17/2/25 ΓΡΑΜΜΙΚΗ 2

ΑΓΛΕΒΡΙΚΟ ΣΩΜΑ

Ένα σύνολο $\mathbb{K}$ στο οποίο ορίζονται 2 διμελείς πράξεις.

ΠΡΟΣΘΕΣΗ $(\alpha,b) \to \alpha+b$

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ $(\alpha,b) \to \alpha\cdot b$

Α.Σ. 1: Αν $\alpha,b,c \in \mathbb{K}$

$\to (\alpha+b)+c = \alpha+(b+c)$ → ΠΡΟΣΕΤΑΙΡΙΣΤΙΚΗ

$\to (\alpha b)c = \alpha(bc)$

Α.Σ. 2: $\forall \alpha,b \in \mathbb{K}$

$\to \alpha+b = b+\alpha \to \alpha b = b\alpha \to$ ΑΝΤΙΜΕΤΑΘΕΤΙΚΗ

Α.Σ. 3: $\forall \alpha,b,c \in \mathbb{K} \to \alpha(b+c) = \alpha b+\alpha c \to$ ΕΠΙΜΕΡΙΣΤΙΚΗ

μοναδικό μηδενικό στοιχείο

Α.Σ. 4: $\exists!\, 0 \in \mathbb{K}$ και $\exists!\, 1 \in \mathbb{K}$: $\forall \alpha \in \mathbb{K}$

$\to \alpha+0 = \alpha \quad \to \alpha\cdot 1 = \alpha$

Α.Σ. 5: $\forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \exists (-\alpha) \in \mathbb{K} : \alpha+(-\alpha) = 0 \in \mathbb{K}$

Α.Σ. 6: $\forall \alpha \in \mathbb{K},\ \alpha \neq 0,\ \exists!\, \alpha^{-1} \in \mathbb{K} : \alpha\cdot\alpha^{-1} = 1 \in \mathbb{K}$

Παράδειγμα

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ είναι ένα αλγεβρικό σώμα.

Παράδειγμα

Το σύνολο των ρητών αριθμών $\mathbb{Q}$,

$$\mathbb{Q} = \{ q \in \mathbb{R} : \exists\, z_1, z_2 \in \mathbb{Z},\ z_2 \neq 0,\ q = z_1/z_2 \},$$

είναι αλγεβρικό σώμα.

· Το $\mathbb{K}$ θα μπορεί να ανήκει $\{\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}\}$.

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ

(ή Γραμμικός επί του $\mathbb{K}$)

Είναι ένα σύνολο V στο οποίο έχουν οριστεί δύο πράξεις,

i) ΠΡΟΣΘΕΣΗ

ii) ΒΑΘΜΩΤΟΣ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

έτσι ώστε α) αν $u \in V$ και $v \in V$, τότε $u+v \in V$.

β) αν $u \in V$ και $\kappa \in \mathbb{K}$, τότε $\kappa \cdot u \in V$,

έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι συνθήκες:

ΔΧ1: $\forall u,v \in V \Rightarrow u+v = v+u$ (Αντιμεταθετική)

ΔΧ2: $\forall u,v,w \in V \Rightarrow u+(v+w) = (u+v)+w$ (ΠΡΟΣΕΤΑΙΡΙΣΤΙΚΗ ΣΤΗ ΠΡΟΣΘΕΣΗ)

ΔΧ3: $\exists!\ \mathbb{0} \in V$ (μηδενικό στοιχείο) : $u+\mathbb{0} = u$

ΔΧ4: $\forall u \in V$, $\exists!\ -u \in V : u+(-u) = \mathbb{0}$

ΔΧ5: $\forall u,v \in V$ και $\forall \kappa \in \mathbb{K}$ ισχύει ότι $\kappa(u+v) = \kappa u+\kappa v \in V$

ΔΧ6: $\forall u \in V$ και $\forall \kappa,\lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow (\kappa+\lambda)u = \kappa u+\lambda u \in V$

ΔΧ7: $\forall u \in V$ και $\forall \kappa,\lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow (\kappa\lambda)u = \kappa(\lambda u) \in V$

ΔΧ8: $\forall u \in V$, $1 \cdot u = u$.

Τα στοιχεία του V καλούνται διανύσματα.

Παράδειγμα

$\mathbb{R}^n = \{(u_1,u_2,\dots,u_n)\} : u_i \in \mathbb{R},\ i=1,\dots,n\}$.

Εφοδιάζουμε τον $\mathbb{R}^n$ με τις πράξεις:

i) ΠΡΟΣΘΕΣΗ : $\forall u,v \in \mathbb{R}^n$ με $u = \{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ και $v = \{v_1,v_2,\dots,v_n\}$

Ορίζω τις πράξεις της πρόσθεσης ως εξής:

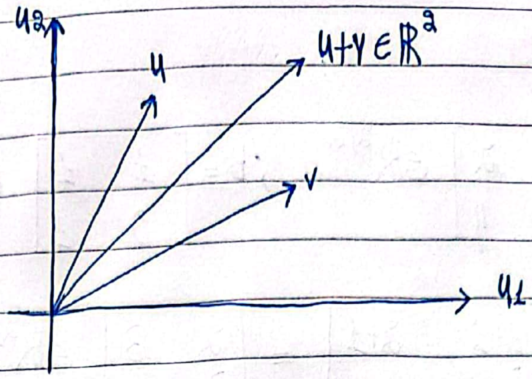
$$u+v = (u_1+v_1, u_2+v_2, \dots, u_n+v_n) \in \mathbb{R}^n.$$

ii) ΒΑΘΜΩΤΟΣ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ: $\forall u \in \mathbb{R}^n$ και $\forall \kappa \in \mathbb{R}$, ορίζω την πράξη του βαθμωτού πολλαπλασιασμού ως εξής:

$$\kappa u = (\underbrace{\kappa u_1}_{\in\mathbb{R}}, \underbrace{\kappa u_2}_{\in\mathbb{R}}, \dots, \underbrace{\kappa u_n}_{\in\mathbb{R}}) \in \mathbb{R}^n.$$

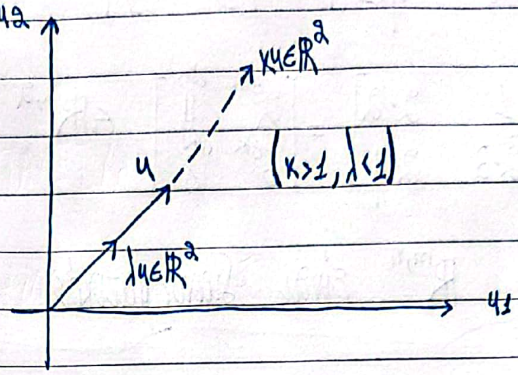
Επέκταση του παραδείγματος

$\mathbb{R}^2 = \{(u_1, u_2) : u_1, u_2 \in \mathbb{R}\}$



Έστω $u = (1,2) \in \mathbb{R}^2$, $v = (2,3) \in \mathbb{R}^2$
τότε $u+v = (1+2,\ 2+3) = (3,5) \in \mathbb{R}^2$

$u = (1,2) \in \mathbb{R}^2$
$2 \in \mathbb{R}$
τότε $2 \cdot u = (2 \cdot 1, 2 \cdot 2) = (\underset{\in \mathbb{R}}{2}, \underset{\in \mathbb{R}}{4}) \in \mathbb{R}^2$



Παράδειγμα

$M_{m,n}(\mathbb{R})$ ή $(M(m,n,\mathbb{R}))$ ή $\mathbb{R}^{m\times n}$ ή $\mathbb{R}^{m,n}$

Το σύνολο όλων των m,n πινάκων με στοιχεία στο $\mathbb{R}$ εφοδιασμένο με τις πράξεις:

i) ΠΡΟΣΘΕΣΗ

Έστω $A = \{a_{ij}\} \in \mathbb{R}^{m,n}$ και $B = \{b_{ij}\} \in \mathbb{R}^{m,n}$

Ορίζω

$A+B = \{a_{ij} + b_{ij}\} \in \mathbb{R}^{m,n}$

ii) ΒΑΘΜΩΤΟΣ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

$\forall A = \{a_{ij}\} \in \mathbb{R}^{m,n}$ και $\kappa \in \mathbb{R}$

Ορίζω

$\kappa A = \{\underset{\in \mathbb{R}}{\kappa \cdot a_{ij}}\} \in \mathbb{R}^{m,n}$.

Επέκταση παραδείγματος

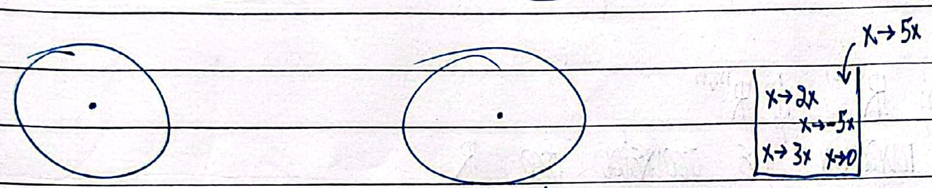
$\mathbb{R}^{2,2}$

- $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{2,2}$; $B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{2,2}$, $2\in\mathbb{R}$.

- $A+B=\begin{bmatrix}1+1 & 2+1\\ 3+0 & 4+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 3 & 5\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{2,2}$

- $2A=\begin{bmatrix}2\cdot 1 & 2\cdot 2\\ 2\cdot 3 & 2\cdot 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2^{\in\mathbb{R}} & 4^{\in\mathbb{R}}\\ 6^{\in\mathbb{R}} & 8^{\in\mathbb{R}}\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{2,2}$

- Ο χώρος $\mathbb{R}^{m,n}$ είναι διανυσματικός χώρος.



V (R) W (-R) F

Παράδειγμα

$F=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} : f(x)=\alpha x ,\ \alpha\in\mathbb{R}\}$

Εφοδιάζω το F με τις πράξεις:

i) ΠΡΟΣΘΕΣΗ

Αν $f,g\in F$ τότε $\exists\,\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$: $f(x)=\alpha_1 x$, $g(x)=\alpha_2 x$

Ορίζω $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\alpha_1 x+\alpha_2 x=\underbrace{(\alpha_1+\alpha_2)}_{\in\mathbb{R}}x\in F$.

ii) ΒΑΘΜΩΤΟΣ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

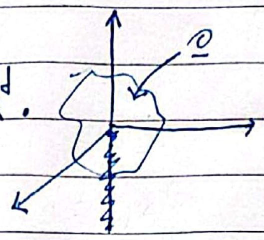
Έστω $f\in F$ τότε $\exists\,\alpha\in\mathbb{R}$: $f(x)=\alpha x$ και $\kappa\in\mathbb{R}$

Ορίζω το γινόμενο $(\kappa f)(x)=\kappa\cdot f(x)=\underbrace{\kappa\cdot\alpha}_{\in\mathbb{R}}x\in F$.

- Το σύνολο F είναι διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$.

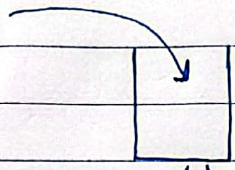
Παράδειγμα

Έστω $\Omega \in \mathbb{R}^d$ ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Συμβολίζω με $C(\Omega)$ το σύνολο όλων των συναρτήσεων από το Ω στο $\mathbb{R}$.



$f(u_1,u_2,u_3) = \overbrace{u_1+u_2+u_3}^{\in \mathbb{R}}$

$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$



$C(\Omega)$, $\Omega \in \mathbb{R}^3$

i) ΠΡΟΣΘΕΣΗ :

Αν $f, g \in C(\Omega)$, ορίζω $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$, $x \in \Omega$.

ii) ΒΑΘΜΩΤΟΣ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ :

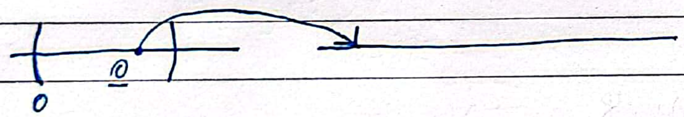
Αν $f \in C(\Omega)$, $\kappa \in \mathbb{R}$, ορίζω $(\kappa f)(x) = \kappa \cdot f(x)$, $\forall x \in \Omega$.

• Το $C(\Omega)$ είναι διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$.

Επέκταση του παραδείγματος

$(0,1) \to \mathbb{R}$

$\Omega \subset \mathbb{R}$



$\boxed{\begin{matrix} \sin x \\ x^2 \end{matrix}}$ ('Απειρες συνεχείς συναρτήσεις ανήκουν στον κουβά, όχι κλαδωτές)

$C(\Omega)$

• $\underbrace{x^2 + \sin x}_{\in C(\Omega)}$

• $\underbrace{5x^2 - \sin x}_{\in C(\Omega)}$

Ερώτημα

Έστω $G=\{g:\mathbb{R}\to\mathbb{R} : g(x)=ax,\ a\in[0,1]\}$

$\underset{\in\mathbb{R}}{5}\cdot \overset{\in[0,1]}{\frac{1}{4}}x = \underset{>1}{\frac{5}{4}}x \notin G$

$x+0{,}1x=1{,}1x\notin G$

· Άρα ο G δεν είναι διανυσματικός χώρος.

Ερώτημα

$Y=\{f:\overset{\forall x\in\mathbb{R}}{\mathbb{R}}\to[-1,1]\}$

$\cos(3x)$
$\sin(x)$
$\sin(5x)$

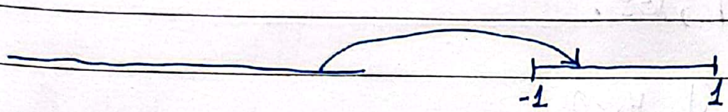
$\sin(x)\in Y$

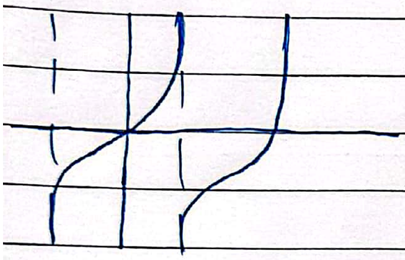
$\sin(3x)\in Y$

$\sin(x)+\sin(5x)\notin Y$

Πράγματι, αν $x=\pi/2$

$\sin(\frac{\pi}{2})+\sin(\frac{5\pi}{2}) = 2$





· Άρα ο Y δεν είναι διανυσματικός χώρος.

Θεώρημα

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$,
τότε $\exists!\ 0\in V : \forall u\in V \Rightarrow u+0=u$

Απόδειξη

Έστω ότι $\exists\ \tilde{0}\in V$ επίσης μηδενικό στοιχείο.

Θδο $0=\tilde{0}$.

$\forall u\in V$ θα ισχύει $u+\tilde{0}=u \Rightarrow 0=0+\tilde{0}=\tilde{0}+0=\tilde{0}$

Άρα $0=\tilde{0}$. □