ΜΕΜ-Θ602: Μαθηματική Χρηματοοικονομία

Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Κώστας Σμαραγδάκης (https://kesmarag.gitlab.io)

5η διάλεξη - 24.10.2022

Είναι η Brownian motion martingale;

$\mathcal{F}_t$ - πληροφορία μέχρι και τον χρόνο $t \in T$

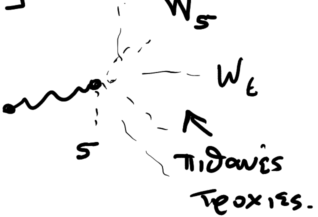
θέλουμε να εξετάσουμε εάν

$$\mathbb{E}[W_t|\mathcal{F}_s,\ t > s] = W_s$$

δεν είναι τ.μ.

$$\mathbb{E}[W_t|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[W_t - W_s + W_s|\mathcal{F}_s] = \underbrace{\mathbb{E}[W_t - W_s|\mathcal{F}_s]}_{= \mathbb{E}[W_t - W_s] = 0} + \underbrace{\mathbb{E}[W_s|\mathcal{F}_s]}_{= W_s} =$$

$$= W_s$$



Είναι η $\exp(W_t - \frac{1}{2}t)$ martingale;

$Y \sim N(\mu, \sigma^2)$

Θέλουμε τα εξετάσουμε εάν

$mgf(Y) = \mathbb{E}[e^{Y}] = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}$

$$\mathbb{E}[\exp(W_t - \frac{1}{2}t)|\mathcal{F}_s,\ t > s] = \exp(W_s - \frac{1}{2}s)$$

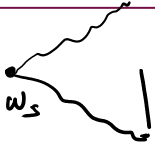
$$\mathbb{E}[e^{W_t - \frac{1}{2}t} | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[e^{W_t - W_s - \frac{1}{2}(t-s)} e^{W_s - \frac{1}{2}s} | \mathcal{F}_s] =$$

$$= e^{W_s - \frac{1}{2}s}\, \mathbb{E}[e^{W_t - W_s - \frac{1}{2}(t-s)} | \mathcal{F}_s] \qquad \mathbb{E}[e^{Y} | \mathcal{F}_s]$$

$$\underbrace{\underbrace{W_t - W_s}_{\sim N(0,\, t-s)} - \frac{1}{2}(t-s)}_{Y} \sim N(-\frac{1}{2}(t-s),\, t-s)$$

$$\ldots = e^{W_s - \frac{1}{2}s}$$

$$= e^{\mathbb{E}[Y] + \frac{1}{2}\sigma_Y^2} = e^{-\frac{1}{2}(t-s) + \frac{1}{2}(t-s)} = e^0 = 1$$



$W_t - W_s < 0$

1. $$\mathbb{E}[\mathbb{E}[S_t|\mathcal{F}_t]] = \mathbb{E}[S_t]$$

$W_t - W_s$ $\quad W_s$

2. $$\mathbb{E}[\mathbb{E}[S_t|\mathcal{F}_s]|\mathcal{F}_r] = \mathbb{E}[S_t|\mathcal{F}_r], \ \text{για } r < s < t$$

3. $$\mathbb{E}[W_t - W_s|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[W_t - W_s] = 0$$

$(Y - \mathbb{E}[Y])^2$

4. $$\mathbb{E}[(W_t - W_s)^2|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[(W_t - W_s)^2] = t - s$$

θέλουμε να υπολογίσουμε την μέση τιμή

$$\mathbb{E}[W_t^2|\mathcal{F}_s,\ t>s]$$

$$\mathbb{E}\left[(W_t - W_s + W_s)^2 \,|\, \mathcal{F}_s\right] = \overbrace{\mathbb{E}\left[(W_t - W_s)^2 \,|\, \mathcal{F}_s\right]}^{t-s} +$$

$$\underbrace{\mathbb{E}\left[W_s^2 \,|\, \mathcal{F}_s\right]}_{W_s^2} + 2\underbrace{\mathbb{E}\left[(W_t - W_s)W_s \,|\, \mathcal{F}_s\right]}_{= \underbrace{\mathbb{E}\left[W_t - W_s \,|\, \mathcal{F}_s\right]}_{=0} W_s}$$

$$\mathbb{E}\left[W_t^2 \,|\, \mathcal{F}_s\right] = W_s^2 + t - s \neq W_s^2$$

άρα W_t^2 δεν είναι martingale.

Έστω X_t προσαρμοσμένη στοχαστική διαδικασία στην $\mathcal{F}_t$
Θα υπολογίσουμε την μέση τιμή

$$\mathbb{E}[X_t(W_{t+\varepsilon} - W_t)],\ \varepsilon > 0$$

$$\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X_t(W_{t+\varepsilon} - W_t) \mid \mathcal{F}_t]\big]$$

$$\mathbb{E}[X_t(W_{t+\varepsilon} - W_t) \mid \mathcal{F}_t] = X_t\, \mathbb{E}[W_{t+\varepsilon} - W_t \mid \mathcal{F}_t] = 0$$

$$\mathbb{E}[W_{t+\varepsilon} - W_t \mid \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[W_{t+\varepsilon} - W_t] = 0$$

άρα $\mathbb{E}[X_t(W_{t+\varepsilon} - W_t)] = \mathbb{E}[0] = 0.$

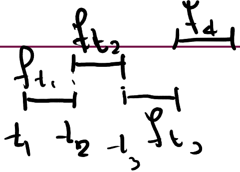
Στοχαστικό ολοκλήρωμα κατά Ito

Έχουμε κάνει αναφορά για στοχαστικά ολοκληρώματα της μορφής

$$\int_0^T S_t dW_t$$

- Η ολοκλήρωση γίνεται ως προς την κίνηση Brown
- Το ολοκλήρωμα αποτελεί μια τυχαία μεταβλητή

Στοχαστικό ολοκλήρωμα κατά Ito



$$\mathbb{T} = [0, T],\ \delta t = T/n,\ t_k = k\delta t, k = 0, \dots, 1$$

Θα ορισουμε αρχικά διακριτά στοχαστικά ολοκλήρωματα για μη-στοχαστικές κλιμακωτές συναρτήσεις

$$\mathbb{1}_{[\alpha, b]} = \begin{cases} 1, & t \in [\alpha, b] \\ 0, & \text{διαφορετικώς} \end{cases}$$

Κλιμακωτές συναρτήσεις (step functions)

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n-1} f(t_k) 1_{[t_k, t_{k+1}]}$$

Διακριτό στοχαστικό ολοκλήρωμα κλιμακωτής συνάρτησης

$$I_n(f) = \sum_{k=1}^{n-1} f(t_k)(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})$$

$$\mathbb{E}[I_n] = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}[f(t_k)(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})] = \sum_{k=1}^{n-1} f(t_k)\mathbb{E}[W_{t_{k+1}} - W_{t_k}]$$

$$= 0$$

Ιδιότητες

- $I_n(f)$ αποτελεί τυχαία μεταβλητή.

$$I_n(f) \sim \mathcal{N}(0, \sum_{k=1}^{n-1} f^2(t_k)\delta t)$$

- $I_n(\alpha f) = \alpha I_n(f)$
- $I_n(f_1 + f_2) = I_n(f_1) + I_n(f_2)$

$$\mathbb{E}\left[(I_n - \mathbb{E}[I_n])^2\right] = \mathbb{E}\left[I_n^2\right]$$

$$I_n^2 = \left[\sum_{k=1}^{n-1} f(t_k)\left(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}\right)\right]\left[\sum_{l=1}^{n-1} f(t_l)\left(W_{t_{l+1}} - W_{t_l}\right)\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} f^2(t_k)\left(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}\right)^2 + \sum_{k \neq l = 1}^{n-1} f(t_k) f(t_l) \cdot \left(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}\right)\left(W_{t_{l+1}} - W_{t_l}\right)$$

$k < l$

$$\mathbb{E}\left[\underline{f(t_k)} f(t_l)\left(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}\right)\left(W_{t_{l+1}} - W_{t_l}\right) \middle| \mathcal{F}_{t_k}\right] =$$

$$= f(t_k)\, \mathbb{E}\left[f(t_l)\left(W_{t_{l+1}} - W_{t_l}\right) \middle| \mathcal{F}_{t_k}\right] \underbrace{\mathbb{E}\left[W_{t_{k+1}} - W_{t_k} \middle| \mathcal{F}_{t_k}\right]}_{=0}$$

Αρκεί να υπολογίσουμε

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n-1} f^2(t_k)\left(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}\right)^2\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} f^2(t_k)\, \mathbb{E}\left[\underbrace{\left(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}\right)}_{\sim N(0,\delta t)}{}^2\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} f^2(t_k)\,\delta t$$

$$I_n(f) \sim N\left(0, \sum_{k=1}^{n-1} f^2(t_k)\,\delta t\right)$$

στοχαστικές κλιμακωτές συναρτήσεις (stochastic step fuctions)

$$f(t,\omega) = \sum_{k=1}^{n-1} f(t_k,\omega)1_{[t_k,t_{k+1}]},\ \omega \in \Omega$$

Υποθέτουμε τις παρακάτω ιδιότητες.

- Καθώς η πληροφορία της κινήσεως Brown γίνεται διαθέσιμη μέχρι και τον χρόνο t_k, μπορούμε να προσδιορίσουμε το $f(t_k)$, δηλαδή η $f(t_{t_k})$ είναι προσαρμοσμένη στην $\mathcal{F}_{t_k}$.
- $\int_0^T \mathbb{E}[f^2(t,\omega)]dt < \infty,$ για $T < \infty$

Διακριτό στοχαστικό ολοκλήρωμα της f

$$I_n(f) = \sum_{k=1}^{n-1} f(t_k,\omega)(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})$$

Ποία κατανομή ακολουθεί το $I_n(f)$;

$$\mathbb{E}[I_n] = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}\left[f(t_k)(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})\right]$$

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[f(t_k)(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) \mid \mathcal{F}_{t_k}\right]\right] =$$

$$= \mathbb{E}\left[f(t_k)\underbrace{\mathbb{E}\left[(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) \mid \mathcal{F}_{t_k}\right]}_{=0}\right] =$$

$$= \mathbb{E}[0] = 0$$

$$I_n^2 = \sum_{k=1}^{n-1} f^2(t_k)(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2 + \sum_{k \neq \ell = 1}^{n-1} f(t_k) f(t_\ell)(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) \cdot (W_{t_{\ell+1}} - W_{t_\ell})$$

$$\underline{k < \ell}$$

$$\mathbb{E}\left[\underline{f(t_k)} f(t_\ell) (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})(W_{t_{\ell+1}} - W_{t_\ell}) \,|\, \mathcal{F}_{t_k} \right]$$

$$= f(t_k)\, \mathbb{E}\left[f(t_\ell)(W_{t_{\ell+1}} - W_{t_\ell}) \,|\, \mathcal{F}_{t_k} \right] \cdot$$

$$\mathbb{E}\left[\underbrace{W_{t_{k+1}} - W_{t_k} \,|\, \mathcal{F}_{t_k}}_{=0} \right]$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[f^2(t_k)(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2 \mid \mathcal{F}_{t_k}\right]\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}\left[f^2(t_k)\, \underbrace{\mathbb{E}\left[(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2 \mid \mathcal{F}_{t_k}\right]}_{t_{k+1} - t_k = \delta t}\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}\left[f^2(t_k)\right] \delta t = \mathrm{Var}\left[I_n\right]$$