Einführung in die Geometrie und Topologie

Dozent
Daniel Kasprowski

Assistentin
Arunima Ray

Mitschrift
Maximilian Kessler

Version
20. Mai 2021 10:10

Zusammenfassung

Bei folgenden Vorlesungsnotizen handelt es sich um (inoffizielle) Mitschriften zur 'Einführung in die Geometrie und Topologie', die im Sommersemester 2021 an der Universität Bonn gehalten wird. Ich garantiere weder für Korrektheit noch Vollständigkeit dieser Notizen, und bin dankbar für jegliche Art von Korrektur, sowohl inhaltlich, als auch Tippfehler. Schreibt hierzu eine Mail, oder nutzt das 'Issues' Feature auf GitHub.

Bemerkungen oder andere Umgebungen, die nicht zum eigentlichen Vorlesungsinhalt gehören, wurden mit einem * gekennzeichnet. Sie werden nach eigenem Ermessen hinzugefügt, um weitere Details oder evtl. mündliche Anmerkungen beizufügen. Insbesondere sind diese wohl besonders fehleranfällig, also verlasst euch nicht auf sie. Im Zweifelsfall ignoriert sie einfach.

Manche Umgebungen sind mit einem † versehen. Das ist dann der Fall, wenn ihr Inhalt so, oder zumindest in sehr ähnlicher Form, in der Vorlesung vorkam (unter Umständen auch mündlich), ich aber die Umgebung der Aussage geändert habe. Das ist z.B. dann der Fall, wenn ich aus Aussagen, die einfach erwähnt werden, ein **Lemma**† mache, um sie hervorzuheben. Diese Teile der Mitschrift solltet ihr also *nicht* ignorieren, aber es kann

vorkommen, dass ich auch hier Fehler mache.

Weitere Informationen zu diesem Skriptum finden sich bei GitHub oder auf der Vorlesungshomepage.

Inhaltsverzeichnis

Übersicht der Vorlesungen

Vorlesung 1
Di 18 Mai 2021 12:20

Wir erinnern uns daran, dass wir gerade dabei waren, **??** zu beweisen.

Lemma 0.1. Sei X ein normaler Raum, $A \subseteq X$ abgeschlossen und $U \subseteq X$ offen mit $A \subseteq U$. Dann existiert $V \subseteq X$ offen mit

$$A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U.$$

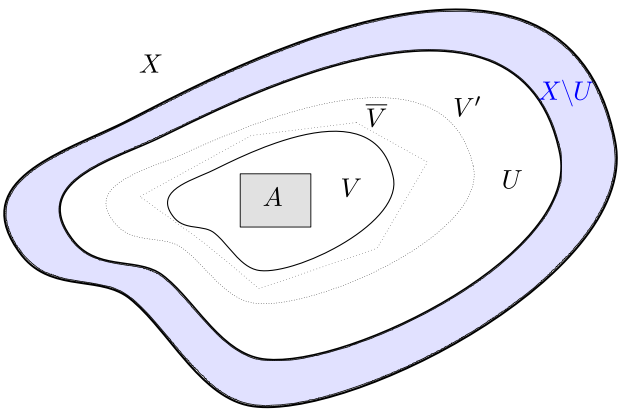


Abbildung 1: Skizze zu Lemma 0.1

Beweis. Wegen U offen ist $X \backslash U$ abgeschlossen. Wegen X normal gibt es V, V' offen mit $A \subseteq V$ und $(X \backslash U) \subseteq V'$ mit $V \cap V' = \varnothing$. Nun ist

$$A \subseteq V \subseteq X \backslash V' \subseteq U.$$

nach Definition des Abschlusses ist nun $A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq X \backslash V' \subseteq U$. ☐

Beweis von **??** *(***??***).*
Ziel. $\forall r \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ konstruiere $V_r \subseteq X$ offen, sodass

1. $A \subseteq V_0$
2. $B \subseteq X \backslash V_1$
3. $r < r' \Rightarrow \overline{V_r} \subseteq V_{r'}$

Dies genügt, denn dann wissen wir mit **??**, dass

$$\begin{aligned} &\exists f : X \to [0,1] \text{ stetig} \\ f(x) &= 0 \quad \forall x \in V_0 \supseteq A \\ f(x) &= 1 \quad \forall x \in X \backslash V_1 \supseteq B \end{aligned}$$

Wähle hierzu eine Abzählung $p_1, p_2, \ldots$ von $\mathbb{Q} \cap [0,1]$, sodass $p_1 = 1$ und $p_2 = 0$. Definiere nun $\{V_r\}$ rekursiv, wobei wir auch induktiv die Invariante erhalten wollen, dass $r < r' \Rightarrow \overline{V_r} \subseteq V_{r'}$.

- $p_1 = 1$. Setze $V_1 := X \backslash B$ (offen, weil B abgeschlossen ist)
- $p_2 = 0$. Nach Lemma 0.1 mit $A = A$ und $U = X \backslash B$ finden wir V_0 offen mit
$$A \subseteq V_0 \subseteq \overline{V}_0 \subseteq X \backslash B =: V_1.$$

- Sei $n \geqslant 3$, dann sind also $V_{p_1}, V_{p_2}, \ldots, V_{p_{n-1}}$ schon definiert. Es ist $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ wohlgeordnet, weil es sich um eine endliche Menge handelt, also gibt es unter ihnen einen direkten Vorgänger p_i von p_n, und einen direkten Nachfolger p_j von p_n.

  Es könnte z.B. $n = 5$ sein mit $\begin{array}{c|c|c|c|c} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{8}{9} & \frac{3}{5} \end{array}$ Dann ist die Menge als $\{0, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{8}{9}, 1\}$ geordnet, und wir sehen $p_i == \frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{8}{9} = p_j$.

  Verwende nun Lemma 0.1 mit $A = \overline{V_{p_i}}$ und $U = V_{p_j}$, (hier ist wichtig, dass wegen $p_i < p_j$ beretis $\overline{V_{p_i}} \subseteq V_{p_j}$ gilt, sonst können wir das Lemma nicht anwenden.)
  Also finden wir V mit $\overline{V_{p_i}} \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq V_{p_j}$. Man prüft leicht, dass wir so auch die Invariante der Induktion erhalten haben.

Also haben wir wie gewünscht die V_i gefunden, und somit unsere Funktion. □

Korollar 0.2 (Urysohn mit beliebigem Intervall)**.** Sei X ein normaler Raum und seien $A, B \subseteq X$ disjunkt und abgeschlossen, sowie $a \leqslant b \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann

$$\begin{aligned} \exists f : X &\to [a, b] \\ f(A) &= \{a\} \\ f(B) &= \{b\} \end{aligned}$$

Beweis. Zunächst verwenden wir Urysohn, um eine stetige Funktion $g : X \to [0, 1]$ zu erhalten mit $f(A) = \{0\}$ und $f(B) = \{1\}$, dann verknüpfen wir mit der stetigen Abbildung

$$h : \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & [a,b] \\ t & \longmapsto & (1-t)a + tb \end{array} \right.$$

und wir erhalten sofort die gewünschten Eigenschaften, indem wir $f = h \circ g$ setzen. □

1 Der Erweiterungssatz von Tietze

Wir sehen jetzt das **??** in Action:

Satz 1.1 (Erweiterungssatz von Tietze)**.** Sei X ein normaler Raum und $A \subseteq X$ abgeschlossen. Jede stetige Funktion $f : A \to [-1, 1]$ lässt sich fortsetzen zu einer stetigen Funktion $\overline{f} : X \to [-1, 1]$, d.h. $\overline{f}\,|_A \equiv f$.

Bemerkung. Das Urysohn'sche Lemma ist ein Spezialfall des Erweiterungssatz von Tietze:
Sei X normal und $B, C \subseteq X$ abgeschlossen, disjunkt. Dann betrachte

die Funktion

$$f : \left| \begin{array}{ccc} B \cup C & \longrightarrow & [-1,1] \\ B & \longmapsto & -1 \\ C & \longmapsto & 1 \end{array} \right.$$

Frage. Gibt es eine Fortsetzung $\overline{f} : X \to [-1,1]$?

Für jede solche Fortsetzung muss auch $\overline{f}\,|_B = f$, also $\overline{f}(B) = -1$ und $\overline{f}(C) = 1$ gelten, also genau das, was wir von Urysohn fordern. Allerdings sagt uns der Erweiterungssatz von Tietze genau, dass wir solche eine Fortsetzung finden.

Beweis von Satz 1.1 (Erweiterungssatz von Tietze).
Beweisstrategie. Wir konstruieren eine Folge stetiger Funktionen $\{s_n : X \to [-1,1]\}_{n\geqslant 1}$, sodass

(i) $\{s_n\}$ konvergiert **gleichmäßig** gegen eine Funktion $s : X \to [-1,1]$, d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ existiert $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$\forall x \in X, n \geqslant N : \qquad d(s_n(x), s(x)) < \varepsilon.$$

Weil $\{s_n\}$ gleichmäßig konvergiert, ist s stetig (Übungsblatt 5, Aufgabe 3 (iv)).

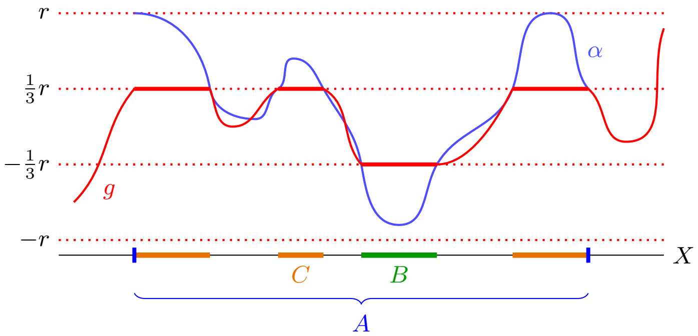
(ii) $s\,|_A = f$

Dazu benötigen wir erstmal einige Lemmata, die wir im folgenden erarbeiten. □

Lemma 1.2. Sei X normal und $A \subseteq X$ abgeschlossen. Sei $\alpha : A \to [-r,r]$ für $r \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ stetig. Dann existiert $g : X \to \left[-\frac{1}{3}r, \frac{1}{3}r\right]$ stetig mit $|\alpha(a) - g(a)| \leqslant \frac{2}{3}r$ für $a \in A$.

Beweis. Setze $B := \alpha^{-1}\left(\left[-r, -\frac{1}{3}r\right]\right)$ und $C := \alpha^{-1}\left(\left[\frac{1}{3}r, r\right]\right)$. Wegen α stetig sind B, C abgeschlossen, und sie sind auch disjunkt, weil die Intervalle disjunkt sind. Nach Urysohn mit beliebigem Intervall finden wir also eine stetige Funktion

$$g : X \to \left[-\frac{1}{3}r, \frac{1}{3}r\right]$$
$$g(B) = \left\{-\frac{1}{3}r\right\}$$
$$g(C) = \left\{\frac{1}{3}r\right\}$$



Behauptung 1. *g erfüllt die Bedingungen unseres Lemmas, d.h.*

$$|\alpha(a) - g(a)| \leqslant \frac{2}{3}r \qquad \forall a \in A.$$

Unterbeweis.
- Sei $a \in B$, Dann ist $\alpha(a) \in \left[-r, -\frac{1}{3}r\right]$ und $g(a) = -\frac{1}{3}r$, also gilt die Ungleichung.
- Sei $a \in C$. Dann ist $\alpha(a) \in \left[\frac{1}{3}r, r\right]$ und $g(a) = \frac{1}{3}r$, also, also gilt die Ungleichung.
- Sei $a \in A \backslash (B \cup C)$. Dann ist $\alpha(a), g(a) \in \left[-\frac{1}{3}r, \frac{1}{3}r\right]$, und damit ist der Abstand auch höchstens $\frac{2}{3}r$.

■

□

Bemerkung*. In der Vorlesung kam die Frage auf, ob wir manche der gerade bewiesenen Resultate auch auf die Analysis übertragen können, indem wir z.B. den Fixpunktsatz von Banach anwenden.

darüber nachdenken

Fortsetzung des Beweises des Erweiterungssatz von Tietze. Definiere die Folgen s_n induktiv. Dazu

Schritt 1: Verwende Lemma 1.2 mit $\alpha = f$ und $r = 1$, also erhalten wir

$$g_1 : X \to \left[-\frac{1}{3}r, \frac{1}{3}r\right].$$

settig mit $|f(a) - g(a)| \leqslant \frac{2}{3}$ für jedes $a \in A$. Setze $s_1 = g_1$.

Induktionsschritt Angenommen, wir haben schon stetige Funktion $g_1, \dots, g_n$ auf X mit

$$g_i : X \to \left[-\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} \cdot \frac{1}{3}, \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} \cdot \frac{1}{3}\right].$$

und

$$\left| f(a) - \sum_{i=1}^{n} g_i(a) \right| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n \qquad \forall a \in A.$$

Verwende nun wieder Lemma 1.2 mit $\alpha = f - \sum_{i=1}^{n} g_i \mid_A$ und $r = \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Es gibt also

$$g_{n+1} \colon X \to \left[-\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n, \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n\right].$$

Wir erhalten nun

$$\begin{aligned} \left| f(a) - \sum_{i=1}^{n} g_i(a) - g_{n+1}(a) \right| &= \left| f(a) - \sum_{i=1}^{n+1} g_i(a) \right| \\ &\leqslant \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

Nun definiere

$$s_{n+1} \coloneqq \sum_{i=1}^{n+1} g_i : X \to \mathbb{R}.$$

Behauptung 1. *s_n hat Bild in $[-1, 1]$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.*

Unterbeweis.

$$\begin{aligned}
|s_n(x)| &= \left|\sum_{i=1}^{n} g_i(x)\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n}|g_i(x)| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1}\cdot\frac{1}{3} \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1}\cdot\frac{1}{3} \\
&= \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{2}{3}} = 1
\end{aligned}$$

Die andere Schranke zeigt man völlig analog. ■

Behauptung 2. *Die Folge $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen s.*

Unterbeweis. Für $k > n$ ist

$$\begin{aligned}
|s_k(x) - s_n(x)| &= \left|\sum_{i=n+1}^{k} g_i(x)\right| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} \\
&= \sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} \\
&= \frac{1}{3}\cdot\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}} \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^n
\end{aligned}$$

(i) Für jedes $x \in X$ ist $\{s_n(x)\}_{n\geqslant 1}$ eine Cauchy-Folge, also konvergiert sie zu einem Punkt $s(x) \in [-1, 1]$.

(ii) Intuitiv reicht es für gleichmäßige Stetigkeit schon zu sehen, dass in obiger Abschätzung kein x vorkommt. Genauer:
Sei $\varepsilon > 0$, so $\exists N \in \mathbb{N}$ mit $\forall n > N \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^n < \varepsilon$. Dann ist

$$\begin{aligned}
|s(x) - s_n(x)| &= \left|\lim_{k\to\infty} s_k(x) - s_n(x)\right| \\
&= \lim_{k\to\infty}|s_k(x) - s_n(x)| \\
&\leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

also ist die Konvergenz gleichmäßig, und s ist stetig.

■

Setze nun $\overline{f} := s$, dann überprüfen wir

Behauptung 3. *$\overline{f}$ ist eine Fortsetzung von f, d.h. $\overline{f}\,|_A = f$.*

Unterbeweis. Es ist

$$|f(a) - s_n(a)| = \left|f(a) - \sum_{i=1}^{n} g_i(a)\right| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

also

$$\lim_{n\to\infty}|f(a) - s_n(a)| \leqslant \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

Also ist

$$s(a) := \lim_{n\to\infty} s_n(a) = f(a).$$

für jedes $a \in A$. ■

Wir haben also eine Fortsetzung gefunden, und sind damit fertig. □

Korollar 1.3 (Version des Satzes von Tietze)**.** Sei X ein normaler Raum und $A \subseteq X$ abgeschlossen. Dann gilt folgendes:

1. Jede stetige Funktion $f : A \to [a, b]$ lässt sich zu einer Funktion $\overline{f} : X \to [a, b]$ fortsetzen.
2. Jede stetige Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ lässt sich fortsetzen zu einer Funktion $\overline{f} : X \to \mathbb{R}$.

Beweis. Übung. □

2 Der Metrisierungssatz von Urysohn

Satz 2.1 (Metrisierungssatz von Urysohn)**.** Jeder normale Raum mit abzählbarer Basis der Topologie ist metrisierbar.

Beweis.

Beweisstrategie. Schritt 1: Betrachte $\prod_{\mathbb{N}}[0, 1]$ in der Produkttopologie und zeige, dass der Raum emtrisierbar ist. Dieser Raum heißt **Hilbert-Würfel**.

Schritt 2: Sei X normal mit abzählbarer Basis, wir zeigen, dass wir eine Einbettung $F : X \to \prod_{\mathbb{N}}[0, 1]$ finden. Dann sind wir fertig, da

$$X \cong F(X) \subseteq \prod_{\mathbb{N}}[0, 1].$$

ein Unterraum eines metrischen Raumes ist.

□ Vorlesung 2
Do 20 Mai 2021 10:07

Stichwortverzeichnis