Algorithmische Mathematik II

Dozent
Professor Dr. Patrik Ferrari

Mitschrift
Maximilian Kessler

Version
5. Mai 2021 11:42

Zusammenfassung

Bei folgenden Vorlesungsnotizen handelt es sich um (inoffizielle) Mitschriften zur Vorlesung 'Algorithmische Mathematik II', die im Sommersemester 2021 an der Universität Bonn gehalten wird. Ich garantiere weder für Korrektheit noch Vollständigkeit dieser Notizen, und bin dankbar für jegliche Art von Korrektur, sowohl inhaltlich, als auch Tippfehler.

Bemerkungen, die nicht zum eigentlichen Vorlesungsinhalte gehören, wurden mit einem * gekennzeichnet. Sie werden nach eigenem Ermessen hinzugefügt, um weitere Details oder evtl. mündliche Anmerkungen beizufügen.

Weitere Informationen finden sich bei GitHub oder auf der Vorlesungshomepage

Inhaltsverzeichnis

Vorlesung 7: Bedingte Wahrscheinlichkeit

Mo 03 Mai 2021 10:17

1 Bedingte Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit

1.1 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Beispiel. Es werden statistische Daten über Kleinkinder gemessen: Wann sie krabbeln und wann sie laufen. Betrachten wir die Ereignisse

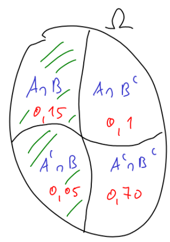
$$A = \{\text{Kind läuft vor dem 10. Monat}\} \qquad B = \{\text{Kind krabbelt vor dem 6. Monat}\}.$$

Aus den Daten geht hervor, dass $\mathbb{P}(A) = 25\%$ und $\mathbb{P}(B) = 20\%$.

> **Frage.** Sei ein Kind, das mit 6 Monaten krabbelt, gegeben. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass es mit 10 Monaten schon läuft?

Wir brauchen mehr Information als die obige, um die Frage beantworten zu können! Wir gehen also davon aus, dass wir sogar folgende Daten zur Verfügung haben:

$\cap$	A	A^c
B	0,15	0,05
B^c	0,10	0,70



Wir wissen, dass B eintritt, also befinden wir uns bereits im Zustandsraum $\Omega_B := \{w \in \Omega \mid w \in B\}$. Ziel ist es also, eine neue Massenfunktion $\mathbb{P}(\cdot|B)$ (auf Ω) zu definieren, die die Information '$\omega \in B$' berücksichtigt. Insbesondere muss also gelten:

$$\mathbb{P}(\omega|B) = 0 \qquad \forall\, \omega \in \Omega_B^c.$$

Zudem wollen wir, dass die Information '$\omega \in B$' dieselbe ist für alle $w \in \Omega_B$, d.h.

$$p(\omega|B) =\subseteq \cdot p(\omega) \qquad \forall\, \omega \in \Omega_B.$$

wobei $p(\omega)$ die Massenfunktion von $\mathbb{P}$ ist. Wegen Normierung ergibt sich also bereits

$$1 = \sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{P}(\omega|B) = o \cdot \sum_{\omega\in\Omega_B} p(\omega) \quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{1}{\mathbb{P}(B)}.$$

Also ergibt sich, dass

$$p(\omega \mid B) = \begin{cases} \frac{p(\omega)}{\mathbb{P}(B)} & \text{falls } \omega \in B \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Wir können das ganze so darstellen:

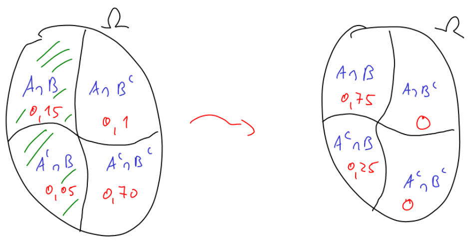


Abbildung 1: Änderung des Zustandsraums bei bedingten Wahrscheinlichkeiten

Wir erhalten also:
Antwort. Ein Kind, das mit 6 Monaten krabbelt, wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 75% mit 10 Monaten laufen können.

Besser Skizzen machen

Definition 1.1 (Bedingte Wahrscheinlichkeit)**.** Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Seien $A, B \in \mathcal{F}$ Ereigniss mit $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Dann definieren wir

$$\mathbb{P}(A \mid B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

und nennen dise die **bedingte Wahrscheinlichkeit von A gegeben B**.

Bemerkung. Die Abbildung

$$\mathbb{P}(\cdot \mid B) : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ A & \longmapsto & \mathbb{P}(A \mid B) \end{array} \right.$$

ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $(\Omega, \mathcal{F})$, die wir auch die **bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilung gegeben B** nennen.

Definition 1.2 (Bedingter Erwartungswert)**.** Sei $X : \Omega \to \mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}$ eine (diskrete) Zufallsvariable mit Verteilung $\mathbb{P}(\cdot \mid B)$. Dann hat X den Erwartungswert

$$\sum_{s \in \mathcal{S}} s \cdot \mathbb{P}(X = s|B) =: \mathbb{E}(X \mid B).$$

Dieser heißt **bedingter Erwartungswert von X gegeben B**.

Beispiel. Wir werfen eine faire Münze N mal, dabei beobachten wir n mal das Ergebnis 'Zahl'.

> **Frage.** Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei den ersten m Würfen immer 'Zahl' gefallen ist?

Ohne Weitere Informationen (dass insgesamt n mal Zahl gefallen

ist) würden wir hier $\mathbb{P} \equiv \frac{1}{2^m}$ erhalten.
Betrachte nun den Zustandsraum

$$\Omega = \{\omega = (x_1, \ldots, x_N) \mid x_i \in \{0,1\}, 1 \leqslant i \leqslant N\}.$$

wobei

$$x_k := \begin{cases} 1 & \text{falls } k\text{-ter Wurf ist 'Zahl'} \\ 0 & \text{falls } k\text{-ter Wurf ist 'Kopf'} \end{cases}.$$

und versehe ihn mit $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ sowie $\mathbb{P}$ als Gleichverteilung auf Ω.
Mit $X_k(\omega) := x_k$ interessieren wir uns also für

$$\mathbb{P}\left(X_1 = X_2 = \ldots = X_m = 1 \mid \sum_{k=1}^N X_k = n\right).$$

Nach Definition ist dies

$$\begin{aligned}
&= \frac{\mathbb{P}\left((X_1 = \ldots = X_m = 1) \cap \left(\sum_{k=m+1}^N X_k = n - m\right)\right)}{\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^N X_k = n\right)} \\
&= \frac{\frac{1}{2^N}\binom{N-m}{n-m}}{\frac{1}{2^N}\binom{N}{n}} \\
&= \frac{(N-m)!}{(n-m)!(N-n)!} \cdot \frac{(N-n)!n!}{N!} \\
&= \frac{(N-m)!n!}{N!(n-m)!}
\end{aligned}.$$

Notation. Zur Vereinfachung der Notation schreiben wir oft

$$\mathbb{P}(X_1 = X_2 = a) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid X_1(\omega) = a\} \cap \{\omega \in \Omega \mid X_2(\omega) = a\}).$$

sowie

$$\mathbb{P}(X_1 = a, X_2 = b) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid X_1(\omega) = a\} \cap \{\omega \in \Omega \mid X_2(\omega) = b\}).$$

Wir haben gerade aus einer Wahrscheinlichkeitsverteilung $\mathbb{P}$ die Verteilung $\mathbb{P}(\cdot \mid B)$ gewonnen. Das ganze geht auch umgekehrt:

Satz 1.3. Sei $\Omega = \bigcup_{k \in I} H_k$ eine disjunkte Zerlegung von Ω in (abzählbar viele) Ereignisse $H_k, k \in I$, wobei $\mathbb{P}(H_k) \neq 0$. Dann ist $\forall A \in \mathcal{F}$:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k \in I} \mathbb{P}(A \mid H_k) \cdot \mathbb{P}(H_k).$$

Beweis. $\forall A \in \mathcal{F}$ ist

$$A = A \cap \bigcup_{k \in I} H_k = \bigsqcup_{k \in I} (A \cap H_k).$$

eine disjunkte Vereinigung. Also folgt aus σ-Additivität, dass

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \sum_{k\in I} \mathbb{P}(A\cap H_k)\\ &= \sum_{\substack{k\in I\\ \mathbb{P}(H_k)\neq 0}} \mathbb{P}(A\cap H_k)\\ &= \sum_{\substack{k\in I\\ \mathbb{P}(H_k)\neq 0}} \mathbb{P}(A \mid H_k)\cdot \mathbb{P}(H_k)\end{aligned}$$

□

Beispiel. Eine Urne A enthält 2 rote und 3 blaue Kugeln. In Urne B liegen umgekehrt 3 rote und nur 2 blaue Kugeln. Wir gehen davon aus, dass die Urnen immer gut gemischt sind. Nun machen wir Folgendes:

1. Wir ziehen eine Kugel K_1 aus A und legen sie in B
2. Wir ziehen eine Kugel K_2 aus B und lg

Frage. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass K_2 rot ist?

Wir erhalten nun

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(K_2 \text{ ist rot}) &= \mathbb{P}(K_2 \text{ rot} \mid K_1 \text{ rot})\cdot \mathbb{P}(K_1 \text{ rot})\\ &\quad + \mathbb{P}(K_2 \text{ rot} \mid K_1 \text{ blau})\cdot \mathbb{P}(K_1 \text{ blau})\\ &= \frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5} + \frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5} = \frac{17}{30}\end{aligned}$$

Graphik einfügen

1.2 Baye'sche Regel

In der Baye'schen Statistik ist $\mathbb{P}(H_k)$ auch die **a-priori-Einschätzung** der Wahrscheinlichkeit einer Hypothese H_k, das könnte z.B. sein

$$H_k = \{\text{Die Unfallskosten pro Jahr liegen im Bereich } [100k, 100(k+1))\}.$$

Aus statistischen Daten weiß man, dass ein Ereignis $A \in \mathcal{F}$ mit einer Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(A) \neq 0$ eintritt, also z.B.

$$A =' \text{Es handelt sich um einen Auffahrunfall}'.$$

Dazu kennt man $\mathbb{P}(A \mid H_k)$. Falls A eintritt, werden die Versicherungskosten neu berechnet, auf der Basis von

$$\mathbb{P}(H_k \mid A).$$

Dies nennt man dann auch **a-posteriori-Verteilung** von H_k.

Korollar 1.4 (Baye'sche Regel)**.** Für $A \in \mathcal{F}$ mit $\mathbb{P}(A) \neq 0$ gilt

$$\mathbb{P}(H_k \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid H_k)\cdot \mathbb{P}(H_k)}{\sum\limits_{\substack{l\in I\\ \mathbb{P}(H_l)\neq 0}} \mathbb{P}(A \mid H_l)\cdot \mathbb{P}(H_l)}.$$

Beweis. Es ist

$$\mathbb{P}(H_k \mid A) = \frac{\mathbb{P}(H_k \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A \mid H_k)\cdot \mathbb{P}(H_k r}{\mathbb{P}(A)}.$$

Aus Satz 1.3 erhalten wir nun aber genau

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\substack{l \in I \\ \mathbb{P}(H_l) \neq 0}} \mathbb{P}(A \mid H_l) \cdot \mathbb{P}(H_l).$$

und wir sind fertig. □

Beispiel. Eine Krankheit K tritt selten auf, mit einer Häufigkeit von 10^{-4}, also bei 10 von 100.000 Menschen. Ein Test zur Erkennung der Krankheit ist positiv (+) bei 96% der Kranken und 0,1% der Gesunden.
Der Test liefert also 0,1% falsch positive und 4% falsch negative Ergebnisse.

> **Frage.** Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass jemand krank ist, sofern er positiv getesten wurde?

- Die a-priori-Wahrscheinlichkeit beträgt $\mathbb{P}(k) = 10^{-4}$ sowie $\mathbb{P}(K^c) = 1 - 10^{-4}$.
- Wir kennen die bedingten Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(+ \mid K) = 0,96$ sowie $\mathbb{P}(+ \mid K^c) = 0,001$.
- Als A-posteriori Wahrscheinlichkeit erhalten wir nun:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(K \mid +) &= \frac{\mathbb{P}(+ \mid K) \cdot \mathbb{P}(K)}{\mathbb{P}(+ \mid K) \cdot \mathbb{P}(K) + \mathbb{P}(+ \mid K^c) \cdot \mathbb{P}(K^c)} \\
&= \frac{0,96 \cdot 10^{-4}}{0,96 \cdot 10^{-4} + 0,001 \cdot (1 - 10^{-4})} \\
&\approx 9,6\%
\end{aligned}$$

Antwort. Die Wahrscheinlichkeit, dass man krank ist, wenn man positiv getestet ist, beträgt also (nur) 9,6%.

Bemerkung*. Ein Test hat üblicherweise eine Sensitivität und ein Spezifität. Die Sensitivität gibt an, welcher Anteil der tatsächlich infizierten positiv getestet werden. Die Spezifität gibt an, welcher Anteil der gesunden Menschen auch negativ gestetest wird.

Beispiel (Aktuelle Corona-Zahlen)**.** Bei den aktuellen Schnelltestes gibt es (in etwa) eine falsch-positiven Rate von 2%, also $\mathbb{P}(B \mid K^c) = 2\%$, und eine falsch-negativen Rate von 20%, also $\mathbb{P}(- \mid K) = 20\%$. Bei einer Inzidenz von 150-200 pro 100.000 Einwohner pro Woche, einer Dunkelziffer nah bei 2 ergibt sich eine Schätzung der aktuell infizierten von

$$\mathbb{P}(K) \in [0.005, 0.01].$$

(Zum Vergleich: Die aktuell gemeldeten positiven Fälle liegen bei 0,0035).

Nun können wir wieder berechnen:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(K \mid +) &= \frac{\mathbb{P}(+ \mid K) \cdot \mathbb{P}(K)}{\mathbb{P}(+ \mid K) \cdot \mathbb{P}(K) + \mathbb{P}(+ \mid K^c) \cdot \mathbb{P}(K^c)} \\ &= \frac{0,8 \cdot \mathbb{P}(K)}{0,8\mathbb{P}(K) + 0,02(1 - \mathbb{P}(K)}\end{aligned}$$

Wir erhalten

(a) Mit $\mathbb{P}(K) = 0,005$ eine Wahrscheinlichkeit von $\mathbb{P}(K \mid +) \approx 17\%$

(b) Mit $\mathbb{P}(K) = 0,01$ eine Wahrscheinlichkeit von $\mathbb{P}(K \mid +) \approx 29\%$

(c) Mit $\mathbb{P}(K) = 0,001$ eine Wahrscheinlichkeit von $\mathbb{P}(K \mid +) \approx 3,8\%$

> **Frage.** Lohnt es sich die Schnelltests in den Schulen zu machen? Also: Was ist $\mathbb{P}(K \mid -)$

Auch das lässt sich mit der gleichen Formel beantworten, mit $\mathbb{P}(- \mid K) = 0,2$ und $\mathbb{P}(- \mid K^c) = 0,98$ erhalten wir

(a) Für $\mathbb{P}(K) = 0,005$ eine Wahrscheinlichkeit von $\mathbb{P}(K \mid -) \approx 0,1\%$

(b) Für $\mathbb{P}(K) = 0,01$ eine Wahrscheinlichkeit von $\mathbb{P}(K \mid -) \approx 0,2\%$

(c) Für $\mathbb{P}(K) = 0,001$ eine Wahrscheinlichkeit von $\mathbb{P}(K \mid -) \approx 0,02\%$

Vorlesung 8

Mi 05 Mai 2021 10:11

1.3 Mehrstufige Modelle

Sei eine Folge von n Zufallsexperimenten in den Wahrscheinlichkeitsräumen $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$ gegeben. Wir definieren ein **n-stufiges Zufallsexperiment** durch

- $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_n = \{\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \mid \omega_k \in \Omega_k, 1 \leqslant k \leqslant n\}$
- $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.
- Definiere die Zufallsvariablen

  $$X_k(\omega) = \omega_k \qquad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

  Den Index k interpretieren wir hierbei als Zeit. $k \mapsto X_k$ ist eine Trajektion von $X = (X_1, \ldots, X_n)$?
- $\mathbb{P} =$?. Wir konstruieren $\mathbb{P}$ auf $(\Omega, \mathcal{F})$ mit

  (a) Der Anfangsverteilung $\mathbb{P}(X_1 = x_1) := p_1(x_1)$ für alle $x_1 \in \Omega_1$.

  (b) Den bedingten Verteilungen

  $$\mathbb{P}(X_k = x_k \mid X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_{k-1} = x_{k-1}) =: p_k(x_k \mid x_1, \ldots, x_{k-1}).$$

  für alle $x_l \in \Omega_l$, $1 \leqslant l \leqslant k-1$, sodass $\mathbb{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_{k-1} = x_{k-1}) \neq 0$.

i

> **Bemerkung*.** Man kann das Allgemeiner machen, indem wir $\mathcal{F}$ als die Produktsigmalalgebra der $\mathcal{F}_i$ wählen.

Satz 1.5. Sei $p_i(\cdot)$ die Massenfunktion einer Wahrscheinlichkeitsverteilung auf Ω_i und $p_k(\cdot \mid x_1, \ldots, x_{k-1})$ für alle $1 \leqslant k \leqslant n$ mit $x_1 \in \Omega_1, \ldots, x_{k-1} \in \Omega_{k-1}$ eine Massenfunktion auf Ω_k.
Dann existiert eine eindeutige Wahrscheinlichkeitsverteilung $\mathbb{P}$ auf $(\Omega, \mathcal{F})$, sodass
a $\mathbb{P}(X_1 = x_1) = p_1(x_1) \quad \forall x_1 \in \Omega_1$
b $\mathbb{P}(X_k = x_k) \mid X_1 = x_1, \ldots, X_{k-1} = x_{k-1}) = p_k(x_k \mid x_1, \ldots, x_{k-1})$
Die Wahrscheinlichkeitsverteilung $\mathbb{P}$ hat die Massenfunktion

$$p(x_1, \ldots, x_n) = p_1(x_1)p_2(x_2 \mid x_1) \cdot \ldots \cdot p_n(x_n \mid x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

Beweis. 1) Nimm zunächst an, dass solch ein Maß existiert, wir zeigen die letzte Aussage. Sei $\mathbb{P}$ sodass a und b erfüllt sind. Dann ist

$$\forall 1 \leqslant k \leqslant n \colon \mathbb{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_k = x_k) = p(x_1, \ldots, x_k).$$

- Für $k = 1$ gilt das (aus a).
- Falls es für $k - 1$ gilt, so haben wir die Fälle
- $p(x_1, \ldots, x_{k-1}) = 0$, dann ist $0 = 0$ wahr.
- Falls $p(x_1, \ldots, x_{k-1}) \neq 0$, so ist

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_k = x_k) \\ &= \mathbb{P}(X_k = x_k \mid X_1 = x_1, \ldots, X_{k-1} = x_{k-1}) \cdot \mathbb{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_{k-1} = x_{k-1}) \\ &= p_1(x_1) \cdot \ldots p_{k-1}(x_{k-1} \mid x_1, \ldots, x_{k-2}r \cdot p_k(x_k \mid x_1, \ldots, x_{k-1}) = p(x_1, \ldots, x_k) \end{aligned}.$$

Normierung: $\forall x \in \Omega, x = (x_1, \ldots, x_n)$ mit $x_k \in \Omega_k$ ist

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \Omega} p(x) &= \sum_{x_1 \in \Omega_1} \ldots \sum_{x_n \in \Omega_n} p(x_1, \ldots, x_n) \\ &= \sum_{x_1 \in \Omega_1} p(x_1) \sum_{x_2 \in \Omega_2} p(x_2 \mid x_1) \ldots \sum_{x_n \in \Omega_n} p(x_n \mid x_1, \ldots, x_{n-1}) = 1 \end{aligned}.$$

Für Eigenschaft b ist

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_k = x_k) &= \sum_{x_{k+1} \in \Omega_{k+1}} \ldots \sum_{x_n \in \Omega_n} p(x_1, \ldots, x_n) \\ &= p_1(x_1) \ldots p_{k-1}(x_{k-1} \mid x_1, \ldots, x_{k-2}) p_k(x_k \mid x_1, \ldots, x_{k-1}) \\ &= \mathbb{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_{k-1} = x_{k-1}) p_k(x_k \mid x_1, \ldots, x_{k-1}) \end{aligned}$$

Also erhalten wir

$$\mathbb{P}(X_k = x_k \mid X_1 = x_1, \ldots, X_{k-1} = x_{k-1}) = p_k(x_k \mid x_1, \ldots, x_{k-1}).$$

□

Anmerkung. Mir ist noch nicht klar, wo wir im Beweis des Satzes jetzt gezeigt haben wollen, dass solch ein Wahrscheinlichkeitsmaß existiert, das muss ich noch ausarbeiten.

Beweis nochmal sortieren

Bemerkung. Falls $p_k(x_k \mid x_1, \ldots, x_{k-1})$ nur eine Funktion von $x_{k-1}, \ldots, x_{k-m-1}$, dann sagen wir, dass unser Modell ein Gedächtnis von m Schritten hat.

1.3.1 Produktmodelle

Falls $p_k(x_k \mid x_1 = \ldots = x_{k-1}) = p_k(x_k)$, d.h. x_k hängt nicht von den Werten $x_1, \ldots, x_{k-1}$ ab. Dann erhalten wir aus Satz 1.5, dass

$$p(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} p_k(x_k).$$

Definition 1.6 (Produktmodell)**.** Die Wahrscheinlichkeitsverteilung $\mathbb{P}$ auf $\Omega = \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n$ mit Massenfunktion

$$p(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} p_k(x_k).$$

heißt **Produkt von $\mathbb{P}_1, \ldots, \mathbb{P}_n$**. ($\mathbb{P}_k$ hat Massenfunktion p_k).

Notation. Wir schreiben $\mathbb{P} = \mathbb{P} \otimes \mathbb{P}_2 \otimes \ldots \otimes \mathbb{P}_n$, wenn $\mathbb{P}$ das Produkt von $\mathbb{P}_1, \ldots, \mathbb{P}_n$ ist.

Beispiel. Seien n unabhängige 0-1-Experimente mit Erfolgswahrscheinlichkeit p gegeben. Also

$$\Omega_1 = \ldots = \Omega_n = \{0, 1\}.$$

und $p_k(1) = p = 1 - p_k(0)$ für $k = 1, \ldots, n$. dann ist $p_k(x) = (1-p)\left(\frac{p}{1-p}\right)^x$ für $x \in \{0, 1\}$. Die entstehende Verteilung

$$p(x_1, \ldots, x_n) = (1-p)^n \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{p}{1-p}\right)^{x_k}.$$

ist die **n-dimensionale Bernoulli-Verteilung mit Parameter p**
.

Satz 1.7. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Produktmodell. Dann ist für beliebige Ereignisse $A_k \subseteq \Omega_k$, $k = 1, \ldots, n$:

$$\mathbb{P}(A_1 \times \ldots \times A_n) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}_k(A_k).$$

und $\mathbb{P}(\tilde{A}_k) = \mathbb{P}_k(A_k)$, wobei

$$\tilde{A}_k := \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_{k-1} \times A_k \times \Omega_{k+1} \times \ldots \times \Omega_n.$$

Deswegen sind $\tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_n$ unabhängige Ereignisse.

Beweis. Es ist

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_1 \times \ldots \times A_n r &= \mathbb{P}((X_1, \ldots, X_n) \in A_1 \times \ldots \times A_n)) \\
&= \sum_{(x_1,\ldots,x_n) \in A_1 \times \ldots \times A_n} p(x_1, \ldots, x_n) \\
&= \sum_{x_1 \in A_1} \ldots \sum_{x_n \in A_n} p_1(x_1) \cdot \ldots p_n(x_n) \\
&= \prod_{k=1}^{n} \sum_{x_k \in A_k} p(a_k) \\
&=
\end{aligned}
$$

$\square$

Beweis fertig schreiben

Stichwortverzeichnis