Université de Lomé
Faculté des Sciences
Département de Physique

Année Universitaire 2023-2024

TD SUR LES RAPPELS MATHEMATIQUES

EXERCICE 1

On considère le champ vectoriel $\overrightarrow{A} = (3x^2 + 6y)\vec{e}_x - 14yz\vec{e}_y + 20xz^2\vec{e}_z$

Ce champ est-il un gradient ?

EXERCICE 2

On considère le champ vectoriel :$\overrightarrow{V} = (3x - 2y)\vec{e}_x + (3z - 2x)\vec{e}_y + 3y\vec{e}_z$

Ce champ est-il un gradient ? Si oui déterminer la fonction scalaire ϕ dont il dérive par la relation

$\overrightarrow{V} = \overrightarrow{grad}\,\phi$

EXERCICE 3

On considère le champ vectoriel : $\overrightarrow{V} = (2x - y)\vec{e}_x + (2y - x)\vec{e}_y + 4z\vec{e}_z$

Calculer la circulation de $\overrightarrow{V}$ entre les points (0, 0,0) et (1,1,1) le long des chemins suivants :

a) le segment de droite joignant ces deux points,

b) les segments de droite allant de (0,0,0) à (1,0,0) puis de (1,0,0) à (1,1,0) et de (1,1,0) jusqu'à (1,1,1).

Ce champ vectoriel est-il un gradient ?

EXERCICE 4

Considérons le champ de vecteur : $\overrightarrow{V} = (3x^2 + 2)\vec{e}_x + (3x^2 + 5y + z^2)\vec{e}_y + 2z^2\vec{e}_z$

a) Calcule le rotationnel de $\overrightarrow{V}$

b) Calcule la divergence de $\overrightarrow{V}$

c) Calcule le laplacien de $\overrightarrow{V}$

d) Calcule la divergence du rotationnel de $\overrightarrow{V}$

e) Montre que $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{V}) = \overrightarrow{grad}\left(div\overrightarrow{V}\right) - \Delta\overrightarrow{V}$

EXERCICE 5

Montrer que les champs suivants dérivent d'un potentiel scalaire, et déterminer tous les potentiels scalaires dont ils dérivent

a) $F(x,y,z) = (2xy + z^3\,;\, x^2\,;\, 3xz^2)$

b) $G(x,y) = \left(\frac{-y}{(x-y)^2}\,;\, \frac{x}{(x-y)^2}\right)$

EXERCICE 6

Soit la fonction $f(x;y;z) = 3x^2y + 7e^{3y} - 9\cos(z)$

a) Calcule le laplacien de f

b) Montre que $\Delta f = div(\overrightarrow{grad}(f))$

EXERCICE 7

Soit le champ vectoriel : $\overrightarrow{F(M)} = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM}$ avec $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$

Calculer la circulation de $\overrightarrow{F(M)}$ le long de :

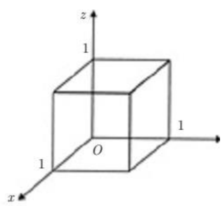
a) la spirale logarithmique d'équation polaire : $r = ae^{k\theta}$, entre $\theta 1$ et $\theta 2$

b) la cardioïde : $r = a(1 + \cos\theta)$,entre 0 et π

EXERCICE 8

On considère le champ vectoriel suivant : $\vec{V} = 3x^2y\vec{e}_x - (5y)\vec{e}_y + 2z^2\vec{e}_z$ et les surfaces du cube (voir figure)

Calculer le flux du champ de vecteur à travers les surfaces du cube délimitées par :



a)x=1 b) x= 0 c) y=1 d) y=0

e) z=1 f) z=0

Déterminer le vecteur normal à chacune des surfaces.

EXERCICE 9

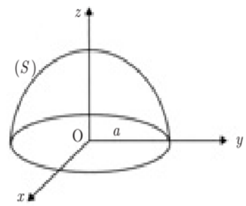


Figure 2

Soit le champ vectoriel $\vec{V} = \begin{pmatrix} x^2+2zt+y \\ -(3x^2+y) \\ -4zx \end{pmatrix}$

Calculer le flux du champ vectoriel à travers la surface totale de l'hémisphère *S* (figure 2) délimité par $z = \sqrt{a^2 - y^2 - x^2}$ et $z = 0$

(utiliser la formule du flux directement et celle du théorème de la divergence ou Théorème de Green-Ostrogradsky.)

EXERCICE 10

Soit la fonction scalaire $f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x}}$

Calculer la valeur moyenne de f puis détermine sa valeur efficace sur l'intervalle $[2, 3]$

EXERCICE 11

Calculez le gradient des fonctions suivantes :

a) $f(x) = x^2 + y^3 + z^4$

b) $f(x) = x^2y^3z^4$

c) $f(x) = e^x sinylnz$

EXERCICE 12

Calculer la divergence des fonctions vectorielles suivantes

a) $\vec{V} = x^2\vec{e}_x + 3xz^2\vec{e}_y - 2xz\vec{e}_z$

b) $\vec{V} = xy\vec{e}_x + 2yz\vec{e}_y + 3xz\vec{e}_z$

c) $\vec{V} = y^2\vec{e}_x + (2xy + z^2)\vec{e}_y + 2yz\vec{e}_z$

EXERCICE 13

Calculer le laplacien des fonctions suivantes :

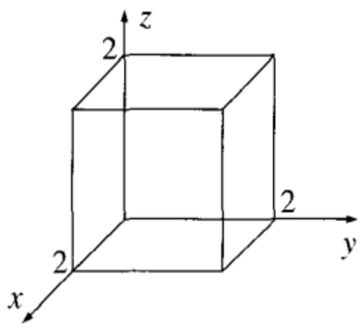
a) $f(x, y, z) = x^2 + 2xy + 3z + 4$

b) $f(x, y, z) = sinx\ siny\ sinz$

c) $f(x, y, z) = e^{-5x}\sin(4y)\cos(3z)$

EXERCICE 14

On considère le cube de la Fig. 1. Déterminez le flux ϕ du champ de vecteur $\vec{V} = 2xz\vec{e}_x + (x+2)\vec{e}_y + y(z^2-3)\vec{e}_z$ au travers de la surface du cube. (On orientera la surface vers l'*extérieur* du cube).

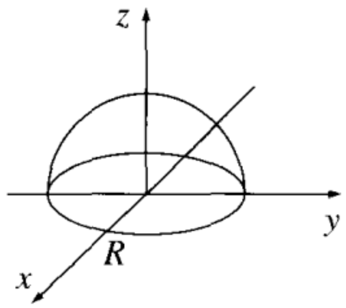


EXERCICE 15

a) Calculez la divergence de la fonction suivante exprimée en coordonnées sphériques :

$$\vec{V} = rcos\theta\vec{r} + rsin\theta\vec{\theta} + rsin\theta cos\varphi\vec{\varphi}$$

(b) Vérifiez le théorème de Green–Ostrogradski pour cette fonction, en utilisant pour volume l'hémisphère de la figure ci-contre.



EXERCICE 16

(a) Calculez la divergence de la fonction

$$\vec{V} = r(2 + sin^2\theta)\vec{e}_r + r\sin\theta\cos\theta\,\vec{e}_\theta + rz\vec{e}_z$$

en coordonnées cylindriques.

(b) Vérifiez le théorème de la divergence pour cette fonction, en utilisant le quart de cylindre de la figure ci-contre.

(c) Calculez le rotationnel de $\vec{V}$.