Aufgabe 3) Da $\mathbb{Z}_+$ hier offenbar $= \{0, 1, \dots\}$ setze ~~IIU~~ $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$ und arbeite damit

(a) Sei $n \in \mathbb{N}, n \neq 0$. Dann

$$\mathbb{P}(X \cdot \underset{\in\{0,1\}}{Y} = n) = \mathbb{P}(X = n \wedge Y = 1)$$

nach Def. unabhängig

$$= \mathbb{P}(X = n) \cdot \mathbb{P}(Y = 1)$$

$$= \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} \cdot \alpha$$

(b) ~~Für~~ Für $n = 0$ ergibt sich

$$\mathbb{P}(X \cdot Y = 0) = \mathbb{P}(X = 0 \vee Y = 0)$$

$$= \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(Y = 0) - \mathbb{P}(X = Y = 0)$$

$= \mathbb{P}(X=0) \cdot \mathbb{P}(Y=0)$ weil unabh.

$$= \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^0}{0!} + (1 - \alpha) - (e^{-\lambda} \cdot (1 - \alpha))$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}(XY = n) = \begin{cases} e^{-\lambda} + (1-\alpha) - e^{-\lambda}(1-\alpha) & \text{für } n = 0 \\ \alpha \cdot \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} & \text{für } n \neq 0 \end{cases}$$

BRUNNEN

zu Aufgabe 3)

(b) $\mathbb{E}(W) = \mathbb{E}(XY) + \mathbb{E}(Y \cdot Z)$

$$= \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(XY = n) \cdot n + \sum_{n \geq 0} (YZ = n) \cdot n$$

$$= \sum_{n \geq 1} \alpha \cdot \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} \cdot n + \cancel{\Sigma} \; \mathbb{P}(Y = Z = 1)$$

unabh.

$$= \alpha \cdot \sum_{n \geq 1} \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} n + \mathbb{P}(Y = 1) \cdot \mathbb{P}(Z = 1)$$

$$= \alpha \cdot \mathbb{E}(X) + \alpha \beta$$

Vorlesung, $\mathbb{E}(\mathrm{Poi}(\lambda)) = \lambda$ bekannt

$$= \alpha (\lambda + \beta)$$

(c) $\mathrm{Var}(W) = \mathrm{Var}(XY + ZY)$

$$= \mathrm{Var}(XY) + \mathrm{Var}(ZY) + 2\,\mathrm{Cov}(XY, ZY)$$

Zunächst :

$$\mathrm{Var}(XY) = \mathbb{E}(X^2Y^2) - (\mathbb{E}(XY))^2$$

$$= \cancel{\mathbb{E}(X^2Y^2}$$

$$\sum_{n\geq 0} n\cdot \mathbb{P}(X^2Y^2=n) - (\alpha(\lambda+\beta))^2$$

$$= \sum_{n\geq 0} n\cdot \alpha\cdot \mathbb{P}(X^2=n) - (\alpha(\lambda+\beta))^2$$

$$= \alpha \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(X^2=n) - (\alpha(\lambda+\beta))^2$$

↓ Vorlesung, $\mathbb{E}(Poi(\lambda)^2) = \lambda^2+\lambda$

$$= \alpha(\lambda^2+\lambda) - (\alpha(\lambda+\beta))^2$$

$$= \alpha\lambda^2+\alpha\lambda - \alpha(\lambda^2+2\lambda\beta+\beta^2)$$

$$= \underline{\alpha\lambda - 2\alpha\lambda\beta - \alpha\beta^2}$$

Nun

$$\mathrm{Var}(ZY) = \mathbb{E}(\overbrace{Y^2Z^2}^{\in\{0,1\}}) - \mathbb{E}(\overbrace{YZ}^{\in\{0,1\}})^2$$

$$= \alpha\beta - (\alpha\beta)^2$$

Für Covarianz ergibt sich

$\mathrm{Cov}(XY, ZY)$

$= \mathbb{E}(XY^2Z) - \mathbb{E}(XY) \cdot \mathbb{E}(ZY)$

$= \sum_{n \geq 0} n \cdot \mathbb{P}(XY^2Z = n) - \sum_{n \geq 0} n\, \mathbb{P}(XY=n) \cdot \sum_{n \geq 0} n \cdot \mathbb{P}(ZY=n)$

(Y, X); $(Y; Z)$ unabhängig

$= \alpha \cdot \left(\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(XZ = n) \cdot n - \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(X=n) \cdot n \cdot \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(Z=n) \cdot n \right)$

$= \alpha \cdot \mathrm{Cov}(X, Z) = \alpha \cdot \rho$

Zusammen:

$$\mathrm{Var}(W) = \boxed{\alpha\lambda - 2\alpha\lambda\beta - \alpha\beta^2 + \alpha\beta - \alpha^2\beta^2 + 2\alpha\rho}$$

☑

(d) Angenommen, das ist so. Dann gilt das auch $\forall \ell \in \mathbb{N}$, da für $\ell \geq 2$

$$\mathbb{P}(\underbrace{\{X=k\} \cap \{Z = \ell\}}_{\emptyset}) = 0 = \mathbb{P}(X=k) \cdot \underbrace{\mathbb{P}(Z=\ell)}_{0}$$

Also nach Definition X, Z unabhängig.

Dann nach Vorlesung auch $\mathrm{Cov}(X, Z) = 0$.

↯, da $\mathrm{Cov}(X, Z) = \rho \neq 0$ angenommen.