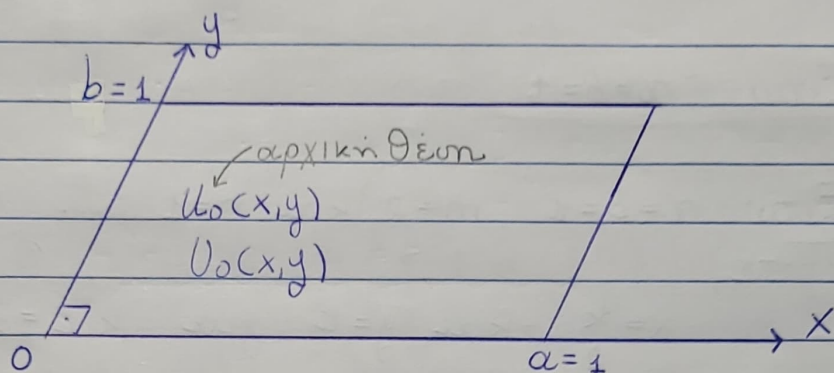


29/03/23

## Παράδειγμα:

Έστω ομογενή επιφάνεια (ελαστική), με αρχική θέση και ταχύτητα.



$$u_0(x,y) = f(x,y) = x(1-x)y(1-y)$$

$$v_0(x,y) = 0$$

$\Sigma, \Sigma = 0 \leftarrow u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}, x, y \in (0,1)$

$$u|_{\partial R} = 0 \quad \forall t > 0$$

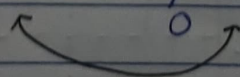
$$u(x,y,0) = u_0(x,y)$$

$$u_t(x,y,0) = 0$$

$$A_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b u_0(x,y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy dx$$

$$A_{mn} = 4 \int_0^1 \int_0^1 \underbrace{x(1-x)}_{\text{red}} \underbrace{y(1-y)}_{\text{green}} \underbrace{\sin(m\pi x)}_{\text{green}} \underbrace{\sin(n\pi y)}_{\text{green}} dy dx$$

$$= 4 \int_0^1 x(1-x) \sin(m\pi x) dx \cdot \int_0^1 y(1-y) \sin(n\pi y) dy$$



παρ-όμοια ολ/ματα

→ άρα αρκεί να βρω το ένα εκ των δύο.

$$\Rightarrow \int_0^1 x(1-x) \sin(m\pi x) dx = -\frac{1}{m\pi} \int_0^1 x(1-x) (\cos(m\pi x))' dx$$

$$= \frac{1}{m\pi} \int_0^1 (1-2x) \cos(m\pi x) dx$$

$$= \frac{1}{(m\pi)^2} (1-2x) \sin(m\pi x) \Big|_0^1 -$$

$$- \frac{1}{(m\pi)^2} \int_0^1 -2 \sin(m\pi x) dx$$

$$= \frac{2}{(m\pi)^3} \cos(m\pi x) \Big|_0^1 = \begin{cases} 0, m \text{ άρτιος} \\ -\frac{4}{(m\pi)^3}, m \text{ περιττός} \end{cases}$$

$$A_{mn} = 4 \cdot \begin{cases} 0, m \text{ άρτιος} \\ -\frac{4}{(m\pi)^3}, m \text{ περιττός} \end{cases} \cdot \begin{cases} 0, n \text{ άρτιος} \\ -\frac{4}{(n\pi)^3}, n \text{ περιττός} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, n \text{ ή } m \text{ άρτιος} \\ \frac{64}{\pi^3 \pi^3}, m, n \text{ περιττός} \end{cases}$$

Οπότε η γύση θα δωθεί ως:

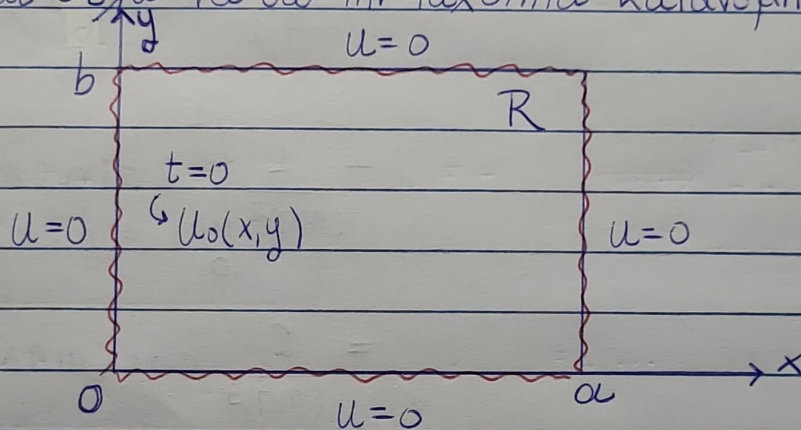
$$u(x, y, t) = \sum_{k_m=0}^{\infty} \sum_{k_n=0}^{\infty} \frac{64}{(2k_m+1)^3 (2k_n+1)^3 \pi^6} A_{2k_m+1, 2k_n+1} \sin((2k_m+1)\pi x) \sin((2k_n+1)\pi y) \sin(\sqrt{(2k_m+1)^2 + (2k_n+1)^2} \pi t)$$



## Εξίσωση Θερμότητας: (σε 2-διαστάσεις)

$$u_t = c^2 (u_{xx} + u_{yy})$$

Δηλαδή έστω ότι έχουμε μία πλάκα που είναι μονωμένη στα άκρα της. Σε χρόνο  $t=0$  η πλάκα έχει αρχική θερμοκρασία. Επίσης εδώ δεν έχω αρχική ταχύτητα (ρεαλιστικό μοντέλο). Έπειτα προσέτω πάχο χύρω-χύρω. Και θέλω να δω την ταχύτητα κατανομής της "γύσης".



$$u|_{\partial R} = 0, \quad \forall t > 0$$

$$u(x,y,0) = u_0(x,y), \quad x,y \in R.$$

$$u = X Y T$$

Έτσι ακολουθώντας τις προηγούμενες διαδικασίες και βήματα, παίρνω τα αντίστοιχα αποτελέσματα.

Οπότε η λύση μου εδώ θα έχει τη μορφή:

$$u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-\lambda_{mn}^2 t}$$

$$\text{όπου, } \lambda_{mn}^2 = \mu_m^2 + \gamma_n^2 \quad \mu_m = \frac{m\pi}{a}, \quad \gamma_n = \frac{n\pi}{b}$$

και,

$$A_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b u_0(x,y) \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) dx dy$$

Οριακή Κατάσταση: ( $t \rightarrow \infty$ )

$$u_t = c^2 u_{xx} \approx 0$$

$$u = 0$$

$$u = 0$$

$$u_0 \neq 0$$

$$u_t = c^2 (u_{xx} + u_{yy}) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

$$u = 0 \quad u_{xx} + u_{yy} = 0$$

• Εξίσωση Laplace (2D):

$$u = 0$$

$$\Rightarrow \nabla^2 u = 0$$

Τώρα θα αλλάξω το πείραμα και δεν θα έχω πάχο χύρω-χύρω από την πλάκα. Θα προσθέσω διαφορές και διαφορετικές <sup>(συναρτήσεις)</sup> πηγές για την απόσβεση της θερμοκρασίας της πλάκας.

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad x \in (0, a), y \in (0, b)$$

$$u(x, 0) = f_1(x), \quad \forall x \in (0, a)$$

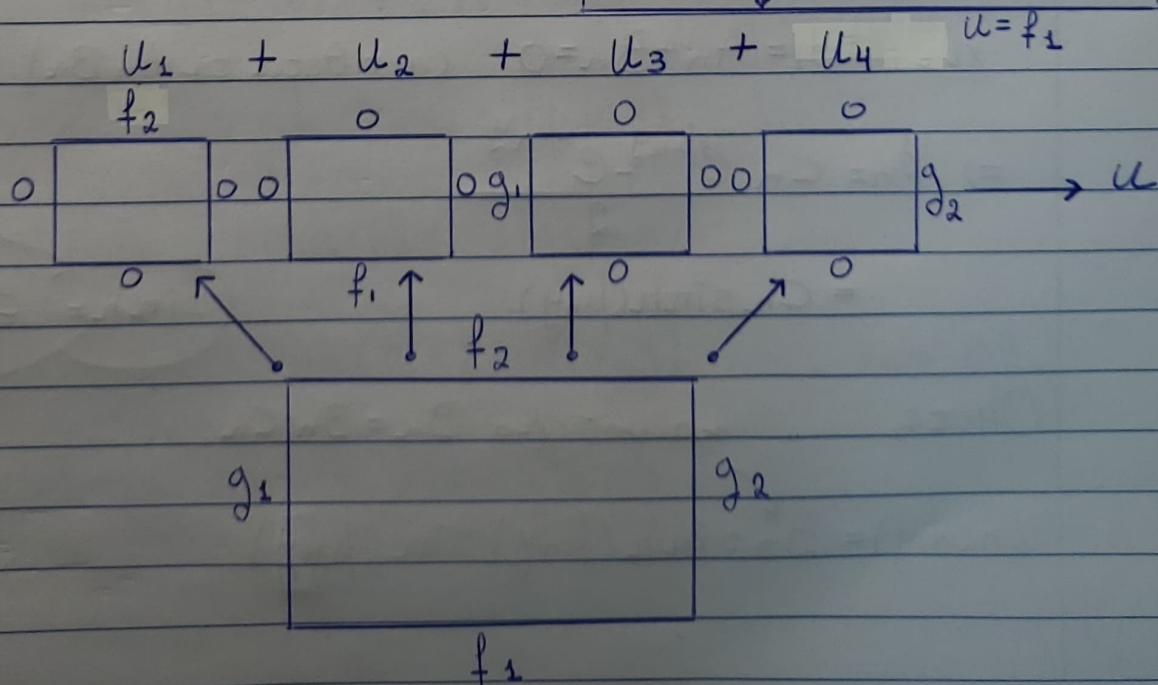
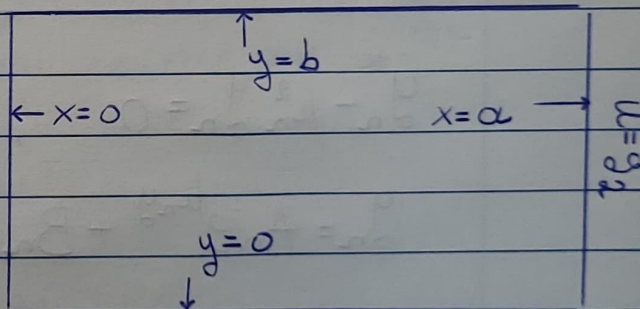
$$u(x, b) = f_2(x)$$

$$u(0, y) = g_1(y), \quad \forall y \in (0, b)$$

$$u(a, y) = g_2(y)$$

$$u = g_1$$

$$u = f_2$$





Οπότε έχω ότι  $u(x,0)=0$ ,  $\forall x \in (0,\alpha)$   
 $u(x,b)=f_2(x)$

$$u(0,y)=X(0)Y(y) \leftarrow \begin{cases} u(0,y)=0, \forall y \in (0,b) \\ u(\alpha,y)=0 \end{cases}$$
$$=0$$

Άρα,

$$u = XY$$

$$u(x,y) = X(x)Y(y)$$

$$\Rightarrow X''Y = -XY''$$

Θέλω το  $x$  να έχει  
↑  
περιωδικότητα.

$$\Rightarrow \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \text{σταθερά} = -\mu^2 \Rightarrow \boxed{X'' + \mu^2 X = 0}$$

Θέλω το  $x$  να  
↑  
να έχει περιωδικότητα.

$$\Rightarrow \boxed{X_n = B_n \sin\left(\frac{n\pi}{\alpha} x\right)}, \text{ για } n=1, \dots$$

$$Y_n'' - \mu_n^2 Y_n = 0, \quad Y_n(0) = 0, \quad n=1, \dots$$

$$Y_n = A_n e^{\mu_n y} + B_n e^{-\mu_n y}$$

$$\text{για } Y(0) = A_n + B_n = 0 \quad (\text{αντιθέτα τα } A_n, B_n)$$

$$\Rightarrow Y_n = C_n \frac{e^{\mu_n y} - e^{-\mu_n y}}{2}$$

$$= C_n \sinh(\mu_n y)$$

$$\sinh = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Οπότε, καινούριο  $B_n = B_n \cdot C_n$

$$u_n(x,y) = B_n \sinh(\mu_n y) \sin(\mu_n x)$$

Αρα,

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh(\mu_n y) \sin(\mu_n x) \quad \rightarrow B_n \cdot C_n = B_n$$

$$u(x,b) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{B_n \sinh(\mu_n b)}_{\substack{B_n \cdot C_n = B_n \\ \therefore C_n \text{ (καταρρέχεται)}}} \sin(\mu_n b) = f_2(x)$$

$$C_n = \frac{2}{a} \int_0^a f_2(x) \sin(\mu_n x) dx$$

$$\Rightarrow B_n = \frac{2}{a \sinh(\mu_n b)} \int_0^a f_2(x) \sin(\mu_n x) dx$$

Αυτή είναι μια από τις 4 γύσεις. Οι υπόλοιπες είναι συμμετρικές με αυτήν. Αυτή μπορώ να την πω  $B_n^{(f_2)}$ .

Έτσι η γενική γύση θα είναι:

$$u(x,y) = u_{f_2} + u_{f_1} + u_{g_1} + u_{g_2}$$

$$u_{f_2} = \sum B_n^{(f_2)} \sinh(\mu_n y) \sin(\mu_n x)$$

$$u_{f_1} = \sum B_n^{(f_1)} \sinh(\mu_n y) \sin(\mu_n x)$$

$$u_{g_2} = \sum B_n^{(g_2)} \sinh(\nu_n x) \sin(\nu_n y), \quad \nu_n = \frac{n\pi}{b}$$

$$u_{g_1} = \sum B_n^{(g_1)} \sinh(\nu_n x) \sin(\nu_n y)$$