18/2/25

$\mathbb{R}^n = \{(u_1, u_2, \dots, u_n) : u_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\}$

Βασικός διανυσματικός χώρος του μαθήματος

$C([0,1]) = \{ f:[0,1] \to \mathbb{R} : f$ συνεχής στο $[0,1] \}$

Διανυσματικός χώρος συναρτήσεων $f(x) = \begin{cases} 1 & , x \in [1/2, 1] \\ 0 & , x \in [0, 1/2) \end{cases}$

$f \notin C([0,1])$

Θεώρημα

Έστω V διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$ (ή $\mathbb{K}$).
Αν $u \in V$ το $-u \in V$ και $-u$ μοναδικό. $(u + (-u) = \mathbb{0})$

Απόδειξη

Έστω $w \in V$ αντίθετος του u. Θ.δ.ο. $\boxed{w = -u}$

$u + w = \mathbb{0} \xrightarrow{+(-u)} u + (-u) + w = -u + \mathbb{0} \Rightarrow w = -u.$

Ισχύει η μοναδικότητα του $-u$.

Θεώρημα

Έστω V δ.χ. επί του $\mathbb{K}$.
Αν $u, v, w \in V$ και $u+v = u+w$ τότε $v = w$

Απόδειξη

$u + v = u + w \xrightarrow{+(-u)} \overbrace{u + (-u)}^{\mathbb{0}} + v = \overbrace{u + (-u)}^{\mathbb{0}} + w \Rightarrow \mathbb{0} + v = \mathbb{0} + w \Rightarrow v = w.$

Θεώρημα

Έστω V δ.χ. επί του $\mathbb{K}$.
Αν $u, v \in V$ τότε η εξίσωση $u + x = v$ έχει μοναδική λύση την $v + (-u)$.

Απόδειξη

$$u + x = v \xrightarrow{u+(-u)} \overbrace{u + (-u)}^{\mathbb{O}} + x = v + (-u) \Rightarrow \mathbb{O} + x = v + (-u) \Rightarrow x = v + (-u)$$

Δείξαμε ότι το $v + (-u)$ αποτελεί λύση της εξίσωσης.

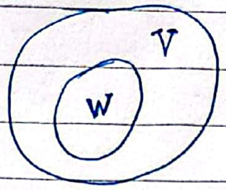
Μοναδικότητα της λύσης:
Έστω $w \in V$ μία λύση της εξίσωσης.
Άρα $u + w = v = u + x = u + v + (-u) \Rightarrow u + w = u + v + (-u) \Rightarrow w = v + (-u)$.
Τελικά το $v + (-u)$ είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης.

Θεώρημα (χωρίς απόδειξη)

Έστω V δ.χ. επί του $\mathbb{K}$.

- $\rightarrow$ $-(-u) = u$, $\forall u \in V$.
- $\rightarrow$ $0 \cdot u = \mathbb{O}$, $\forall u \in V$.
  - $\rightarrow$ $0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbb{O}$
  - $\rightarrow$ $0 \cdot (3x) = \mathbb{O}$ $\{ f(x) = 0 \}$
- $\rightarrow$ $k \cdot \mathbb{O} = \mathbb{O}$
- $\rightarrow$ Αν $k \cdot u = \mathbb{O}$ τότε $k = 0$ ή $u = \mathbb{O}$, $\forall k \in \mathbb{K}$ και $\forall u \in V$.
- $\rightarrow$ $-(ku) = (-k)u = k(-u)$, $\forall k \in \mathbb{K}$ και $\forall u \in V$.
- $\rightarrow$ $(-k)(-u) = ku$, $\forall k \in \mathbb{K}$ και $\forall u \in V$.
- $\rightarrow$ $(-1)u = -u$, $\forall u \in V$.

Σύνολα-Υποσύνολα



Λέμε W υποσύνολο του V αν $\forall w \in W \Rightarrow w \in V$, και θα γράφουμε $W \subseteq V$.

Ερώτημα

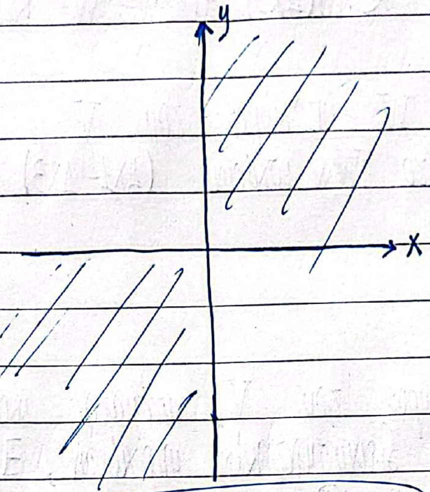
$V \subseteq V$; Ναι, αφού $\forall w \in V \Rightarrow w \in V$.

Παράδειγμα

$V = \mathbb{R}^2$

$W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\}$

$W \subseteq V$; Ναι.



$W =$ ////

$V =$ όλο το άλλο (όλος ο πίνακας)

Διανυσματικοί Υποχώροι

Ένα υποσύνολο W ενός διανυσματικού χώρου επί του $\mathbb{K}$ καλείται διανυσματικός υποχώρος του V αν το W είναι επίσης δ.χ. επί του $\mathbb{K}$ με τις πράξεις πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού όπως ορίζονται για το V.

→ Οι ιδιότητες ΔΧ1, ΔΧ2, ΔΧ5, ΔΧ6 και ΔΧ8 κληρονομούνται από το V επειδή $W \subseteq V$.

Για να είναι ο W δ.υ. του V θέλουμε τις ιδιότητες:

i) $\forall u, v \in W \Rightarrow u + v \in W$

ii) $\forall u \in W$ και $k \in \mathbb{K} \Rightarrow ku \in W$

iii) Το $w \in W$ έχει ένα $-w \in W$ (θα είναι μοναδικό)

iv) Το W έχει μοναδικό μηδενικό στοιχείο $\mathbb{0}$ (θα $\mathbb{0}_W = \mathbb{0}$)

Θεώρημα

Έστω V δ.χ. επί του $\mathbb{K}$ και $W \subseteq V$.

W υποχώρος του V ανν (sos ⊛) $(\Leftrightarrow)$

i) (ΔΥ1) $\mathbb{O} \in W$ ($\mathbb{O}$ το μηδενικό στοιχείο του V)

ii) (ΔΥ2) Έστω $w_1, w_2 \in W \Rightarrow w_1 + w_2 \in W$

iii) (ΔΥ3) Αν $w \in W$ και $k \in \mathbb{K} \Rightarrow k \cdot w \in W$.

Πρόταση1: Ο W υποχώρος του V

Πρόταση2: Για το w ισχύουν (ΔΧ1 - ΔΧ3)

Απόδειξη

$(\Rightarrow)$

Έστω W είναι υπόχωρος του V, αυτόματα ικανοποιούνται τα ΔΧ2 και ΔΧ3.

Από iv) ιδιότητα των διανυσματικών υποχώρων, $\exists\ \mathbb{O}_W$ μηδενικό στοιχείο του W.

$\forall w \in W$ ισχύει $w + \mathbb{O}_W = w$ ⊛

όμως το $w \in V$ (αφού $W \subseteq V$), άρα $w + \mathbb{O}_W = w$ ⊝

⊛ + ⊝ $\Rightarrow \cancel{w} + \mathbb{O}_W = \cancel{w} + \mathbb{O} \Rightarrow$ Από Νόμο Διαγραφής, $\mathbb{O}_W = \mathbb{O}$.

$(\Leftarrow)$

Έστω ότι ισχύουν ΔΥ1 - ΔΥ3

Θέλω να μόνο την iii)

$\forall w \in W \Rightarrow -w \in W$.

Θεωρούμε τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό $(-1) \cdot w \in W$

Έχουμε $(-k)w = -kw$, $W \ni (-1)w = -w \in W$.

Συμπερασμός

W είναι δ.υ. του $V \Rightarrow W \leq V$. ▫

⑩