ΜΕΜ-Θ602: Μαθηματική Χρηματοοικονομία

Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Κώστας Σμαραγδάκης (https://kesmarag.gitlab.io)

8η διάλεξη - 7.11.2022

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t \Leftrightarrow dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

$$S_T - S_0 = \int \mu S_t dt + \int \sigma S_t dW_t$$

Θα μας απασχολήσουν στοχαστικές διαδικασίες που έχουν άμεση εξάρτηση από τον χρόνο t και από μια στοχαστική διαδικασία X_t η οποία προσδιορίζεται άμεσα ή έμμεσα από μια κίνηση Brown.

Παράδειγμα $V(S_t, t) \leftarrow$ αξία του option

Η τιμή ενός χρηματοοικονομικού παραγώγου εξαρτάται από την αξία μετοχών οι οποίες μοντελοποιούνται με στοχαστικότητα που καθορίζεται από την κίνηση Brown.

Συμβολισμός

$t \in [0, T]$

$$I_t = \int_0^t X_s dW_s \Leftrightarrow dI_t = X_t dW_t$$

$$I_t = \int_0^t X_s dW_s \Leftrightarrow dI_t = X_t dW_t$$

$\delta t = \frac{t}{n}$

Τετραγωνική μεταβολή (quadratic variation) ολοκληρώματος κατά Ito

$[0,t]$ για δοσμένο $t \in \mathbb{T} = [0,T]$ $\quad t_k = k\delta t,\ k=0,\dots,n$

$$[I,I](t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} (I(t_{k+1}) - I(t_k))^2$$

ισχύει οτι (χωρίς απόδειξη):

$$[I](t) = [I,I](t) = \int_0^t X_s^2 ds$$

εναλλακτικά γράφουμε

$$d[I,I](t) = X_t^2 dt$$

$I^{(1)} = \int_0^t X_s \, dW_s$ $\qquad dI_t^{(1)} = X_t dW_t, \quad dI_t^{(2)} = Y_t dW_t$ $\qquad I^{(2)} = \int_0^t Y_s \, dW_s$

Από κοινού τετραγωνική μεταβολή (quadratic covariation) ολοκληρωμάτων κατά Ito

$$[I^{(1)}, I^{(2)}](t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} (I_{t_{k+1}}^{(1)} - I_{t_k}^{(1)})(I_{t_{k+1}}^{(2)} - I_{t_k}^{(2)})$$

Μπορεί να δειχθεί ότι:

$$[I^{(1)}, I^{(2)}](t) = \frac{1}{2}\Big([I^{(1)} + I^{(2)}, I^{(1)} + I^{(2)}] - [I^{(1)}, I^{(1)}] - [I^{(2)}, I^{(2)}]\Big)$$

ισχύει οτι (χωρίς απόδειξη):

$$[I^{(1)}, I^{(2)}](t) = \int_0^t X_s Y_s ds \Leftrightarrow d[I^{(1)}, I^{(2)}](t) = X_t Y_t dt$$

Για ευκολία θα εισάγουμε του παρακάτω συμβολισμούς:

Συμβολισμοί

$$(dI_t)^2 = d[I, I](t)$$

$$dI_t^{(1)} dI_t^{(2)} = d[I^{(1)}, I^{(2)}](t)$$

Θα υπολογίσουμε τη τετραγωνική μεταβολή της κινήσεως Brown

$$W_t = \int_0^t 1 \, dW_s \iff dW_t = 1 \, dW_t$$

$$W_t - \cancelto{0}{W_0} = W_t$$

$$[W,W](t) = \int_0^t ds = t \iff (dW_t)^2 = dt$$

Ito's formula για την κίνηση Brown

$T < \infty$

Έστω W_t κίνηση Brown στο $\mathbb{T} = [0, T]$ και συνάρτηση f δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Για κάθε $t \in \mathbb{T}$ ισχύει:

$$f(W_t) = f(0) + \int_0^t f'(W_s)dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(W_s)ds, \; t \in \mathbb{T}$$

$[0,t]$, $t_k = k\,\delta t$, $\delta t = \frac{t}{n}$

$$W_t = W_0 + \sum_{k=0}^{n-1}(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})$$

$$f(W_t) = f(W_0) + \sum_{k=0}^{n-1}\left(\underbrace{f(W_{t_{k+1}}) - f(W_{t_k})}_{1}\right)$$

$$f(W_{t_{k+1}}) - f(W_{t_k}) = f'(W_{t_k})(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) +$$

$$+ \overbrace{\frac{1}{2} f''(\xi_{t_k})(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2}^{②} \quad \text{για κάποιο}$$

$$\xi_{t_k} \in [W_{t_k}, W_{t_{k+1}}]$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} ① \xrightarrow{n\to\infty} \int_0^t f'(W_s)\, dW_s$$

Για το ② θα δουλέψουμε αρχικά για $\xi_{t_k} = W_{t_k}$

$$\sum_{k}^{n-1} \frac{1}{2} f''(W_{t_k})(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2 \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}\int_0^t f''(W_s)\, ds$$

$$g \doteq f''$$

Γνωρίζουμε

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} g(W_{t_k})\,(t_{k+1}-t_k) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}\int_0^t g(W_s)\,ds$$

Θ.δ.ο

$$\overbrace{\sum_{k=0}^{n-1} g(W_{t_k})\left[(W_{t_{k+1}}-W_{t_k})^2-(t_{k+1}-t_k)\right]}^{I_n} \overset{\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}}{\xrightarrow{n\to\infty}} 0$$

$$\|I_n\|_{L^2(\Omega)} = \mathbb{E}\left[I_n^2\right] \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$\mathbb{E}[I_n^2] = \mathbb{E}\Big[\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{n-1} g(W_{t_k})\, g(W_{t_\ell}) \cdot$$

$$\big[(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2 - (t_{k+1} - t_k)\big] \cdot \big[(W_{t_{\ell+1}} - W_{t_\ell})^2 - (t_{\ell+1} - t_\ell)\big]\Big]$$

για

$k < \ell$

$$\mathbb{E}[\cdots] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[\cdots \mid \mathcal{F}_{t_k}]\big] = \mathbb{E}\Big[g(W_{t_k}) \cdots$$

$$\cdot \underbrace{\mathbb{E}\big[(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2 - (t_{k+1} - t_k) \mid \mathcal{F}_{t_k}\big]}_{= 0} \cdots\Big]$$

$$\mathbb{E}[I_n^2] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{n-1} g^2(W_{t_k})\left[(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2 - (t_{k+1} - t_k)\right]\right]^2$$

$$\leq \|g^2\|_\infty \mathbb{E} \sum_{k=0}^{n-1} \Big[\underbrace{(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})}_{\sim N(0,\delta t)}^2 - \underbrace{(t_{k+1} - t_k)}_{\delta t}\Big]^2 =$$

$$\sqrt{\delta t}\, N(0,1)$$

$$= \|g^2\|_\infty (\delta t)^2\, \mathbb{E}\sum_{k=0}^{n-1} (W_1^2 - 1)^2 = \|g^2\|\, \overbrace{n\delta t}^{t} \cdot \delta t\, \mathbb{E}\left[(W_1^2 - 1)^2\right]$$

$$\xrightarrow[\delta t \to 0]{n \to \infty} 0$$

Θέλουμε ν.δ.ο

$$\sum_{k=0}^{n-1} g(\xi_{t_k})(W_{t_{k+1}}-W_{t_k})^2 - \sum_{k=0}^{n-1} g(W_{t_k})(W_{t_{k+1}}-W_{t_k})^2 \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(g(\xi_{t_k})-g(W_{t_k})\right)(W_{t_{k+1}}-W_{t_k})^2 \le$$

$$\le \sup\left(|g(\xi_{t_k})-g(W_{t_k})|\right)\overbrace{\sum_{k=0}^{n-1}(W_{t_{k+1}}-W_{t_k})^2}^{t}$$

$$\to 0\cdot t$$ από συνέχεια της $g = f''$.

(Ξανά-) Υπολογίζοντας το στοχαστικό ολοκλήρωμα της W_t

$$\int_0^t W_s \, ds = \frac{1}{2} W_t^2 - \frac{1}{2} t$$

για

$$f(x) = x^2 \qquad f'(x) = 2x \qquad f''(x) = 2$$

$$f(W_t) = f(0) + 2\int_0^t W_s \, dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t 2 \, ds$$

$$W_t^2 = 2\int_0^t W_s \, dW_s + t \Rightarrow \boxed{\int_0^t W_s \, dW_s = \frac{1}{2} W_t^2 - \frac{1}{2} t}$$

$$\int_0^t e^{W_s} dW_s =$$

Στοχαστικές διαδικασίες κατά Ito

Κάθε στοχαστική διαδικασία κατά Ito γράφεται στη μορφή:

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(s)ds + \int_0^t \sigma(s)dW_s,\ t \in [0, T]$$

με $\int_0^T |\mu(t)|dt < \infty, \quad \int_0^T \sigma^2(t)dt < \infty$

Θεώρημα (χωρίς απόδειξη)

Έστω X_t και Y_t στοχαστικές διαδικασίες κατά Ito, και X_t είναι παραγωγίσιμη σχεδόν παντού τότε $[X, Y](t) = 0$

$$(dt)^2 = 0, \quad dt\, dW_t = dW_t\, dt = 0, \quad (dW_t)^2 = 0$$