# ΜΕΜ-205 Περιγραφική Στατιστική

**Τμήμα Μαθηματικών και Εφ. Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης**

Κώστας Σμαραγδάκης (kesmarag@gmail.com)

Θεωρία 7ης εβδομάδας

- Όταν δεν γνωρίζουμε τη τιμή του p δεν μπορούμε να υπολογίσουμε το $\sigma_{\hat{p}}$

### Εκτιμήτρια της τυπικής απόκλισης της $\hat{p}$ για μεγάλο δείγμα

$p \qquad \hat{p}$

$\hat{p}=0.2 \qquad N=40$

$$s_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{N}}$$

$$s_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{0.2 \cdot 0.8}{40}}$$

### Διάστημα εμπιστοσύνης της $p$

$\alpha = 0.05 \qquad 95\%$ διαστημα εμπιστοσύνης

Το $(1-a) * 100\%$ διάστημα εμπιστοσύνης για την αναλογία $p$ στο πληθυσμό είναι:

$z = z(\alpha)$

$$[\hat{p} - zs_{\hat{p}}, \hat{p} + zs_{\hat{p}}],$$

$\hat{p} - zs_{\hat{p}} \qquad \hat{p} \qquad \hat{p} + zs_{\hat{p}}$

όπου $z$ το z-score για το οποίο $P(Z < z) = 1 - a/2$. $= 0.975$

$Z \sim N(0,1)$

Τότε

$$P(p \in [\hat{p} - zs_{\hat{p}}, \hat{p} + zs_{\hat{p}}]) = 1 - a$$

**Παράδειγμα** $N$ $\quad \hat{p} = 0.3 \quad N_p >> N$

Σε δείγμα 1000 ατομών μιας χώρας το 30% μετρήθηκε να έχει ηλικία μικρότερη από 25 έτη. Βρείτε το ~~90~~70% διάστημα εμπιστοσύνης για το ποσοστό του πληθυσμού της χώρας με ηλικία μικρότερη από 25 έτη.

$$S_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{N}} = \sqrt{\frac{0.3\cdot 0.7}{1000}} \approx 0.0144 \qquad Z \sim N(0,1)$$

$$\alpha = 0.3 \cdot \qquad (1-0.3)\cdot 100\% = 95\%$$

$$P(Z \leq z) = 1 - \alpha/2 = 0.85$$

$\downarrow$ Απο πίνακα $z \approx 1.04$

$$p \in [0.3 - 1.04\cdot 0.0144,\ 0.3 + 1.04\cdot 0.0144] = [0.285,\ 0.315]$$

με πιθανότητα επιτυχίας 70%

$$S_{\hat{p}} \propto \frac{1}{\sqrt{N}}$$

$N' = 4N$ $\quad$ $S'_{\hat{p}} = \frac{1}{2} S_{\hat{p}}$ $\quad$ Εαν $\hat{p} = \hat{p}'$ $\quad$ $\alpha = \alpha'$

## Διάστημα Εμπιστοσύνης του $\mu$

Στη συνέχεια θα περιγράψουμε το διάστημα εμπιστοσύνης για την μέση τιμή του πληθυσμού στις ακόλουθες περιπτώσεις:

1. Η μεταβλητή $X$ ακολουθεί κανονική κατανομή $\leftarrow X \sim N(\mu, \sigma^2)$
2. Η μεταβλητή $X$ δεν ακολουθεί κανονική κατανομή
   - Σε αυτή τη περίπτωση υποθέτουμε ότι το δείγμα είναι αρκετά μεγάλο ($n \geq 30$)

- Επίσης θα εξετάσουμε χωρίστα αν γνωρίζουμε την τυπική απόκλιση $\sigma$ ή όχι.
- Όταν το $\sigma$ είναι άγνωστο χρειαζόμαστε τη t-κατανομή.

- όταν το $\sigma$ είναι γνωστό θα έχουμε

**Τυπική απόκλιση της $\bar{X}$**

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

**Διάστημα εμπιστοσύνης της $\mu$**

Το $(1 - a) * 100\%$ διάστημα εμπιστοσύνης για την $\mu$ είναι:

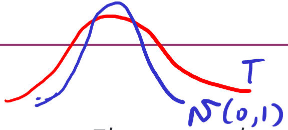
$$[\bar{X} - z\sigma_{\bar{X}}, \bar{X} + z\sigma_{\bar{X}}]$$

όπου το $z$ (z-score) λαμβάνεται έτσι ώστε

$$P(Z < z) = 1 - a/2$$

- Περιθώριο σφάλματος: $E = z\sigma_{\bar{X}}$

# t-Κατανομή (t-distribution)




- Είναι γνωστή και ως Student’s t distribution και σχετίζεται με την τυπική κανονική κατανομή.
- Όπως και η τυπική κανονική κατανομή η t-κατανομή είναι συμμετρική γύρω από το μηδέν, έχει καμπανοειδη μορφή και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι παντού θετική.
- Παρουσιάζει μεγαλύτερη διασπορά τιμών σε σχέση τη τυπική κανονική κατανομή.
- Η μορφή της εξαρτάται από το μέγεθος του δείγματος $N$. Μάλιστα η μοναδική παράμετρος της συμβολίζεται με df και είναι άμεσα συνδεδεμένη με το $N$.

$$df = N - 1 \quad (\text{βαθμοί ελευθερίας})$$

- Όσο το $df$ αυξάνει η t-κατανομή προσεγγίζει όλο και περισσότερο την τυπική κανονική κατανομή.

- Την t-κατανομή με *df* βαθμούς ελευθερίας θα την συμβολίζουμε ως $t_{df}$
- Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$p(t) = \frac{\Gamma(\frac{df+1}{2})}{\sqrt{df\pi}\Gamma(\frac{df}{2})}\left(1 + \frac{t^2}{df}\right)^{-\frac{df+1}{2}}$$

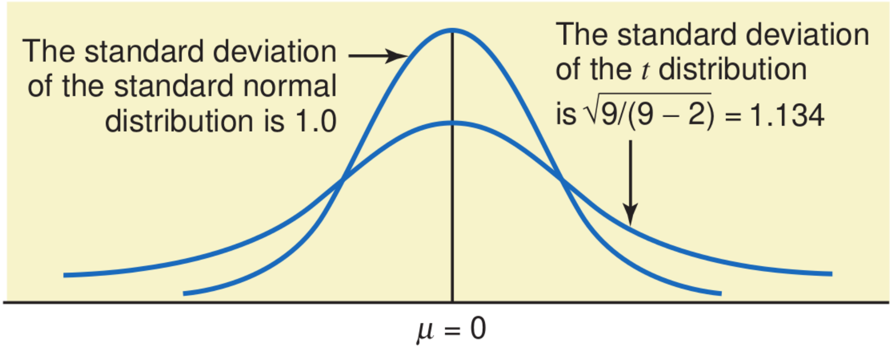
$df \to \infty$ Συναρτ. Πυκν. Πιθαν.
Τυπ. Κανονική Κατανομή

- Μέση τιμή

$$\mathbb{E}(T) = 0$$

- Διασπορά

$$\mathbb{V}(T) = df * (df - 2)$$


The standard deviation of the standard normal distribution is 1.0
The standard deviation of the $t$ distribution is $\sqrt{9/(9-2)} = 1.134$
$\mu = 0$

# t-Κατανομή (t-distribution)

t-scores

| cum. prob | $t_{.50}$ | $t_{.75}$ | $t_{.80}$ | $t_{.85}$ | $t_{.90}$ | $t_{.95}$ | $t_{.975}$ | $t_{.99}$ | $t_{.995}$ | $t_{.999}$ | $t_{.9995}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| one-tail | 0.50 | 0.25 | 0.20 | 0.15 | 0.10 | 0.05 | 0.025 | 0.01 | 0.005 | 0.001 | 0.0005 |
| two-tails | 1.00 | 0.50 | 0.40 | 0.30 | 0.20 | 0.10 | 0.05 | 0.02 | 0.01 | 0.002 | 0.001 |
| df | | | | | | | | | | | |
| 1 | 0.000 | 1.000 | 1.376 | 1.963 | 3.078 | 6.314 | 12.71 | 31.82 | 63.66 | 318.31 | 636.62 |
| 2 | 0.000 | 0.816 | 1.061 | 1.386 | 1.886 | 2.920 | 4.303 | 6.965 | 9.925 | 22.327 | 31.599 |
| 3 | 0.000 | 0.765 | 0.978 | 1.250 | 1.638 | 2.353 | 3.182 | 4.541 | 5.841 | 10.215 | 12.924 |
| 4 | 0.000 | 0.741 | 0.941 | 1.190 | 1.533 | 2.132 | 2.776 | 3.747 | 4.604 | 7.173 | 8.610 |
| 5 | 0.000 | 0.727 | 0.920 | 1.156 | 1.476 | 2.015 | 2.571 | 3.365 | 4.032 | 5.893 | 6.869 |
| 6 | 0.000 | 0.718 | 0.906 | 1.134 | 1.440 | 1.943 | 2.447 | 3.143 | 3.707 | 5.208 | 5.959 |
| 7 | 0.000 | 0.711 | 0.896 | 1.119 | 1.415 | 1.895 | 2.365 | 2.998 | 3.499 | 4.785 | 5.408 |
| 8 | 0.000 | 0.706 | 0.889 | 1.108 | 1.397 | 1.860 | 2.306 | 2.896 | 3.355 | 4.501 | 5.041 |
| 9 | 0.000 | 0.703 | 0.883 | 1.100 | 1.383 | 1.833 | 2.262 | 2.821 | 3.250 | 4.297 | 4.781 |
| 10 | 0.000 | 0.700 | 0.879 | 1.093 | 1.372 | 1.812 | 2.228 | 2.764 | 3.169 | 4.144 | 4.587 |
| 11 | 0.000 | 0.697 | 0.876 | 1.088 | 1.363 | 1.796 | 2.201 | 2.718 | 3.106 | 4.025 | 4.437 |
| 12 | 0.000 | 0.695 | 0.873 | 1.083 | 1.356 | 1.782 | 2.179 | 2.681 | 3.055 | 3.930 | 4.318 |
| 13 | 0.000 | 0.694 | 0.870 | 1.079 | 1.350 | 1.771 | 2.160 | 2.650 | 3.012 | 3.852 | 4.221 |
| 14 | 0.000 | 0.692 | 0.868 | 1.076 | 1.345 | 1.761 | 2.145 | 2.624 | 2.977 | 3.787 | 4.140 |
| 15 | 0.000 | 0.691 | 0.866 | 1.074 | 1.341 | 1.753 | 2.131 | 2.602 | 2.947 | 3.733 | 4.073 |
| 16 | 0.000 | 0.690 | 0.865 | 1.071 | 1.337 | 1.746 | 2.120 | 2.583 | 2.921 | 3.686 | 4.015 |
| 17 | 0.000 | 0.689 | 0.863 | 1.069 | 1.333 | 1.740 | 2.110 | 2.567 | 2.898 | 3.646 | 3.965 |
| 18 | 0.000 | 0.688 | 0.862 | 1.067 | 1.330 | 1.734 | 2.101 | 2.552 | 2.878 | 3.610 | 3.922 |
| 19 | 0.000 | 0.688 | 0.861 | 1.066 | 1.328 | 1.729 | 2.093 | 2.539 | 2.861 | 3.579 | 3.883 |
| 20 | 0.000 | 0.687 | 0.860 | 1.064 | 1.325 | 1.725 | 2.086 | 2.528 | 2.845 | 3.552 | 3.850 |
| 21 | 0.000 | 0.686 | 0.859 | 1.063 | 1.323 | 1.721 | 2.080 | 2.518 | 2.831 | 3.527 | 3.819 |
| 22 | 0.000 | 0.686 | 0.858 | 1.061 | 1.321 | 1.717 | 2.074 | 2.508 | 2.819 | 3.505 | 3.792 |
| 23 | 0.000 | 0.685 | 0.858 | 1.060 | 1.319 | 1.714 | 2.069 | 2.500 | 2.807 | 3.485 | 3.768 |
| 24 | 0.000 | 0.685 | 0.857 | 1.059 | 1.318 | 1.711 | 2.064 | 2.492 | 2.797 | 3.467 | 3.745 |
| 25 | 0.000 | 0.684 | 0.856 | 1.058 | 1.316 | 1.708 | 2.060 | 2.485 | 2.787 | 3.450 | 3.725 |
| 26 | 0.000 | 0.684 | 0.856 | 1.058 | 1.315 | 1.706 | 2.056 | 2.479 | 2.779 | 3.435 | 3.707 |
| 27 | 0.000 | 0.684 | 0.855 | 1.057 | 1.314 | 1.703 | 2.052 | 2.473 | 2.771 | 3.421 | 3.690 |
| 28 | 0.000 | 0.683 | 0.855 | 1.056 | 1.313 | 1.701 | 2.048 | 2.467 | 2.763 | 3.408 | 3.674 |
| 29 | 0.000 | 0.683 | 0.854 | 1.055 | 1.311 | 1.699 | 2.045 | 2.462 | 2.756 | 3.396 | 3.659 |
| 30 | 0.000 | 0.683 | 0.854 | 1.055 | 1.310 | 1.697 | 2.042 | 2.457 | 2.750 | 3.385 | 3.646 |
| 40 | 0.000 | 0.681 | 0.851 | 1.050 | 1.303 | 1.684 | 2.021 | 2.423 | 2.704 | 3.307 | 3.551 |
| 60 | 0.000 | 0.679 | 0.848 | 1.045 | 1.296 | 1.671 | 2.000 | 2.390 | 2.660 | 3.232 | 3.460 |
| 80 | 0.000 | 0.678 | 0.846 | 1.043 | 1.292 | 1.664 | 1.990 | 2.374 | 2.639 | 3.195 | 3.416 |
| 100 | 0.000 | 0.677 | 0.845 | 1.042 | 1.290 | 1.660 | 1.984 | 2.364 | 2.626 | 3.174 | 3.390 |
| 1000 | 0.000 | 0.675 | 0.842 | 1.037 | 1.282 | 1.646 | 1.962 | 2.330 | 2.581 | 3.098 | 3.300 |
| N(0,1) *z* | 0.000 | 0.674 | 0.842 | 1.036 | 1.282 | 1.645 | 1.960 | 2.326 | 2.576 | 3.090 | 3.291 |
| | 0% | 50% | 60% | 70% | 80% | 90% | 95% | 98% | 99% | 99.8% | 99.9% |
| | Confidence Level | | | | | | | | | | |

# Υπενθύμιση του πίνακα των z-scores

### Standard Normal Probabilities

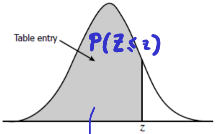



Table entry for $z$ is the area under the standard normal curve to the left of $z$.

| $z$ | .00 | .01 | .02 | .03 | .04 | .05 | .06 | .07 | .08 | .09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | .5000 | .5040 | .5080 | .5120 | .5160 | .5199 | .5239 | .5279 | .5319 | .5359 |
| 0.1 | .5398 | .5438 | .5478 | .5517 | .5557 | .5596 | .5636 | .5675 | .5714 | .5753 |
| 0.2 | .5793 | .5832 | .5871 | .5910 | .5948 | .5987 | .6026 | .6064 | .6103 | .6141 |
| 0.3 | .6179 | .6217 | .6255 | .6293 | .6331 | .6368 | .6406 | .6443 | .6480 | .6517 |
| 0.4 | .6554 | .6591 | .6628 | .6664 | .6700 | .6736 | .6772 | .6808 | .6844 | .6879 |
| 0.5 | .6915 | .6950 | .6985 | .7019 | .7054 | .7088 | .7123 | .7157 | .7190 | .7224 |
| 0.6 | .7257 | .7291 | .7324 | .7357 | .7389 | .7422 | .7454 | .7486 | .7517 | .7549 |
| 0.7 | .7580 | .7611 | .7642 | .7673 | .7704 | .7734 | .7764 | .7794 | .7823 | .7852 |
| 0.8 | .7881 | .7910 | .7939 | .7967 | .7995 | .8023 | .8051 | .8078 | .8106 | .8133 |
| 0.9 | .8159 | .8186 | .8212 | .8238 | .8264 | .8289 | .8315 | .8340 | .8365 | .8389 |
| 1.0 | .8413 | .8438 | .8461 | .8485 | .8508 | .8531 | .8554 | .8577 | .8599 | .8621 |
| 1.1 | .8643 | .8665 | .8686 | .8708 | .8729 | .8749 | .8770 | .8790 | .8810 | .8830 |
| 1.2 | .8849 | .8869 | .8888 | .8907 | .8925 | .8944 | .8962 | .8980 | .8997 | .9015 |
| 1.3 | .9032 | .9049 | .9066 | .9082 | .9099 | .9115 | .9131 | .9147 | .9162 | .9177 |

- όταν το $\sigma$ δεν είναι γνωστό δεν μπορούμε να υπολογίσουμε το $\sigma_{\bar{X}}$

**Εκτιμήτρια της τυπικής απόκλισης της $\bar{X}$**

$$s^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{N}(x_j - \bar{X})^2$$

δειγματική τυπική απόκλιση

$$s_{\bar{X}} = \frac{s}{\sqrt{N}}$$

**Διάστημα εμπιστοσύνης της $\mu$**

Το $(1-a)*100\%$ διάστημα εμπιστοσύνης για την $\mu$ είναι:

$$[\bar{X} - ts_{\bar{X}}, \bar{X} + ts_{\bar{X}}]$$

όπου το $t$ λαμβάνεται από την $t_{df}$, $df = N - 1$ έτσι ώστε

$$P(T < t) = 1 - a/2$$

- Περιθώριο σφάλματος: $E = ts_{\bar{X}}$

## Παράδειγμα

Έστω ότι η μεταβλητή $X$ ακολουθεί κανονική κατανομή. Έστω επίσης ότι για ένα δείγμα με 25 στοιχεία λάβαμε:

$$\bar{X} = 186, \quad s = 12$$

$$S_{\bar{X}} = \frac{s}{\sqrt{25}} = \frac{s}{5} = \frac{12}{5} = 2.4$$

$$df = N - 1 = 24$$

1. Κατασκευάστε το 95 % διάστημα εμπιστοσύνης για την μέση τιμή $\mu$.
2. Εάν για τη μελέτη μας το περιθώριο του σφάλματος θεωρείται μεγάλο τι θα μπορούσαμε να κάνουμε για να το μειώσουμε;
3. τι θα άλλαζε αν γνωρίζαμε ότι $\sigma = 12$.

1

$$t = 2.064$$

$$[186 - 2.064 \cdot 2.4 \, , \, 186 + 2.064 \cdot 2.4]$$

2

3

→ Διαστήματα Εμπιστοσύνης για το $p$ και το $\mu$

Δύο μεταβλητές που αναφέρονται στα ίδια στοιχεία λέμε ότι σχετίζονται αν κάποιες τιμές της μια μεταβλητής τείνουν να εμφανίζουν πιο συχνά όταν η δεύτερη μεταβλητή λαμβάνει συγκεκριμένες τιμές.

**Εξαρτημένη μεταβλητή**

Ονομάζεται η μεταβλητή για την οποία θέλουμε να περιγράψουμε και να εξηγήσουμε την συμπεριφορά της. Συνήθως συμβολίζεται με $Y$.

**Ανεξάρτητη μεταβλητή**

Ονομάζεται η μεταβλητή η οποία χρησιμοποιείται για να δικαιολογήσει τις αλλαγές των τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής. Συνήθως συμβολίζεται με $X$.

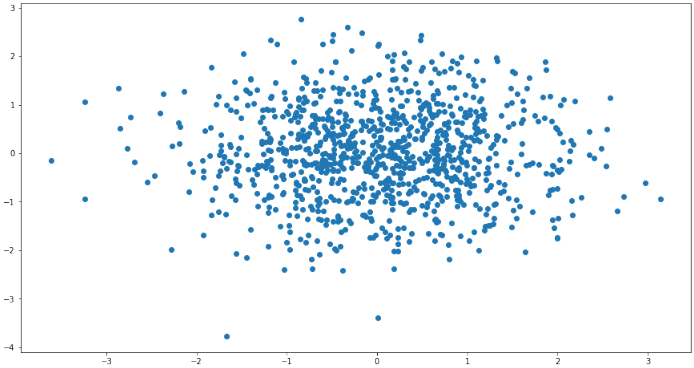
**Παράδειγμα**

Το αλκοόλ προκαλεί πολλές παρενέργειες στον οργανισμό όπως είναι η πτώση της θερμοκρασίας. Για τη μελέτη του φαινομένου, οι ερευνητές δίνουν διαφορετικές ποσότητες αλκοόλης σε ποντίκια και έπειτα μετρούν την αλλαγή της θερμοκρασίας τους 15 λεπτά μετά τη λήψη. Η **ποσότητα της αλκοόλης** είναι η **ανεξάρτητη μεταβλητή** ενώ **η μεταβολή της θερμοκρασίας** είναι η **εξαρτημένη μεταβλητή**.

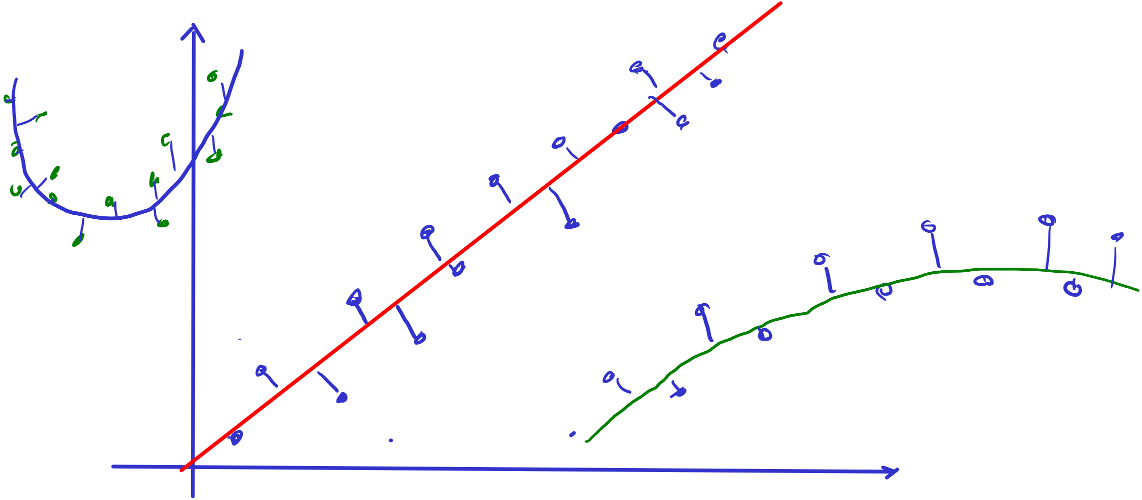
Για τη μελέτη του κατά πόσο δύο μεταβλητές συσχετίζονται, ακολουθούμε τα ακόλουθα βήματα:

- Γραφική αναπαράσταση και υπολογισμός των περιγραφικών μέτρων
- Αναγνώριση προτύπων και μελέτη των αποκλίσεων των τιμών.
- Όταν τα πρότυπα είναι αρκετά ευδιάκριτα, επιλογή κατάλληλου μαθηματικού μοντέλου για τη περιγραφή τους.

Το **διάγραμμα διασποράς** παρουσιάζει τη σχέση μεταξύ των τιμών δύο ποσοτικών μεταβλητών που αναφέρονται στα ίδια στοιχεία. Ο οριζόντιος άξονας εκφράζει τις τιμές της μιας μεταβλητής (συνήθως της ανεξάρτητης μεταβλητής) ενώ ο κάθετος τις τιμές της άλλης μεταβλητής (συνήθως της εξαρτημένης μεταβλητής).
Κάθε ζεύγος τιμών $(x, y)$ για τα στοιχεία του πληθυσμού ή του δείγματος απεικονίζοντε με ένα συμβολο.



# ~~Προσθήκη Ποιοτικής μεταβλητής στο διάγραμμα διασποράς~~

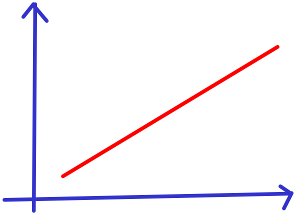


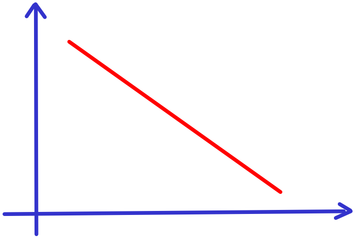
**Θετικά συσχετισμένες μεταβλητές**

Όσο μεγαλύτερες τιμές μιας μεταβλητής τείνουν να συνοδεύονται με όλο και μεγαλύτερες τιμές της άλλης μεταβλητής.

**Αρνητικά συσχετισμένες μεταβλητές**

Όσο μεγαλύτερες τιμές μιας μεταβλητής τείνουν να συνοδεύονται με όλο και μικρότερες τιμές της άλλης μεταβλητής.

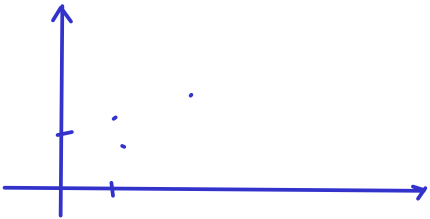




- Αν $X$ είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή και $Y$ είναι η εξαρτημένη μεταβλητή η συναρτησιακή σχέση των δύο μεταβλητών περιγράφεται μέσω μιας συνάρτησης $f$ στη μορφή $Y = f(X)$.
- Για δεδομένη τιμή $x$ της ανεξάρτητης μεταβλητής, η συνάρτηση $f$ δίνει την αντιστοιχη τιμή $y$ της εξαρτημένης μεταβλητής $Y$.
- Η $f$ δύναται να είναι στοχαστική συνάρτηση. Σε αυτή την περίπτωση ακόμη και για ίδιες τιμές της μεταβλητής $X$ μπορούν να προκύψουν διαφορετικές τιμές για την $Y$.

$f(x) = 2x +$ αποτέλεσμα ρίψης ζαριού.

| | | |
|---|---|---|
| $x = 1$ | 4 | $y(x=1) = 2 \cdot 1 + 4 = 6$ |
| $x = 2$ | 3 | $y(x=2) = 2 \cdot 2 + 3 = 7$ |
| $x = 3$ | 6 | $y(x=3) = 2 \cdot 3 + 6 = 12$ |
| $x = 4$ | 1 | $y(x=4) = 2 \cdot 4 + 1 = 9$ |



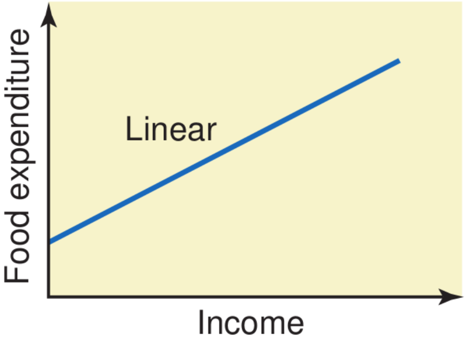
$$\hat{y} = 2x + 3.5$$

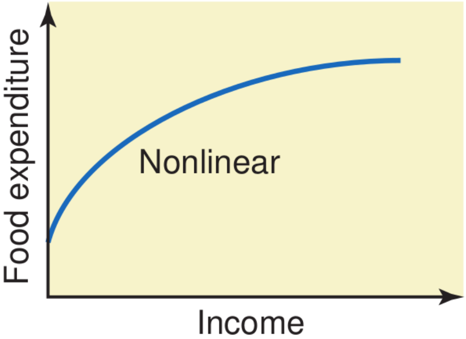
### Παλινδρόμηση

Ένα μοντέλο παλινδρόμησης είναι μια μαθηματική εξίσωση που περιγράφει την σχέση μεταξύ δύο ή περισσότερων μεταβλητών. Το μοντέλο παλινδρόμησης με δύο μεταβλητές, μια ανεξάρτητη και μια εξαρτημένη ονομάζεται **μοντέλο απλής παλινδρόμησης**.

### Απλή Γραμμική Παλινδρόμηση (Simple Linear Regression)

Ένα μοντέλο παλινδρόμησης το οποίο συνδέει με γραμμικό τρόπο την ανεξάρτητη με την εξαρτημένη μεταβλητή ονομάζεται **μοντέλο απλής γραμμικής παλινδρόμησης**.


Linear
Food expenditure
Income


Nonlinear
Food expenditure
Income

$$y = \underbrace{3.5 + 2x}_{\mu_{y|1} = 5.5} + \underbrace{(\text{ζαρι} - 3.5)}_{\varepsilon \leftarrow \text{μέση τιμή } 0}$$

### Αιτιοκρατικό μοντέλο

$$y = A + Bx$$

### Πιθανοθεωρητικό μοντέλο - Μοντέλο απλής γραμμικής παλινδρόμησης

$$y = A + Bx + \epsilon, \quad \epsilon : \text{όρος τυχαίου σφάλματος}$$

μέση τιμή του ε θα είναι μηδέν.

$A$ : σταθερός όρος (constant term), $B$ : κλίση (slope)

## Παραδοχές

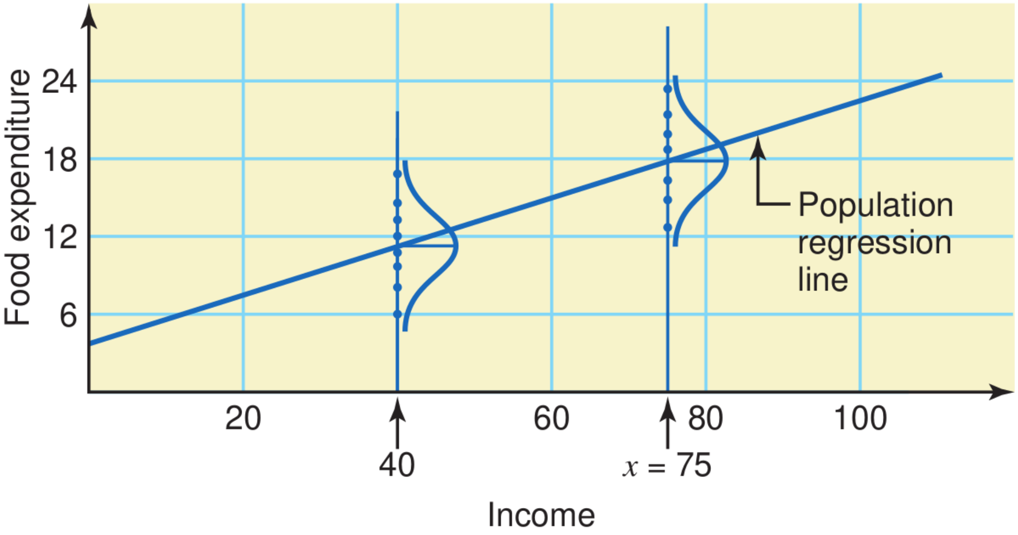
- Για δοσμένο $x$ το $\epsilon$ ακολουθεί ~~τυπική~~ κανονική κατανομή. με μέση τιμή 0
- Τα τυχαία σφάλματα διαφορετικών παρατηρήσεων είναι ανεξάρτητα. $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$
- Για κάθε $x$ οι κατανομές των τυχαίων σφαλμάτων παρουσιάζουν την ίδια τυπική απόκλιση.

## Ευθεία παλινδρόμησης για τον πληθυσμό

$y|x$

$$\mu_{y|x} = A + Bx$$

$+ \mu_{y|x}$


Food expenditure
24
18
12
6
20
40
60
80
100
x = 75
Income
Population
regression
line

$y(x) = A + Bx + \varepsilon$

**Δειγματικό μοντέλο απλής γραμμικής παλινδρόμησης**

$$\hat{y} = a + bx$$

- $a$ είναι δειγματική προσέγγιση του $A$
- $b$ είναι δειγματική προσέγγιση του $B$
- $\hat{y}$ είναι η εκτιμώμενη τιμή του $y$ για δοσμένο $x$

**Τυχαίο σφάλμα του δειγματικού μοντέλου απλής γραμμικής παλινδρόμησης**

$$e = y - \hat{y}$$ $e(x) = y(x) - \hat{y}(x)$

# Απλή Γραμμική Παλινδρόμηση

Έστω το τυχαίο δείγμα

$$\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N)\}$$

Για το τυχαίο σφάλμα του δειγματικού μοντέλου απλής γραμμικής παλινδρόμησης έχουμε:

$$e_n = y_n - \hat{y}_n, \quad n = 1, \dots, N$$

όπου η προσέγγιση του κάθε $y_n$ δίνεται ως

$$y_n = a + bx_n$$

**Άθροισμα τετραγωνικών σφαλμάτων**

$\sum |e_n|$

$$\text{SSE} = \sum_{n=1}^{N} e_n^2$$

θέλουμε τα α, b ε.ω min SSE

### Άθροισμα τετραγωνικών σφαλμάτων συναρτήσει των παραμέτρων του δειγματικού μοντέλου

$\alpha + bx$ ← προσέγγιση του μοντέλου

$$\mathcal{Q}(a, b) = \mathrm{SSE} = \sum_{n=1}^{N} (y_n - a - bx_n)^2$$

### Εκτίμηση ελαχίστων τετραγώνων

Ως εκτιμήσεις των $a, b$ λαμβάνουμε τις τιμές $a^*, b^*$ που ελαχιστοποιούν το άθροισμα των τετραγωνικών σφαλμάτων.

$$a, b = \operatorname*{arg\,min}_{a', b'} \mathcal{Q}(a', b')$$

$$\frac{\partial Q}{\partial a} = -\sum_{n=1}^{N} 2(y_n - \alpha - bx_n) \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial b} = -\sum_{n=1}^{N} 2x_n(y_n - \alpha - bx_n)$$

$$\sum_{n=1}^{N} (y_n - \alpha - bx_n) = 0 \qquad \sum x_n (y_n - \alpha - bx_n) = 0$$

# Απλή Γραμμική Παλινδρόμηση - Εκτίμηση Ελαχίστων Τετραγώνων

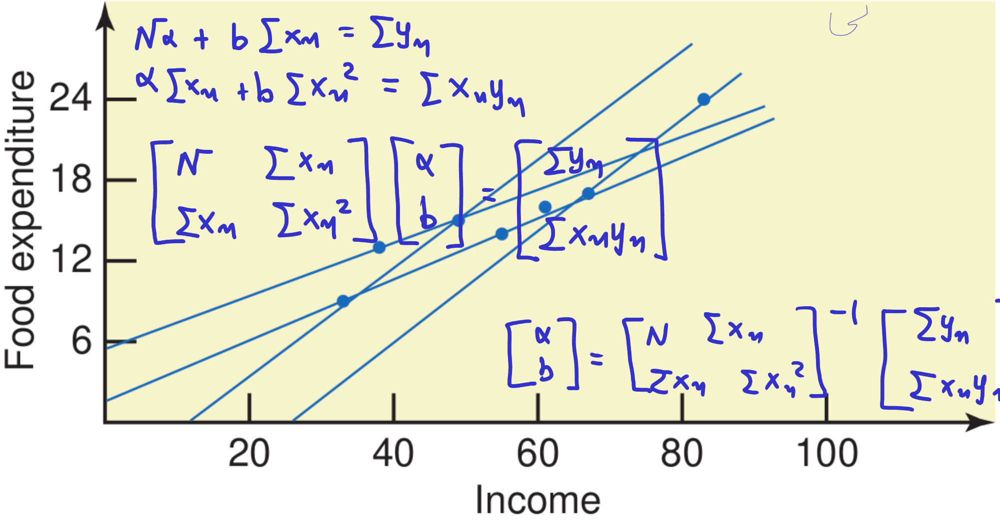
$$\sum y_n - N\alpha - b\sum x_n = 0 \qquad \sum x_n y_n - \alpha \sum x_n - b\sum x_n^2 = 0$$

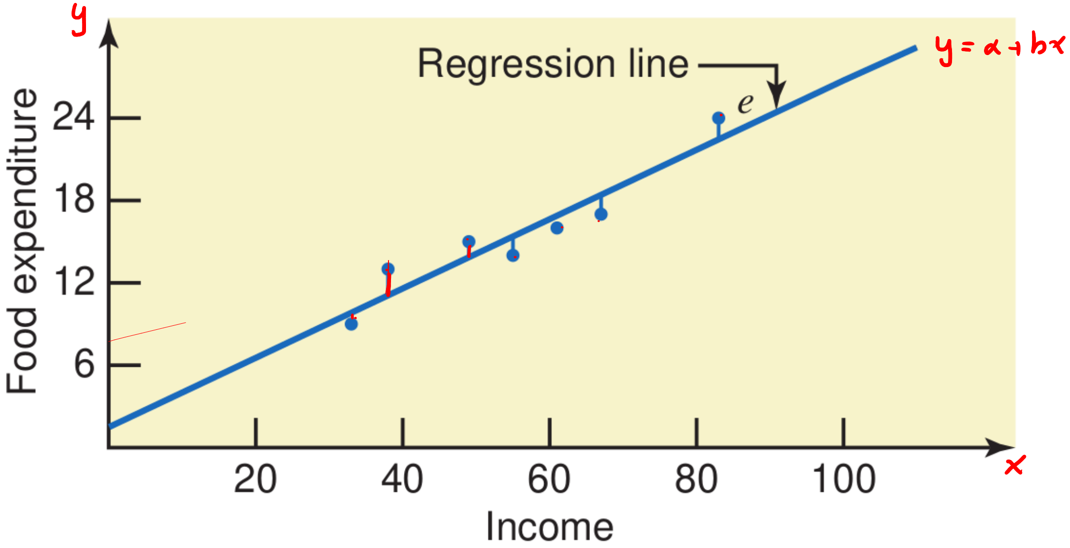
$$N\alpha + b\sum x_n = \sum y_n$$

$$\alpha \sum x_n + b \sum x_n^2 = \sum x_n y_n$$

$$\begin{bmatrix} N & \sum x_n \\ \sum x_n & \sum x_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_n \\ \sum x_n y_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N & \sum x_n \\ \sum x_n & \sum x_n^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum y_n \\ \sum x_n y_n \end{bmatrix}$$





y
y = α + bx
Regression line
e
Food expenditure
24
18
12
6
20
40
60
80
100
Income
x

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{Q}(a,b) = \sum_{n=1}^{N}(y_n - a - bx_n)^2$$

$$\sum \cdots = \sum_{n=1}^{N} \cdots$$

$$\begin{bmatrix} N & \sum x_n \\ \sum x_n & \sum x_n^2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det}\begin{bmatrix} \sum x_n^2 & -\sum x_n \\ -\sum x_n & N \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = N\sum x_n^2 - \left(\sum x_n\right)^2$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{1}{N\sum x_n^2 - \left(\sum x_n\right)^2}\begin{bmatrix} \sum x_n^2 & -\sum x_n \\ -\sum x_n & N \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sum y_n \\ \sum x_n y_n \end{bmatrix}$$

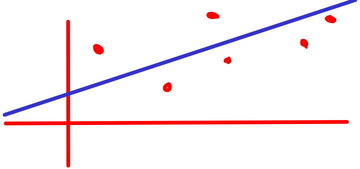
$$a = \frac{\sum x_n^2 \sum y_n - \sum x_n \sum x_n y_n}{N \sum x_n^2 - (\sum x_n)^2} \qquad b = \frac{N \sum x_n y_n - \sum x_n \sum y_n}{N \sum x_n^2 - (\sum x_n)^2}$$

$$a = \frac{\sum x_n^2 \frac{1}{N} \sum y_n - \frac{1}{N} \sum x_n \sum x_n y_n}{\sum x_n^2 - \frac{1}{N} (\sum x_n)^2} = \frac{\sum x_n^2 \bar{Y} - \underline{\sum x_n y_n} \bar{X}}{\sum x_n^2 - \frac{1}{N} (\sum x_n)^2} \quad (*)$$

$$b = \frac{\underline{\sum x_n y_n} - \frac{1}{N} \sum x_n \sum y_n}{\sum x_n^2 - \frac{1}{N} (\sum x_n)^2}$$

$$(*) = \frac{\sum x_n^2 \bar{Y} - \left( \sum x_n y_n - \frac{1}{N} \sum x_n \sum y_n \right) \bar{X} - \frac{1}{N} \sum x_n \sum y_n \bar{X}}{\sum x_n^2 - \frac{1}{N} (\sum x_n)^2}$$

$$= \frac{\sum x_n^2 \, \bar{Y} - \frac{1}{N} \sum x_n \sum y_n \, \bar{X}}{\sum x_n^2 - \frac{1}{N} \left( \sum x_n \right)^2} - b \bar{X} =$$



$$= \frac{\sum x_n^2 \, \bar{Y} - \frac{1}{N} \left( \sum x_n \right)^2 \bar{Y}}{\sum x_n^2 - \frac{1}{N} \left( \sum x_n \right)^2} - b \bar{X} = \bar{Y} - b \bar{X}$$

$$\hat{y} = a + bx$$

$$b = \frac{SS_{xy}}{SS_{xx}}, \quad a = \bar{Y} - b\bar{X}$$

όπου $SS_{xy}, SS_{xx}$ δίνονται ως:

$$SS_{xy} = \sum_{n=1}^{N} x_n y_n - \frac{(\sum_{n=1}^{N} x_n)(\sum_{n=1}^{N} y_n)}{N}, \quad SS_{xx} = \sum_{n=1}^{N} x_n^2 - \frac{(\sum_{n=1}^{N} x_n)^2}{N}$$

Επιπλέον τα $SS_{xy}$ και $SS_{xx}$ μπορούν ισοδύναμα να υπολογισθούν ως:

$$SS_{yy} = \sum_{n} (y_n - \bar{Y})^2$$

$$SS_{xy} = \sum_{n=1}^{N} (x_n - \bar{X})(y_n - \bar{Y}), \quad SS_{xx} = \sum_{n=1}^{N} (x_n - \bar{X})^2$$

$$\sum_{n=1}^{N}(x_n - \bar{X})(y_n - \bar{Y}) = \sum_{n=1}^{N} x_n y_n - \underbrace{\frac{(\sum_{n=1}^{N} x_n)(\sum_{n=1}^{N} y_n)}{N}}$$

$$\sum (x_n - \bar{X})(y_n - \bar{Y}) = \sum x_n y_n - \underbrace{\bar{Y}\sum x_n - \bar{X}\sum y_n + \bar{X}\bar{Y}\cdot N}$$

$$\sum x_n y_n - \frac{1}{N}\sum x_n \sum y_n - \cancel{\frac{1}{N}\sum x_n \sum y_n} + \cancel{\frac{1}{N^{\cancel{2}}}\sum x_n \sum y_n \cdot \cancel{N}} =$$

$$= \sum x_n y_n - \frac{1}{N}\sum x_n \sum y_n$$

**Παράδειγμα**

Βρείτε τη εκτίμηση ελαχίστων τετραγώνων του μοντέλου γραμμικής παλινδρόμησης υποθέτοντας τα παρακάτω δεδομένα.

$$\{(0,1),(1,2),(2,2)\}$$

| $x$ | $y$ | $xy$ | $x^2$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 2 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 4 | 4 |
| 3 | 5 | 6 | 5 |

$\bar{x} = \frac{3}{3} = 1$ $\quad \bar{y} = \frac{5}{3}$

$$b = \frac{SS_{xy}}{SS_{xx}} = \frac{6 - \frac{1}{\cancel{3}}\cancel{3}\cdot 5}{5 - \frac{1}{\cancel{3}}\cancel{3}^{\cancel{2}}}$$

$$\alpha = \bar{y} - b\bar{x}$$

$$b = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = \frac{5}{3} - \frac{1}{2} = \frac{7}{6}$$

**Παράδειγμα**

Βρείτε τη εκτίμηση ελαχίστων τετραγώνων του μοντέλου γραμμικής παλινδρόμησης υποθέτοντας τα παρακάτω δεδομένα.

$$\{(0,1),(1,2),(2,2)\}$$

$$\hat{y} = \frac{7}{6} + \frac{1}{2}x$$

$$\hat{y}(0) = 7/6$$

$$\hat{y}(1) = 7/6 + \frac{1}{2} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

$$\hat{y}(2) = 7/6 + 1$$

$$\hat{y}(1/2) = 7/6 + \frac{1}{4}$$

### Άσκηση

Βρείτε τη εκτίμηση ελαχίστων τετραγώνων του μοντέλου γραμμικής παλινδρόμησης υποθέτοντας τα παρακάτω δεδομένα.

$$\{(0,2),(1,1),(1,2),(2,4)\}$$

## Διανυσματική μορφή

Έστω διανύσματα $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$ στήλες με στοιχεία της παρατηρήσεις της ανεξάρτητης και της εξαρτημένης μεταβλητής αντίστοιχα. Το μοντέλο απλής γραμμικής παλινδρόμησης δίνει εκτιμήσεις για τις τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής που αντιστοιχούν στις παρατηρήσεις της ανεξάρτητης μεταβλητής που περιέχονται στο $\mathbf{x}$ :

$$\hat{\mathbf{y}} = a\mathbf{u} + b\mathbf{x}$$

όπου $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^N$ διάνυσμα στήλη με στοιχεία άσους.
Κατά επέκταση έχουμε:

$$\mathbf{e} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}$$

καθώς και

$$\mathrm{SSE} = \mathbf{e}^T\mathbf{e}$$

# Εκτίμηση Ελαχίστων Τετραγώνων - Διανυσματική Μορφή

X

$$\mathcal{Q}(a, b) = (\mathbf{y} - a\mathbf{u} - b\mathbf{x})^T(\mathbf{y} - a\mathbf{u} - b\mathbf{x})$$

$$\bar{X} = \frac{1}{N}\mathbf{u}^T\mathbf{x}, \quad \bar{Y} = \frac{1}{N}\mathbf{u}^T\mathbf{y}$$

$$b = \frac{SS_{xy}}{SS_{xx}}, \quad a = \bar{Y} - b\bar{X}$$

$$SS_{xy} = (\mathbf{x} - \bar{X}\mathbf{u})^T(\mathbf{y} - \bar{Y}\mathbf{u}), \quad SS_{xx} = (\mathbf{x} - \bar{X}\mathbf{u})^T(\mathbf{x} - \bar{X}\mathbf{u})$$

**Παράδειγμα**

Βρείτε τη εκτίμηση ελαχίστων τετραγώνων του μοντέλου γραμμικής παλινδρόμησης υποθέτοντας τα παρακάτω δεδομένα κάνοντας χρήση των διανυσματικών εκφράσεων.

$X$

$$\{(0,1),(1,2),(2,2)\}$$