Κυματική εξίσωση: (στις 2-διαστάσεις)
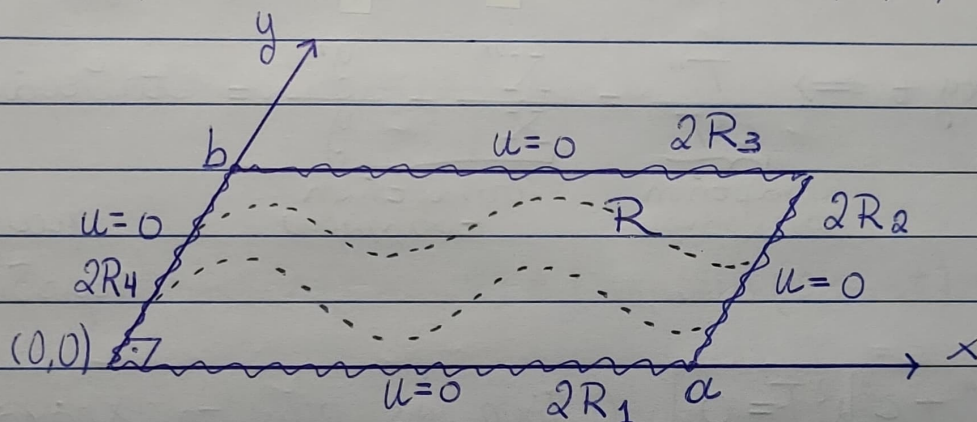
Έστω παρρόμενη, ελαστική και λεπτή μεμβράτη.

Εξίσωση:

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy})$$

$t > 0$, $x \in (0, \alpha)$, $y \in (0, b)$

Σ.Σ : $2R_1$: $u(x, 0, t) = 0$ $\forall y \in (0, \alpha)$

$2R_2$: $u(a, y, t) = 0$ $\forall y \in (0, b)$

$2R_3$: $u(x, b, t) = 0$ $\forall x \in (0, \alpha)$

$2R_4$: $u(0, y, t) = 0$ $\forall y \in (0, b)$

$\forall t > 0$

A.Σ

$u(x, y, 0) = u_0(x, y)$, $(x, y) \in R$

$u_t(x, y, 0) = U_0(x, y)$, $(x, y) \in R$

• Το u εκφράζει την μετατόπιση ως προς τον τρίτο άξονα.

• σε μια διάσταση:

$u_{tt} = c^2 \nabla^2 u$

όπου $\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y} \right)$

(x, y, t) ελεύθερες μεταβλητές)

Την εξίσωση θα τη λύσουμε με τη μέθοδο χωριζόμενων μεταβλητών:

$$u(x,y,t) = X_{(x)} y_{(y)} T_{(t)} \leftarrow \text{ψάχνω λύσεις αυτής της μορφής}$$

$$\Rightarrow u_{tt} = X y T'' \quad, \quad u_{xx} = X'' y T \quad, \quad u_{yy} = X y'' T$$

$$\Rightarrow X y T'' = c^2 (X'' y T + X y'' T)$$

X.6.γ.

$$\Rightarrow \frac{X y T''}{c^2 X y T} = \frac{X'' y T}{X y T} + \frac{X y'' T}{X y T}$$

$$\underbrace{\text{χρονική εξάρτηση}}_{} \qquad \underbrace{\text{χωρική εξάρτηση}}_{}$$

$$\forall x,y,t \Rightarrow \underbrace{\frac{T''}{c^2 T}}_{\substack{\text{συνάρτηση} \\ \text{του χρόνου}}} = \underbrace{\frac{X''}{X} + \frac{y''}{y}}_{\substack{\text{συνάρτηση} \\ \text{του χώρου}}} = \text{σταθερά} = -k^2 \;, (k > 0)$$

$$\downarrow \text{για να έχω περιοδικές λύσεις}$$

$$\boxed{T'' + c^2 k^2 T = 0} \quad (\text{λύση ως προς το χρόνο})$$

$$\overset{\curvearrowright \text{σταθερά}}{\Rightarrow \underbrace{\frac{X''}{X}}_{\substack{\text{συνάρτηση} \\ \text{του } x}} = -\underbrace{\frac{y''}{y}}_{\substack{\text{συνάρτηση} \\ \text{του } y}} - k^2 = \text{σταθερά} = -\mu^2}$$

Σ.Σ: $X(0) = X(a) = 0 \leftarrow X'' + \mu^2 X = 0$

Σ.Σ: $y(0) = y(b) = 0 \leftarrow y'' + r^2 y = 0$, όπου $v^2 = k^2 - \mu^2 \Rightarrow \boxed{k^2 = \mu^2 + r^2}$, $k > \mu, r$

$2R_1$: $X(x) y(0) T(t) = 0 \quad \forall x, t \Rightarrow y(0) = 0$

$$\Rightarrow X_{(x)} = A\cos(\mu x) + B\sin_x(\mu x) \overset{X_{(0)}=0}{\Longrightarrow} A=0$$

$$\Rightarrow X_m(x) = B_m\sin(\mu_m x)\Big|_{x=a} = 0 \Rightarrow \mu_m = \frac{m\pi}{a}, \text{ για } m=1,2,\ldots$$
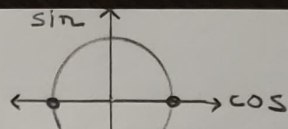
$$(\text{διότι } \sin \text{ περιττή συνάρτηση})$$

$$X_m(x) = B_m\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \quad \text{για } m=1,2,\ldots$$

$$Y_n(y) = B_n'\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \quad n=1,2,\ldots$$

• Έχω το $u = XYT$ και

Ορίζω $\quad u_{mn} = X_m Y_n T_{mn}$

$$\boxed{K_{mn}^2 = \mu_m^2 + \nu_m^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{T_{mn}'' - c^2 K_{mn}^2 T_{mn} = 0}$$

$$\Rightarrow T_{mn} = A_{mn}\cos(cK_{mn}t) + B_{mn}\sin(cK_{mn}t)$$

Η γενική λύση θα έχει τη μορφή:

$$u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} u_{mn}(x,y,t)$$

$$\Rightarrow u_{mn}(x,y,t) = \left[A_{mn}\cos(cK_{mn}t) + B_{mn}\sin(cK_{mn}t)\right]\cdot\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cdot\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$u(x,y,0) = \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cdot\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) = u_0(x,y)$$

Όπου $A_{mn}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)$ ο συντελεστής Fourier για

τη σειρά με το $\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) = U_0(x,y)$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{:= C_n}$$

$$\Rightarrow C_n = \frac{2}{b} \int_0^b \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) U_0(x,y) \, dy$$

συνάρτηση του x

$$\Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) = \frac{2}{b} \int_0^b \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) U_0(x,y) \, dy$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{:= g(x)}$$

$$\Rightarrow A_{mn} = \frac{2}{a} \int_0^a g(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) dx$$

$$\boxed{A_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b U_0(x,y) \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy \, dx}$$

$$U_t(x,y,0) = \sum_{m,n=1}^{\infty} c K_{mn} B_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) = U_0(x,y)$$

$$\Rightarrow B_{mn} = \frac{4}{abcK_{mn}} \int_0^a \int_0^b U_0(x,y) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dy \, dx$$

$$U = \sum_m \sum_n U_{mn} \quad \mu\varepsilon \quad U_{mn} = T_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

Τα $\int \alpha \sin(ck_{mn} t)$ αναφορα

Θέλω $u_{mn} = 0 \ \forall t \Rightarrow \sin\left(\dfrac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\dfrac{n\pi y}{b}\right) = 0$

- $\dfrac{m\pi x}{a} = k\pi \Rightarrow \underset{k m}{x} = \dfrac{k\pi a}{m\pi}$, $k = 1, 2, \dots$

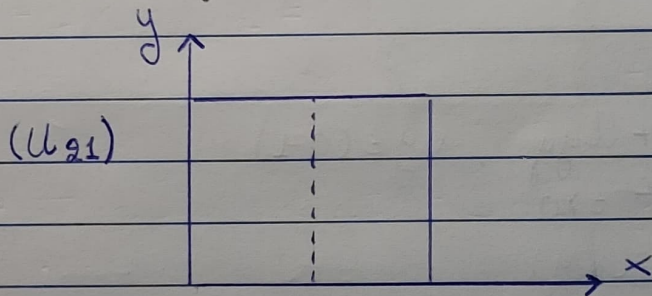- $\dfrac{n\pi y}{b} = \ell\pi \Rightarrow \underset{\ell n}{y} = \dfrac{\ell b}{n}$, $\ell = 1, 2, \dots$

Παράδειγμα:

Έστω $a = b = 1$, $m = 2$ και $n = 1$

Τότε,

$$x = \frac{k}{2} \quad \text{και} \quad y = \ell \quad \text{για} \quad k, \ell = 1, 2, \dots$$

$\longrightarrow$ καμία οριζόντια γραμμή

$\longrightarrow$ k=1 έχω γραμμή   δεν σχηματίζεται για ℓ=1

(u_{21})

Αν έχω m τότε $m-1$ ευθείες θα έχω μέσα.

(u_{22})

(u_{32})