~~http://resmarg~~

17/2/2025

ΑΛΓΕΒΡΙΚΟ ΣΩΜΑ

Ένα σύνολο $\mathbb{K}$ στο οποίο ορίζονται 2 διμελής πράξεις:

πρόσθεση: $(a,b) \to a+b$

πολλαπλασιασμός: $(a,b) \to a \cdot b$

ΑΣ1

Αν $a,b,c \in \mathbb{K}$

$\to (a+b)+c = a+(b+c)$ ΠΡΟΣΕΤΑΙΡΙΣΤΙΚΗ

$\to (ab)c = a(bc)$

ΑΣ2

$\forall\ a,b \in \mathbb{K}$

$\to a+b = b+a$, $\to a \cdot b = b \cdot a$ ΑΝΤΙΜΕΤΑΘΕΤΙΚΗ

ΑΣ3

$\forall\ a,b,c \in \mathbb{K} \to a(b+c) = ab+ac$ ΕΠΙΜΕΡΙΣΤΙΚΗ

ΑΣ4

- $\exists!\ 0 \in \mathbb{K}$ και $\exists!\ 1 \in \mathbb{K}$ $\forall a \in \mathbb{K}$

  $\to a+0 = a$, $\to a \cdot 1 = a$

ΑΣ5

$\forall a \in \mathbb{K}\ \exists (-a) \in \mathbb{K} \to a + (-a) = 0$

ΑΣ6

$\forall a \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$, $\exists!\ a^{-1} \in \mathbb{K} \to a \cdot a^{-1} = 1$

Παράδειγμα:

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ είναι αλγεβρικό άθροισμα

Παράδειγμα:

Το σύνολο των ρητών αριθμών $\mathbb{Q}$

$$\mathbb{Q} = \left\{ q \in \mathbb{R} : \exists\ z_1, z_2 \in \mathbb{Z},\ z_2 \neq 0,\ q = \frac{z_1}{z_2} \right\}$$

είναι αλγεβρικό άθροισμα

$\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}\}$

Διανυσματικός (ή γραμμικός) χώρος επί του σώματος $\mathbb{K}$

- Ένα σύνολο V στο οποίο έχουν οριστεί δύο πράξεις:

- Πρόσθεση
- Βαθμωτός πολλαπλασιασμός

α) Εάν $\kappa \in V$ $\upsilon \in V$ τότε $\kappa + \upsilon \in V$

β) Εάν $\kappa \in V$ και $\upsilon \in \mathbb{K}$ τότε $\kappa \cdot \upsilon \in V$

Εάν ικανοποιούνται οι συνθήκες

Αξ1: $\forall\ u, \upsilon \in V_1 \rightarrow \upsilon + n = n + \upsilon$

Αξ2: $\forall\ \bar{n}, \upsilon, \omega \in V \Rightarrow \upsilon + (n + \omega) = (\upsilon + n) + \omega$

Αξ3: $\exists!\ 0 \in V$ (μηδενικό στοιχείο) $\rightarrow \upsilon + 0 = \upsilon$

Αξ4: $\forall\ \upsilon \in V\ \exists!\ -\upsilon \in V \rightarrow \upsilon + (-\upsilon) = 0$

Αξ5: $\forall\ \upsilon, v \in V\ \forall \kappa \in \mathbb{K} \rightarrow \kappa(\upsilon + v) = \kappa\upsilon + \kappa v$

Αξ6: $\forall\ \upsilon \in V$ και $\forall\ \kappa, \lambda \in \mathbb{K} \rightarrow (\kappa + \lambda)\upsilon = \kappa\upsilon + \lambda\upsilon \in V$

Αξ7: $\forall\ \upsilon \in V$ και $\forall\ \kappa, \lambda \in \mathbb{K} \rightarrow \kappa(\lambda \cdot \upsilon) = (\kappa\lambda) \cdot \upsilon \in V$

Αξ8: $\forall\ \upsilon \in V,\ 1 \cdot \upsilon = \upsilon$

Τα στοιχεία του V λέγονται διανύσματα

παράδειγμα: $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n = \{(u_1, u_2, \dots, u_n) : u_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \dots, n\}$

Εφοδιάζουμε το $\mathbb{R}^n$ με πράξεις

- πρόσθεση

$\forall\ u, v \in \mathbb{R}^n$ με $u = (u_1, u_2, \dots u_n)$ και $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$

$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n) \in \mathbb{R}^n$

- Βαθμωτός πολλαπλασιασμός

$\forall\ u, v \in \mathbb{R}^n$, $\forall\ k \in \mathbb{R}$

ορίζουμε την πράξη του βαθμωτού πολλαπλασιασμού ως

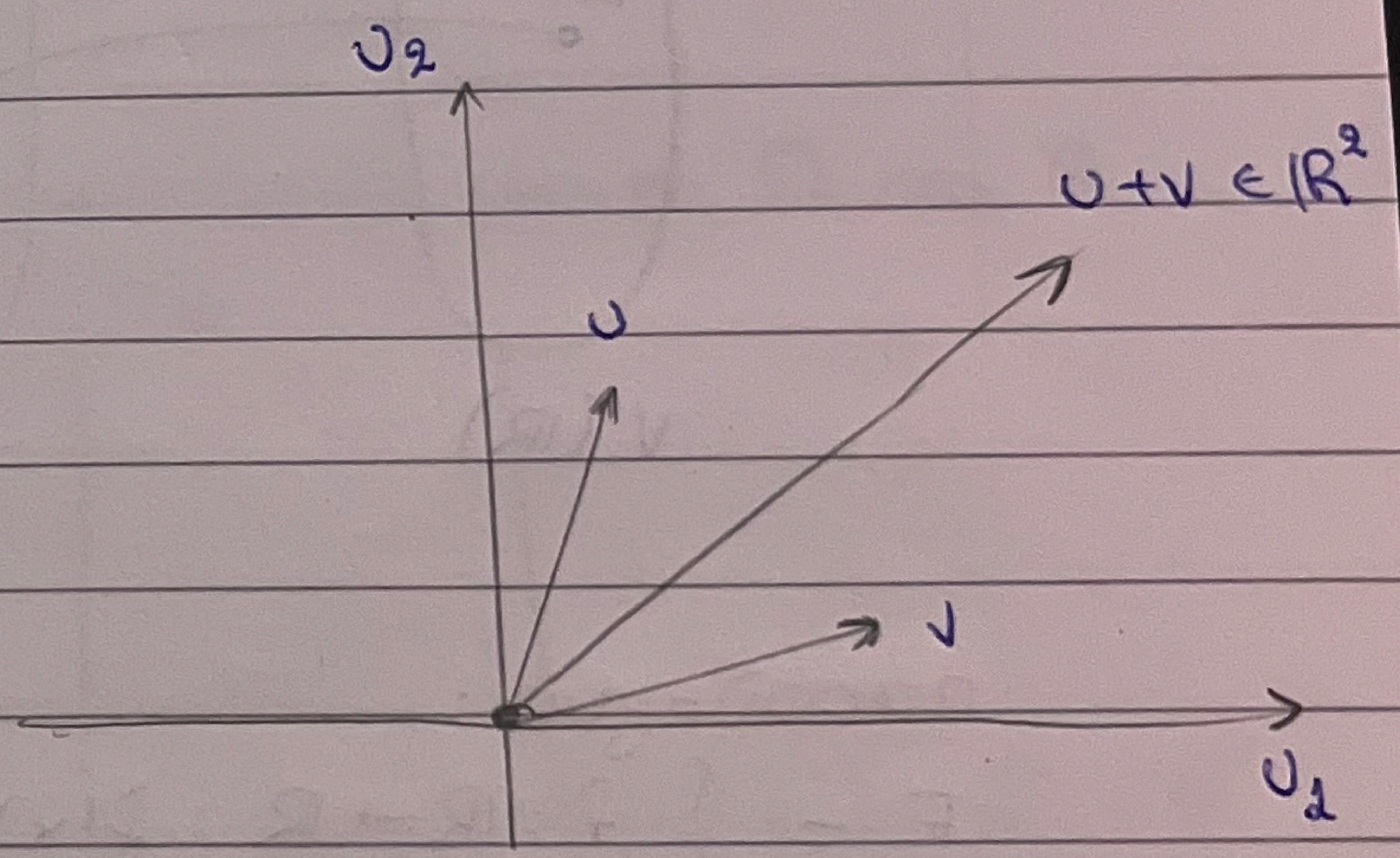
$k \cdot u = (ku_1, ku_2, \dots, ku_n) \in \mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^2 = \{(u_1, u_2) : u_1, u_2 \in \mathbb{R}\}$

Έστω $u = (1, 2) \in \mathbb{R}^2$

$v = (2, 3) \in \mathbb{R}^2$

$u + v = (1 + 2, 2 + 3) \in \mathbb{R}^2$



$u = (1, 2) \in \mathbb{R}^2$

$2 \in \mathbb{R}$ τότε $2u = (2 \cdot 1, 2 \cdot 2) = (2, 4) \in \mathbb{R}^2$

παράδειγμα: $M_{m,n}(\mathbb{R})$ ή $(M(m,n,\mathbb{R}))$ ή $\mathbb{R}^{m,n}$ ή $\mathbb{R}^{m \times n}$

Το σύνολο όλων m,n πινάκων με στοιχεία στο $\mathbb{R}$

Εφοδιασμένο με πράξεις: • πρόσθεση •

Έστω $A = \{a_{ij}\} \in \mathbb{R}^{m,n}$ και $B = \{b_{ij}\} \in \mathbb{R}^{m,n}$

Ορίζουμε:

$A + B = \{a_{ij} + b_{ij}\} \in \mathbb{R}^{m,n}$ (θα είναι ένας πίνακας με m γραμμές και n στήλες)

- Βαθμωτός πολλαπλασιασμός

$\forall\ A = \{a_{ij}\} \in \mathbb{R}^{m,n}$ και $k \in \mathbb{R}$

Ορίζουμε:

$k \cdot A = \{k \cdot a_{ij}\} \in \mathbb{R}^{m,n}$

Επέκταση παραδείγματος:

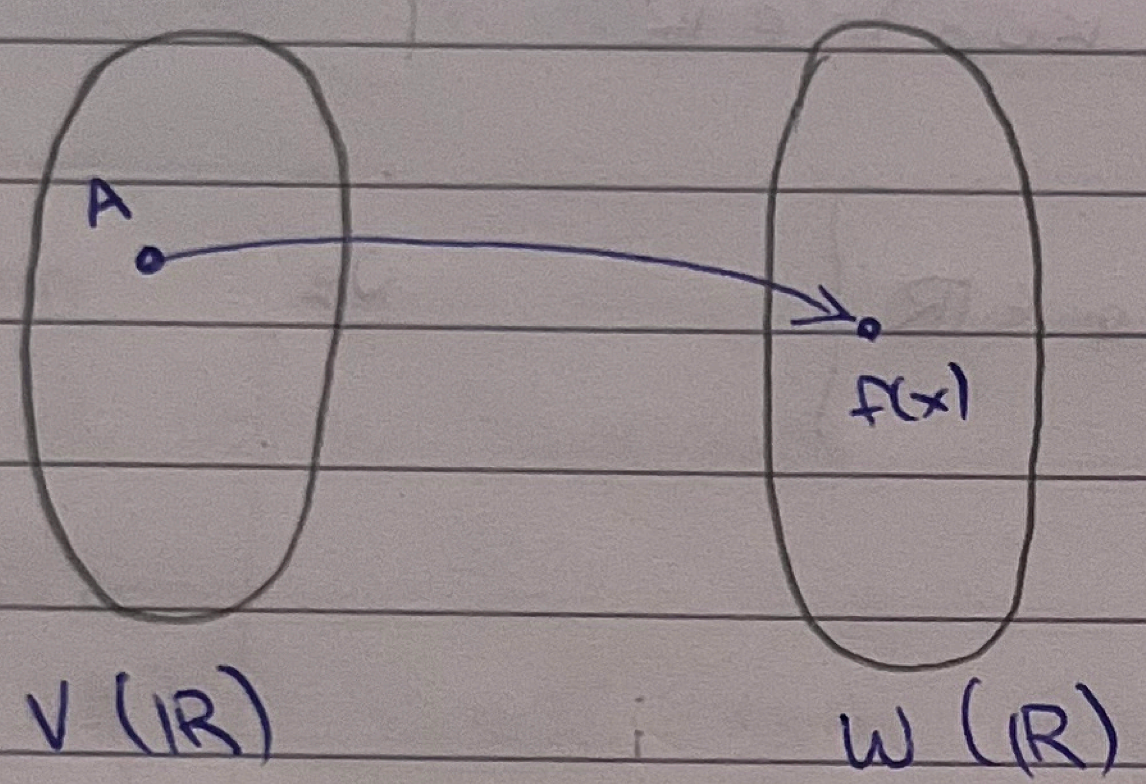
$\mathbb{R}^{2,2}$

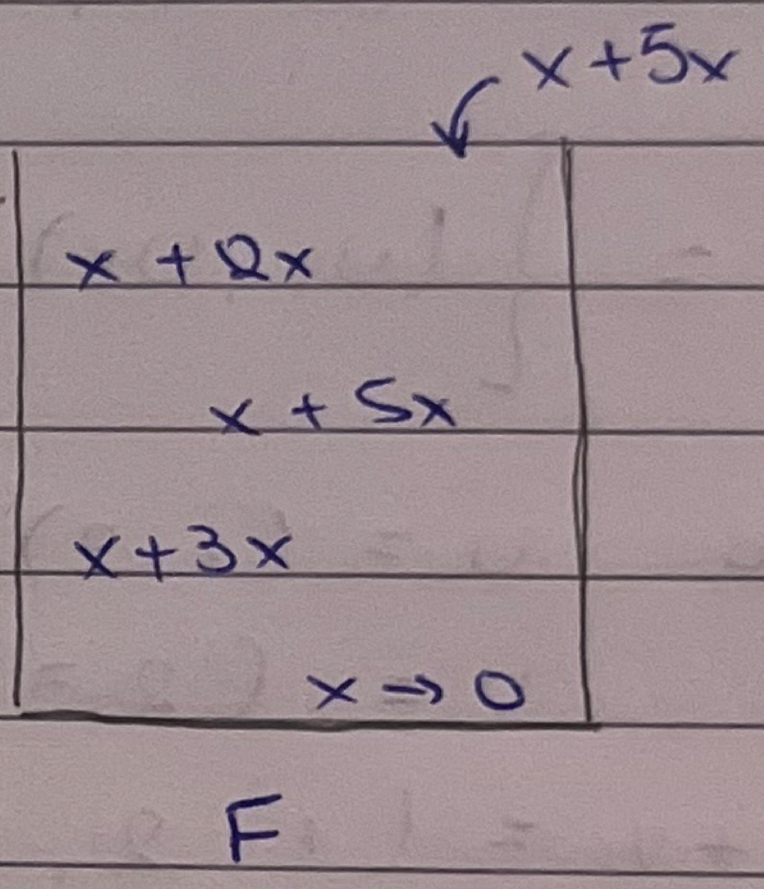
$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$, $2 \in \mathbb{R}$

$$A+B = \begin{bmatrix} 1+1 & 2+1 \\ 3+0 & 4+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$$

$$2A = \begin{bmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 2 \\ 2\cdot 3 & 2\cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$$

Ο χώρος $\mathbb{R}^{m,n}$ είναι διανυσματικός χώρος





παράδειγμα:

$F = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = ax, \ a \in \mathbb{R} \}$

Εφοδιάζουμε το F με πράξεις

• πρόσθεση •

Εάν $f, g \in F$ τότε $\exists \ a_1, a_2 \in \mathbb{R}$

τ.ω $f(x) = a_1 \cdot x$ και $g(x) = a_2 \cdot x$

Ορίζουμε:

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x) + g(x) \\ &= a_1 x + a_2 x \\ &= x(a_1 + a_2) \text{ όπου } \in F \end{aligned}$$

• Βαθμωτός πολλαπλασιασμός •

Έστω $f \in F$ τότε $\exists\, a \in \mathbb{R}$

τω $f(x) = a \cdot x$ και $k \in \mathbb{R}$

Ορίζουμε

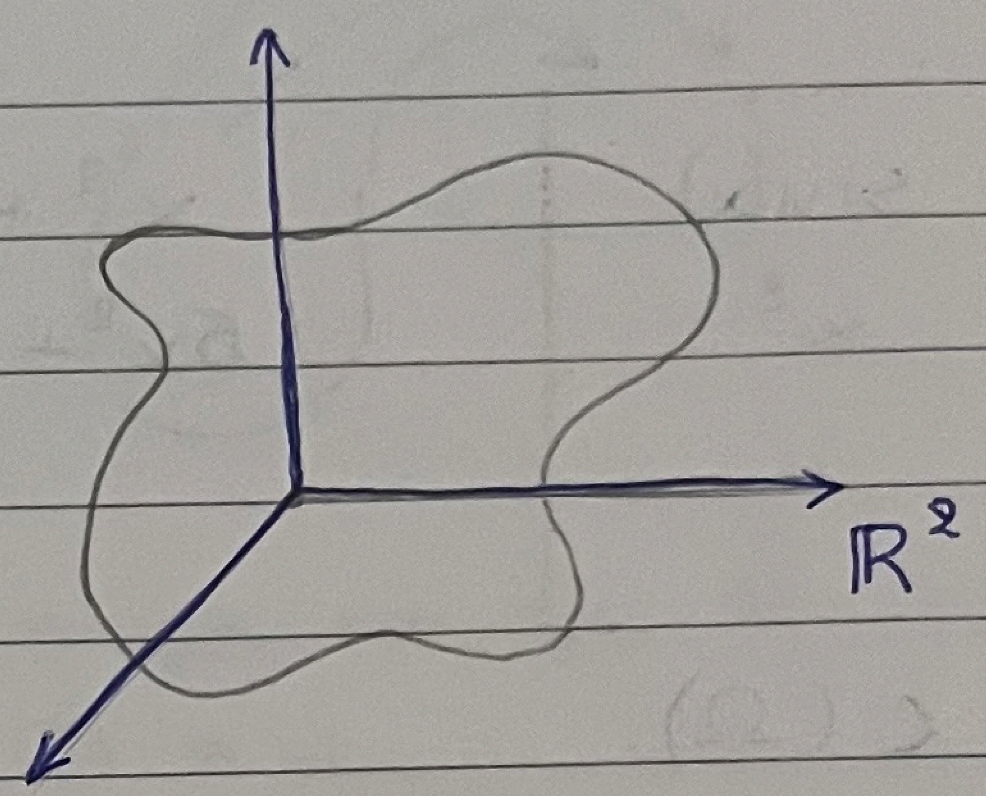
$$(k \cdot f)(x) = k f(x) = k \cdot a x \in F$$

Το σύνολο F είναι διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$

παράδειγμα

Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^d$

ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$

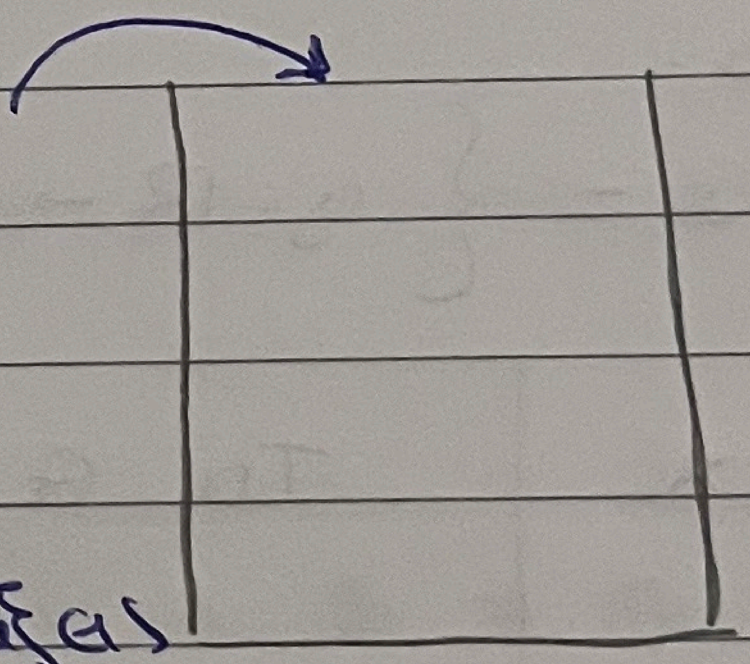


Συμβολίζουμε με $C(\Omega)$

το σύνολο όλων των συνεχών συναρτήσεων από το Ω στο $\mathbb{R}$.

$(f(u_1, u_2, u_3) = u_1 + u_2 + u_3)$

$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$



Εφοδιάζουμε το $C(\Omega)$ με πράξεις $C(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$

• πρόσθεση •

$f, g \in C(\Omega)$, ορίζουμε:

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $x \in \Omega$

• Βαθμωτός πολλαπλασιασμός •

$f \in C(\Omega)$, $k \in \mathbb{R}$

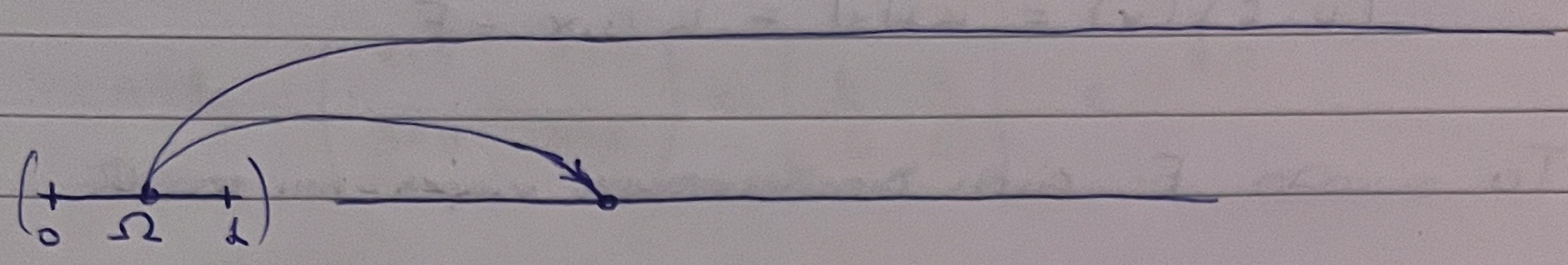
$(k \cdot f)(x) = k \cdot f(x)$, $\forall x \in \Omega$

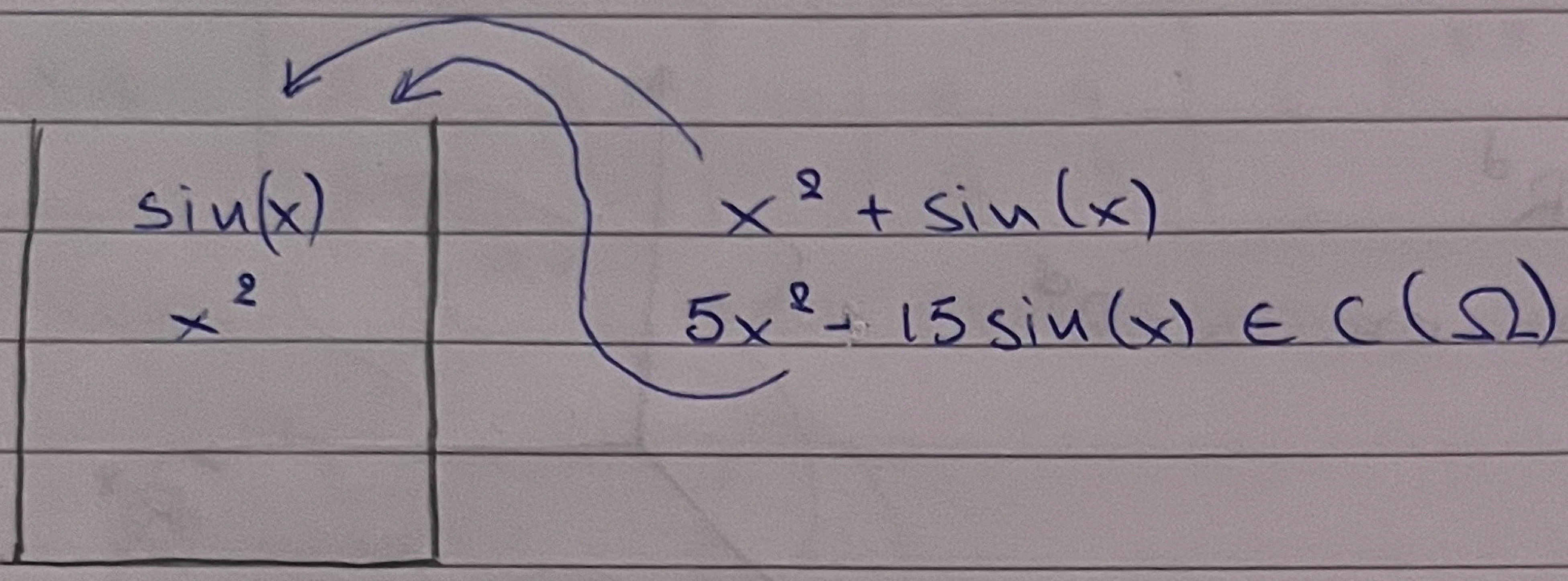
Το $C(\Omega)$ είναι διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$

Επέκταση του παραδείγματος:

$(0,1) \rightarrow \mathbb{R}$

$\Omega \in \mathbb{R}$

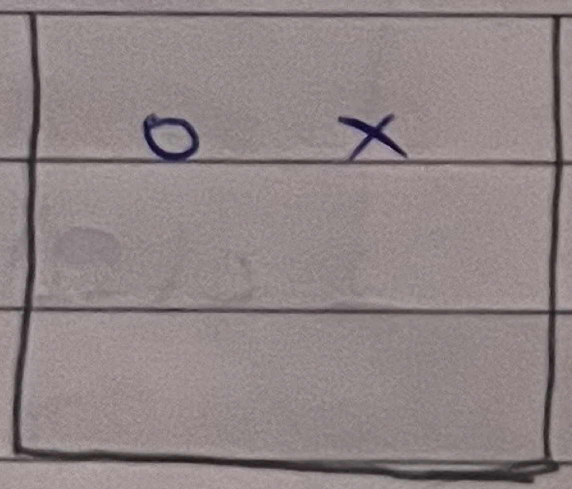




$C(\Omega)$

Ερώτημα:

Έστω $G = \{ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : g(x) = ax \ , \ a \in [0,1] \}$

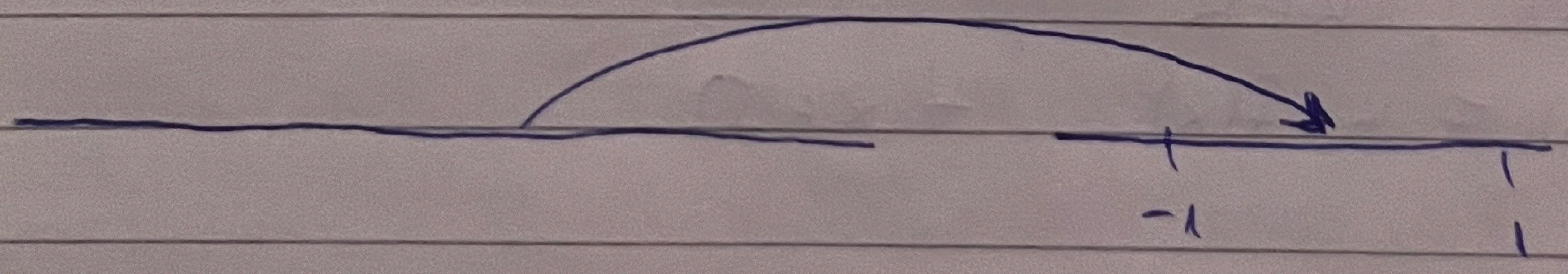


G

Το G δεν είναι διανυσματικός χώρος

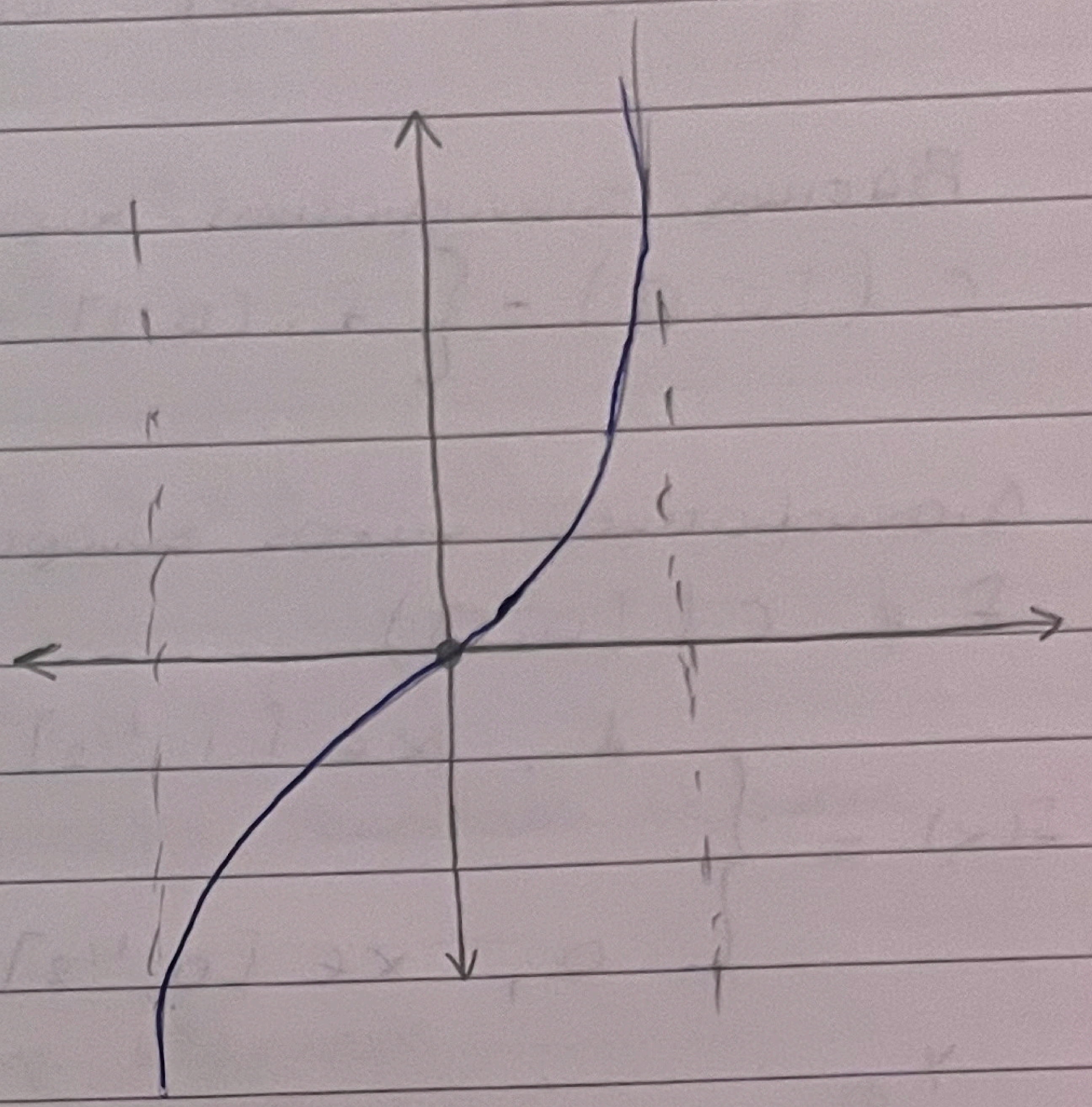
Ερώτημα:

$Y = \{ f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1] \}$



$\sin(x)$	$\sin(x) \in Y$
$\cos(x)$	$\sin(5x) \in Y$
$\sin(5x)$	

Y



$\sin(x) + \sin(5x) \notin Y$

Πράγματι $x = \frac{\pi}{2}$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 2$

ΘΕΩΡΗΜΑ:

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$, τότε $\exists!\, \mathbf{0} \in V$ τέτοιο ώστε $\forall u \in V \Rightarrow u + \mathbf{0} = u$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Έστω ότι υπάρχει $\tilde{\mathbf{0}} \in V$ επί του μοναδικού στοιχείου

θ.ν.δ.ο $\mathbf{0} = \tilde{\mathbf{0}}$

$\forall u \in V$ θα ισχύει $u + \tilde{\mathbf{0}} = u \Rightarrow \mathbf{0} = \mathbf{0} + \tilde{\mathbf{0}} = \tilde{\mathbf{0}} + \mathbf{0}$ $\blacksquare$