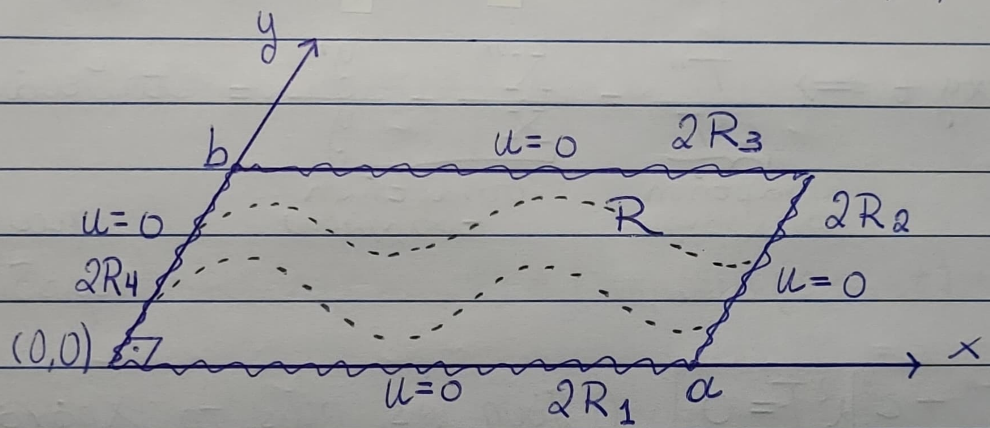
27/03/23

Κυματική εξίσωση: (στις 2-διαστάσεις)

Έστω πακτωμένη, ελαστική και λεπτή μεμβράνη.



Εξίσωση:

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy})$$

$t>0,\ x \in (0,\alpha),\ y \in (0,b)$

Σ.Σ:
- $\partial R_1: u(x,0,t)=0 \quad \forall y \in (0,\alpha)$
- $\partial R_2: u(\alpha,y,t)=0 \quad \forall y \in (0,b)$
- $\partial R_3: u(x,b,t)=0 \quad \forall x \in (0,\alpha)$
- $\partial R_4: u(0,y,t)=0 \quad \forall y \in (0,b)$

$\forall t>0$

Α.Σ

$u(x,y,0) = u_0(x,y),\ (x,y) \in R$

$u_t(x,y,0) = U_0(x,y),\ (x,y) \in R$

- το u εκφράζει την μετατόπιση ως προς τον τρίτο άξονα.
- σε μια διάσταση:

$u_{tt} = c^2 \nabla^2 u$ όπου $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$

(x,y,t) ελεύθερες μεταβλητές)

Την εξίσωση θα τη λύσουμε με τη μέθοδο χωριζομένων μεταβλητών:

$$u(x,y,t) = X(x)\,Y(y)\,T(t) \leftarrow \text{ψάχνω λύσεις αυτής της μορφής}$$

$$\Rightarrow u_{tt} = XYT'' \,,\; u_{xx} = X''YT \,,\; u_{yy} = XY''T$$

$$\Rightarrow XYT'' = c^2 (X''YT + XY''T)$$

Χ.β.γ.

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{XYT''}{c^2XYT}}_{\text{χρονική εξάρτηση}} = \underbrace{\frac{X''YT}{XYT} + \frac{XY''T}{XYT}}_{\text{χωρική εξάρτηση}}$$

$$\forall x,y,t \Rightarrow \underbrace{\frac{T''}{c^2T}}_{\text{συνάρτηση του χρόνου}} = \underbrace{\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y}}_{\text{συνάρτηση του χώρου}} = \text{σταθερά} = -k^2 \,, (k>0)$$

↓ για να έχω περιοδικές λύσεις

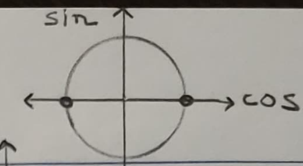
$$\boxed{T'' + c^2k^2T = 0}$$ (λύση ως προς το Χρόνο)

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{X''}{X}}_{\text{συνάρτηση του } x} = \underbrace{-\frac{Y''}{Y} - \overset{\text{σταθερά}}{k^2}}_{\text{συνάρτηση του } y} = \text{σταθερά} = -\mu^2$$

Σ.Σ: $X(0) = X(a) = 0 \leftarrow X'' + \mu^2 X = 0$

Σ.Σ: $Y(0) = Y(b) = 0 \leftarrow Y'' + r^2 Y = 0$, όπου $r^2 = k^2 - \mu^2 \Rightarrow \boxed{k^2 = \mu^2 + r^2}$, $k > \mu, r$

$2R_1$: $X(x)\,Y(0)\,T(t) = 0 \quad \forall x,t \Rightarrow Y(0) = 0$



$$\Rightarrow X(x) = A\cos(\mu x) + B\sin x(\mu x) \xRightarrow{X(0)=0} A = 0$$

$$\Rightarrow X_m(x) = B_m \sin(\mu_m x)\Big|_{x=a} = 0 \Rightarrow \mu_m = \frac{m\pi}{a}, \text{ για } m = 1,2,\dots$$

(διότι sin περιττή συνάρτηση)

$$X_m(x) = B_m \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \quad \text{για } m = 1,2,\dots$$

$$Y_n(y) = B'_n \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \quad n = 1,2,\dots$$

- Έχω το $u = XYT$ και
Ορίζω $u_{mn} = X_m Y_n T_{mn}$ $\quad \boxed{K_{mn}^2 = \mu_m^2 + \nu_m^2}$

$$\Rightarrow \boxed{T''_{mn} - c^2 K_{mn}^2 T_{mn} = 0}$$

$$\Rightarrow T_{mn} = A_{mn}\cos(cK_{mn}t) + B_{mn}\sin(cK_{mn}t)$$

Η γενική λύση θα έχει τη μορφή:

$$u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} u_{mn}(x,y,t)$$

$$\Rightarrow u_{mn}(x,y,t) = \left[A_{mn}\cos(cK_{mn}t) + B_{mn}\sin(cK_{mn}t)\right]\cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cdot \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$u(x,y,0) = \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cdot \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) = u_0(x,y)$$

Όπου $A_{mn}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)$ ο συντελεστής Fourier για τη σειρά με το $\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\left[\sum_{m=1}^{\infty} A_{mn}\sin\left(\frac{m\pi x}{\alpha}\right)\right]}_{:=C_n}\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)=u_0(x,y)$$

$$\Rightarrow C_n=\frac{2}{b}\int_0^b \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)u_0(x,y)\,dy$$

$$\Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn}\sin\left(\frac{m\pi x}{\alpha}\right)=\underbrace{\overbrace{\frac{2}{b}\int_0^b \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)u_0(x,y)\,dy}^{\text{συνάρτηση του } x}}_{:=g(x)}$$

$$\Rightarrow A_{mn}=\frac{2}{\alpha}\int_0^{\alpha} g(x)\sin\left(\frac{m\pi x}{\alpha}\right)dx$$

$$\boxed{A_{mn}=\frac{4}{\alpha b}\int_0^{\alpha}\int_0^{b} u_0(x,y)\cdot\sin\left(\frac{m\pi x}{\alpha}\right)\cdot\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)dy\,dx}$$

ανάλογα $T \propto \sin(\sqrt{cK_{mn}}\,t)$

$$U_t(x,y,0)=\sum_{m,n=1}^{\infty} cK_{mn}B_{mn}\sin\left(\frac{m\pi}{\alpha}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)=U_0(x,y)$$

$$\Rightarrow B_{mn}=\frac{4}{\alpha b cK_{mn}}\int_0^{\alpha}\int_0^{b} U_0(x,y)\sin\left(\frac{m\pi}{\alpha}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)dy\,dx$$

$$u=\sum_m\sum_n u_{mn} \quad \text{με} \quad u_{mn}=T_{mn}\sin\left(\frac{m\pi}{\alpha}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

Θέλω $u_{mn}=0 \;\; \forall t \Rightarrow \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)=0$

- $\frac{m\pi x}{a} = k\pi \Rightarrow x_{km} = \frac{k\cancel{\pi}a}{m\cancel{\pi}}$, $k=1,2,\dots$
- $\frac{n\pi y}{b} = \ell\pi \Rightarrow y_{\ell n} = \frac{\ell b}{n}$, $\ell=1,2,\dots$

Παράδειγμα:

Έστω $a=b=1$, $m=2$ και $n=1$

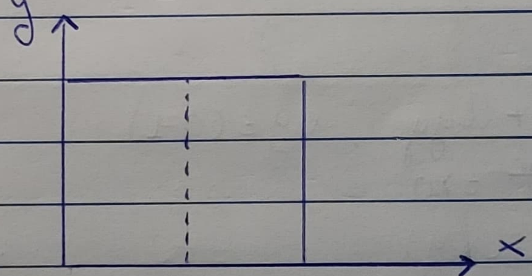
Τότε,

$x=\frac{k}{2}$ και $y=\ell$ για $k,\ell=1,2,\dots$

↳ καμία οριζόντια γραμμή δεν σχηματίζεται για $\ell=1$

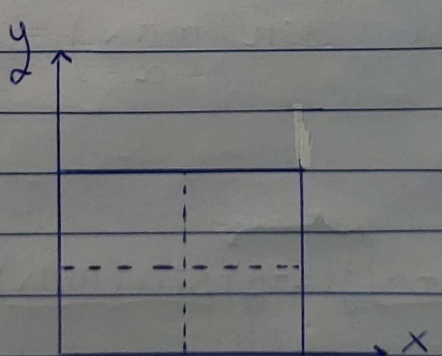
↳ $k=1$ έχω γραμμή

(u_{21})



Αν έχω m τότε $m-1$ ευθείες θα έχω μέσα.

(u_{22})



(u_{32})