Algorithmische Mathematik II

Dozent
Professor Dr. Patrik Ferrari

Mitschrift
Maximilian Kessler

Inhaltsverzeichnis

Lecture 1: Grundbegriffe

Mo 12 Apr 2021 10:16

- Es gibt ein Helpdesk, auch explizit für Studentinnen
- die Vorlesung wird aufgenommen, und zwar ohne Videos der Teilnehmenden sowie des Dozenten, die Aufzeichnung werden anschließend in Sciebo hochgeladen.
- Es gibt ein Diskussionsforum für Fragen (auf eCampus).
- Ab heute Abend, 18 Uhr (Mo 12 Apr 2021 18:00), kann man sich auf eCampus für die Übungsgruppen registrieren und endet am Dienstag Abend um 24 Uhr (Di 12 Apr 2021 24:00), es wird versucht, die Studenten gleichmäßig zu verteilen.
- Falls ihr in der Warteliste landet und gewünscht ist, in der Gruppe abzugeben, schreibt eine Mail mit den gewünschten Abgabepartner, dann kann eine gemeinse Einteilung erfolgen.

- Es gibt auch das Modul `AlmaIIb`. Registriert euch noch nicht, dies ist für den 2. Teil der Vorlesung notwendig.
- Die Abgabe der Übungsblätter erfolgt einheitlich jeden Freitag um 12 Uhr.
- Gruppenabgaben sind erlaubt, bis zu einer Größe von maximal 4 StudentInnen.
- Das 1. Blatt ist freiwillig und gibt Bonuspunkte.
- Für die Klausurzulassung werden 50% der Punkte benötigt. Von den Programmieraufgaben müssen mindestens 4 von 6 zufriedenstellend bearbeitet werden.
- Programmieraufgaben gibt es ab dem 2. Übungsblatt auf jedem 2. Blatt. Die Bearbeitungszeit beträgt dann 2 Wochen.

Einleitung

In der Vorlesung werden wir sehen:

Teil 1: Diskrete Stochastik
- Zufallsvariablen
- Bedingte Wahrscheinlichkeiten
- Unabhängigkeit von Variablen
- Monte-Carlo Methoden

Teil 2: Numerische Analysis
- Iterative Verfahren
- Interpolation von Daten (durch Polynome, trigonometrische Funktionen, ...)
- Numerische Verfahren für die Integration

1 Diskrete Stochastik

1.1 Einleitung

Ziel. Beschreibung von Systemen, die einen Anteil an **Zufall** haben, d.h. nicht 100% deterministisch sind.

Beispiel.
- Spiele: Kartenspiele, Glücksspiele, ...
- Statistik: Umfragen, Versicherung
- Komplexe Systeme: Wettermodelle, Finanzmärkte

Was sind Quellen von Zufall?

- Zu komplexe Systeme. Dann sieht der Gesamteffekt zufällig aus.
- Fehlende Informationen (z.B. bei einem Kartenspiel)
- Chaotische Systeme (Wetter

- Intrinsisch unvorhersagbare Systeme (z.B. radioaktiver Zerfall)

Frage . (1) Wie modelliert man ein System mit Zufall?

(2) Wie simuliert man ein System mit Zufall? (anwendungstechnischer)

(3) Welche Voraussagen kann man machen?

Beispiel. Die **Brown'sche Bewegung**. Das System ist implizit ein Pollen mit vielen Wassermolekülen ($\sim 10^{23}$), die sich im Prinzip deterministisch bewegen.
$\Rightarrow$ Wir erhalten ein Gleichungssystem mit $(N+1) \cdot 6$ (3 Positionen, 3 Geschwindigkeit) Variablen. Dieses ist de facto unlösbar.

Was wollen wir hier eigentlich untersuchen? -> Die Bewegung des Pollens, jedoch nicht die der einzelnen Wassermoleküle.
In einer **Modellierung** ersetzt man die Stöße, die ,durch die Wassermoleküle entstehen durch **zufällige Stöße**.

Diskretes Modell: Die Zeit bewegt sich in $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$. Sei

$$Z(n) := (\text{Position des Pollens zur Zeit } n) \in \mathbb{Z}^3.$$

OBdA setzen wir $Z(0) = 0$.
Dynamik: $Z(n+1) = Z(n) + \xi_n$, wobei wir ξ_n aus dem Ergebnis eines Würfelwurfs bestimmen werden:

$$\xi_n = \begin{cases} (1,0,0) & \text{wenn Würfel} = 1 \\ (-1,0,0) & \text{wenn Würfel} = 2 \\ (0,1,0) & \text{wenn Würfel} = 3 \\ (0,-1,0) & \text{wenn Würfel} = 4 \\ (0,0,1) & \text{wenn Würfel} = 5 \\ (0,0,-1) & \text{wenn Würfel} = 6 \end{cases}.$$

Frage . Welche Fragen können wir mit solch einem System nun beantworten? Was pasiert, wenn $n \gg 1$.

a Typischerweise erhalten wir $|Z(n)| = O(\sqrt{n})$

b Wenn wir die Frequenz von $[Z(n)]_i$ betrachten, sehen wir typischerweise:
(Füge Graph mit grober Binomialverteilung ein)
Für $n \gg 1$ sieht diese Verteilung dann ungefähr wie die Gaussglocke aus.

Skalierung: Wir setzen nun

$$B(t) = \lim_{n \to \infty} \frac{Z(\lfloor nt \rfloor)}{\sqrt{n}}.$$

und dies ist dann die Brownsche Bewegung.

Frage .

- Ist $Z(n)$ in einer gegebenen Menge A?
  -> Im Allgemeinen kann man das nicht mit 'Ja' oder 'Nein' beantworten.
- Wenn man $Z(n)$ beobachtet, wie häufig wird $Z(n)$ in A sein?
  -> Diese Frage lässt sich mit einer Zahl $\in [0, 1]$ beantworten.

1.2 Ereignisse und Wahrscheinlichkeiten

Wir benötigen 3 Grundelemente:

(1) Die Menge Ω von möglichen **Ergebnissen**. die Elemente von Ω heißen auch **Elementarereignisse**.

(2) Die Menge $\mathcal{F}$ der **Ereignisse**. Ein Ereignis E ist eine Eigenschaft, die an einer Teilmenge von $G \subseteq \Omega$ assoziiert ist: $\omega \in G \Leftrightarrow$ Eigenschaft E ist erfüllt.

(3) Eine **Wahrscheinlichkeitsverteilung (auch W-maß)**:

$$\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1].$$

Bemerkung. Wir werden noch sehen, dass gewisse Dinge für unsere Begriffe erfüllt sein müssen, dazu aber später mehr.

Beispiel. Eine Urne hat 12 nummerierte Kugeln (von 1 bis 12).

(1) Das Zufallsexperiment besteht daraus, dass wir eine Kugel aus der Urne ziehen und die Zahl notieren, die wir sehen. D.h.

$$\Omega = \{1, \dots, 12\}.$$

Ein Elementarereignis ist nun z.B. gegeben durch $\omega = \{5\} \equiv 5$ (wir vereinfachen die Notation).

(2) Mögliche Ereignisse sind z.B:

$$\begin{aligned} A &= \text{"Die Zahl ist gerade} \\ B &= \text{"Die Zahl ist } \leqslant 5 \\ C &= \text{"Die Zahl ist 8} \end{aligned} \tag{1}$$

Die assoziierten Mengen sind dann

$$\begin{aligned} A &= \{2, 4, 6, 8, 10, 12\} \\ B &= \{1, 2, 3, 4, 5\} \\ C &= \{8\} \end{aligned} \tag{2}$$

(3) Für die Wahrscheinlichkeiten nehmen wir an, dass jede Kugel die

gleiche Chance hat, gezogen zu werden, d.h.

$$\forall G \in \mathcal{F} : \mathbb{P}(G) = \frac{|G|}{|\Omega|}.$$

Wir erhalten als

$$\mathbb{P}(A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \qquad \mathbb{P}(B) = \frac{5}{12} \qquad \mathbb{P}(C) = \frac{1}{12}.$$

Notation. $A \equiv \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A\} \equiv \{\omega \in A\} \equiv \{A \text{ tritt ein}\}$

Lecture 2: Wahrscheinlichkeitsräume

Mi 14 Apr 2021 10:17

Wir kennen nun die Grundbegriffe $\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}$ zur Beschreibung von Zufallsexperimenten, die wir uns nun genauer ansehen wollen:

Frage . Welche Struktur muss $\mathcal{F}$ besitzen.

Sein $A, B \in \mathcal{F}$, dann können wir das Ereignis $A \cap B$ betrachten, d.h. beide der Eigeschaften treten ein. Genauso sollte

$$A^c := \Omega \backslash A.$$

, das **Komplement von A**, bzw. das **Gegenereignis** von A ebenfalls in $\mathcal{F}$ sein. Aus den beiden vorherigen Eigenschaften folgt bereits, dass

$$A \cup = (A^c \cap B^c)^c.$$

ebenfalls in $\mathcal{F}$ sein wird. Eine Menge $\mathcal{F}$ mit solchen Eigenschaften heißt **Algebra**, d.h. wir fordern von $\mathcal{F}$, dass es sich um eine solche Algebra handelt.
Seien nun $A, B(A_i)_{i \in I}$ Ereignisse, wobei I endlich oder abzählbar sei. Dann notieren wir folgendermaßen

(a) $\underline{A \cup B :}$ $\omega \in A \cup B \Leftrightarrow \omega \in A \vee \omega \in B$, d.h. $A \cup B$ tritt ein, genau dann, wenn A eintritt oder B eintritt

(b) $\bigcup_{i \in I} A_i$: $\omega \in \bigcup_{i \in I} A_i$, wenn es ein $i \in I$ gibt, sodass $\omega \in A_i$

(c) $\underline{A \cap B}$: $\omega \in A \cap B \Leftrightarrow$ A und B treten ein.

(d) $\bigcap_{i \in I} A_i$: $\omega \in \bigcap_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \forall i \in I: \; A_i$ tritt ein.

(e) $A = \varnothing$ ist das Ereignis, das nie eintritt.
$A = \Omega$ ist das Ereignis, dass immer eintritt.

Definition 1.1. Sei $\mathcal{F}$ eine nicht leere Menge von Teilmengen von Ω mit den Eigenschaften:

(a) $\Omega \in \mathcal{F}$

(b) $\forall A \in \mathcal{F}: A^c \in \mathcal{F}$.

(c) Falls $(A_i)_{i\in I} \in \mathcal{F}$, dann auch $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Dann nennen wir $\mathcal{F}$ eine **σ-Algebra** und das Paar $\Omega, \mathcal{F})$ einen **Messraum**.

Lemma 1.2. Sei $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra, dann ist:

(a) $\varnothing \in \mathcal{F}$

(b) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$ und $A \cap B \in \mathcal{F}$.

(c) $(A_i)_{i\in I} \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Beweis. (a) $\varnothing = \Omega^c \in \mathcal{F}$ nach Eigenschaften (a) und (b) aus der Definition.

(b) $A \cup B = A \cup B \cup \varnothing \cup \varnothing \ldots \in \mathcal{F}$ nach Eigenschaften (b) und (c). $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c \in \mathcal{F}$

(c) $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c\right)^c \in \mathcal{F}$ nach (b) und (c).

□

Wir haben nun $(\Omega, \mathcal{F})$ näher untersucht, es fehlt nun noch $\mathbb{P}$.
Seien $A, B \in \mathcal{F}$ mit $A \cap B = \varnothing$, d.h. A und B können nicht gleichzeitig eintreten. Dann fordern wir

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) \quad \text{(endliche Additivität)}.$$

Dazu wollen wir, dass $\Omega \in \mathcal{F}$ immer eintritt, d.h. $\mathbb{P}(\Omega) = 1 \equiv 100\%$ (Normierung).

Definition 1.3. Sei $(\Omega, \mathcal{F})$ ein Messraum. Eine Abbildung $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}_+$ ist eine **Wahrscheinlichkeitsverteilung auf** $(\Omega, \mathcal{F})$, falls

(1) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

(2) $(A_i)_{i\in I} \in \mathcal{F}$ mit $A_i \cap A_j = \varnothing$ für $i \neq j$, dann ist:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) \quad (\sigma\text{-Additivität}).$$

Definition 1.4. Ein **Wahrscheinlichkeitsraum** $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ besteht aus einer Menge Ω, einer σ-Algebra $F \subseteq \mathbb{P}(\otimes)$ und einem Wahrschenilichkeitsmass $\mathbb{P}$ auf $(\Omega, \mathcal{F})$

Lemma 1.5. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Dann ist

(a) $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$

(b) $\forall A, B \in \mathcal{F}$ mit $A \cap B = \varnothing$ ist

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

(c) $\forall A, B \in \mathcal{F}$ mit $A \subseteq B$ ist

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \backslash A) \\ \mathbb{P}(A^c) &= 1 - \mathbb{P}(A) \\ \mathbb{P}(A) &\leqslant \mathbb{P}(B) \leqslant 1 \end{aligned} \tag{3}$$

(d) $\forall A, B \in \mathcal{F}$ ist

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \\ &\leqslant \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) \end{aligned} \tag{4}$$

(e) Wenn A_n

Beweis. (a) Wir wissen:

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\Omega \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \varnothing \ldots) = \mathbb{P}(\Omega) + \mathbb{P}(\varnothing) + \mathbb{P}(\varnothing) + \ldots.$$

subtrahieren von $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ liefert dann $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.

(b) Sei $A \cap B = \varnothing$, dann ist:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}(A \cup B \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \ldots) \\ &\overset{\sigma-\text{Additivität}}{=} \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(\varnothing) + \mathbb{P}(\varnothing) + \ldots \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) \end{aligned} \tag{5}$$

(c) Sei $A \subseteq B$. Dann ist $B = A \cup (B \backslash A)$ eine disjunkte Vereinigung, also erhalten wir

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \underbrace{\mathbb{P}(B \backslash A)}_{\geqslant 0} \geqslant \mathbb{P}(A).$$

Mit $B = \Omega$ ergibt sich $1 = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c)$

(d) Es ist

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}((A \cup B) \backslash A) \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \backslash (A \cap B)) \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \underbrace{\mathbb{P}(A \cap B)}_{\geqslant 0} \\ &\geqslant \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) \end{aligned} \tag{6}$$

(e) Übung

□

Korollar 1.6 (Einschluss-Ausschluss-Prinzip)**.** Seien $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$. Dann gilt

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}).$$

Beweis. Per Induktion, der Induktionsanfang lautet $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_1)$ und ist offensichtlich wahr.
Die Aussage gelte nun für ein $n \in \mathbb{N}$, dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) &= \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cup A_{n+1}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap A_{n+1}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} \underbrace{(A_i \cap A_{n+1})}_{=:\tilde{A}_i}\right) \qquad (7) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i < \ldots < i_k \leqslant n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) + \mathbb{P}(A_{n+1}) \\
&\quad - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} \mathbb{P}(\underbrace{\tilde{A}_{i_1} \cap \ldots \cap \tilde{A}_{i_k}}_{A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k} \cap A_{n+1}})
\end{aligned}$$

Andererseits ist aber auch:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n+1} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) && \Big\} \text{Terme mit } i_k \leqslant n \\
&+ \underbrace{\sum_{k=2}^{n+2} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_{k-1} \leqslant n} \mathbb{P}(A_i \cap \ldots \cap A_{i_{k-1}} \cap A_{n+1})}_{\overset{l:=k-1}{=} - \sum_{l=1}^{n} (-1)^{l-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_l \leqslant n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_l} \cap A_{n+1})} && \Big\} \text{Terme mit } i_k = n+1 \text{ und } k \geqslant 2 \\
&+ \mathbb{P}(A_{n+1}) && \Big\} \text{Terme mit } i_k = n+1 \text{ und } k = 1
\end{aligned}$$

und damit sehen wir, dass die beiden Ausdrücke übereinstimmen, also ist der Induktionsschritt erbracht. □

1.3 Diskrete Verteilungen

- Sei nun Ω endlich oder abzählbar.

- Falls wir $\mathcal{F}$ nicht explizit angeben, dann wird $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ gewählt, d.h.

$$\mathrm{Card}(\mathcal{P}(\Omega)) \equiv |\mathcal{P}(\Omega)| = 2^{|\Omega|}.$$

Beispiel (Münzwurf)**.** Es sei $\Omega = \{K, Z\}$, wobei K für Kopf stehe und Z für Zahl. Dann ist

$$\mathcal{F} = \{\{K\}, \{Z\}, \{Z, K\}, \varnothing\}.$$

Sei $p \in [0,1]$ die Wahrscheinlichkeit, dass man Kopf erhält. Da $\mathbb{P}$ für alle Element aus $\mathcal{F}$ definiert sein muss, erhalten wir

$$\mathbb{P}(\varnothing) = 0 \qquad \mathbb{P}(K) = p, \qquad \mathbb{P}(Z) = \mathbb{P}(K^c) = 1-p \qquad \mathbb{P}(\{Z, K\}) = \mathbb{P}(\Omega) = 1.$$

Was müssen wir fordern, sodass es ein wohldefiniertes $\mathbb{PP}$ auf $\mathcal{P}(\Omega)$ gibt?.

Beispiel. $\Omega = \{1, 2, \ldots, 10\}$ würde genügen, da dann $|\mathcal{P}(\Omega)| = 2^{|\Omega|} = 2^{10} = 1024$ endlich (diskret) ist.

Lecture 3: Gleichverteilung, empirische Verteilung

Mo 19 Apr 2021 10:23

Wir stellen fest, dass es im letzten Beispiel auch genügt hätte, $\mathbb{P}(\{k\})$ für $k = 1, \ldots, 10$ anzugeben, das motiviert Folgendes:

Satz 1.7. (a) Sei $p(\omega) \in [0,1], \omega \in \Omega$, sodass

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1.$$

Dann ist $\mathbb{P}$ definiert durch:

$$\mathbb{P} : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longmapsto & \sum_{\omega \in A} p(\omega) \end{array} \right.$$

eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $(\Omega, \mathcal{P}(\varnothing))$.

(b) Jede Wahrscheinlichkeitverteilung $\mathbb{P}$ auf $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ hat obige Form, wobei $p(\omega) = \mathbb{P}(\{\omega\})$.

Bemerkung. $p : \varnothing \to [0,1]$ heißt Massenfunktion der Wahrscheinlichkeitverteilung $\mathbb{P}$.

Warnung. Der Satz gilt nicht für Ω überabzählbar.

Bemerkung. Sei A abzählbar und $p(\omega) \geqslant 0$ für $\omega \in A$. Dann definiert

$$\sum_{\omega \in A} p(\omega) := \sum_{k \geqslant 1} p(\omega_k).$$

mit einer beliebigen Abzählung $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$ von A eine wohldefinierte Summe der $p(\omega)$. Es ist wichtig, dass hier $p(\omega) \geqslant 0$, sonst ist obiges nicht wohldefiniert.

Lemma 1.8. (a) Sei $p(\omega) \in [0,1]$ für alle ω. Dann ist

$$\sum_{\omega \in A} p(\omega) \in [0, \infty].$$

wohldefiniert. Setzen wir

$$\mathbb{P}(A) := \sum_{\omega \in A} p(w).$$

so gilt

$$P(A) = \sup_{\substack{F \subseteq A \\ |F| < \infty}} P(F).$$

und $P(A) \leqslant P(B)$ für $A \subseteq B$.

(b) Ist $A = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k$ eine disjunkte Vereinigung, so ist

$$P(A) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k).$$

Beweis. (a) Sei $\omega_1, \omega_2, \ldots$ eine beliebige Abzählung von A. Dann ist die Funktion

$$n \longmapsto \sum_{k=1}^{n} p(\omega_k).$$

monoton wachsend. Also ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} p(\omega_k) := \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} p(\omega_k) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^{n} p(\omega_k) \in [0, \infty].$$

wohldefiniert.
Wir wollen nun noch zeigen, dass

$$P(A) := \sum_{k=1}^{\infty} p(\omega_k) \overset{!}{=} \sup_{\substack{F \subseteq A \\ |F| < \infty}} P(F).$$

Die Ungleichung '$\leqslant$' folgt sofort, da wir mit $F_n := \{\omega_1, \ldots, \omega_k\}$ feststellen, dass

$$\sum_{k=1}^{n} p(\omega_k) = \sum_{\omega \in F_n} p(\omega) = P(F_n) \leqslant \sup_{\substack{F \subseteq A \\ |F| < \infty}} P(F).$$

Also ergibt sich im Limes genau wie gewünscht

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} p(\omega_k) \leqslant \lim_{n\to\infty} \sup_{\substack{F\subseteq A \\ |F|<\infty}} P(F) = \sup_{\substack{F\subseteq A \\ |F|<\infty}} P(F).$$

Für '$\geqslant$' stellen wir fest, dass es für jedes $F \subseteq A$ endlich ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $F \subseteq \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, und somit ist

$$P(F) = \sum_{\omega\in F} P(\omega) \leqslant \sum_{k=1}^{n} p(\omega_k) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} p(\omega_k) = P(A).$$

und somit ist das Supremum der $P(F)$ für $F \subseteq A, |F| < \infty$ durch $P(A)$ beschränkt.
Für die letzte Behauptung sehen wir mit $A \subseteq B$ leicht, dass

$$P(A) = \sup_{\substack{F\subseteq A \\ |F|<\infty}} P(F) \leqslant \sup_{F\subseteq B|F|<\infty} = P(B).$$

b (σ-Additivität) Wir unterscheiden zwei Fälle:

1) Falls $|A| < \infty$, so ist $A = \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k$ für ein n, und somit ist

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{l=1}^{|A|} p(\omega_l) = \sum_{l=1}^{|A|} \sum_{k=1}^{n} p(\omega_l)\mathbb{1}_{A_k}(\omega_l) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{|A|} p(\omega_l)\mathbb{1}_{A_k}(\omega_l) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) \end{aligned} \tag{8}$$

2) Sei nun $|A| = \infty$. Wir zeigen zunächst '$\leqslant$'. Für ein endliches $F \subseteq A$ ist

$$F = \bigcup_{k=1}^{\infty} (F \cap A_k).$$

eine disjunkte Vereinigung mit endlich vielen Termen, also ist

$$P(F) = \sum_{k=1}^{\infty} P(F \cap A_k) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k).$$

und somit liefert das Supremum über beide Seiten, dass

$$P(A) = \sup_{\substack{F\subseteq A \\ |F|<\infty}} P(F) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k).$$

Wir zeigen nun '$\geqslant$'.

Idee. Wir können $P(A_k) = \sup_{\substack{F_k\subseteq A_k \\ |F_k|]\infty}} P(F_k)$ schreiben und 'optimieren' nun jedes einzelne F_k.

Seien also $F_k \subseteq A_k$ jeweils endlich. Dann ist $F_k \cap F_l \subseteq A_k \cap A_l = \varnothing$, also sind auch die F_k paarweise disjunkt, und wir lernen

$$\sum_{k=1}^{n} P(A_k) = \sum_{k=1}^{n} \sup_{\substack{F_k \subseteq A_k \\ |F_k| < \infty}} P(F_k) = \sup_{\substack{F_1 \subseteq A_1 \\ abs F_1 < \infty}} \dots \sup_{\substack{F_k \subseteq A_k \\ |F_k| < \infty}} \sum_{k=1}^{n} P(F_k) \tag{9}$$

Also ist

$$\sum_{k=1}^{n} P(F_k) = P\left(\bigcup_{k=1}^{n} F_k\right) \leqslant P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right) \leqslant P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \overset{\text{def}}{=} P(A).$$

setzen wir dies nun in die rechte Seite von (1) ein, so ergibt sich

$$\sum_{k=1}^{n} P(A_k) \leqslant P(A) \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) \leqslant P(A).$$

□

Beweis von Satz 1.7. (a) Es gilt

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = P(\Omega) = 1.$$

nach Voraussetzung. Die σ-Additivität folgt nun aus Lemma 1.8. Deswegen ist $P(A)$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung.

(b) Da P σ-additiv ist, ist $\forall A \subseteq \Omega$:

$$PA) = P\left(\bigcup_{\omega \in A} \{\omega\}\right) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\}).$$

und dies hat genau die angegebene Form mit $p(\omega) := P(\{\omega\})$

□

1.4 Die Gleichverteilung

Sei Ω endlich ($\neq \varnothing$) und betrachte σ-Algebra $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.
Die **Gleichverteilung** ist die Wahrscheinlichkeitverteilung, die ein unifromes "Gewicht"(Massenfunktion) auf die Elementarereignisse verteilt:

$$\forall \omega \in \Omega : p(w) = \mathbb{P}\left(\{\omega\}\right) = \frac{1}{|\Omega|}.$$

Aus Satz 7 folgt dann bereits, dass $\forall A \subseteq \Omega$:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Beispiel. (a) Betrachte n Würfe eines fairen Würfels. In diesem Fall ist $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^n = \{\omega = (\omega_1,\dots,\omega_n) \mid \omega_k \in \{1,\dots,6\}\}$ und somit $|\Omega| = 6^n$ und die Gleichverteilung ist gegeben durch

$$\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{6^n}.$$

(b) (Zufällige Permutationen).

- Eine Permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ von $\{1,\dots,n\}$ ist eine Abbildung von $\{1,\dots,n\}$ nach $\{1,\dots,n\}$, die bijektiv ist. Oft schreiben wir

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

und meinen damit $\sigma(1) = 4$, $\sigma(2) = 3$, $\sigma(3) = 1$, $\sigma(4) = 2$. Manschmal schreiben wir dann auch

$$\sigma = (4,3,1,2) = (\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4).$$

- Sei $\Omega = \mathfrak{S}_n$ die Menge aller Permutation von $\{1,\dots,n\}$. Dann ergibt sich

$$|\mathfrak{S}_n| = n!.$$

Also ergibt sich für die Gleichverteilung eine Wahrschenlichkeit von

$$\mathbb{P}(\sigma) = \frac{1}{n!} \quad \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n.$$

Aufgabe 1. Sei N die Anzahl von Karten eines Kartenspiels, die gut gemischt sind, d.h. jede Reihenfolge ist gleich wahrscheinlich.

(1) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die k-te Karte auf der l. Stelle ist? D.h, was ist:

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \mathfrak{S}_n \mid \omega(k) = l\}).$$

Es ergibt sich

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \mathfrak{S}_n \mid \omega(k) = l\}) = \frac{|\{\omega \in \mathfrak{S}_n \mid \omega(k) = l\}|}{|\Omega|} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}.$$

(2) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Karte 'auf ihrer Stelle' ist, dh.

$$\mathbb{P}(\{\omega \mid \exists k \colon \omega(k) = k\}).$$

Definiere die Ereignisse $A_k := \{\omega(k) = k\}$. Diese sind nicht disjunkt für verschiedene k. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\exists k\colon \omega(k) = k) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} \underbrace{\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k})}_{=\frac{(n-k)!}{n!}} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{(n-k)!}{n!} \underbrace{\sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} 1}_{=\binom{n}{k}} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{(n-k)!}{n!} \cdot \frac{n!}{(n-k)!k!} \\
&= -\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \\
&= 1 - \frac{1}{e} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}
\end{aligned} \tag{10}$$

Für $n \to \infty$ geht das gegen $1 - \frac{1}{e} \in (0, 1)$.

1.5 Die empirische Verteilung

Diese wird aus den Beobachtungen definiert. Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \Omega$ n Beobachtungen. Setze

$$N(A) := |\{k \in \{1, \ldots, n\} \mid x_k \in A\}|.$$

Dazu setzen wir

$$\mathbb{P}(A) = \frac{N(A)}{n}.$$

, die **empirische Häufigkeit** von A. $\mathbb{P}$ ist die **empirische Verteilung**.

$$p(\omega) = \frac{N(\{\omega\})}{n}.$$

ist die **relative Häufigkeit** von $\omega \in \Omega$.

Beispiel. Die empirische Verteilung von n Zufallswürfeln eines Würfels wird gegeben durch $x_1, \ldots, x_n \in \{1, \ldots, 6\}$. Die Plots für $p_k := \frac{N(k)}{n}$ für verschieden n sehen wie folgt aus:

Lecture 4

Mi 21 Apr 2021 10:15

1.6 Zufallsvariablen

Wir werden Funktionen der Ergenisse betrachten:

Definition 1.9. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine **diskrete Zufallsvariable** ist eine messbare Abbildung

$$X : \Omega \longrightarrow \mathcal{S}.$$

mit $\mathcal{S}$ abzählbar (denke: 'diskret').
Messbar bedeutet hierbei, dass

$$\forall s \in \mathcal{S} \colon X^{-1}(s) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = s\} \in \mathcal{F}.$$

Notation. Wir schreiben auch kurz:

$$X^{-1}(s) = \{X(\omega) = s\} = \{X = s\}.$$

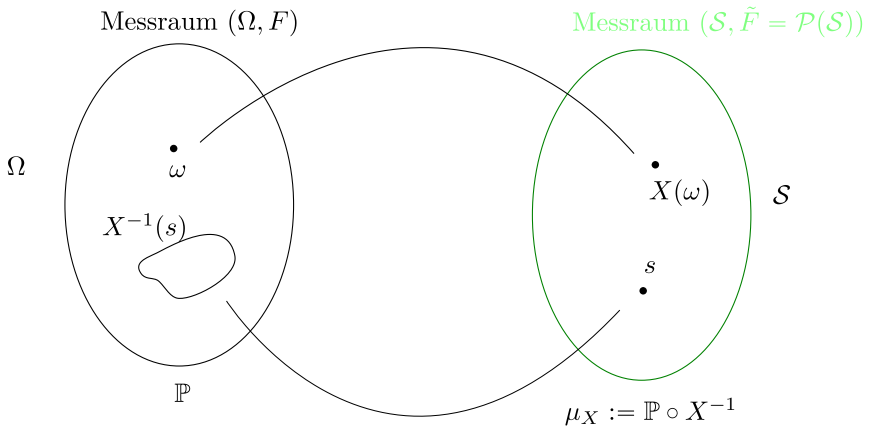

Abbildung 1: Diskrete Zufallsvariable

Definition 1.10. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. und $X : \Omega \to \mathcal{S}$ eine diskrete Zufallsvariable.
Die **Verteilung von X** ist die Wahrscheinlichkeitverteilung μ_X auf $\mathcal{S}, \mathcal{P}(\mathcal{S}) = \tilde{F}$, s.d. $\forall B \in \tilde{F} : \mu_X(B) := \mathbb{P}(X^{-1}(B))$.
μ_X hat eine **Massenfunktion**

$$p_X(s) := \mathbb{P}.$$

Beispiel (Werfen von n Münzen)**.** Betrachte folgende Situation:

- Sei $\Omega = \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n \mid \omega_i \in \{0,1\}$ für $1 \leqslant i \leqslant n\}$ wobei

$$\omega_k = \begin{cases} 0 & \text{falls } k\text{-ter Wurf ist Zahl} \\ 1 & \text{falls } k\text{-ter Wurf ist kopf} \end{cases}.$$

- $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ und $\mathbb{P}$ die Gleichverteilung

(1) Setze

$$X_k : \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathcal{S} = \{0,1\} \\ \omega & \longmapsto & \omega_k \end{array} \right.$$

für $k = 1, \dots, n$. Dies ist eine diskrete Zufallsvariable mit Verteilung μ_{X_k} mit

$$p_{X_k}(s) = \mathbb{P}(X_k = s) = \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2}.$$

Wir sehen also, dass X_k gleichverteilt ist.

(2) Definiere

$$Y : \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathcal{S} := \{0,1,\dots,n\} \\ \omega & \longmapsto & \omega_1 + \dots + \omega_n \end{array} \right.$$

d.h.

$$Y(\omega) = \#\{\text{geworfene Köpfe}\}.$$

Es hat nun μ_Y die Massenfunktion:

$$p_Y(k) = \frac{1}{2^n} |\{\omega \mid w_1 + \dots + \omega_n = k\}| = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}.$$

Diese Verteilung sieht wie folgt aus:
TODO: Binomialverteilung
Diese sind Sonderfälle der **Bernoullliverteilung** und der **Binomialverteilung**

1.6.1 Die Bernoulli-Verteilung

Definition 1.11. Sei $p \in [0,1]$ gegeben. Die Wahrscheinlichkeitverteilung auf $\{0,1\}$ mit Massenfunktion

$$p(k) = \begin{cases} p & k = 1 \\ 1-p & k = 0 \end{cases}.$$

heißt **Bernoulli-Verteilung mit Parameter** p.

Notation. Wir notieren auch $\mathrm{Ber}(p)$ für die Bernoulli-Verteilung mit Parameter p.

Beispiel. (a) Eine Münze, die mit Wahrscheinlichkeit p Kopf zeigt. Hier ist

$$\Omega = \{\text{Zahl}, \text{Kopf}\} \qquad \mathbb{P}(\text{Kopf}) = p = 1 - \mathbb{P}(\text{Zahl}).$$

Sei

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega = \text{Kopf} \\ 0 & \omega = \text{Zahl} \end{cases}.$$

Dann ist $\mathbb{P}(X = 1) = p$ und $X \sim \text{Ber}(p)$.

Notation. Wir schreiben $X \sim \text{Ber}(p)$, wenn X die Verteilung $\text{Ber}(p)$ hat.

(b) In einer Urne befinden sich n blaue Kugeln und m rote Kugeln. Wir ziehen eine Kugel aus der Urne (Annahme: Gleichverteilung). Dann ist

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_{n+m}) \mid \omega_i \in \{\text{blau}, \text{rot}\} \text{ mit } n \text{ mal blau}\}.$$

Setze $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ und wähle $\mathbb{P}$ als die Gleichverteilung. Betrachte

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \omega_i \text{ ist blau} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Diese hat also die Verteilung

$$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{\binom{m+n-1}{n-1}}{\binom{m+n}{n}} = \frac{(m+n-1)!}{(n-1)!m!} \frac{n!m!}{(m+n)!} = \frac{n}{m+n}.$$

Also ist $X \sim \text{Ber}\left(\frac{n}{n+m}\right)$

1.6.2 Die Binomial-Verteilung

Definition 1.12. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0,1]$ gegeben. Die Wahrscheinlichkeitverteilung auf $\{0, 1, \dots, n\}$ mit Massenfunktion

$$p(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

für $k = 0, \dots, n$ heißt **Binomialverteilung mit Parametern n und p.**

Notation. Wir notieren $\text{Bin}(n, p)$ für die Binomialverteilung mit Parametern n und p.

Beispiel (Ziehen mit Zurücklegen). • Seien m kugeln in einer Urne, davon $p \cdot m \in \mathbb{N}$ weiße Kugeln und $(1-p)m$ schwarze Kugeln.

- Wir ziehen eine Kugel, notieren uns die Farbe und legen sie wieder zurück.
- Wir mischen die übrigen Kugeln wideer gut
- Wir wiederholne die vorherigen Schritte, bis wir n Ziehungen durchgeführt haben.
- Dies modellieren wir durch

$$\Omega = \{0,1\}^n .$$

wobei $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega$ gegeben ist durch

$$\omega_i = \begin{cases} 1 & \text{falls Farbe der } i\text{-ten Kugeln weiß ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

- Sei nun $X(\omega) = \sum_{k=1}^n \omega_k = \# \{\text{weiße Kugeln}\}$

Dann behaputen wir, dass $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$. In der Tat:

$$\begin{aligned} \frac{|\omega \in \Omega \mid X(\omega) = l|}{|\Omega|} &= \frac{\binom{n}{l} \cdot (pm)^l \left((1-p)m\right)^{n-l}}{m^n} \\ &= \frac{\binom{n}{l} p^l (1-p)^{n-l} \cdot m^n}{m^n} = \binom{n}{l} p^l (1-p)^{n-l} \end{aligned} \tag{11}$$

Bemerkung. Wir haben hier den Begriff der **Unabhängigkeit** genutzt, den wir nun genauer kennenlernen wollen.

Definition 1.13 (Unabhängige Ereignisse)**.** Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Die Ereignisse $E_1, E_2, \ldots, E_n$ heißen **unabhängig**, falls

$$\mathbb{P}(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \ldots \cap E_{i_k}) = \prod_{l=1}^{k} \mathbb{P}(E_{i_l}).$$

für alle $2 \leqslant k \leqslant n$ und $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n$.

Beispiel.
- Betrachte zwei Würfelwürfe, d.h. $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^2$ und notiere $\omega = (\omega_1, \omega_2)$. Dann können wir

$$E_1 = \{\omega_1 = 3\} \qquad E_2 = \{\omega_2 \geqslant 4\} .$$

betrachten. Wir rechnen nach, dass

$$\mathbb{P}(\omega_1 = 3 \cap \omega_2 \geqslant 4) = \frac{3}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} = \mathbb{P}(\omega_1 = 3) \cdot \mathbb{P}(\omega_2 \geqslant 4).$$

also sind die beiden Ereignisse unabhängig voneinander. Das macht auch semantisch Sinn, weil wir durch das Ergebnis des einen Würfelwurfs keine Informationen über das Ergebnis des zweiten Würfelwurfs erhalten.

- Falls $E_1, E_2, \ldots, E_n$ unabhängige Ereignisse sind, mit $\mathbb{P}(E_i) = p$ für $1 \leqslant i \leqslant n$, dann ist

$$\mathbb{P}(\text{genau } k \text{ der Ereignisse treten ein}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Dies rechnen wir nach. Setze hierzu

$$A_{(i_1,\ldots,i_k)} = \{\omega \in \Omega \mid E_{i_1}, \ldots, E_{i_k} \text{ treten ein, die anderen nicht}\}$$

Dann ist

$$\tilde{A} = \bigsqcup_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} A_{i_1,\ldots,i_k}.$$

eine disjunkte Vereinigung, also erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tilde{A}) &= \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} \mathbb{P}(A_{(i_1,\ldots,i_k)}) \\ &\overset{\text{unabhängig}}{=} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} \prod_{j \in \{i_1,\ldots,i_k\}} \mathbb{P}(E_j) \cdot \prod_{l \notin \{i_1,\ldots,i_k\}} \mathbb{P}(E_l^c) \\ &= \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \end{aligned} \tag{12}$$

Bemerkung. Strenggenommen haben wir in der letzten Rechnung verwendet, dass mit $E_1, \ldots, E_n$ unabhängig auch $F_1, \ldots, F_n$ für $F_i = E_i$ oder $F_i = E_i^c$ unabhängig voneinander sind. Dies müssten wir noch einmal nachrechnen, dazu für den Fall $n = 2$ ist z.B:

$$\mathbb{P}(E_1 \cap E_2^c) + \mathbb{P}(E_1 \cap E_2) = \mathbb{P}(E_1 \cap (E_2 \cup E_2^c) = \mathbb{P}(E_1).$$

Also ergibt sich

$$\mathbb{P}(E_1 \cap E_2^c) = \mathbb{P}(E_1) - \mathbb{P}(E_1)\mathbb{P}(E_2) = \mathbb{P}(E_1)(1 - \mathbb{P}(E_2) = \mathbb{P}(E_1)\mathbb{P}(E_2^c).$$

wie zu zeigen war.

1.6.3 Die Poisson-Verteilung

Betrachte Ereignisse $E_1, \ldots, E_n$, die unabhängig sind und jeweils Wahrscheinlichkeit p haben, einzutreten.

Frage . Was passiert wenn $n \gg 1$.

Typischerweise haben wir dann $\mathcal{O}(pn)$ Erfolge in $E_1, \ldots, E_n$.

- Sei $p = p(n)$ sodass $\lim\limits_{n\to\infty} pn = \lambda \in (0, \infty)$
- Wähle Zeiteinheit $\delta = \frac{1}{n}$

Wir fragen uns nun: Was ist

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\exists k \text{ Erfolge } in A).$$

für ein Intervall $A \subseteq [0, 1]$

Satz 1.14. Sei $\lambda \in (0, \infty)$. Dann ist

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Bin}(n, \frac{\lambda}{n})(k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}.$$

für $k = 0, 1, 2, \ldots$

Beweis. Sei k fest. Dann ist

$$\operatorname{Bin}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)(k) = \frac{n!}{(n-k)^k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots(n-k+1)}{n^k}\frac{\lambda^k}{k!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}.$$

□

Definition 1.15. Sei $\lambda \in (0, \infty)$ fest. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\{0, 1, 2, \ldots\}$ mit Massenfunktion

$$p(k) = \frac{e^{-\lambda\lambda^k}}{k!}.$$

heißt **Poisson-Verteilung mit Parameteter λ.**

Notation. Wir schreiben auch $\operatorname{Poi}(\lambda)$ für die Poisson-Verteilung zum Parameter λ.

Lecture 5

Mo 26 Apr 2021 10:17

1.6.4 Die geometrische Verteilung

- Seien $E_1, E_2, \ldots$ unabhängige Ereignisse mit

1.7 Simulation von Gleichverteilung

Typischerweise benutzen wir folgende Situation:

Input Zahl(en), z.B. Redinerzeit

Output 'Zufällige Zahl' in $\{0, \ldots, n\}$

1.7.1 Lineare Kongruenzgeneratoren (LCG)

Startwert $x_0 \in \mathbb{N}$ gegeben.

Parameter $a, c, m \in \mathbb{N}$

Schritt Setze $x_{n+1} := (a \cdot x_n + c) \mod m$.

Dieses Vorgehen produziert eine scheinbar zufällige Folge.

Beispiel.

Beispiel (Eine schlechte Wahl)**.** Wenn wir $a = 4, c = 1, m = 31$ wählen sowie $x_0 = 3$, so erreichen wir Periode 9, und somit werden nicht alle Zahlen erreichen / generieren.

Lemma 1.16 (Knuth)**.** Die Periode eines LCG ist gleich m, genau dann, wenn

a) c und m haben keine gemeinsamen Primfaktoren

b) Jeder Primfaktor von m ist ein Teiler von $a - 1$

c) Falls $4 \mid m$, dann $4 \mid a - 1$.

Beispiel.

1.7.2 Zufallsvariablen aus $[0, 1)$

- Sei $(x_n)_{n \geqslant 1}$ eine Folge von (Pseudo)zufallszahlen aus $\{0, 1, \ldots, m - 1\}$. Dann ist
$$u_n := \left(\frac{x_n}{m}\right)_{n \geqslant 1}.$$
eine Folge von Pseudozahlen in $[0, 1)$. Gut ist aber nur der Fall, wenn $m \approx 10^N$, wobei $N =$ Rechnergenauigkeit, d.h. #Ziffern.

1.7.3 Zufallspermutationen

Wie erzeugt man eine gleichverteilte Permutation von $\{1, \dots, N\}$?

Algorithmus 1 : Zufallspermutationen

Eingabe : Möglichkeit, aus endlicher Menge gleichverteilt zufällige Zahlen zu ziehen
Ausgabe : Eine zufällige Permutation von $\{1, \dots, N\}$

Setze $\sigma_0 := \{1, \dots, N\}$
for $i = 1$ **to** $n - 1$ **do**
    wähle $k \in \{i, \dots, N\}$ gleichverteilt
    Setze $\sigma_k := \sigma_{k-1} \circ \tau_{i,k}$

Lemma 1.17. Der Algorithmus erzeugt eine zufällige gleichverteilte Permutation.

Beweis. Der Algorithmus benutzt eine Gleichverteilung auf

$$\Omega_n := \{1, \dots, N\} \times \{2, \dots, n\} \times \{n-1, n\}.$$

Für $\omega = (w_1, \dots, w_{N-1}) \in \Omega_N$ ist

$$\sigma(\omega) = \tau_{N-1,\omega_{N-1}} \circ \dots \circ \tau_{1,w} \circ \underbrace{(1, \dots, N)}_{\sigma_0}.$$

Es genügt also zu zeigen, dass $\sigma : \Omega_N \to \mathcal{S}_N$ eine Bijektion ist. Wir sehen:

(a) $|\Omega_N| = |\mathcal{S}_N| = N!$

(b) Sei $w \neq \tilde{\omega}$ und setze $k = \min\{j \mid \omega_j \neq \tilde{\omega}_j\}$. Dann ist $\sigma(\omega)_k \neq \sigma(\tilde{\omega})_k$ und somit ist die Funktion injektiv

Damit ist die Abbildung sogar bijektiv und wir sind fertig. □

1.7.4 Geometrische Verteilung

- Sei $X \sim \mathrm{Geo}(q)$, d.h.
  $$\mathbb{P}(X = k) = (1-q)q^k.$$
  Wie simuliert man nun X?
  (a) Erzeuge $n \sim U[0,1)$ als Gleichverteilte Zufallsvarable auf $[0,1)$.
  (b) Sei $T_k := \mathbb{P}(X < k)$. Falls $n \in [T_k, T_{k+1})$, dann setze $X = k$.

1.8 Erwartungswert und Varianz

- Sei X eine reellwertige diskrete Zufallsverteilung. Sei
  $$X : \Omega \to \mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}.$$
  eine diskrete Zufallsvariable, d.h. $\mathcal{S}$ abzählbar.

Definition 1.18. Seien $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{S}$ n Beobachtungen einer Zufallsvariable X. Der **empirische Mittelwert** ist durch

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

definiert.

- Wir wollen eine Sorte von Mittelwert definieren, der nur von X abhängig ist, und nicht von den Beobachtungen.
- Folgende Forderungen ergeben sich an solch einen Mittelwert:
  - Falls $X(\omega) = x$ für jedes ω, dann muss der Mittelwert von X gleich x sein.
  - Jeder Wert $x \in \mathcal{S}$ muss bezüglich der Massenfunktion $p_X(x)$ gewichtet sein.

Definition 1.19. Der **Erwartungswert** von X bzgl. $\mathbb{P}$ ist durch

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{s \in \mathcal{S}} s \cdot \mathbb{P}(X = s) = \sum_{s \in \mathcal{S}} s \cdot p_X(s).$$

definiert. Dies ist wohldefiniert, falls die Reiche absolut gegen einen Wert $< \infty$ konvergiert.

Bemerkung. Nicht alle Wahrscheinlichkeitsverteilungen besitzen einen endlichen Mittelwert, das zeigt folgendes

Beispiel. Sei X auf $\{1, 2, \ldots\}$ verteilt mit

$$\mathbb{P}_X(s) = \frac{6}{\pi^2 r}.$$

dann ergibt sich für den Erwartungswert:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{s \geqslant 1} s \cdot \frac{6}{\pi^2 s^2} = \frac{6}{\pi^2} \cdot \sum_{s \geqslant 1} \frac{1}{s} \to \infty.$$