

$y_p'(t) = A_0 \cdot e^{-t} - A_0 t \cdot e^{-t}$

$$y_p''(t) = -A_0 e^{-t} - A_0 e^{-t} + A_0 t e^{-t} = -2(A_0 e^{-t}) + A_0 t e^{-t}$$

Εφαρμόζουμε στην εξίσωση

$$\underbrace{-2(A_0e^{-t}) + A_0te^{-t}}_{y''_p(t)} - 3\underbrace{(A_0e^{-t} - A_0te^{-t})}_{y'_p(t)} - 4\underbrace{(A_0te^{-t})}_{y_p(t)} = \underbrace{2e^{-t}}_{q(t)}$$

$$\Rightarrow -2A_0e^{-t} + A_0te^{-t} - 3A_0e^{-t} + 3A_0te^{-t} - 4A_0te^{-t} = 2e^{-t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_0e^{-t}(-2-3) + A_0te^{-t}\underbrace{(1+3-4)}_{0} = 2e^{-t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5A_0\cancel{e^{-t}} = 2\cancel{e^{-t}} \Rightarrow A_0 = -\frac{2}{5}$$

Άρα, η μοναδική λύση του προβλήματος είναι: $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$

$$= c_1e^{4t} + c_2e^{-t} - \frac{2}{5}t \cdot e^{-t}$$

$$= c_1e^{4t} + \left(c_2 - \frac{2}{5}t\right)e^{-t}$$

Παράδειγμα

Να βρεθεί η γενική λύση του Π.Α.Τ.

$$\begin{cases} y''(t) - 3y'(t) - 4y(t) = 2e^{-t} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Γενική λύση: $y(t) = c_1 e^{4t} + \left(c_2 - \frac{2}{5}t\right)e^{-t}$

για $t=0$: $y(0) = c_1e^0 + \left(c_2 - \frac{2}{5}\cdot 0\right)\cdot e^0 \Rightarrow y(0) = c_1 + c_2 \xrightarrow{y(0)=1} c_1 + c_2 = 1$ (*)

$y'(t) = 4c_1e^{4t} - \frac{2}{5}e^{-t} - \left(c_2 - \frac{2}{3}t\right)\cdot e^{-t}$

για $t=0$: $y'(0) = 4c_1\cdot e^0 - \frac{2}{5}e^{-t} - (c_2 + 0)\cdot e^0 \Rightarrow y'(0) = 4c_1 - \frac{2}{5} - c_2 \xrightarrow{y'(0)=0}$

$$\Rightarrow 4c_1 - \frac{2}{5} - c_2 = 0 \Rightarrow 4c_1 - c_2 = \frac{2}{5}$$

$$(*),(**) = \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ 4c_1 - c_2 = \frac{2}{5} \end{cases}$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (*) και (**)

$$5c_1 - 0c_2 = \frac{7}{5} \Rightarrow c_1 = \frac{7}{25}$$

$$(*) \Rightarrow \frac{7}{25} + c_2 = 1 \Rightarrow c_2 = \frac{25}{25} - \frac{7}{25} \Rightarrow c_2 = \frac{18}{25}$$

Άρα, μοναδική λύση είναι του προβλήματος είναι: $y(t) = \frac{7}{25}e^{4t} + \left(\frac{18}{25} - \frac{2}{3}t\right)e^{-t}$