

Aufgabe 1)

a) $\{1, 2\} \cap \{1, 3\} = \{1\} \Rightarrow \{1\} \in \mathcal{F}$

~~$\{1, 2\} \cap \{1, 4\}$~~

$\{1, 2\} \setminus \{1\} = \{2\} \Rightarrow \{2\} \in \mathcal{F}$

$\{3, 4\} \cap \{1, 4\} = \{4\} \Rightarrow \{4\} \in \mathcal{F}$

$\{3, 4\} \setminus \{4\} = \{3\} \Rightarrow \{3\} \in \mathcal{F}$

$\{1, 2\} \cap \{3, 4\} = \emptyset \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{F}$

\Rightarrow Durch $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{F} = \bigcup_{x \in \mathcal{X}} \{x\} \Rightarrow \sigma(\mathcal{X}) = \mathcal{F} \quad \square$

b) ~~$\mathcal{F}_\sigma = \{ \sigma = \{ (i, \{1, 2\}) : i \geq 1 \}, u \in \mathcal{F} \}$~~

x_1 ist keine ZV, weil ~~$x_1^{-1}(1) = \{1\}$~~ $\nsubseteq \mathcal{F}$.

~~$x_1^{-1}(1) = \{1\}$~~

z.B. $x_1^{-1}(1) = \{ (1, j) : j = 1, 2, 3 \}$ ist,

aber diese $\notin \sigma(\{(i, \{1, 2\}) : i \geq 1\})$, weil

$\{1\}$ in keiner der Elemente der σ -Algebra \mathcal{F}

(im 2. Probestrich) liegt, weil dies auch

für die erzeugende Menge so ist.

x_2 ist eine ZV.

$x_2^{-1}(1) = \{ (1, 1) \}$

zu Aufgabe 1)

(b) Beh $\mathcal{F} = \{ u \subseteq \Omega \mid \forall i: (i, 1) \in u \Leftrightarrow (i, 2) \in u \}$

Bew: Für Elemente aus $((i, \{1, 2\}), i \geq 1)$ gilt das,
also für alle Elemente aus $\sigma(\dots)$ auch.

Die andere Inklusion erfolgt sofort aus

$$u \in \mathcal{F} \Rightarrow u = \bigcup_{i \geq 1} ((i, \{1, 2\})) \cup ((i, \{1, 2\}))^{comp} \in \mathcal{F}$$

\uparrow g.d.w. $(i, 1) \in u$ \uparrow g.d.w. $(i, 3) \in u$

\uparrow nach Det.

• π_1 ist ein $\geq V$, da

$$\pi_1^{-1}(u) = \{ (u, j) \mid j = 1, 2, 3 \} \in \mathcal{F}$$

weil $(u, 1), (u, 2) \in u$
also \Leftrightarrow

• π_2 ist keine $\geq V$, da

$$\pi_2^{-1}(u) = \{ (i, j) \mid j = u \}$$

und für $u = 2$ ist $(4, 2) \in \pi_2^{-1}(2)$
 $(4, 1) \notin \pi_2^{-1}(2)$

• π_3 ist keine $\geq V$, da

$$\pi_3^{-1}(u) = \{ (i, j) \mid \max(j, 2) \leq u \}$$

und $\max(1, 2) = 2 \leq u$

$\max(2, 2) = 2 \leq u$

$\Rightarrow (i, 2) \in \pi_3^{-1}(u) \Leftrightarrow (i, 1) \in \pi_3^{-1}(u)$
 $\Rightarrow \pi_3^{-1}(u) \in \mathcal{F}$