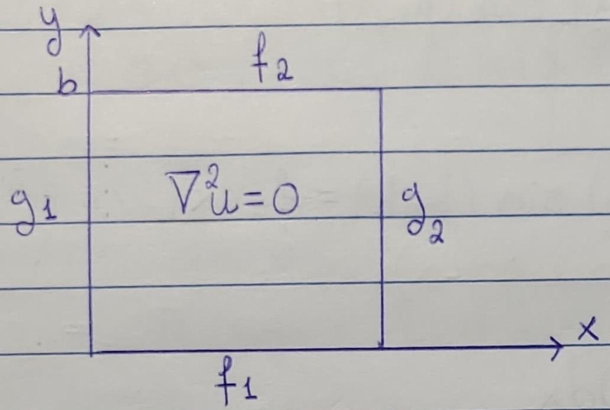
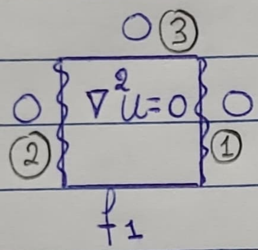
03/04/23

- **Εξίσωση Laplace: (2D)**




$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$u = XY$$

① $u(0,y) = X(0)Y(y) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$

② $u(a,y) = X(a)Y(y) = 0 \Rightarrow X(a) = 0$

③ $u(x,b) = X(x)Y(b) = 0 \Rightarrow Y(b) = 0$

$$\frac{X_n''}{X_n} = -\frac{Y_n''}{Y_n} = \text{σταθερά} = -\mu_n^2$$

$X_n = B_n \sin(\mu_n x)$

$X_n(a) = 0 = B_n \sin(\mu_n a) \Rightarrow \boxed{\mu_n = \frac{n\pi}{a}}$

ίδια

$$\begin{cases} Y_n'' - \mu_n^2 Y_n = 0 \\ Y_n(b) = 0 \end{cases}$$

διαφορετικά

ίδια

$Y_n = A_n e^{\mu_n y} + B_n e^{-\mu_n y}$

$Y_n(b) = A_n e^{\mu_n b} + B_n e^{-\mu_n b} = 0$

$\Rightarrow B_n = -e^{2\mu_n b} \cdot A_n$

$$Y_n(y) = A_n\left(e^{\mu_n y} - e^{2\mu_n b} e^{-\mu_n y}\right)$$

$$= e^{\mu_n b} A_n \left(e^{\mu_n y - \mu_n b} - e^{\mu_n b - \mu_n y}\right)$$

$$= \underbrace{e^{\mu_n b} A_n \cdot 2}_{:= C_n} \; \frac{e^{\mu_n(y-b)} - e^{-\mu_n(y-b)}}{2}$$

διότι $\sinh(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$

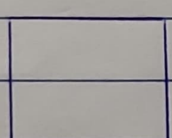
Άρα,

$$Y_n(y) = C_n \sinh(\mu_n(y-b))$$

$$X_n = B_n \sin(\mu_n x)$$
$$Y_n = C_n \sinh(\mu_n(y-b))$$

$$U_n(x,y) = B'_n \sinh(\mu_n(y-b)) \sin(\mu_n x)$$

$$U(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x,y)$$



$$f_1 \longrightarrow U(x,0) = f_1(x)$$

Έχουμε ότι,

$$U(x,0) = \sum B'_n \sinh(-b\mu_n) \sin(\mu_n x) \overset{\text{θέλω}}{=\!=} f_1(x)$$

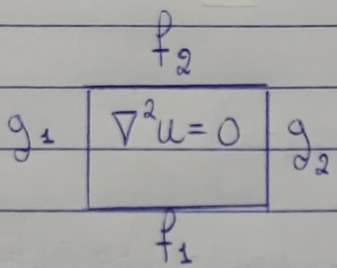
ο συντελεστής Fourier είναι:

$$B'_n \sinh(-b\mu_n) = \frac{2}{a} \int_0^{a} f_1(x) \sin(\mu_n x)\, dx$$

Δηλαδή,

$$\boxed{B_n' = \frac{2}{a\sinh(-b\mu_n)}\int_0^a f_1(x)\sin(\mu_n x)\,dx}$$

Εμείς, είχαμε να λύσουμε το πρόβλημα (την οριακή κατάσταση αυτής της πλάκας αν θερμαίνεται μετά απο άπειρο χρόνο.




$$f_2: \ u^{f_2}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n^{f_2}\sinh(\mu_n y)\sin(\mu_n x)$$

$$f_1: \ u^{f_1}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n^{f_1}\sinh(\mu_n(y-b))\sin(\mu_n x)$$

$$g_2: \ u^{g_2}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n^{g_2}\sinh(\nu_n x)\sin(\nu_n y)$$

$$g_1: \ u^{g_1}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_1^{g_1}\sinh(\nu_n(x-a))\sin(\nu_n y)$$

όπου $\mu_n = \frac{n\pi}{a}$, $\nu_n = \frac{n\pi}{b}$

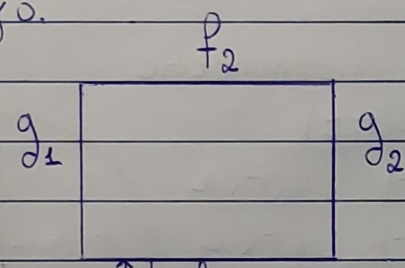
$$B_n^{f_1} = \frac{2}{a\sinh(-b\mu_n)}\int_0^a f_1(x)\sin(\mu_n x)\,dx$$

$$B_n^{f_2} = \frac{2}{a\sinh(b\mu_n)}\int_0^a f_2(x)\sin(\mu_n x)\,dx$$

$$B_n^{g_1} = \frac{2}{b\sinh(-a\nu_n)} \int_0^b g_1(y)\sin(\nu_n y)\,dy$$

$$B_n^{g_2} = \frac{2}{b\sinh(a\nu_n)} \int_0^b g_2(y)\sin(\nu_n y)\,dy.$$

Θα μπορούσε κάποιος να πει οτι κάποιο σύνορο είναι <u>μονωμένο</u>, τότε θα έπρεπε να έχουμε μια άλλη συνθήκη με την παράγωγο.




$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0$$

Η τιμή εδώ πέρα δεν αλλάζει απο το υπόλοιπο περιβάλλον. Δηλαδή, δεν ισχύει.

# Πολικές Συντεταγμένες με Αξονική Συμμετρία

- $u_{tt}=c^2(u_{xx}+u_{yy})$, $x^2+y^2<a^2$

  $u(x,y)=u_0\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$

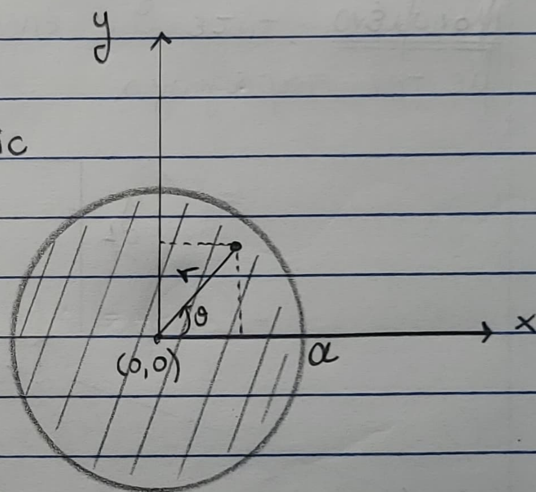
  $u_t(x,y,0)=U_0\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$

  $u(x,y,t)=0$ όταν $x^2+y^2=a^2$

Πιο καλά είναι να δουλέψει κανείς με πολικές συντεταγμένες. Δηλαδή,

$$\left.\begin{aligned} x&=r\cos\theta \\ y&=r\sin\theta \end{aligned}\right\} \text{ για } r\in(0,a) \text{ και } \theta\in[0,2\pi)$$

$$r^2+y^2=r^2$$




axisymmetric

**A.Σ:** $u=u(r,\theta,t)=u(r,t)$

$u(r,0)=u_0(r)$, $0\leq r<a$

$u_t(r,0)=U_0(r)$, $0\leq r<a$

**Σ.Σ:** $u(a,t)=0 \quad \forall\ t>0$

(στο σύνορο θα έχω ακινησία του μέσου).

Η παράγωγος ως προς t δεν αλλάζει, αλλάζει ως προς x και y.

$$\nabla^2 u=u_{xx}+u_{yy}$$

(έχουμε αξονική συμμετρία)

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\overbrace{\cancel{\frac{\partial u}{\partial \theta}}}^{0}\frac{\partial \theta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}$$

Με αυτόν τον τρόπο οι λύσεις μου θα είναι συναρτήσεις του r,t. Δηλ $u(r,t)$.

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial r}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)\frac{\partial r}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)}_{\frac{\partial}{\partial r}\left(\cancel{\frac{\partial u}{\partial \theta}}\right) \to 0}\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

(λόγω αξονικής συμμετρίας)

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\frac{\partial r}{\partial x}$$

$$u_{xx} = u_{rr}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + u_r \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}$$

Αφού $r^2 = x^2 + y^2$,
Τότε παίρνοντας μερική παράγωγο ως προς $x$.

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(r^2) = 2x$$

$$2r \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$$

Επίσης,

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{r - x\cdot\frac{\partial r}{\partial x}}{r^2}$$

$$= \frac{r - \frac{x^2}{r}}{r^2}$$

$$= \frac{r^2 - x^2}{r^3} = \frac{y^2}{r^3}$$

$$u_{xx} = u_{rr}\frac{x^2}{r^2} + u_r\frac{y^2}{r^3}$$

Έτσι ακολουθώντας την ίδια λογική, θα πάρουμε ομοίως,

$$u_{yy} = u_{rr}\frac{y^2}{r^2} + u_r\frac{x^2}{r^3}$$

Οπότε,

$$\left.\begin{aligned} u_{xx} &= u_{rr}\frac{x^2}{r^2} + u_r\frac{y^2}{r^3} \\ u_{yy} &= u_{rr}\frac{y^2}{r^2} + u_r\frac{x^2}{r^3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \nabla^2 u = u_{rr}\cancel{\frac{x^2+y^2}{r^2}}^{\,1} + u_r\frac{y^2+x^2}{r^3}$$

$$\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r$$

Άρα,

$$u_{tt} = c^2\left(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r\right), \quad 0 \leqslant r < a$$

$$u = u(r,t) = R(r)\,T(t)$$

Τώρα θα δοκιμάσουμε αυτές τις λύσεις.

$$\Rightarrow T''R = c^2\left(R'' + \frac{1}{r}R'\right)T$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{T''}{c^2T}}_{\text{εξάρτηση του } t} = \underbrace{\frac{R'' + \frac{1}{r}R'}{R}}_{\text{εξάρτηση του } r} = \text{σταθερά} = -\lambda^2$$

Οπότε έχω ότι οι εξισώσεις που παίρνω είναι:

$$\left\{\begin{aligned} &T'' + \lambda^2c^2T = 0 \\ &R'' + \frac{1}{r}R' + \lambda^2R = 0 \end{aligned}\right. \Rightarrow \boxed{rR'' + R' + \lambda^2 rR = 0}$$

Οι συνοριακές συνθήκες αφορούν το R οι αρχικές το T.
Οπότε,

$$u(a,t) = 0 = R(a)\,T(t) = 0 \Rightarrow \boxed{R(a) = 0}$$

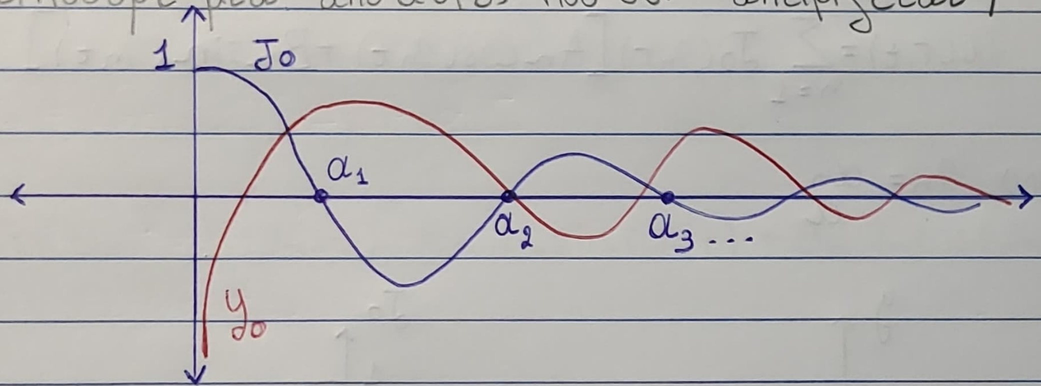
Εδώ τον ρόλο του sin θα τον πάρουν ειδικές συναρτήσεις.
($J_0$: το σκέφτομαι ως cos και το $Y_0$: ως sin) (απλοϊκά)

$1^{ου}$ είδους $\quad$ $2^{ου}$ είδους

$$\boxed{R(r) = c_1 J_0(\lambda r) + c_2 Y_0(\lambda r)}$$

Bessel
0 τάξεως

όπου στο 0 η εξίσωση είναι $(-\infty)$.
(Θα έχουν άπειρους μηδενισμούς και θα μπορέσουμε να κρατήσουμε μια από αυτές που δεν απειρίζεται)




$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{k!\,(k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$$

$$\int_0^{\alpha} J_0(\lambda_j x)\, J_0(\lambda_k x)\, x\, dx = 0 \quad \text{εάν} \quad j \neq k, \quad \lambda_j = \frac{\alpha_j}{\alpha}$$

$$\int_0^{\alpha} J_0^2(\lambda_j x)\, x\, dx = \frac{\alpha^2}{2} J_1^2(\alpha_j)$$

δίνουν τις ρίζες της $J_0$ συνάρτησης

$R(r) = c_1 J_0(\lambda r)$

$R(\alpha) = c_1 J_0(\lambda \alpha) = 0 \Rightarrow \alpha \lambda_j = \alpha_j$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_j = \frac{\alpha_j}{\alpha}}$$

$$u_j = J_0(\lambda_j a)\left(A_j \cos(c\lambda_j t) + B_j \sin(c\lambda_j t)\right)$$