MEM-205 Περιγραφική Στατιστική

Τμήμα Μαθηματικών και Εφ. Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Κώστας Σμαραγδάκης (kesmarag@gmail.com)

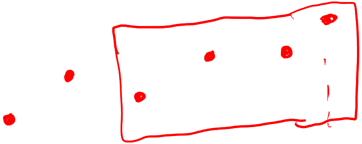
Θεωρία 11ης εβδομάδας

- Θέλουμε να προβλέψουμε μελοντικές τιμές μιας χρονολογικής σειράς

$$\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_N\}$$

$$\hat{y} = A + B^{(1)}X_1 + B^{(2)}X_2 + B^{(3)}X_3 + B^{(4)}X_4 + \varepsilon$$

- Θα μελετήσουμε τη γραμμική συσχέτιση μεταξύ των τυχαίων μεταβλητών Y_t



$$\hat{y}_n = b_1 y_{n-1} + b_2 y_{n-2} + b_3 y_{n-3} + b_4 y_{n-4} + \alpha$$

$$\{(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5), (Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6), \ldots, (Y_{N-4}, Y_{N-3}, Y_{N-2}, Y_{N-1}, Y_N)\}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & Y_1 & Y_2 & Y_3 & Y_4 \\ 1 & Y_2 & Y_3 & Y_4 & Y_5 \\ \vdots & \vdots & & & \\ 1 & Y_{N-4} & Y_{N-3} & Y_{N-2} & Y_{N-1} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T b \qquad b = \begin{bmatrix} Y_5 \\ Y_6 \\ \vdots \\ Y_N \end{bmatrix}$$

- Αρχικά θεωρούμε το πιθανοθεωρητικό μοντέλο

$\{3, 5, 98, 2, 1\}$

$$Y_t = A + BY_{t-1} + \epsilon_t$$

$\{3, 5, 7, 10, 12\}$

$\{(3,5), (5,7), (7,10), (10,12)\}$

$\hat{y}_t = \alpha + b\, y_{t-1}$

$\hat{y}_6 = \alpha + b \cdot 12$

Συντελεστής γραμμικής συσχέτισης (Pearson) ACF(1)

Y_{t-1}	Y_t	$Y_{t-1}Y_t$	Y_{t-1}^2	Y_t^2
3	5	15	9	25
5	7	35	27	49
7	10	70	49	100
10	12	120	100	144
25	34	240		

$$r = \frac{SS_{Y_t, Y_{t-1}}}{\sqrt{SS_{Y_t, Y_t} SS_{Y_{t-1}, Y_{t-1}}}}$$

$SS_{Y_{t-1}, Y_t} = \sum (Y_{t-1} - \overline{Y}_{t-1}) \cdot (Y_t - \overline{Y}_t)$

$SS_{Y_t, Y_{t-1}} = 240 - \frac{25 \cdot 34}{4} = 27.5$

$SS_{Y_t Y_t} = 318 - \frac{34^2}{4} = 29$

$$SS_{Y_{t-1},Y_{t-1}} = 185 - \frac{25^2}{4} = 28.75 \qquad r = \frac{27.5}{\sqrt{29 \cdot 28.75}} = 0.95\ldots$$

- Ανάλογα για k μη αρνητικό ακέραιο θεωρούμε το μοντέλο

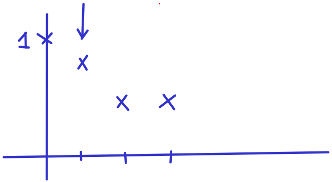
$$Y_t = A + BY_{t-k} + \epsilon_t, \quad k \geq 0$$

$$Y_1 \to Y_2 \to Y_3 \to \cdots \to Y_N \qquad Y_{t-k} \to Y_t \qquad \hat{y}_t = a + b y_{t-k}$$

Συνάρτηση Αυτοσυσχέτισης (Auto-Correlation Function)

$$e_t = y_t - \hat{y}_t$$

$$\text{ACF}(k) = \frac{SS_{Y_t,Y_{t-k}}}{\sqrt{SS_{Y_t,Y_t} SS_{Y_{t-k},Y_{t-k}}}}, \quad k \geq 0$$



Παράδειγμα $\quad Y_t = A + BY_{t-2} + \varepsilon_t \,, \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$

$\{1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4\}$

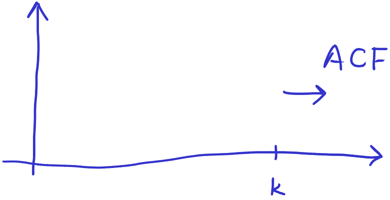
$\{(1,2), (-1,-2), (2,3), (-2,-3), (3,4), (-3,-4)\} \xrightarrow{\text{Α.Γ.Π}} \alpha, b.$

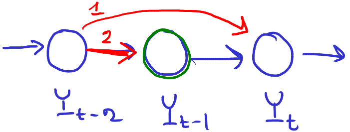
$Y_{t-k}, Y_{t-k+1}, \dots, Y_{t-1} \longrightarrow Y_t$

Αυτοπαλινδρομικό μοντέλο k τάξης (Auto-Regressive model of order k)

$$\mathrm{AR}(k) \quad : \quad Y_t = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{bias}}}{A} + \sum_{j=1}^{k} B^{(j)} Y_{t-j} + \epsilon_t, \quad k \geq 0$$

$ACF(\ell) < \delta \simeq 0.05 \quad \forall \ell \geq k$





$\underline{\underline{1^o}}$ $\quad Y_{t-2}, Y_{t-1} \to Y_t$

Πληροφορία Y_t = Πληροφορία Y_{t-1}

$\underline{\underline{2^o}}$ $\quad Y_{t-1}, Y_t \to Y_{t-2}$

$\underline{\underline{1^o}}$: $\{(Y_1, Y_2, Y_3), (Y_2, Y_3, Y_4), \ldots, (Y_{N-2}, Y_{N-1}, Y_N)\}$ $\quad 4 \times (N-2)$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ 1 & Y_2 & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \\ 1 & Y_{N-2} & Y_{N-1} & Y_N \end{bmatrix}$$

$(N-2) \times 4$

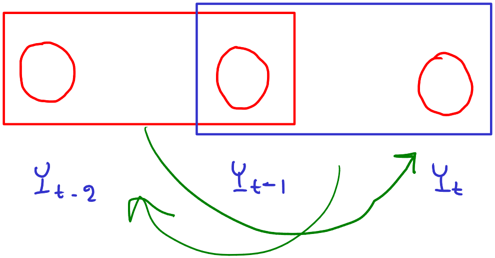
$X^T X \in \mathbb{R}^{4,4}$

$X^T X p = X^T y \in \mathbb{R}^4$

$$y = \begin{bmatrix} y_3 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} \qquad p = \begin{bmatrix} \alpha \\ b^{(1)} \\ b^{(2)} \end{bmatrix}$$

$\underline{\underline{2^o}}$ $\{(Y_2, Y_3, Y_1), (Y_3, Y_4, Y_2), \ldots, (Y_{N-1}, Y_N, Y_{N-2})\}$

$\alpha, b^{(1)}, b^{(2)}$



$$Y_t = A_1 + B_1^{(1)} Y_{t-1} + B_1^{(2)} Y_{t-2} + \varepsilon_{1,t}$$

$$Y_{t-2} = A_2 + B_2^{(1)} Y_{t-1} + B_2^{(2)} Y_t + \varepsilon_{2,t-2}$$

$$\hat{y}_t = \hat{y}_t(y_{t-1}, y_{t-2})$$

$$\hat{y}_{t-2} = \hat{y}_{t-2}(y_{t-1}, y_t)$$

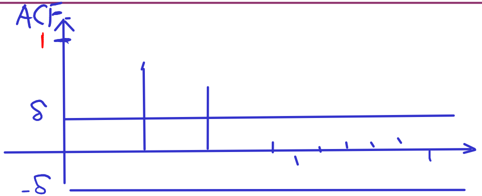
$$e_t = y_t - \hat{y}_t \quad , \quad t = 3, \dots, N$$

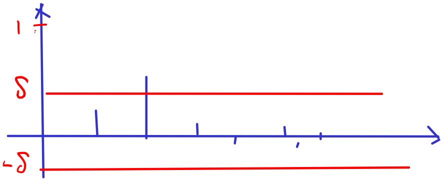
$$e_{t-2} = y_{t-2} - \hat{y}_{t-2} \quad , \quad t = 3, \dots, N$$

$$\boxed{e_t = A + B e_{t-2} + \varepsilon_t^*}$$

δεν είναι η ίδια χρονολογική σειρά.

$$r = \frac{SS_{e_t e_{t-2}}}{\sqrt{SS_{e_t e_t} \, SS_{e_{t-2,t-2}}}} = PACF(2) \in [-1, 1]$$





Συνάρτηση Μερικής Αυτόσυσχέτισης (Partial Auto-Correlation Function)

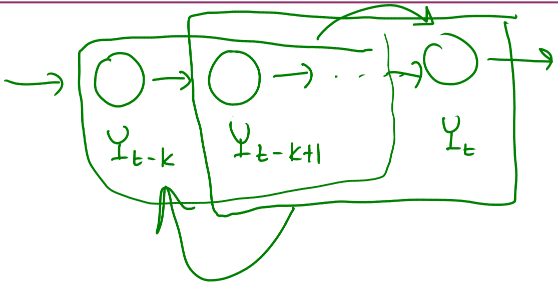
- Ποσοτικοποιεί την άμεση γραμμική επίδραση του Y_{t-k} στο Y_t

$$\text{PACF}(k) = \dots$$

$Y_{t-1} \to Y_t$

$Y_t \to Y_{t-1}$

$\text{ACF}(1) \doteq \text{PACF}(1)$



$Y_{t-k}, \dots, Y_{t-k+1} \rightarrow Y_t$

$Y_{t-k+1}, \dots Y_t \rightarrow Y_{t-k}$

PACF(k)