

Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις - 3ο φυλλάδιο ασκήσεων

Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Άσκηση 1

Λύστε την εξίσωση

$$u_t = u_{xx}, \quad x \in (0, 1), \quad t > 0$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 1, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = x, \quad x \in (0, 1)$$

Άσκηση 2

Λύστε την εξίσωση

$$u_t = u_{xx}, \quad x \in (0, 1), \quad t > 0$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = x, \quad x \in (0, 1)$$

Άσκηση 3

Λύστε την εξίσωση

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad x \in (0, \pi), \quad y \in (0, \pi)$$

$$u_y(x, 0) = u_y(x, \pi) = 0, \quad x \in (0, \pi)$$

$$u(0, y) = 0, \quad u(\pi, y) = \cos^2 y, \quad y \in (0, \pi)$$

Άσκηση 4

Αποδείξτε την αρχή μεγίστου (όπως την εξίσωση θερμότητας) για την εξίσωση Laplace στις 2 διαστάσεις.

Άσκηση 5 - bonus

Λύστε την εξίσωση

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0, \quad x \in (0, \pi), \quad y \in (0, \pi), \quad z \in (0, \pi)$$

$$u(0, x, y) = u(\pi, x, y) = u(x, 0, z) = u(x, \pi, z) = u(x, y, 0) = 0$$

$$u(x, y, \pi) = xy$$