Algorithmische Mathematik II

Maximilian Keßler

26. April 2021

Inhaltsverzeichnis

Lecture 1: Grundbegriffe

Mo 12 Apr 2021 10:16

- Es gibt ein Helpdesk, auch explizit für Studentinnen
- die Vorlesung wird aufgenommen, und zwar ohne Videos der Teilnehmenden sowie des Dozenten, die Aufzeichnung werden anschließend in Sciebo hochgeladen.
- Es gibt ein Diskussionsforum für Fragen (auf eCampus).
- Ab heute Abend, 18 Uhr (Mo 12 Apr 2021 18:00), kann man sich auf eCampus für die Übungsgruppen registrieren und endet am Dienstag Abend um 24 Uhr (Di 12 Apr 2021 24:00), es wird versucht, die Studenten gleichmäßig zu verteilen.
- Falls ihr in der Warteliste landet und gewünscht ist, in der Gruppe abzugeben, schreibt eine Mail mit den gewünschten Abgabepartner, dann kann eine gemeinse Einteilung erfolgen.

- Es gibt auch das Modul `AlmaIIb`. Registriert euch noch nicht, dies ist für den 2. Teil der Vorlesung notwendig.
- Die Abgabe der Übungsblätter erfolgt einheitlich jeden Freitag um 12 Uhr.
- Gruppenabgaben sind erlaubt, bis zu einer Größe von maximal 4 StudentInnen.
- Das 1. Blatt ist freiwillig und gibt Bonuspunkte.
- Für die Klausurzulassung werden 50% der Punkte benötigt. Von den Programmieraufgaben müssen mindestens 4 von 6 zufriedenstellend bearbeitet werden.
- Programmieraufgaben gibt es ab dem 2. Übungsblatt auf jedem 2. Blatt. Die Bearbeitungszeit beträgt dann 2 Wochen.

Einleitung

In der Vorlesung werden wir sehen:

Teil 1: Diskrete Stochastik
- Zufallsvariablen
- Bedingte Wahrscheinlichkeiten
- Unabhängigkeit von Variablen
- Monte-Carlo Methoden

Teil 2: Numerische Analysis
- Iterative Verfahren
- Interpolation von Daten (durch Polynome, trigonometrische Funktionen, ...)
- Numerische Verfahren für die Integration

1 Diskrete Stochastik

1.1 Einleitung

Ziel. Beschreibung von Systemen, die einen Anteil an **Zufall** haben, d.h. nicht 100% deterministisch sind.

Beispiel.
- Spiele: Kartenspiele, Glücksspiele, ...
- Statistik: Umfragen, Versicherung
- Komplexe Systeme: Wettermodelle, Finanzmärkte

◇

Was sind Quellen von Zufall?

- Zu komplexe Systeme. Dann sieht der Gesamteffekt zufällig aus.
- Fehlende Informationen (z.B. bei einem Kartenspiel)

- Chaotische Systeme (Wetter
- Intrinsisch unvorhersagbare Systeme (z.B. radioaktiver Zerfall)

Frage 1. (1) Wie modelliert man ein System mit Zufall?

(2) Wie simuliert man ein System mit Zufall? (anwendungstechnischer)

(3) Welche Voraussagen kann man machen?

Beispiel. Die **Brown'sche Bewegung**. Das System ist implizit ein Pollen mit vielen Wassermolekülen ($\sim 10^{23}$), die sich im Prinzip deterministisch bewegen.
$\Rightarrow$ Wir erhalten ein Gleichungssystem mit $(N+1) \cdot 6$ (3 Positionen, 3 Geschwindigkeit) Variablen. Dieses ist de facto unlösbar.

Was wollen wir hier eigentlich untersuchen? -> Die Bewegung des Pollens, jedoch nicht die der einzelnen Wassermoleküle.
In einer **Modellierung** ersetzt man die Stöße, die ‚durch die Wassermoleküle entstehen durch **zufällige Stöße**. $\diamond$

Diskretes Modell: Die Zeit bewegt sich in $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Sei

$$Z(n) := (\text{Position des Pollens zur Zeit } n) \in \mathbb{Z}^3.$$

OBdA setzen wir $Z(0) = 0$.
Dynamik: $Z(n+1) = Z(n) + \xi_n$, wobei wir ξ_n aus dem Ergebnis eines Würfelwurfs bestimmen werden:

$$\xi_n = \begin{cases} (1,0,0) & \text{wenn Würfel} = 1 \\ (-1,0,0) & \text{wenn Würfel} = 2 \\ (0,1,0) & \text{wenn Würfel} = 3 \\ (0,-1,0) & \text{wenn Würfel} = 4 \\ (0,0,1) & \text{wenn Würfel} = 5 \\ (0,0,-1) & \text{wenn Würfel} = 6 \end{cases}.$$

Frage 2. Welche Fragen können wir mit solch einem System nun beantworten? Was pasiert, wenn $n \gg 1$.

(a) Typischerweise erhalten wir $|Z(n)| = O(\sqrt{n})$

(b) Wenn wir die Frequenz von $[Z(n)]_i$ betrachten, sehen wir typischerweise: (Füge Graph mit grober Binomialverteilung ein)
Für $n \gg 1$ sieht diese Verteilung dann ungefähr wie die Gaussglocke aus.

Skalierung: Wir setzen nun

$$B(t) = \lim_{n \to \infty} \frac{Z(\lfloor nt \rfloor)}{\sqrt{n}}.$$

und dies ist dann die Brownsche Bewegung.

Frage 3.
- Ist $Z(n)$ in einer gegebenen Menge A?
  -> Im Allgemeinen kann man das nicht mit 'Ja' oder 'Nein' beantworten.
- Wenn man $Z(n)$ beobachtet, wie häufig wird $Z(n)$ in A sein?
  -> Diese Frage lässt sich mit einer Zahl $\in [0,1]$ beantworten.

1.2 Ereignisse und Wahrscheinlichkeiten

Wir benötigen 3 Grundelemente:

(1) Die Menge Ω von möglichen **Ergebnissen**. die Elemente von Ω heißen auch **Elementarereignisse**.

(2) Die Menge $\mathcal{F}$ der **Ereignisse**. Ein Ereignis E ist eine Eigenschaft, die an einer Teilmenge von $G \subseteq \Omega$ assoziiert ist: $\omega \in G \Leftrightarrow$ Eigenschaft E ist erfüllt.

(3) Eine **Wahrscheinlichkeitsverteilung (auch W-maß)**:

$$\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1].$$

Bemerkung. Wir werden noch sehen, dass gewisse Dinge für unsere Begriffe erfüllt sein müssen, dazu aber später mehr.

Beispiel. Eine Urne hat 12 nummerierte Kugeln (von 1 bis 12).

(1) Das Zufallsexperiment besteht daraus, dass wir eine Kugel aus der Urne ziehen und die Zahl notieren, die wir sehen. D.h.

$$\Omega = \{1, \dots, 12\}.$$

Ein Elementarereignis ist nun z.B. gegeben durch $\omega = \{5\} \equiv 5$ (wir vereinfachen die Notation).

(2) Mögliche Ereignisse sind z.B:

$$\begin{aligned} A &= \text{"Die Zahl ist gerade} \\ B &= \text{"Die Zahl ist } \leqslant 5 \\ C &= \text{"Die Zahl ist } 8 \end{aligned} \tag{1}$$

Die assoziierten Mengen sind dann

$$\begin{aligned} A &= \{2,4,6,8,10,12\} \\ B &= \{1,2,3,4,5\} \\ C &= \{8\} \end{aligned} \tag{2}$$

(3) Für die Wahrscheinlichkeiten nehmen wir an, dass jede Kugel die

gleiche Chance hat, gezogen zu werden, d.h.

$$\forall G \in \mathcal{F} : \mathbb{P}(G) = \frac{|G|}{|\Omega|}.$$

Wir erhalten als

$$\mathbb{P}(A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \qquad \mathbb{P}(B) = \frac{5}{12} \qquad \mathbb{P}(C) = \frac{1}{12}.$$

$\diamond$

Notation. $A \equiv \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A\} \equiv \{\omega \in A\} \equiv \{A \text{ tritt ein}\}$

Lecture 2: Wahrscheinlichkeitsräume

Mi 14 Apr 2021 10:17

Wir kennen nun die Grundbegriffe $\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}$ zur Beschreibung von Zufallsexperimenten, die wir uns nun genauer ansehen wollen:

Frage 4. Welche Struktur muss $\mathcal{F}$ besitzen.

Sein $A, B \in \mathcal{F}$, dann können wir das Ereignis $A \cap B$ betrachten, d.h. beide der Eigeschaften treten ein. Genauso sollte

$$A^c := \Omega \backslash A.$$

, das **Komplement von A**, bzw. das **Gegenereignis** von A ebenfalls in $\mathcal{F}$ sein. Aus den beiden vorherigen Eigenschaften folgt bereits, dass

$$A \cup = (A^c \cap B^c)^c.$$

ebenfalls in $\mathcal{F}$ sein wird. Eine Menge $\mathcal{F}$ mit solchen Eigenschaften heißt **Algebra**, d.h. wir fordern von $\mathcal{F}$, dass es sich um eine solche Algebra handelt.
Seien nun $A, B(A_i)_{i \in I}$ Ereignisse, wobei I endlich oder abzählbar sei. Dann notieren wir folgendermaßen

(a) $\underline{A \cup B :}$ $\omega \in A \cup B \Leftrightarrow \omega \in A \lor \omega \in B$, d.h. $A \cup B$ tritt ein, genau dann, wenn A eintritt oder B eintritt

(b) $\bigcup_{i \in I} A_i$: $\omega \in \bigcup_{i \in I} A_i$, wenn es ein $i \in I$ gibt, sodass $\omega \in A_i$

(c) $\underline{A \cap B}$: $\omega \in A \cap B \Leftrightarrow$ A und B treten ein.

(d) $\bigcap_{i \in I} A_i$: $\omega \in \bigcap_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \forall i \in I: \; A_i$ tritt ein.

(e) $A = \varnothing$ ist das Ereignis, das nie eintritt.
$A = \Omega$ ist das Ereignis, dass immer eintritt.

Definition 1.1. Sei $\mathcal{F}$ eine nicht leere Menge von Teilmengen von Ω mit den Eigenschaften:

(a) $\Omega \in \mathcal{F}$

(b) $\forall A \in \mathcal{F}\colon A^c \in \mathcal{F}$.

(c) Falls $(A_i)_{i\in I} \in \mathcal{F}$, dann auch $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Dann nennen wir $\mathcal{F}$ eine **σ-Algebra** und das Paar $\Omega, \mathcal{F})$ einen **Messraum**.

Lemma 1.2. Sei $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra, dann ist:

(a) $\varnothing \in \mathcal{F}$

(b) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$ und $A \cap B \in \mathcal{F}$.

(c) $(A_i)_{i\in I} \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Beweis. (a) $\varnothing = \Omega^c \in \mathcal{F}$ nach Eigenschaften (a) und (b) aus der Definition.

(b) $A \cup B = A \cup B \cup \varnothing \cup \varnothing \ldots \in \mathcal{F}$ nach Eigenschaften (b) und (c). $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c \in \mathcal{F}$

(c) $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c\right)^c \in \mathcal{F}$ nach (b) und (c).

$\square$

Wir haben nun $(\Omega, \mathcal{F})$ näher untersucht, es fehlt nun noch $\mathbb{P}$.
Seien $A, B \in \mathcal{F}$ mit $A \cap B = \varnothing$, d.h. A und B können nicht gleichzeitig eintreten. Dann fordern wir

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) \quad \text{(endliche Additivität)}.$$

Dazu wollen wir, dass $\Omega \in \mathcal{F}$ immer eintritt, d.h. $\mathbb{P}(\Omega) = 1 \equiv 100\%$ (Normierung).

Definition 1.3. Sei $(\Omega, \mathcal{F})$ ein Messraum. Eine Abbildung $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}_+$ ist eine **Wahrscheinlichkeitsverteilung auf** $(\Omega, \mathcal{F})$, falls

(1) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

(2) $(A_i)_{i\in I} \in \mathcal{F}$ mit $A_i \cap A_j = \varnothing$ für $i \neq j$, dann ist:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) \quad (\sigma\text{-Additivität}).$$

Definition 1.4. Ein **Wahrscheinlichkeitsraum** $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ besteht aus einer Menge Ω, einer σ-Algebra $F \subseteq \mathbb{P}(\otimes)$ und einem Wahrschenilichkeitsmass $\mathbb{P}$ auf $(\Omega, \mathcal{F})$

Lemma 1.5. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Dann ist

(a) $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$

(b) $\forall A, B \in \mathcal{F}$ mit $A \cap B = \varnothing$ ist

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

(c) $\forall A, B \in \mathcal{F}$ mit $A \subseteq B$ ist

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \backslash A) \\ \mathbb{P}(A^c) &= 1 - \mathbb{P}(A) \\ \mathbb{P}(A) &\leqslant \mathbb{P}(B) \leqslant 1 \end{aligned} \tag{3}$$

(d) $\forall A, B \in \mathcal{F}$ ist

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \\ &\leqslant \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) \end{aligned} \tag{4}$$

(e) Wenn A_n

Beweis. (a) Wir wissen:

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\left(\Omega \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \varnothing \dots\right) = \mathbb{P}(\Omega) + \mathbb{P}(\varnothing) + \mathbb{P}(\varnothing) + \dots.$$

subtrahieren von $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ liefert dann $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.

(b) Sei $A \cap B = \varnothing$, dann ist:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}(A \cup B \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \dots) \\ &\overset{\sigma-\text{Additivität}}{=} \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(\varnothing) + \mathbb{P}(\varnothing) + \dots \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) \end{aligned} \tag{5}$$

(c) Sei $A \subseteq B$. Dann ist $B = A \cup (B \backslash A)$ eine disjunkte Vereinigung, also erhalten wir

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \underbrace{\mathbb{P}(B \backslash A)}_{\geqslant 0} \geqslant \mathbb{P}(A).$$

Mit $B = \Omega$ ergibt sich $1 = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c)$

(d) Es ist

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}((A \cup B) \backslash A) \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \backslash (A \cap B)) \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \underbrace{\mathbb{P}(A \cap B)}_{\geqslant 0} \\ &\geqslant \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) \end{aligned} \tag{6}$$

(e) Übung

□

Korollar 1.6 (Einschluss-Ausschluss-Prinzip)**.** Seien $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$. Dann gilt

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}).$$

Beweis. Per Induktion, der Induktionsanfang lautet $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_1)$ und ist offensichtlich wahr.
Die Aussage gelte nun für ein $n \in \mathbb{N}$, dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) &= \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cup A_{n+1}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap A_{n+1}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} \underbrace{(A_i \cap A_{n+1})}_{=:\tilde{A}_i}\right) \qquad (7) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i < \ldots < i_k \leqslant n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) + \mathbb{P}(A_{n+1}) \\
&\quad - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} \mathbb{P}(\underbrace{\tilde{A}_{i_1} \cap \ldots \cap \tilde{A}_{i_k}}_{A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k} \cap A_{n+1}})
\end{aligned}$$

Andererseits ist aber auch:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n+1} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) && \Big\}\text{Terme mit } i_k \leqslant n \\
&+ \underbrace{\sum_{k=2}^{n+2} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_{k-1} \leqslant n} \mathbb{P}(A_i \cap \ldots \cap A_{i_{k-1}} \cap A_{n+1})}_{\overset{l:=k-1}{=} - \sum_{l=1}^{n} (-1)^{l-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_l \leqslant n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_l} \cap A_{n+1})} && \Big\}\text{Terme mit } i_k = n+1 \text{ und } k \geqslant 2 \\
&+ \mathbb{P}(A_{n+1}) && \Big\}\text{Terme mit } i_k = n+1 \text{ und } k = 1
\end{aligned}$$

und damit sehen wir, dass die beiden Ausdrücke übereinstimmen, also ist der Induktionsschritt erbracht. □

1.3 Diskrete Verteilungen

- Sei nun Ω endlich oder abzählbar.

- Falls wir $\mathcal{F}$ nicht explizit angeben, dann wird $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ gewählt, d.h.

$$\operatorname{Card}(\mathcal{P}(\Omega)) \equiv |\mathcal{P}(\Omega)| = 2^{|\Omega|}.$$

Beispiel (Münzwurf)**.** Es sei $\Omega = \{K, Z\}$, wobei K für Kopf stehe und Z für Zahl. Dann ist

$$\mathcal{F} = \{\{K\}, \{Z\}, \{Z, K\}, \varnothing\}.$$

Sei $p \in [0,1]$ die Wahrscheinlichkeit, dass man Kopf erhält. Da $\mathbb{P}$ für alle Element aus $\mathcal{F}$ definiert sein muss, erhalten wir

$$\mathbb{P}(\varnothing) = 0 \qquad \mathbb{P}(K) = p, \qquad \mathbb{P}(Z) = \mathbb{P}(K^c) = 1-p \qquad \mathbb{P}(\{Z, K\}) = \mathbb{P}(\Omega) = 1.$$

$\diamond$

Was müssen wir fordern, sodass es ein wohldefiniertes $\mathbb{PP}$ auf $\mathcal{P}(\Omega)$ gibt?.

Beispiel. $\Omega = \{1, 2, \ldots, 10\}$ würde genügen, da dann $|\mathcal{P}(\Omega)| = 2^{|\Omega|} = 2^{10} = 1024$ endlich (diskret) ist. $\diamond$

Lecture 3: Gleichverteilung, empirische Verteilung

Mo 19 Apr 2021 10:23

Wir stellen fest, dass es im letzten Beispiel auch genügt hätte, $\mathbb{P}(\{k\})$ für $k = 1, \ldots, 10$ anzugeben, das motiviert Folgendes:

Satz 1.7. (a) Sei $p(\omega) \in [0,1], \omega \in \Omega$, sodass

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1.$$

Dann ist $\mathbb{P}$ definiert durch:

$$\mathbb{P} : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longmapsto & \sum_{\omega \in A} p(\omega) \end{array} \right.$$

eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $(\Omega, \mathcal{P}(\varnothing))$.

(b) Jede Wahrscheinlichkeitverteilung $\mathbb{P}$ auf $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ hat obige Form, wobei $p(\omega) = \mathbb{P}(\{\omega\})$.

Bemerkung. $p : \varnothing \to [0,1]$ heißt Massenfunktion der Wahrscheinlichkeitverteilung $\mathbb{P}$.

Warnung. Der Satz gilt nicht für Ω überabzählbar.

Bemerkung. Sei A abzählbar und $p(\omega) \geqslant 0$ für $\omega \in A$. Dann definiert

$$\sum_{\omega \in A} p(\omega) := \sum_{k \geqslant 1} p(\omega_k).$$

mit einer beliebigen Abzählung $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$ von A eine wohldefinierte Summe der $p(\omega)$. Es ist wichtig, dass hier $p(\omega) \geqslant 0$, sonst ist obiges nicht wohldefiniert.

Lemma 1.8. (a) Sei $p(\omega) \in [0,1]$ für alle ω. Dann ist

$$\sum_{\omega \in A} p(\omega) \in [0, \infty].$$

wohldefiniert. Setzen wir

$$\mathbb{P}(A) := \sum_{\omega \in A} p(w).$$

so gilt

$$P(A) = \sup_{\substack{F \subseteq A \\ |F| < \infty}} P(F).$$

und $P(A) \leqslant P(B)$ für $A \subseteq B$.

(b) Ist $A = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k$ eine disjunkte Vereinigung, so ist

$$P(A) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k).$$

Beweis. (a) Sei $\omega_1, \omega_2, \dots$ eine beliebige Abzählung von A. Dann ist die Funktion

$$n \longmapsto \sum_{k=1}^{n} p(\omega_k).$$

monoton wachsend. Also ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} p(\omega_k) := \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} p(\omega_k) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^{n} p(\omega_k) \in [0, \infty].$$

wohldefiniert.
Wir wollen nun noch zeigen, dass

$$P(A) := \sum_{k=1}^{\infty} p(\omega_k) \overset{!}{=} \sup_{\substack{F \subseteq A \\ |F| < \infty}} P(F).$$

Die Ungleichung '$\leqslant$' folgt sofort, da wir mit $F_n := \{\omega_1, \dots, \omega_k\}$ feststellen, dass

$$\sum_{k=1}^{n} p(\omega_k) = \sum_{\omega \in F_n} p(\omega) = P(F_n) \leqslant \sup_{\substack{F \subseteq A \\ |F| < \infty}} P(F).$$

Also ergibt sich im Limes genau wie gewünscht

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} p(\omega_k) \leqslant \lim_{n\to\infty} \sup_{\substack{F\subseteq A \\ |F|<\infty}} P(F) = \sup_{\substack{F\subseteq A \\ |F|<\infty}} P(F).$$

Für '$\geqslant$' stellen wir fest, dass es für jedes $F \subseteq A$ endlich ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $F \subseteq \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, und somit ist

$$P(F) = \sum_{\omega\in F} P(\omega) \leqslant \sum_{k=1}^{n} p(\omega_k) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} p(\omega_k) = P(A).$$

und somit ist das Supremum der $P(F)$ für $F \subseteq A, |F| < \infty$ durch $P(A)$ beschränkt.
Für die letzte Behauptung sehen wir mit $A \subseteq B$ leicht, dass

$$P(A) = \sup_{\substack{F\subseteq A \\ |F|<\infty}} P(F) \leqslant \sup_{F\subseteq B |F|<\infty} = P(B).$$

b (σ-Additivität) Wir unterscheiden zwei Fälle:

1) Falls $|A| < \infty$, so ist $A = \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k$ für ein n, und somit ist

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{l=1}^{|A|} p(\omega_l) = \sum_{l=1}^{|A|} \sum_{k=1}^{n} p(\omega_l) \mathbb{1}_{A_k}(\omega_l) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{|A|} p(\omega_l) \mathbb{1}_{A_k}(\omega_l) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) \end{aligned} \tag{8}$$

2) Sei nun $|A| = \infty$. Wir zeigen zunächst '$\leqslant$'. Für ein endliches $F \subseteq A$ ist

$$F = \bigcup_{k=1}^{\infty} (F \cap A_k).$$

eine disjunkte Vereinigung mit endlich vielen Termen, also ist

$$P(F) = \sum_{k=1}^{\infty} P(F \cap A_k) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k).$$

und somit liefert das Supremum über beide Seiten, dass

$$P(A) = \sup_{\substack{F\subseteq A \\ |F|<\infty}} P(F) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k).$$

Wir zeigen nun '$\geqslant$'.

Idee. Wir können $P(A_k) = \sup_{\substack{F_k\subseteq A_k \\ |F_k|]\infty}} P(F_k)$ schreiben und 'optimieren' nun jedes einzelne F_k.

Seien also $F_k \subseteq A_k$ jeweils endlich. Dann ist $F_k \cap F_l \subseteq A_k \cap A_l = \varnothing$, also sind auch die F_k paarweise disjunkt, und wir lernen

$$\sum_{k=1}^{n} P(A_k) = \sum_{k=1}^{n} \sup_{\substack{F_k \subseteq A_k \\ |F_k|<\infty}} P(F_k) = \sup_{\substack{F_1 \subseteq A_1 \\ abs F_1<\infty}} \dots \sup_{\substack{F_k \subseteq A_k \\ |F_k|<\infty}} \sum_{k=1}^{n} P(F_k) \tag{9}$$

Also ist

$$\sum_{k=1}^{n} P(F_k) = P\left(\bigcup_{k=1}^{n} F_k\right) \leqslant P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right) \leqslant P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \overset{\text{def}}{=} P(A).$$

setzen wir dies nun in die rechte Seite von (1) ein, so ergibt sich

$$\sum_{k=1}^{n} P(A_k) \leqslant P(A) \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) \leqslant P(A).$$

□

Beweis von Satz 1.7. (a) Es gilt

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = P(\Omega) = 1.$$

nach Voraussetzung. Die σ-Additivität folgt nun aus Lemma 1.8. Deswegen ist $P(A)$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung.

(b) Da P σ-additiv ist, ist $\forall A \subseteq \Omega$:

$$PA) = P\left(\bigcup_{\omega \in A} \{\omega\}\right) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\}).$$

und dies hat genau die angegebene Form mit $p(\omega) := P(\{\omega\})$

□

1.4 Die Gleichverteilung

Sei Ω endlich ($\neq \varnothing$) und betrachte σ-Algebra $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.
Die **Gleichverteilung** ist die Wahrscheinlichkeitverteilung, die ein unifromes "Gewicht"(Massenfunktion) auf die Elementarereignisse verteilt:

$$\forall \omega \in \Omega : p(w) = \mathbb{P}\left(\{\omega\}\right) = \frac{1}{|\Omega|}.$$

Aus Satz 7 folgt dann bereits, dass $\forall A \subseteq \Omega$:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Beispiel. (a) Betrachte n Würfe eines fairen Würfels. In diesem Fall ist $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^n = \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \mid \omega_k \in \{1, \dots, 6\}\}$ und somit $|\Omega| = 6^n$ und die Gleichverteilung ist gegeben durch

$$\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{6^n}.$$

(b) (Zufällige Permutationen).

- Eine Permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ von $\{1, \dots, n\}$ ist eine Abbildung von $\{1, \dots, n\}$ nach $\{1, \dots, n\}$, die bijektiv ist. Oft schreiben wir

  $$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

  und meinen damit $\sigma(1) = 4$, $\sigma(2) = 3$, $\sigma(3) = 1$, $\sigma(4) = 2$. Manschmal schreiben wir dann auch

  $$\sigma = (4, 3, 1, 2) = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4).$$

- Sei $\Omega = \mathfrak{S}_n$ die Menge aller Permutation von $\{1, \dots, n\}$. Dann ergibt sich

  $$|\mathfrak{S}_n| = n!.$$

  Also ergibt sich für die Gleichverteilung eine Wahrschenlichkeit von

  $$\mathbb{P}(\sigma) = \frac{1}{n!} \quad \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n.$$

◇

Aufgabe 1. Sei N die Anzahl von Karten eines Kartenspiels, die gut gemischt sind, d.h. jede Reihenfolge ist gleich wahrscheinlich.

(1) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die k-te Karte auf der l. Stelle ist? D.h, was ist:

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \mathfrak{S}_n \mid \omega(k) = l\}).$$

Es ergibt sich

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \mathfrak{S}_n \mid \omega(k) = l\}) = \frac{|\{\omega \in \mathfrak{S}_n \mid \omega(k) = l\}|}{|\Omega|} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}.$$

(2) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Karte 'auf ihrer Stelle' ist, dh.

$$\mathbb{P}(\{\omega \mid \exists k \colon \omega(k) = k\}).$$

Definiere die Ereignisse $A_k := \{\omega(k) = k\}$. Diese sind nicht disjunkt für verschiedene k. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\exists k\colon \omega(k) = k) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} \underbrace{\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k})}_{=\frac{(n-k)!}{n!}} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{(n-k)!}{n!} \underbrace{\sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} 1}_{=\binom{n}{k}} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{(n-k)!}{n!} \cdot \frac{n!}{(n-k)!k!} \\
&= -\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \\
&= 1 - \frac{1}{e} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}
\end{aligned} \tag{10}$$

Für $n \to \infty$ geht das gegen $1 - \frac{1}{e} \in (0,1)$.

1.5 Die empirische Verteilung

Diese wird aus den Beobachtungen definiert. Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \Omega$ n Beobachtungen. Setze

$$N(A) := |\{k \in \{1, \ldots, n\} \mid x_k \in A\}|.$$

Dazu setzen wir

$$\mathbb{P}(A) = \frac{N(A)}{n}.$$

, die **empirische Häufigkeit** von A. $\mathbb{P}$ ist die **empirische Verteilung**.

$$p(\omega) = \frac{N(\{\omega\})}{n}.$$

ist die **relative Häufigkeit** von $\omega \in \Omega$.

> **Beispiel.** Die empirische Verteilung von n Zufallswürfeln eines Würfels wird gegeben durch $x_1, \ldots, x_n \in \{1, \ldots, 6\}$. Die Plots für $p_k := \frac{N(k)}{n}$ für verschieden n sehen wie folgt aus: ◇

Lecture 4

Mi 21 Apr 2021 10:15

1.6 Zufallsvariablen

Wir werden Funktionen der Ergenisse betrachten:

Definition 1.9. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine **diskrete Zufallsvariable** ist eine messbare Abbildung

$$X : \Omega \longrightarrow \mathcal{S}.$$

mit $\mathcal{S}$ abzählbar (denke: 'diskret').
Messbar bedeutet hierbei, dass

$$\forall s \in \mathcal{S} \colon X^{-1}(s) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = s\} \in \mathcal{F}.$$

Notation. Wir schreiben auch kurz:

$$X^{-1}(s) = \{X(\omega) = s\} = \{X = s\}\,.$$

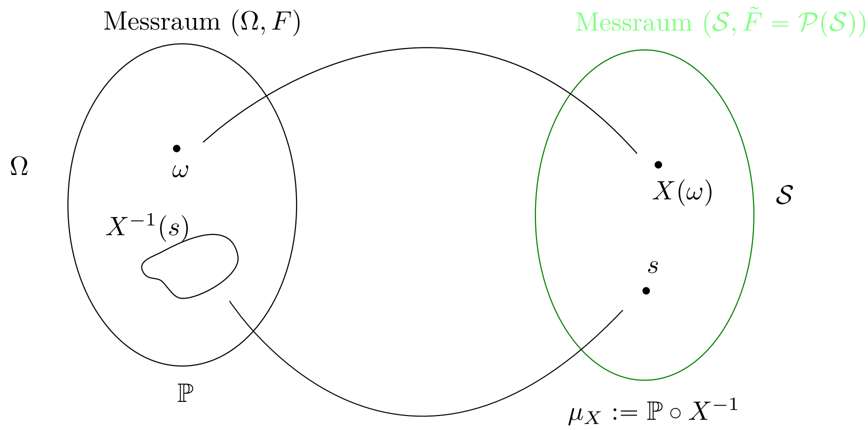

Abbildung 1: Diskrete Zufallsvariable

Definition 1.10. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. und $X : \Omega \to \mathcal{S}$ eine diskrete Zufallsvariable.
Die **Verteilung von X** ist die Wahrscheinlichkeitverteilung μ_X auf $\mathcal{S}, \mathcal{P}(\mathcal{S}) = \tilde{F}$, s.d. $\forall B \in \tilde{F} : \mu_X(B) := \mathbb{P}(X^{-1}(B))$.
μ_X hat eine **Massenfunktion**

$$p_X(s) := \mathbb{P}.$$

Beispiel (Werfen von n Münzen)**.** Betrachte folgende Situation:

- Sei $\Omega = \{\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n \mid \omega_i \in \{0,1\}$ für $1 \leqslant i \leqslant n\}$ wobei

$$\omega_k = \begin{cases} 0 & \text{falls } k\text{-ter Wurf ist Zahl} \\ 1 & \text{falls } k\text{-ter Wurf ist kopf} \end{cases}.$$

- $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ und $\mathbb{P}$ die Gleichverteilung

(1) Setze

$$X_k : \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathcal{S} = \{0,1\} \\ \omega & \longmapsto & \omega_k \end{array} \right.$$

für $k = 1, \ldots, n$. Dies ist eine diskrete Zufallsvariable mit Verteilung μ_{X_k} mit

$$p_{X_k}(s) = \mathbb{P}(X_k = s) = \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2}.$$

Wir sehen also, dass X_k gleichverteilt ist.

(2) Definiere

$$Y : \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathcal{S} := \{0, 1, \ldots, n\} \\ \omega & \longmapsto & \omega_1 + \ldots + \omega_n \end{array} \right.$$

d.h.

$$Y(\omega) = \#\left\{\text{geworfene Köpfe}\right\}.$$

Es hat nun μ_Y die Massenfunktion:

$$p_Y(k) = \frac{1}{2^n} |\{\omega \mid w_1 + \ldots + \omega_n = k\}| = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}.$$

Diese Verteilung sieht wie folgt aus:
TODO: Binomialverteilung
Diese sind Sonderfälle der **Bernoulliverteilung** und der **Binomialverteilung**

◇

1.6.1 Die Bernoulli-Verteilung

Definition 1.11. Sei $p \in [0,1]$ gegeben. Die Wahrscheinlichkeitverteilung auf $\{0,1\}$ mit Massenfunktion

$$p(k) = \begin{cases} p & k = 1 \\ 1 - p & k = 0 \end{cases}.$$

heißt **Bernoulli-Verteilung mit Parameter** p.

Notation. Wir notieren auch $\mathrm{Ber}(p)$ für die Bernoulli-Verteilung mit Parameter p.

Beispiel. (a) Eine Münze, die mit Wahrscheinlichkeit p Kopf zeigt. Hier ist

$$\Omega = \{\text{Zahl}, \text{Kopf}\} \qquad \mathbb{P}(\text{Kopf}) = p = 1 - \mathbb{P}(\text{Zahl}).$$

Sei

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega = \text{Kopf} \\ 0 & \omega = \text{Zahl} \end{cases}.$$

Dann ist $\mathbb{P}(X = 1) = p$ und $X \sim \mathrm{Ber}(p)$.

Notation. Wir schreiben $X \sim \mathrm{Ber}(p)$, wenn X die Verteilung $\mathrm{Ber}(p)$ hat.

(b) In einer Urne befinden sich n blaue Kugeln und m rote Kugeln. Wir ziehen eine Kugel aus der Urne (Annahme: Gleichverteilung). Dann ist

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_{n+m}) \mid \omega_i \in \{\text{blau}, \text{rot}\} \text{ mit } n \text{ mal blau}\}.$$

Setze $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ und wähle $\mathbb{P}$ als die Gleichverteilung. Betrachte

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \omega_i \text{ ist blau} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Diese hat also die Verteilung

$$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{\binom{m+n-1}{n-1}}{\binom{m+n}{n}} = \frac{(m+n-1)!}{(n-1)!m!} \frac{n!m!}{(m+n)!} = \frac{n}{m+n}.$$

Also ist $X \sim \mathrm{Ber}\left(\frac{n}{n+m}\right)$

◇

1.6.2 Die Binomial-Verteilung

Definition 1.12. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0,1]$ gegeben. Die Wahrscheinlichkeitverteilung auf $\{0, 1, \ldots, n\}$ mit Massenfunktion

$$p(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

für $k = 0, \ldots, n$ heißt **Binomialverteilung mit Parametern n und p**.

Notation. Wir notieren $\mathrm{Bin}(n,p)$ für die Binomialverteilung mit Parametern n und p.

Beispiel (Ziehen mit Zurücklegen).

- Seien m kugeln in einer Urne, davon $p \cdot m \in \mathbb{N}$ weiße Kugeln und $(1-p)m$ schwarze Kugeln.
- Wir ziehen eine Kugel, notieren uns die Farbe und legen sie wieder zurück.
- Wir mischen die übrigen Kugeln wideer gut
- Wir wiederholne die vorherigen Schritte, bis wir n Ziehungen durchgeführt haben.
- Dies modellieren wir durch
$$\Omega = \{0,1\}^n .$$
wobei $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega$ gegeben ist durch
$$\omega_i = \begin{cases} 1 & \text{falls Farbe der } i\text{-ten Kugeln weiß ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$
- Sei nun $X(\omega) = \sum_{k=1}^n \omega_k = \# \{\text{weiße Kugeln}\}$

Dann behaputen wir, dass $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$. In der Tat:

$$\begin{aligned} \frac{|\omega \in \Omega \mid X(\omega) = l|}{|\Omega|} &= \frac{\binom{n}{l} \cdot (pm)^l \left((1-p)m\right)^{n-l}}{m^n} \\ &= \frac{\binom{n}{l} p^l (1-p)^{n-l} \cdot m^n}{m^n} = \binom{n}{l} p^l (1-p)^{n-l} \end{aligned} \tag{11}$$

◇

Bemerkung. Wir haben hier den Begriff der **Unabhängigkeit** genutzt, den wir nun genauer kennenlernen wollen.

Definition 1.13 (Unabhängige Ereignisse). Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Die Ereignisse $E_1, E_2, \ldots, E_n$ heißen **unabhängig**, falls

$$\mathbb{P}(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \ldots \cap E_{i_k}) = \prod_{l=1}^{k} \mathbb{P}(E_{i_l}).$$

für alle $2 \leqslant k \leqslant n$ und $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n$.

Beispiel.

- Betrachte zwei Würfelwürfe, d.h. $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^2$ und notiere $\omega = (\omega_1, \omega_2)$. Dann können wir
$$E_1 = \{\omega_1 = 3\} \qquad E_2 = \{\omega_2 \geqslant 4\} .$$

betrachten. Wir rechnen nach, dass

$$\mathbb{P}(\omega_1 = 3 \cap \omega_2 \geqslant 4) = \frac{3}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} = \mathbb{P}(\omega_1 = 3) \cdot \mathbb{P}(\omega_2 \geqslant 4).$$

also sind die beiden Ereignisse unabhängig voneinander. Das macht auch semantisch Sinn, weil wir durch das Ergebnis des einen Würfelwurfs keine Informationen über das Ergebnis des zweiten Würfelwurfs erhalten.

- Falls $E_1, E_2, \ldots, E_n$ unabhängige Ereignisse sind, mit $\mathbb{P}(E_i) = p$ für $1 \leqslant i \leqslant n$, dann ist

$$\mathbb{P}(\text{genau } k \text{ der Ereignisse treten ein}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Dies rechnen wir nach. Setze hierzu

$$A_{(i_1,\ldots,i_k)} = \{\omega \in \Omega \mid E_{i_1}, \ldots, E_{i_k} \text{ treten ein, die anderen nicht}\}$$

Dann ist

$$\tilde{A} = \bigsqcup_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} A_{i_1,\ldots,i_k}.$$

eine disjunkte Vereinigung, also erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\tilde{A}) &= \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} \mathbb{P}(A_{(i_1,\ldots,i_k)}) \\
&\overset{\text{unabhängig}}{=} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} \prod_{j \in \{i_1,\ldots,i_k\}} \mathbb{P}(E_j) \cdot \prod_{l \notin \{i_1,\ldots,i_k\}} \mathbb{P}(E_l^c) \\
&= \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}
\end{aligned} \tag{12}$$

$\diamond$

Bemerkung. Strenggenommen haben wir in der letzten Rechnung verwendet, dass mit $E_1, \ldots, E_n$ unabhängig auch $F_1, \ldots, F_n$ für $F_i = E_i$ oder $F_i = E_i^c$ unabhängig voneinander sind. Dies müssten wir noch einmal nachrechnen, dazu für den Fall $n = 2$ ist z.B:

$$\mathbb{P}(E_1 \cap E_2^c) + \mathbb{P}(E_1 \cap E_2) = \mathbb{P}(E_1 \cap (E_2 \cup E_2^c) = \mathbb{P}(E_1).$$

Also ergibt sich

$$\mathbb{P}(E_1 \cap E_2^c) = \mathbb{P}(E_1) - \mathbb{P}(E_1)\mathbb{P}(E_2) = \mathbb{P}(E_1)(1 - \mathbb{P}(E_2) = \mathbb{P}(E_1)\mathbb{P}(E_2^c).$$

wie zu zeigen war.

1.6.3 Die Poisson-Verteilung

Betrachte Ereignisse $E_1, \ldots, E_n$, die unabhängig sind und jeweils Wahrscheinlichkeit p haben, einzutreten.

Frage 5. Was passiert wenn $n \gg 1$.

Typischerweise haben wir dann $\mathcal{O}(pn)$ Erfolge in $E_1, \ldots, E_n$.

- Sei $p = p(n)$ sodass $\lim\limits_{n\to\infty} pn = \lambda \in (0, \infty)$
- Wähle Zeiteinheit $\delta = \frac{1}{n}$

Wir fragen uns nun: Was ist

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\exists k \text{ Erfolge } in A).$$

für ein Intervall $A \subseteq [0, 1]$

Satz 1.14. Sei $\lambda \in (0, \infty)$. Dann ist

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Bin}(n, \frac{\lambda}{n})(k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}.$$

für $k = 0, 1, 2, \ldots$

Beweis. Sei k fest. Dann ist

$$\mathrm{Bin}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)(k) = \frac{n!}{(n-k)^k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots(n-k+1)}{n^k}\frac{\lambda^k}{k!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}.$$

□

Definition 1.15. Sei $\lambda \in (0, \infty)$ fest. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\{0, 1, 2, \ldots\}$ mit Massenfunktion

$$p(k) = \frac{e^{-\lambda\lambda^k}}{k!}.$$

heißt **Poisson-Verteilung mit Parameteter λ**.

Notation. Wir schreiben auch $\mathrm{Poi}(\lambda)$ für die Poisson-Verteilung zum Parameter λ.

Lecture 5

Mo 26 Apr 2021 10:17

1.6.4 Die geometrische Verteilung

- Seien $E_1, E_2, \ldots$ unabhängige Ereignisse mit

1.7 Simulation von Gleichverteilung

Typischerweise benutzen wir folgende Situation:

Input Zahl(en), z.B. Redinerzeit

Output 'Zufällige Zahl' in $\{0, \dots, n\}$

1.7.1 Lineare Kongruenzgeneratoren (LCG)

Startwert $x_0 \in \mathbb{N}$ gegeben.

Parameter $a, c, m \in \mathbb{N}$

Schritt Setze $x_{n+1} := (a \cdot x_n + c) \mod m$.

Dieses Vorgehen produziert eine scheinbar zufällige Folge.

Beispiel. ◇

Beispiel (Eine schlechte Wahl)**.** Wenn wir $a = 4, c = 1, m = 31$ wählen sowie $x_0 = 3$, so erreichen wir Periode 9, und somit werden nicht alle Zahlen erreichen / generieren. ◇

Lemma 1.16 (Knuth)**.** Die Periode eines LCG ist gleich m, genau dann, wenn

(a) c und m haben keine gemeinsamen Primfaktoren

(b) Jeder Primfaktor von m ist ein Teiler von $a - 1$

(c) Falls $4 \mid m$, dann $4 \mid a - 1$.

Beispiel. ◇

1.7.2 Zufallsvariablen aus $[0, 1)$

- Sei $(x_n)_{n \geqslant 1}$ eine Folge von (Pseudo)zufallszahlen aus $\{0, 1, \dots, m-1\}$. Dann ist
$$u_n := \left(\frac{x_n}{m}\right)_{n \geqslant 1}.$$
eine Folge von Pseudozahlen in $[0, 1)$. Gut ist aber nur der Fall, wenn $m \approx 10^N$, wobei $N =$ Rechnergenauigkeit, d.h. #Ziffern.

1.7.3 Zufallspermutationen

Wie erzeugt man eine gleichverteilte Permutation von $\{1, \ldots, N\}$?

Algorithmus 1 : Zufallspermutationen

Eingabe : Möglichkeit, aus endlicher Menge gleichverteilt zufällige Zahlen zu ziehen

Ausgabe : Eine zufällige Permutation von $\{1, \ldots, N\}$

Setze $\sigma_0 := \{1, \ldots, N\}$

for $i = 1$ **to** $n - 1$ **do**

  wähle $k \in \{i, \ldots, N\}$ gleichverteilt

  Setze $\sigma_k := \sigma_{k-1} \circ \tau_{i,k}$

Lemma 1.17. Der Algorithmus erzeugt eine zufällige gleichverteilte Permutation.

Beweis. Der Algorithmus benutzt eine Gleichverteilung auf

$$\Omega_n := \{1, \ldots, N\} \times \{2, \ldots, n\} \times \{n-1, n\}\,.$$

Für $\omega = (w_1, \ldots, w_{N-1}) \in \Omega_N$ ist

$$\sigma(\omega) = \tau_{N-1,\omega_{N-1}} \circ \ldots \circ \tau_{1,w} \circ \underbrace{(1, \ldots, N)}_{\sigma_0}\,.$$

Es genügt also zu zeigen, dass $\sigma : \Omega_N \to \mathcal{S}_N$ eine Bijektion ist. Wir sehen:

a) $|\Omega_N| = |\mathcal{S}_N| = N!$

b) Sei $w \neq \tilde{\omega}$ und setze $k = \min\{j \mid \omega_j \neq \tilde{\omega}_j\}$. Dann ist $\sigma(\omega)_k \neq \sigma(\tilde{\omega})_k$ und somit ist die Funktion injektiv

Damit ist die Abbildung sogar bijektiv und wir sind fertig. □

1.7.4 Geometrische Verteilung

- Sei $X \sim \mathrm{Geo}(q)$, d.h.
$$\mathbb{P}(X = k) = (1-q)q^k.$$
  Wie simuliert man nun X?

  a) Erzeuge $n \sim U[0, 1)$ als Gleichverteilte Zufallsvarable auf $[0, 1)$.

  b) Sei $T_k := \mathbb{P}(X < k)$. Falls $n \in [T_k, T_{k+1})$, dann setze $X = k$.

1.8 Erwartungswert und Varianz

- Sei X eine reellwertige diskrete Zufallsverteilung. Sei
$$X : \Omega \to \mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}.$$
  eine diskrete Zufallsvariable, d.h. $\mathcal{S}$ abzählbar.

Definition 1.18. Seien $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{S}$ n Beobachtungen einer Zufallsvariable X. Der **empirische Mittlewert** ist durch

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

definiert.

- Wir wollen eine Sorte von Mittelwert definieren, der nur von X abhängig ist, und nicht von den Beobachtungen.
- Folgende Forderungen ergeben sich an solch einen Mittelwert:
  - Falls $X(\omega) = x$ für jedes ω, dann muss der Mittelwert von X gleich x sein.
  - Jeder Wert $x \in \mathcal{S}$ muss bezüglich der Massenfunktion $p_X(x)$ gewichtet sein.

Definition 1.19. Der **Erwartungswert** von X bzgl. $\mathbb{P}$ ist durch

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{s \in \mathcal{S}} s \cdot \mathbb{P}(X = s) = \sum_{s \in \mathcal{S}} s \cdot p_X(s).$$

definiert. Dies ist wohldefiniert, falls die Reiche absolut gegen einen Wert $< \infty$ konvergiert.

Bemerkung. Nicht alle Wahrscheinlichkeitsverteilungen besitzen einen endlichen Mittelwert, das zeigt folgendes

Beispiel. Sei X auf $\{1, 2, \ldots\}$ verteilt mit

$$\mathbb{P}_X(s) = \frac{6}{\pi^2 r}.$$

dann ergibt sich für den Erwartungswert:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{s \geqslant 1} s \cdot \frac{6}{\pi^2 s^2} = \frac{6}{\pi^2} \cdot \sum_{s \geqslant 1} \frac{1}{s} \to \infty.$$

$\diamond$