2º μάθημα 28/2/2025

$\mathbb{R}^n = \{(u_1, u_2, \dots, u_n) : u_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \dots, n\}$

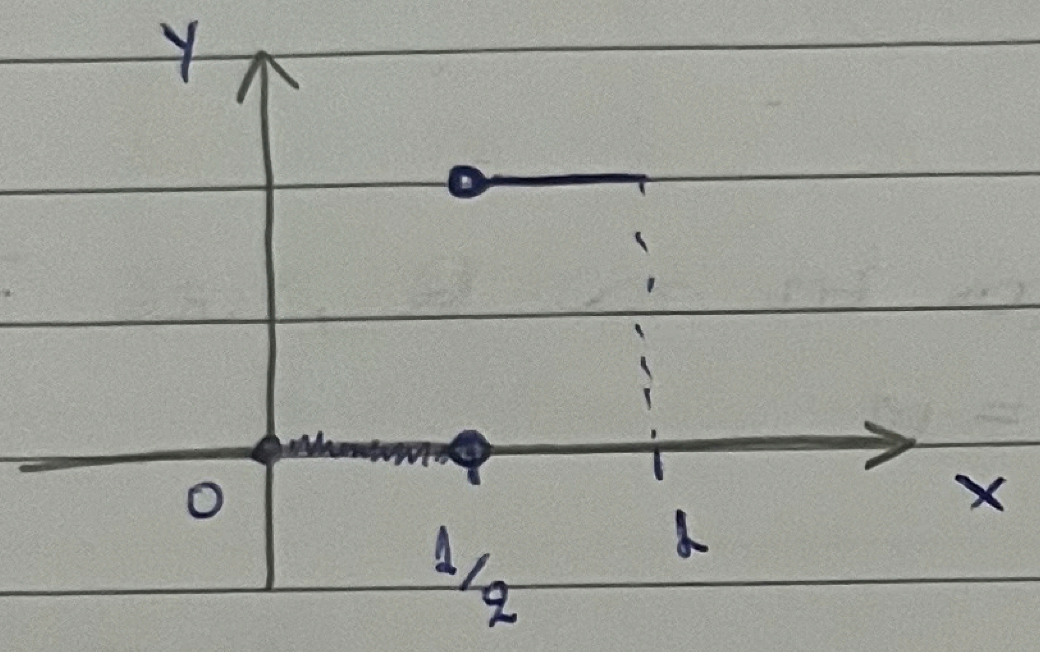
Βασικός διανυσματικός χώρος του μαθήματος

$C([0,1]) = \{ f : [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ συνεχή στο } [0,1] \}$

Διανυσματικός χώρος συναρτήσεων

$f \notin C([0,1])$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [1, 1/2] \\ 0, & x \in [0, 1/2] \end{cases}$$



ΘΕΩΡΗΜΑ:

Έστω V διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$ (ή $\mathbb{K}$)

Αν $u \in V$ το $-u \in V$ και $-u$ είναι μοναδικό

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Έστω $w \in V$ αντίθετος του u ΘΔΟ $w = -u$

- $u + w = 0 \xrightarrow{+(-u)} \underbrace{u + (-u)}_{0} + w = 0 - u \Rightarrow w = -u$

Ισχύει η μοναδικότητα του $-u$

ΘΕΩΡΗΜΑ:

Έστω V δχ επί του $\mathbb{K}$

Αν $u, v, w \in V$ και $u + v = u + w$ τότε $v = w$

(ΝΟΜΟΣ ΔΙΑΓΡΑΦΗΣ)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

$$u + v = u + w \xRightarrow{+(-u)} u + (-u) + v = u + (-u) + w$$

$$\Rightarrow 0 + v = 0 + w$$

$$\Rightarrow v = w$$

ΘΕΩΡΗΜΑ:

Έστω V δχ επί του $\mathbb{K}$

Αν $u, v \in V$ τότε η εξίσωση $u+x=v$

έχει μοναδική λύση $v+(-u)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

$$u+x=v \xrightarrow{+(-u)} \underbrace{u+(-u)}_{\phi}+x = v+(-u)$$

$$\Rightarrow \quad x = v+(-u)$$

Δείξαμε ότι το $v+(-u)$ αποτελεί λύση της εξίσωσης

ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑ ΤΗΣ ΛΥΣΗΣ

Έστω $w \in V$ μια λύση της εξίσωσης

Άρα $\boxed{u+w=v} = u+x = \boxed{u+v+(-u)}$

$\Rightarrow u+w = u+v+(-u)$

$\Rightarrow w = v+(-u)$

Τελικά το $v+(-u)$ είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης

ΘΕΩΡΗΜΑ (χωρίς απόδειξη)

Έστω V δχ επί του $\mathbb{K}$

$-(-u)=u \quad \forall u \in V$

$\Rightarrow \quad 0 \cdot u = \phi \quad \forall u \in V$

$$0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\cdot 1 \\ 0\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \phi$$

$$0^{(3x)} = \phi = \{ f(x) = 0 \}$$

$\Rightarrow \quad k \cdot \phi = \phi$

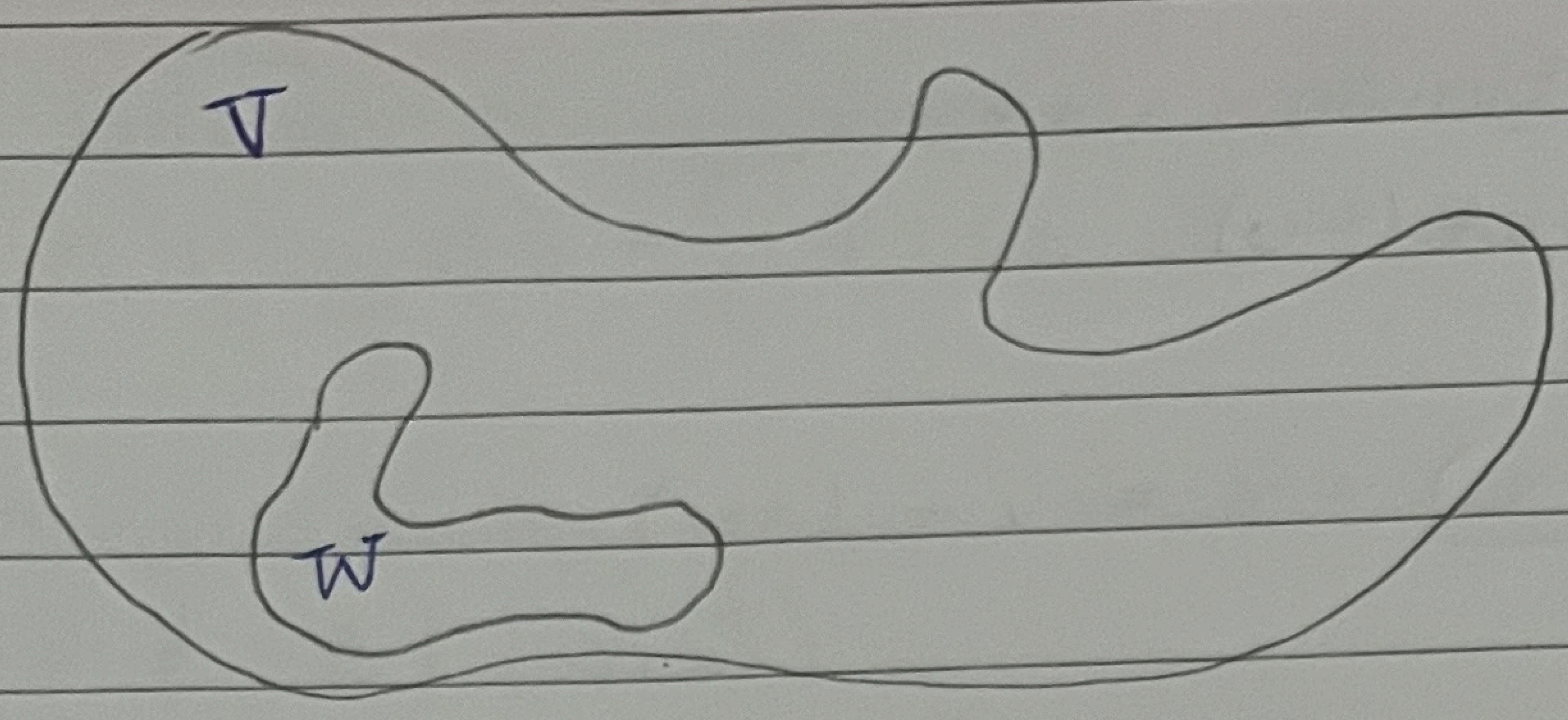
Αν $k \cdot u = \phi$ τότε $k=0$

$\rightarrow (ku) = (-k)\cdot u$ ή $u = \phi \quad \forall k \in \mathbb{K}$ και $\forall u \in V$

$\rightarrow (ku) = (-u)\cdot(-k)$

$\Rightarrow (-k)(-u) = ku \quad \forall k \in \mathbb{K}$ και $\forall u \in V$

Σύνολα - Υποσύνολα



Λέμε W είναι υποσύνολο του V. Αν $\forall\, \omega \in W \Rightarrow \omega \in V$ και θα γράφουμε $W \subseteq V$

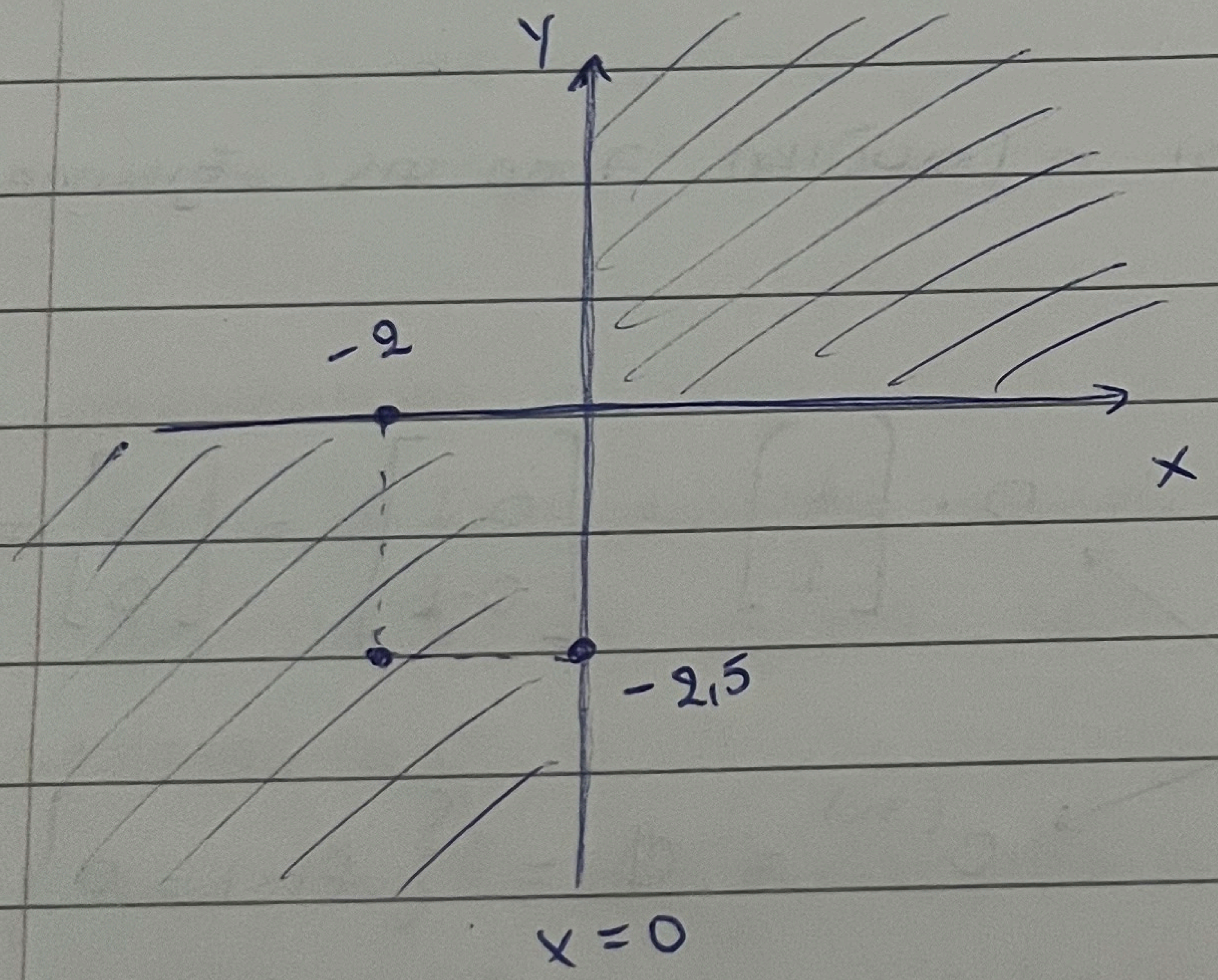
- Το V είναι υποσύνολο του V. $V \subseteq V$

παράδειγμα

$V = \mathbb{R}^2$

$W = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \cdot y \geq 0 \}$

$W \subseteq V$? TRUE (V = όλος ο πίνακας)



ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΥΠΟΧΩΡΟΙ

Ένα υποσύνολο W ενός διανυσματικού χώρου επί του $\mathbb{K}$ καλείται διανυσματικός υπόχωρος του V αν το W είναι επίσης Δχ επί του $\mathbb{K}$ με τις πράξεις πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού όπως ορίστηκαν για το V

⟶ Οι ιδιότητες : (Δχ1), (Δχ2), (Δχ5), (Δχ6), (Δχ7) και (Δχ8) κληρονομούνται από το V επειδή $W \subseteq V$

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ

W είναι δ.υ του V

- $W \subseteq V$
- $V \supseteq W$

Για να είναι ο W (δ.υ) του V θέλουμε τις ιδιότητες

i. $\forall u,v \in W \rightarrow u+v \in W$

ii. $\forall u \in W$ και $\kappa \in \mathbb{K} \rightarrow \kappa \cdot u \in W$

iii. το $w \in W$ έχει $-w \in W$ (θ.δ.ο είναι μοναδικό)

iv. το W έχει μοναδικό μηδενικό στοιχείο 0_W (θ.δ.ο $0_W = 0$)

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω V δχ επί του $\mathbb{K}$

και $W \subseteq V$

W είναι υπόχωρος του ανν (αν και μόνο αν)

(ΔΥ1) $0 \in W$ (0 το μοναδικό στοιχείο του V)

(ΔΥ2) Εάν $w_1, w_2 \in W \Rightarrow w_1 + w_2 \in W$

(ΔΥ3) Εάν $w \in W$ και $\kappa \in \mathbb{K} \rightarrow \kappa \cdot w \in W$

ανν

Πρ1 $\longleftrightarrow$ Πρ2

1 ΒΗΜΑ δ.ο Πρ1 = Πρ2

2 ΒΗΜΑ δ.ο Πρ2 = Πρ1

ανν

Πρ1 = Πρ2

Πρ1: Ο W υπόχωρος V

Πρ2: για το W ισχύουν (ΔΥ1) - (ΔΥ3)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

($\Longrightarrow$) Έστω W είναι υπόχωρος του V αυτόματα ισχύουν οι ΔΥ2, ΔΥ3

Από (iv) δ.ο $\exists\, 0_W$ μοναδικό στοιχείο του W

$\forall w \in W$ ισχύει $w + 0_W = w$ (*)

όμως το $w \in V$ (αφού $W \subseteq V$), άρα $w + 0 = w$ (~)

($\Longrightarrow$) (*) + (~) $\Rightarrow w + 0_W = w + 0 \xRightarrow{N.\Delta} 0_W = 0$

($\Longleftarrow$) Έστω ΔΥ1 - ΔΥ3 ισχύουν

$\forall w \in W \Rightarrow -w \in W \quad w \in W$

Θεωρούμε το βαθμωτό γινόμενο $(-1) \cdot w \in W$ έχουμε

$(-\kappa) \cdot w = -\kappa w \quad W \in (-1)w = -w \in W$

▨