ΜΕΜ-205 Περιγραφική Στατιστική

Τμήμα Μαθηματικών και Εφ. Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

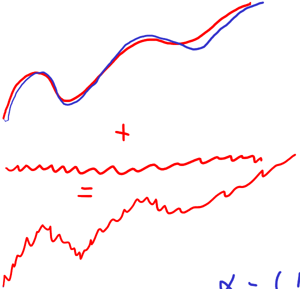
Κώστας Σμαραγδάκης (kesmarag@gmail.com)

Θεωρία 10ης εβδομάδας

$$Y_t = T_t + S_T + \cancel{C_t} + R_t$$

Εφαρμογή γραμμικού φίλτρου στη χρονολογική σειρά

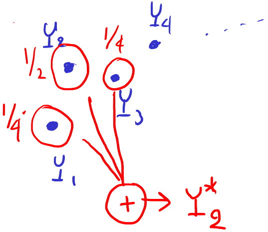
$$Y_t = T_t + R_t \qquad R_t \sim N(0, \sigma^2)$$



$$\mathbf{a} = [a_{-s}, \dots, a_s]^T, \quad \sum_{u=-s}^{s} a_u = 1, \; a_u \geq 0$$

$$Y_t^* = \sum_{u=-s}^{s} a_u Y_{t+u}$$

$$Y_t \rightarrow \boxed{\text{Filter}} \rightarrow Y_t^*$$



Παράδειγμα:

$$\underset{\sim}{\alpha} = (\underset{\alpha_{-1}}{1/4}, \underset{\alpha_0}{1/2}, \underset{\alpha_1}{1/4})$$

$$Y_t^* = \alpha_1 Y_{t-1} + \alpha_2 Y_t + \alpha_3 Y_{t+1} =$$
$$= 1/4\, Y_{t-1} + 1/2\, Y_t + 1/4\, Y_{t+1}$$

Παράδειγμα : $\underset{\sim}{\alpha} = \left(1/2\,,\ 1/2\,,\ 0\right)$

$$\boxed{Y_{t-1} \qquad Y_t \qquad Y_{t+1}} \quad Y_{t+2}$$

$$\downarrow$$

$$Y_t^{*} = f\left(Y_{t-1}, Y_t\right)$$

Παράδειγμα $5 \cdot 1/3 + 4 \cdot 1/3 + 3 \cdot 1/3$

$$Y_t = \{1\,,\ 5\,,\ 4\,,\ 3\,,\ 2\}$$

$$1 \cdot 1/3 + 5 \cdot 1/3 + 4 \cdot 1/3$$

$$\underset{\sim}{\alpha} = \left(1/3\,,\ 1/3\,,\ 1/3\right)$$

$$Y_t^{*} = \{\sqcup\,,\ \bullet\,,\ \bullet\,,\ \bullet\,,\ \sqcup\}$$

I ▶ Απλός κινητός μέσος τάξης $2s + 1$

$s = 1$ $\underset{\sim}{\alpha} = (\alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_1) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

$$a_u = \frac{1}{2s+1}, \quad u = -s, \dots, s$$

Τάξης $3 = 2 \cdot 1 + 1$

II ▶ Απλός κινητός μέσος τάξης $2s$

Τάξη 2 $s = 1$ $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right]$

$$a_u = \frac{1}{2s}, \quad u = -s+1, \dots, s-1, \quad a_{-s} = a_s = \frac{1}{4s}$$

$-2+1$ $2-1$

-1 1

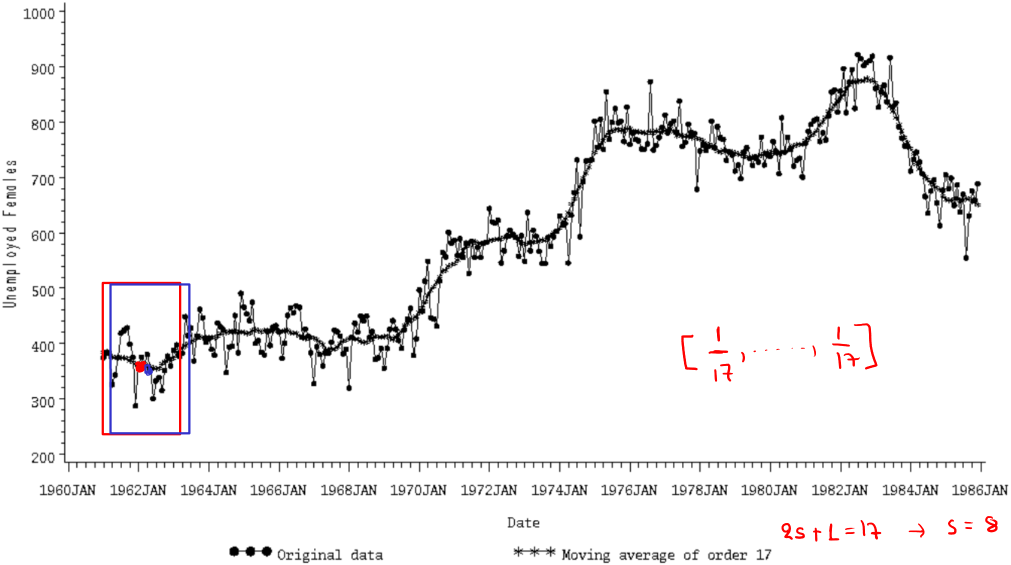
Παράδειγμα

Ποιά είναι τα διανύσματα συντελεστών για τα γραμμικά φίλτρα που αντιστοιχούν στους κινητούς μέσους με τάξεις 4 και 5;

Ταξη 4 : $4 = 2 \cdot 2$ άρα $s = 2$ $\underset{\sim}{\alpha} = \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right)$

Τάξη 5 : $5 = 2 \cdot 2 + 1$ $s = 2$ $\underset{\sim}{\alpha} = (1/5, 1/5, 1/5, 1/5, 1/5)$

Χρονολογικές Σειρές (Time Series)



$\left[\frac{1}{17}, \dots, \frac{1}{17}\right]$

$2s + 1 = 17 \rightarrow s = 8$

$2s+1=3 \rightarrow s=1$ $\qquad \alpha = [1/3, 1/3, 1/3]$

Παράδειγμα

Εφαρμόστε το φίλτρο για τον απλό κινητό μέσο 3ης τάξεως στην παρακάτω χρονολογική σειρά

$$Y \quad \{\underbrace{1,\ 3,\ 5}_{3},\ 4,\ 6,\ 5,\ 7\}$$

$$\{1,\ \overbrace{3,\ 5,\ 4}^{4},\ \overbrace{6,\ 5,\ 7}^{6}\}$$

$$\{1,\ 3,\ \underbrace{5,\ 4,\ 6}_{5},\ \underbrace{4,\ 6,\ 5}_{5},\ 7\}$$

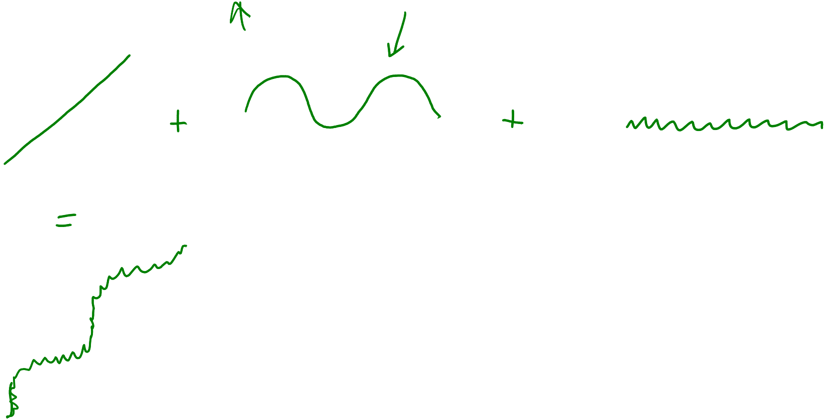
$R_t \approx Y_t - Y_t^*, \quad t = 2, \ldots, 6$

$$\boxed{\alpha = [1/3, 1/3, 1/3]}$$

$$Y^* \quad \{\sqcup, 3, 4, 5, 5, 6, \sqcup\}$$

$$(1/3 + 1/6)\cdot 3 + (1/3 + 1/6)\cdot 5$$

$$Y_t = T_t + S_t + R_t \qquad S_t^* = [\sqcup, 0, 0, 0, \sqcup]$$



- Έστω S_t είναι p-periodic

$\{1, 3, 2, 1, 3, 2, 1, 3, 2\} = S_t$

$1/3 \quad 1/3 \quad 1/3$

$T_t = \{7, 8, 9, \dots, \}$

$$S_t = S_{t+p}, \quad t = 1, \dots, N-p$$

$S_t^* = [1, 2, 2, 2, \dots, 2, 1]$

- Εάν εφαρμόσουμε τον απλό κινητό μέσο p τάξης

$$S_t^* = S$$

$t = s, \dots, n-s$

$Y_t = T_t + S_t + R_t = \overbrace{(T_t + S)}^{T_t'} + \underbrace{(S_t - S)}_{S_t'} + R_t$

- Υποθέτουμε ότι $S_t^* = 0$, ενσωματόνοντας το S στη μακροχρόνια τάση

$$T_t' = T_t + S$$

$S_t' = [-1, 1, 0, -1, \dots, 0]$

$T_t' = \{9, 10, 11, \dots\}$

- Για ευκολία από εδώ και πέρα θα ενοούμε ως T_t το T_t'

$Y_t = T_t + S_t + R_t$

- Ορίζουμε τη χρονολογική σειρά με τις διαφορές

$Y_t = T_t + S_t + R_t$

$$D_t = Y_t - Y_t^* \sim S_t + R_t$$

$Y_t^* \approx T_t$

$Y_t^* \approx T_t \qquad Y_t - Y_t^* \approx S_t + R_t \qquad \{U, D_2, D_3, D_4, \ldots, D_8, U\} \qquad D_t \approx \cancel{T_t} + S_t + R_t - \cancel{T_t}$

- Ορίζουμε τα $\bar{D}_t$

$$\bar{D}_t = \frac{1}{n_t} \sum_{j=0}^{n_t - 1} D_t, \quad t = 1, \ldots, p$$

$D_2 \approx S_2 + R_2 \qquad D_4 \approx S_1 + R_4$

$D_3 \approx S_3 + R_3 \qquad D_5 \approx S_2 + R_5 \ldots D_8 \approx S_2 + R_8$

$\bar{D}_1, \bar{D}_2, \bar{D}_3$

$\frac{1}{3}(\bar{D}_1 + \bar{D}_2 + \bar{D}_3)$

- Προσεγγίζουμε τα S_t με τα $\hat{S}_t$

$$\hat{S}_t = \bar{D}_t - \frac{1}{p} \sum_{j=1}^{p} \bar{D}_j \sim S_t, \quad t = 1, \ldots, p$$

$\hat{S}_1, \hat{S}_2, \hat{S}_3$

- Επεκτήνουμε σε όλο το μήκος της χρονολογικής σειράς

$$\hat{S}_{t+jp} = \hat{S}_t, \quad j = 1, 2, \ldots, J_t, \; t = 1, \ldots, p$$

$[\hat{S}_1, \hat{S}_2, \hat{S}_3, \hat{S}_1, \hat{S}_2, \hat{S}_3, \ldots, \hat{S}_3]$

Απαλοιφή της εποχικής συνιστώσας

$$Y_t - \hat{S}_t \sim Y_t - S_t = T_t + R_t, \quad t = 1, \ldots, N$$

Παράδειγμα

$$T_t = [10,\ 15,\ 22,\ 24,\ 33,\ 36,\ 40,\ 50,\ 55,\ 55,\ 58,\ 60]^T$$

$$S_t = [10,\ 6,\ 20,\ 10,\ 6,\ 20,\ 10,\ 6,\ 20,\ 10,\ 6,\ 20]^T$$

$$R_t = [-1,\ -2,\ 1,\ 1,\ -1,\ 2,\ 0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 0]^T$$

$$Y_t = [19,\ 19,\ 43,\ 35,\ 38,\ 58,\ 50,\ 57,\ 74,\ 67,\ 62,\ 80]^T$$

Παράδειγμα

$$T_t = [22,\ 27,\ 34,\ 36,\ 45,\ 48,\ 52,\ 62,\ 67,\ 67,\ 70,\ 72]^T$$

$$S_t = [-2,\ -6,\ 8,\ -2,\ -6,\ 8,\ -2,\ -6,\ 8,\ -2,\ -6,\ 8]^T$$

$$R_t = [-1,\ -2,\ 1,\ 1,\ -1,\ 2,\ 0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 0]^T$$

$$Y_t = [19,\ 19,\ 43,\ 35,\ 38,\ 58,\ 50,\ 57,\ 74,\ 67,\ 62,\ 80]^T$$

$\bar{D}_1, \bar{D}_2, \bar{D}_3$

$\frac{\bar{D}_1+\bar{D}_2+\bar{D}_3}{3}$

$\hat{S}_j = \bar{D}_j - \frac{\bar{D}_1+\bar{D}_2+\bar{D}_3}{3}$

$\bar{D}_2 = S_2 \approx \frac{D_2+D_5+D_8+D_{11}}{4}$

$Y_t^* = [\sqcup, 27, 32.3, \quad \sqcup]$

$S_1 \quad S_2 \quad S_3 \quad S_1 \cdots S_3$

$D_t = Y_t - Y_t^* = [\sqcup, 19-27, 43-32.3, \ldots, \sqcup]$

$\bar{D}_t,\ t=1,2,3$

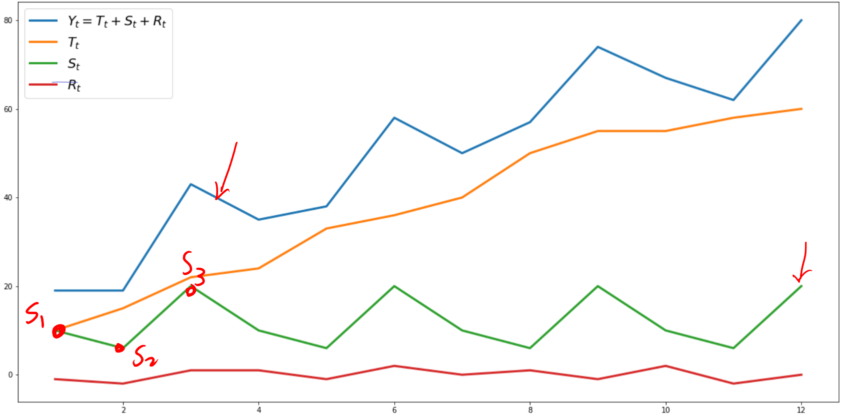
$\bar{D}_1 = S_1 \approx \frac{D_4+D_7+D_{10}}{3}$

$[\sqcup, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6, D_7, D_8, D_9, D_{10}, D_{11}, \sqcup]$

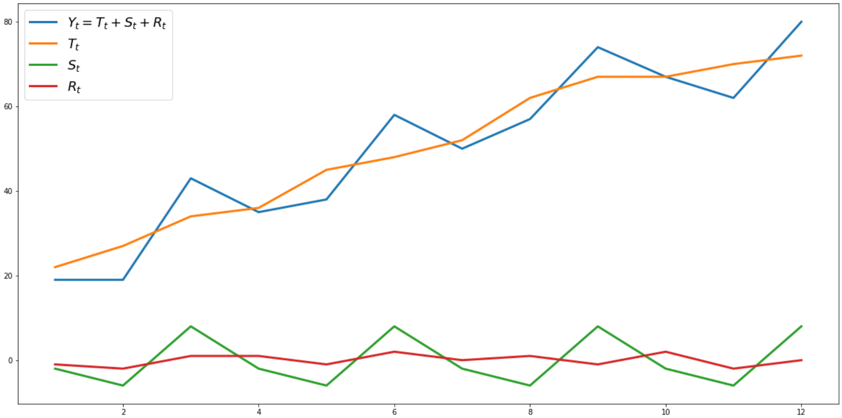
$S_2 \quad S_3 \quad S_1 \quad S_2 \quad S_3 \quad S_1 \quad S_2 \quad S_3 \quad S_1 \quad S_2$

Παράδειγμα

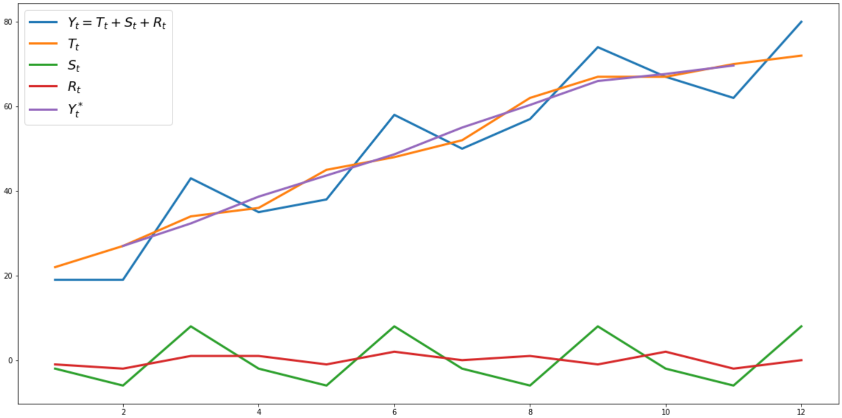
p=3



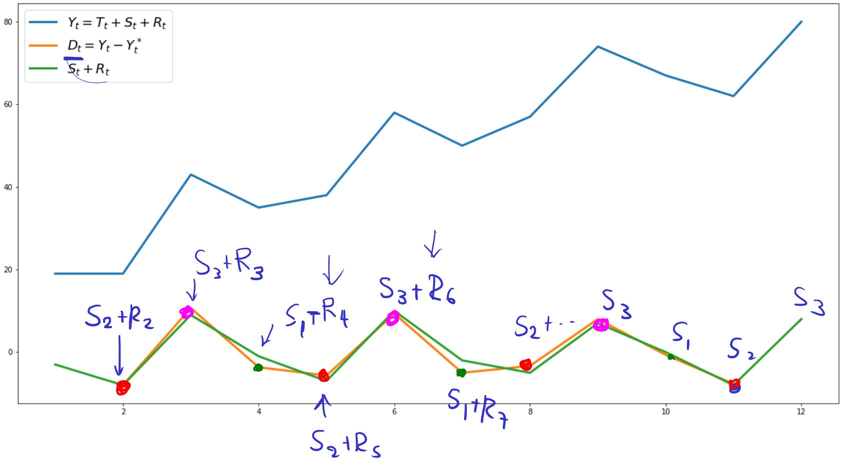
Παράδειγμα



Παράδειγμα



Παράδειγμα



$Y_t = T_t + S_t + R_t$
$D_t = Y_t - Y_t^*$
$S_t + R_t$
80
60
40
20
0
2
4
6
8
10
12
$S_2 + R_2$
$S_3 + R_3$
$S_1 + R_4$
$S_3 + R_6$
$S_2 + R_5$
$S_1 + R_7$
$S_2 + \cdots$
S_3
S_1
S_2
S_3

Παράδειγμα

$$Y_t - \hat{S}_t \approx T_t + R_t$$