Einführung in die Geometrie und Topologie

Dozent
Dr. Daniel Kasprowski

Mitschrift
Maximilian Kessler

Version
18. Mai 2021 14:04

Zusammenfassung

Bei folgenden Vorlesungsnotizen handelt es sich um (inoffizielle) Mitschriften zur 'Einführung in die Geometrie und Topologie', die im Sommersemester 2021 an der Universität Bonn gehalten wird. Ich garantiere weder für Korrektheit noch Vollständigkeit dieser Notizen, und bin dankbar für jegliche Art von Korrektur, sowohl inhaltlich, als auch Tippfehler.

Bemerkungen oder andere Umgebungen, die nicht zum eigentlichen Vorlesungsinhalt gehören, wurden mit einem * gekennzeichnet. Sie werden nach eigenem Ermessen hinzugefügt, um weitere Details oder evtl. mündliche Anmerkungen beizufügen. Insbesondere sind diese wohl besonders fehleranfällig, also verlasst euch nicht auf sie.

Manche Umgebungen sind mit einem † versehen. Das ist dann der Fall, wenn ihr Inhalt so, oder zumindest in sehr ähnlicher Form, in der Vorlesung vorkam (unter Umständen auch mündlich), ich aber die Umgebung der Aussage geändert habe. Das ist z.B. dann der Fall, wenn ich aus Aussagen, die einfach erwähnt werden, ein **Lemma**† mache, um sie hervorzuheben.

Weitere Informationen zu diesem Skriptum finden sich bei GitHub oder auf der Vorlesungshomepage.

Inhaltsverzeichnis

Übersicht der Vorlesungen 3

0 Motivation und Überblick 4

1 Metrische Räume 4

2 Topologische Räume 7

3 Quotientenräume 13

4 Trennungsaxiome 18

5 Kompaktheit 22

6 Basen und Subbasen 32

7 Produkte 35

8 Vereinigungen 50

9 Zusammenhang, Wegzusammenhang 60

10 Lemma von Urysohn 64

11 Der Erweiterungssatz von Tietze 67

12 Der Metrisierungssatz von Urysohn 71

Stichwortverzeichnis 72

Literatur 73

Übersicht der Vorlesungen

Vorlesung 1 (Di 13 Apr 2021 12:16) **4**
Metrische Räume. Umgebungen, offene Mengen, Stetigkeit. Topologische Räume. Metrisierbarkeit.

Vorlesung 2 (Do 15 Apr 2021 10:14) **9**
Äquivalente Metriken. Abgeschlossene Mengen. Teilraumtopologie. Homöomorphismen. Quotientenräume und -topologie.

Vorlesung 3 (Di 20 Apr 2021 12:16) **15**
Torus, Kleinsche Flasche, Reeller Projektiver Raum. Trennungsaxiome: Hausdorff, normale und reguläre Räume. Kompaktheit.

Vorlesung 4 (Do 22 Apr 2021 10:15) **23**
Eigenschaften kompakter Hausdorffräume. Gerade mit zwei Ursprüngen. Heine-Borel. Homöomorphismen.

Vorlesung 5 (Di 27 Apr 2021 12:16) **30**
Weiteres zum reellen projektiven Raum und zu kompakten Hausdorffräumen. Basen, Subbasen. Erzeugte Topologie. Satz von Alexander.

Vorlesung 6 (Do 29 Apr 2021 10:01) **34**
Endliche Produkte. Projektionen auf Komponenten. Universelle Eigenschaft des Produkts. Produkte von kompakten und von Hausdorff-Räumen. Diagonaleigenschaft. Unendliche Produkte.

Vorlesung 7 (Di 04 Mai 2021 12:12) **42**
Universelle Eigenschaft unendlicher Produkte. Satz von Tychonoff. Abschluss, Dichtheit. Einbettungen. Kompaktifizierung. Vollständige Regularität. Universelle Eigenschaft der Stone-Čech-Kompaktifizierung. Fortsetzung stetiger Funktionen.

Vorlesung 8 (Do 06 Mai 2021 10:15) **50**
Disjunkte Vereinigungen. Koprodukte. Disjunkte Vereinigungen über einem Basisraum. Wedge-Produkte. Rekonstruktion eines Raumes als Disjunkte Vereinigung über dem Schnitt zweier Teilräume.

Vorlesung 9 (Di 11 Mai 2021 12:16) **60**
Zusammenhang, Wegzusammenhang. Bilder (weg-) zusammenhängender Räume. Lemma von Urysohn.

Vorlesung 10 (Di 18 Mai 2021 12:20) **66**
Beweis des Lemmas von Urysohn. Satz von Tietze und Beweis. Metrisierungssatz von Urysohn.

Vorlesung 1
Di 13 Apr 2021 12:16

Organisatorisches

- Die Vorlesung wird aufgezeichnet.
- Wir duzen uns.
- Für die Übungen muss man sich auf eCampus anmelden, ob Do, 20:00 Uhr (Do 15 Apr 2021 20:00 Uhr)
- Die Übungsblätter werden Donnerstag zur Verfügung gestellt und werden nach 10 Tagen am Montag, 10 Uhr abgegeben.
- Es wird eine Fragestunde um Donnerstag, 16 Uhr geben.
- Es wird kein Skript geben, allerdings werden die geschriebenen Notizen auf eCampus zur Verfügung gestellt.
- Die Vorlesung orientiert sich an der vom letzten Jahr.
- Für Literatur siehe die 3 Vorschläge auf der Homepage

0 Motivation und Überblick

In der Topologie studieren wir topologische Räume. Diese verallgemeinern metrische Räume. Wir wollen zwei metrische Räume X, Y als 'gleich' ansehen, wenn es stetige, zueinander inverse Abbildungen $X \to Y, Y \to X$ gibt.

Beispiel. Betrachte ein Quadrat und einen Kreis, wir können sie durch Streckung aufeinander abbilden. Gleiches gilt für eine Tasse und einen Donut.

Abbildung 1: Beispiele 'gleicher' metrischer Räume (homöomorph)

Idee. Räume sind gewissermaßen aus 'Knete'.
Ziel. Wann sind zwei Räume gleich?
Dazu werden wir algebraische Invarianten verwenden.

Beispiel. $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ sind nicht 'gleich' für $n \neq m$.

Der Aufbau ist wie folgt:
1. Teil Grundlagen
2. Teil erste Invarianten: Fundamentalgruppe (dazu Überlagerungen)

1 Metrische Räume

Definition 1.1 (Metrik)**.** Eine **Metrik** auf einer Menge X ist eine Funktion $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
(ii) $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$
(iii) (Dreiecksungleichung) $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$.

Ein **Metrischer Raum** ist ein Paar (X, d) aus einer Menge X und einer Metrik d auf X.

Definition 1.2 (Stetigkeit)**.** Seien (X, d) und (X', d') zwei metrische Räume. Dann ist eine Funktion $f : X \to Y$ **stetig in** $x \in X$, falls

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x' \colon d(x, x') < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

Eine Funktion f heißt **stetig**, wenn sie in jedem Punkt $x \in X$ stetig ist.

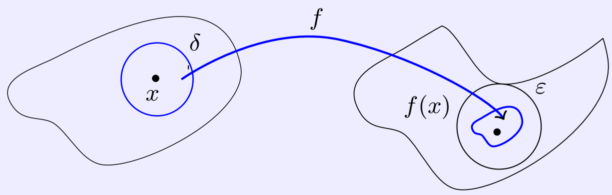


Abbildung 2: Definition von Stetigkeit in metrischen Räumen

Beispiel.
- Sei V ein reeller Vektorraum mit Norm $\|\cdot\|$. Dann definiert
$$d(v, w) := \|v - w\|.$$
eine Metrik auf V. Insbesondere ist $\mathbb{R}^n$ mit euklidischer Norm
$$\|(x_1, \ldots, x_n)\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}.$$
dadurch ein metrischer Raum.
- Ist (X, d) ein metrischer Raum und $Y \subseteq X$ eine Teilmenge, dann ist $(Y, d|_{Y \times Y})$ ein metrischer Raum.
- Sei X eine Menge. Dann ist
$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}.$$
eine Metrik auf X, genannt die **diskrete Metrik**.

Notation. Sei X ein metrischer Raum. Für $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ setzen wir
$$U(x, \varepsilon) := \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}.$$
und nennen dies den **offenen ε-Ball um x**

Beobachte. Sei $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ eine Funktion, $x \in X$ sowie $\varepsilon, \delta > 0$. Dann sind äquivalent:
1) $\forall x' \in X$ mit $d_X(x', x) < \delta$ gilt $d_Y(f(x'), f(x)) < \varepsilon$

2) Es ist $f(U(x,\delta)) \subseteq U(f(x),\varepsilon)$

Definition 1.3 (Umgebung)**.** Sei X ein metrischer Raum, $U \subseteq X$ und $x \in X$. Dann heißt U **Umgebung von x**, falls ein $\varepsilon > 0$ existiert, sodass $U(x,\varepsilon) \subseteq U$.

Satz 1.4 (Urbilder von Umgebungen)**.** Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung zwischen metrischen Räumen und sei $x \in X$. Dann ist f stetig in x genau dann, wenn für alle Umgebungen V um $f(x)$ in Y das Urbild $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x ist.

Beweis. '⇒' Sei V eine Umgebung von $f(x)$. Dann $\exists\ \varepsilon > 0$ mit $U(f(x),\varepsilon) \subseteq V\}$. Da f stetig ist, $\exists\ \delta > 0$, sodass $f(X(x,\delta)) \subseteq U(f(x),\varepsilon) \subseteq V$. Also ist $U(x,\delta) \subseteq f^{-1}(V)$ und somit ist $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x.

'⇐'. Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $U(f(x),\varepsilon)$ eine Umgebung von $f(x)$. Also ist $f^{-1}(U(f(x),\varepsilon))$ eine Umgebung von x, also $\exists\ \delta > 0$ mit $U(x,\delta) \subseteq f^{-1}(U(f(x),\varepsilon))$. Also wie gewünscht $f(U(x,\delta)) \subseteq U(f(x),\varepsilon))$. □

Definition 1.5 (Offene Mengen)**.** Sei X ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt **offen**, falls sie Umgebung all ihrer Punkte ist, d.h. $\forall x \in U\ \exists \varepsilon > 0$ mit $U(x,\varepsilon) \subseteq U$.

Bemerkung. $U(x,\varepsilon)$ ist offen.

Beweis. Für alle $y \in U(x,\varepsilon)$ ist

$$U(y, \underbrace{\varepsilon - d(x,y)}_{>0}) \subseteq U(x,\varepsilon).$$

nach der Dreiecksungleichung. □

Satz 1.6 (Urbilder offener Mengen sind offen)**.** Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen metrischen Räumen ist stetig genau dann, wenn $\forall U \subseteq Y$ offen auch das Urbild $f^{-1}(U)$ offen in X ist.

Beweis. '⇒ '. Sei $U \subseteq Y$ eine offene Teilmenge und $x \in f^{-1}(U)$ beliebig. Dann ist $f(x) \in U$ und somit ist U eine Umgebung von $f(x)$. Da f stetig ist, ist $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von x nach Satz 1.4. Also ist $f^{-1}(U)$ offen, da x beliebig war.

'⇐' Sei $x \in X$, V eine Umgebung von $f(x)$. Dann $\exists \varepsilon > 0$ mit $U(f(x),\varepsilon) \subseteq V$. Nach Annahme ist $f^{-1}(U(f(x),\varepsilon))$ offen. Also gibt es ein $\delta > 0$ mit $U(x,\delta) \subseteq f^{-1}(U(f(x),\varepsilon)) \subseteq f^{-1}(V)$. Also ist $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x.

Damit ist f stetig nach Satz 1.4 □

Satz 1.7 (Offene Mengen in metrischen Räumen)**.** Sei X ein metrischer Raum. Dann gilt:

1) Die leere Menge $\varnothing$ und X sind offen

2) $\forall U_1, \dots, U_n \subseteq X$ offen ist auch $\bigcap_{i=1}^n U_i$ offen.
3) Für jede Familie $\{U_i\}_{i \in I}$ von offenen Mengen ist auch $\bigcup_{i \in I} U_i$ offen.

Warnung. Eigenschaft 2) gilt nicht für unendliche Schnitte. Es ist $\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \subseteq \mathbb{R}$ offen für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$, allerdings ist dann

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}_{>0}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}\,.$$

nicht offen.

Beweis von Satz 1.7. 1) klar

2) Sei $x \in \bigcap_{i=1}^n U_i$. $\forall i = 1, \dots, n$ gibt es nun ε_i mit $U(x, \varepsilon_i) \subseteq U_i$. Setze $\varepsilon := \min\{\varepsilon_i \mid i = 1, \dots, n\}$. Dann ist

$$U(x, \varepsilon) \subseteq U(x, \varepsilon_i) \subseteq U_i.$$

für alle $i = 1, \dots, n$ und somit wie gewünscht $U(x, \varepsilon) \subseteq \bigcap_{i=1}^n U_i$

3) Sei $x \in \bigcup_{\in I} U_i$ beliebig. Dann $\exists i \in I$ mit $x \in U_i$. Da U_i offen ist, $\exists \varepsilon > 0$ mit $U(x, \varepsilon) \subseteq U_i$. Also ist $U(x, \varepsilon) \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ und somit ist die Vereinigung offen.

□

2 Topologische Räume

Definition 2.1 (Topologie)**.** Eine **Topologie** auf einer Menge X ist eine Menge $\mathcal{O}$ von Teilmengen von X, so dass gilt:
1) $\varnothing, X \in \mathcal{O}$
2) Für $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{O}$ ist auch $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{O}$
3) Für jede Familie $\{U_i\}_{i \in I}$ mit $U_i \in \mathcal{O}$ ist auch $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{O}$

Die Mengen in $\mathcal{O}$ heißen **offene Mengen**.
Ein **topologischer Raum** ist ein Paar $(X, \mathcal{O})$ aus einer Menge X und einer Topologie $\mathcal{O}$ auf X.

Definition 2.2 (Stetigkeit)**.** Seien X, Y topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt **stetig**, falls für jede offene Teilmenge $U \subseteq Y$ das Urbild $f^{-1}(U) \subseteq X$ offen ist.

Beispiel. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann ist

$$(X, \mathcal{O} := \{U \subseteq X \mid U \text{ ist offen bezüglich } d\}).$$

ein topologischer Raum. $\mathcal{O}$ ist die von der Metrik d **induzierte Topologie**.

Definition 2.3 (Metrisierbarkeit)**.** Ein topologischer Raum heißt **metrisierbar**, falls die Topologie von einer Metrik induziert ist.

Beispiel. Sei X eine Menge. Die **diskrete Topologie** auf X ist die Menge aller Teilmengen, d.h. $\mathcal{O} := \mathcal{P}(X)$. Diese ist von der diskreten Metrik

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}.$$

induziert.

Beweis. Ist $x \in X$, dann ist

$$\{x\} = U\left(x, \frac{1}{2}\right).$$

offen. Ist $U \subseteq X$ eine Teilmenge, dann ist

$$U = \bigcup_{x \in U} \{x\}.$$

offen als Vereinigung offener Mengen. □

Satz 2.4. Sei X ein endlicher (endlich als Menge), metrisierbarer topologischer Raum. Dann ist X diskret (d.h. X trägt die diskrete Topologie).

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass $\{x\}$ offen ist $\forall x \in X$. Sei d eine Metrik, die die Topologie induziert, dann wähle

$$\varepsilon := \min \{d(x,y) \mid x, y \in X, x \neq y\} > 0.$$

Beachte, dass dies existiert, da $d(x,y) > 0$ für $x \neq y$ und die Menge nach Voraussetzung endlich ist. Nun ist:

$$\{x\} = U(x, \varepsilon).$$

offen und wir sind fertig. □

Beispiel.
1) Wähle $X = \{a, b\}$ und setze

$$\mathcal{O} = \{\varnothing, X, \{a\}\}.$$

Dies ist ein topologischer Raum (leicht prüfen), er ist jedoch nicht metrisierbar, da endlich und nicht diskret. Dieser Raum heißt **Sierpinski-Raum**.

2) Sei X eine Menge. Die **indiskrete Topologie** auf X enthält nur $\varnothing, X$. Man prüft leicht, dass dies eine Topologie ist.
   - Hat X mindestens 2 Elemente, so ist X nicht metrisierbar. *Beweis.* Nimm $|X| > 2$ an und wähle $x, y \in X$ mit $x \neq y$. Sei d eine Metrik, die die Topologie auf X induziert und setze $\varepsilon := d(x,y)$. Dann ist

     $$x \in U(x, \varepsilon) \quad y \notin U(x, \varepsilon).$$

     also ist $U(x, \varepsilon) \neq \varnothing, X$, Widerspruch. □
   - Sei Y ein topologischer Raum. Dann ist $f : Y \to X$ stetig für beliebige Abbildungen f.

Beweis. Es sind $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$ sowie $f^{-1}(X) = Y$ beide offen. □

Bemerkung. Ist Y diskret und X beliebig, so ist jede Abbildung $f : X \to Y$ stetig.

Vorlesung 2
Do 15 Apr 2021 10:14

Definition 2.5 (Äquivalente Metriken)**.** Zwei Metriken d_1, d_2 auf X heißen **äquivalent**, falls Konstanten c_1, c_2 existieren, sodass

$$\forall x, y \in X : \quad c_1 \cdot d_1(x,y) \leqslant d_2(x,y) \leqslant c_2 \cdot d_1(x,y).$$

Satz 2.6. Äquivalenz (von Metriken) ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis. **Reflexivität:** Klar mit $c_1 = c_2 = 1$

Symmetrie: Seien c_1, c_2 wie in der Definition. Dann gilt mit entsprechender Division, dass

$$\forall x, y \in X : \ : \quad \frac{1}{c_2} \cdot d_2(x,y) \leqslant d_1(x,y) \leqslant \frac{1}{c_1} d_2(x,y).$$

Transitivität: . Seien c_1, c_2, c_1', c_2' gewählt, sodass $\forall x\ \forall y\colon c_1 d_1(x,y) \leqslant d_2(x,y) \leqslant c_2 d_1(x,y)$ sowie $c_1' d_2(x,y) \leqslant d_3(x,y) \leqslant c_2' d_2(x,y)$ (Also $d_1 \sim d_2$ und $d_2 \sim d_3$). Dann ist auch

$$\forall x\ \forall y\colon \quad c_1 c_1' d_1(x,y) \leqslant c_1' d_2(x,y) \leqslant d_3(x,y) \leqslant c_2' d_2(x,y) \leqslant c_2 d_1(x,y).$$

□

Satz 2.7. Äquivalente Metriken induzieren dieselbe Topologie.

Beweis. Wegen der Symmetrie genügt es zu zeigen, dass Mengen, die offen bezüglich d_2 sind, auch offen bezüglich d_1 sind.

Sei nun $U \subseteq X$ offen bezüglich d_2 und $x \in U$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $U_{d_2}(x, \varepsilon) \subseteq U$. Ist nun $d_1(x,y) < \frac{\varepsilon}{c_2}$, dann ist

$$d_2(x,y) \leqslant c_2 d_1(x,y) < \varepsilon.$$

und damit ist

$$U_{d_1}\left(x, \frac{\varepsilon}{c_2}\right) \subseteq U_{d_2}(x, \varepsilon) \subseteq U.$$

und somit ist U auch offen bezüglich d_1. □

Bemerkung. Es gibt auch nicht-äquivalente Metriken, die die gleiche Topologie induzieren. Siehe hierzu Übungsblatt 1, Aufgabe 2.

Bemerkung. Je zwei Normen auf $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent, induzieren also dieselbe Topologie, das beweisen wir jedoch hier nicht.

Definition 2.8 (Umgebung)**.** Sei X ein topologischer Raum und $U \subseteq X$ sowie $x \in X$. Dann heißt U **Umgebung von x**, falls es eine offene Teilmenge $O \subseteq X$ gibt, mit $x \in O \subseteq U$.

Bemerkung. Für metrische Räume stimmt dies mit der vorherigen Definiton überein.

Satz 2.9. Sei X ein topologischer Raum und $U \subseteq X$. Dann sind äquivalent:
1) U ist offen.
2) U ist Umgebung aller ihrer Punkte.

Beweis. '1) $\Rightarrow$ 2)' ist klar, wähle einfach $O = U$.
'2) $\Rightarrow$1)'. Für jedes $x \in U$ existiert also U_x mit $x \in U_x \subseteq U$. Dann ist aber

$$U = \bigcup_{x \in U} U_x.$$

offen als Vereinigung offener Mengen. □

Definition (Abgeschlossene Mengen)**.** Sei X ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt **abgeschlossen**, falls ihr Komplement $X \backslash A = \{x \in X \mid x \notin A\}$ offen ist.

Bemerkung. Für metrische Räume stimmt das mit dem Begriff aus der Analysis überein.

Satz 2.10 (Dualität)**.** Ein topologischer Raum lässt sich auch über seine abgeschlossenen Mengen charakterisieren. Diese müssen erfüllen:
i) $\varnothing, X$ sind abgeschlossen
ii) Für $A_1, \ldots, A_n$ abgeschlossen ist auch $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ abgeschlossen.
iii) Für eine Familie $\{A_i\}_{\in I}$ abgeschlossener Mengen ist auch

$$\bigcap_{i \in I} A_i.$$

abgeschlossen.

Wenn wir von einer Familie von Mengen $\{A_i\}_{\in I}$ sprechen, meinen wir, dass I eine Menge ist, und für jedes $\in I$ ist A_i eine Teilmenge von X. Formal können wir dies als eine Funktion $I \to \mathcal{P}(X)$ darstellen.

Beweis. i) $X \backslash \varnothing = X$, $X \backslash X = \varnothing$ sind abgeschlossen.

ii)

$$\underbrace{\bigcap_{i=1}^{n}(X\backslash A_i)}_{\text{offen}} = X\backslash\bigcup_{i=1}^{n} A_i \quad \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i \text{ abgeschlossen.}$$

iii)

$$\underbrace{\bigcup_{i\in I}(\underbrace{X\backslash A_i}_{\text{offen}})}_{\text{offen}} = X\backslash\bigcap_{i\in I} A_i \quad \Rightarrow \bigcap_{i\in I} A_i \text{ abgeschlossen.}$$

□

Satz 2.11 (Stetigkeit mit abgeschlossenen Mengen)**.** Sei $f : X \to Y$ eine Funktion zwischen topologischen Räumen. Dann sind äuqivalent:

1) f ist stetig
2) $\forall U \subseteq Y$ offen ist $f^{-1}(U) \subseteq X$ offen
3) $\forall A \subseteq Y$ abgeschlossen ist $f^{-1}(A)$ abgeschlossen

Beweis.

$$\begin{aligned} f \text{ stetig} &\Leftrightarrow \forall U \subseteq Y \text{ offen ist } f^{-1}(U) \text{ offen} \\ &\Leftrightarrow \forall A \subseteq Y \text{ abgeschlossen ist } f^{-1}(Y\backslash A) \text{ offen} \\ &\Leftrightarrow \forall A \subseteq Y \text{ abgeschlossen ist } X\backslash f^{-1}(A) \text{ offen} \\ &\Leftrightarrow \forall A \subseteq Y \text{ abgeschlossen ist } f^{-1}(A) \text{ abgeschlossen} \end{aligned}$$

□

Wir erinnern uns: Ist (X, d) ein metrischer Raum, so auch $(Y, d_{Y\times Y}) \quad \forall Y \subseteq X$. Wie ist dies für topologische Räume?

Warnung. $(Y, \mathcal{S}_X \cap \mathcal{P}(Y))$ ist im allgemeinen **kein** topologischer Raum. (wenn Y nicht offen ist, denn dann ist $Y \notin \mathcal{S}_X \cap \mathcal{P}(X)$)

Satz und Definition 2.12 (Teilraumtopologie)**.** Sei X ein topologischer Raum, $Y \subseteq X$. Dann ist

$$\mathcal{S}_Y := \{U \cap Y \mid U \subseteq X \text{ offen}\}.$$

eine Topologie auf Y, die **Teilraumtopologie** oder auch **Unterraumtopologie** genannt wird.

Beispiel. Betrachte $\mathbb{R}^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ als Unterraum. Schneiden wir eine offene Menge in $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{R}^1$, so erhalten wir ein offenes Intervall:

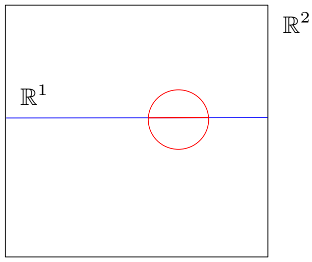


Abbildung 3: $\mathbb{R}^1$ als Unterraum von $\mathbb{R}^2$

Beweis.

- Es sind $\varnothing = \varnothing \cap Y$ und $Y = X \cap Y$ offen.
- Es ist
$$\bigcap_{i=1}^{n} (U_i \cap Y) = \left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i \right) \cap Y.$$
- Es ist
$$\bigcup_{i \in I} (U_i \cap Y) = \left(\bigcup_{i \in I} U_i \right) \cap Y.$$

□

Warnung. Für $Z \subseteq Y \subseteq X$ muss man zwischen 'offen in Y' und 'offen in X' unterscheiden, falls Y nicht offen ist.

Bemerkung*. Ist $Y \subseteq X$ offen, so stimmen die beiden vorherigen Konzepte tatsächlich überein, d.h. eine Menge $Z \subseteq Y$ ist offen in Y, genau dann, wenn sie offen in X ist.

Bemerkung. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $Y \subseteq X$ eine Teilmenge. Die Unterraumtopologie auf Y bzgl. der Topologie auf X ist gleich der Topologie indzuziert von der eingeschränkten Metrik.

Beweis. Für $y \in Y$ ist

$$U_{d|_{Y \times Y}}(y, \varepsilon) = U_d(y, \varepsilon) \cap Y.$$

, deswegen werden von beiden Metriken die gleichen offenen Mengen induziert. □

Beispiel. Der **Einheitskreis** als Unterraum von $\mathbb{R}^2$:

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 = 1 \right\} =: S^1 \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Genauso gibt es die **n-Sphäre** definiert durch

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\|_2 = 1 \right\} =: S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}.$$

Definition 2.13 (Homöomorphie)**.** Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen heißt **Homöomorphismus**, falls f stetig und bijektiv ist und auch $f^{-1} : Y \to X$ stetig ist.
Existiert solch ein f, so heißen X, Y **homöomorph**

Beispiel. Die Räume $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ und $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ sind homöomorph mittels der Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x, y) & \longmapsto & x + iy \end{array}$$

Warnung. Nicht jede stetige Bijektion ist ein Homöomorphismus.

Beispiel. Betrachte für eine Menge X die Identitätsabbildung $(X, \mathcal{P}(X)) \overset{\mathrm{id}_X}{\to} (X, \{\varnothing, X\})$ von der diskreten in die indiskrete Topologie. Diese ist stetig, aber die Umkehrabbildung nicht (falls $|X| \geqslant 2$).

3 Quotientenräume

Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Für $x \in X$ definieren wir die **Äquivalenzklasse** $[x]$ von x durch:

$$[x] := \left\{x' \in X \mid x \sim x'\right\}.$$

Wir setzen

$$X/\sim := \{[x] \mid x \in X\}.$$

als die **Menge der Äquivalenzklassen** von X bezüglich $\sim$. Definiere nun

$$q : \left| \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X/\sim \\ x & \longmapsto & [x] \end{array} \right.$$

als die **kanonische Projektion** von X auf seine Äquivalenzklassen. Wir stellen fest, dass q surjektiv ist.

Für eine Surjektion $f : X \to Y$ ist $x \sim y :\Leftrightarrow f(x) = f(y)$ eine Äquivalenzrelation auf X und

$$\begin{array}{ccc} X/\sim & \longrightarrow & Y \\ [x] & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

ist eine Bijektion, wir erhalten also eine Korrespondenz zwischen Äquivalenzrelationen und surjektiven Abbildungen aus X.

Satz und Definition 3.1 (Quotiententopologie)**.** Sei X ein topologischer Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Sei $q : X \to X/\sim$ die kanonische Projektion. Dann definiert

$$\mathcal{S}_{X/\sim} := \left\{U \subseteq X/\sim \mid q^{-1}(U) \subseteq X \text{ offen}\right\}.$$

eine Topologie auf $X/\sim$, genannt die **Quotiententopologie**.

Beweis. Wir prüfen die Axiome einer Topologie:

- Es ist $q^{-1}(\varnothing) = \varnothing$ und $q^{-1}(X/\sim) = X$, also sind beide Mengen offen.
- Sind $U_1, \ldots, U_n \subseteq X/\sim$ offen, so ist
$$q^{-1}(U_1 \cap \ldots \cap A_n) = q^{-1}(U_i) \cap \ldots \cap q^{-1}(U_n).$$
offen in X, also ist $U_1 \cap \ldots \cap U_n$ offen in $X/\sim$ nach Definition.
- Ist $\{U_i\}_{i \in I}$ eine Familie offener Teilmengen von $X/\sim$, dann ist
$$q^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} U_i\right) = \bigcup_{i \in I} q^{-1}(U_i).$$
offen in X, also ist $\bigcup_{i\in I} U_i$ offen in $X/\sim$ nach Definition.

□

Bemerkung. Die Projektion $q : X \to X/\sim$ ist stetig und die Quotiententopologie ist maximal (bezüglich Inklusion, lies: 'am feinsten') unter allen Topologien auf $X/\sim$, für die q stetig ist.

Satz 3.2 (Universelle Eigenschaft der Quotiententopologie)**.** Sei $f : X \to Y$ stetig und $q : X \to X/\sim$ die kanonische Projektion. Angenommen, es existiert $g : X/\sim \to Y$ mit $f = g \circ q$. Dann ist g stetig und in diesem Fall ist g eindeutig.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] & Y \\ X/\sim \arrow[ur, dotted, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Bemerkung. g existiert genau dann, wenn $x \sim x' \Rightarrow f(x) = f(x')$

Trivial Nonsense*. Das ist eine universelle Eigenschaft im Sinne der Kategorientheorie, d.h. für einen Raum X und eine Äquivalenzrelation existiert bis auf eindeutigen Isomorphismus stets genau ein topologischer Raum $(X/\sim, \mathcal{S})$ zusammen mit einer stetigen Abbildung $q : X \to X/\sim$, sodass $x \sim x' \Rightarrow q(x) = q(x')$, sodass das Tripel $(X, X/\sim, q)$ obige Eigenschaft hat. Wir können also obige Eigenschaft auch als Definition der Quotiententopologie verwenden, und aus dieser folgt auch die Eindeutigkeit. Existenz haben wir mit unserer vorherigen Definition gezeigt.

Beweis. Sei $U \subseteq Y$ offen. Dann ist
$$q^{-1}(g^{-1}(U)) \overset{f=g\circ q}{=} f^{-1}(U).$$
offen, weil f stetig ist. Also ist $g^{-1}(U)$ offen per Definition ($g^{-1}(U)$ ist nach Definition genau dann offen in $X/\sim$, wenn $q^{-1}(g^{-1}(U))$ offen in X ist) und somit ist g stetig. □

Beispiel. Sei $X = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$ das **Einheitsintervall** (mit der Unterraumtopologie bezüglich $\mathbb{R}$) mit der Äquivalenzrelation erzeugt von $0 \sim 1$. Wir 'identifizieren' also die Punkte $\{0\}, \{1\}$ miteinander.

Satz 3.3 (Kreishomöomorphie)**.** Der Quotientenraum $[0,1]/(0 \sim 1)$ ist homöomorph zu S_1.

Vorlesung 3
Di 20 Apr 2021 12:16

Beweis. Betrachte die stetige Abbildung

$$f' : \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & S^1 \subseteq \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & e^{2\pi i t} \end{array} \right.$$

Wir sehen $f'(0) = f'(1) = 1$, also existiert nach der universellen Eigenschaft ein f, sodass folgendes kommutiert:

$$\begin{tikzcd} {[0,1]} \arrow[r, "f'"] \arrow[d, two heads] & S^1 \\ {[0,1]/(0 \sim 1)} \arrow[ur, two heads, "f"'] & \end{tikzcd}$$

und f stetig ist. Zudem ist f bijektiv. Es bleibt zu zeigen, dass f^{-1} stetig ist, das zeigen wir jedoch nicht jetzt (ginge mit viel rechnen), sondern später, wenn wir mehr Technik haben. Anschaulich ist das jedoch klar: □

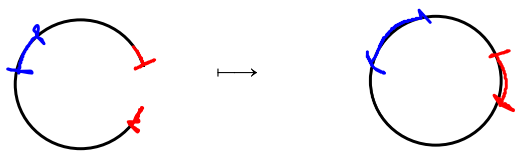


Abbildung 4: $[0,1]/(0 \sim 1)$ und S^1 sind homöomorph

Bemerkung. Die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} [0,1) & \longrightarrow & S^1 \\ t & \longmapsto & e^{2\pi i t} \end{array}$$

ist stetig und bijektiv, allerdings kein Homöomorphismus, denn $\left[0, \frac{1}{2}\right] \subseteq [0,1)$ ist offen, aber $f(\left[0, \frac{1}{2}\right]) = \left(f^{-1}\right)^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right)$ ist nicht offen im Kreis.

Beispiel. 1) Sei $X = [0,1]^2 \subseteq \mathbb{R}$. Identifiziere nun $(t,0) \sim (t,1)$ sowie $(0,s) \sim (1,s)$ für $s,t \in [9,1]$. Dann ist $X/\sim$ der Torus.

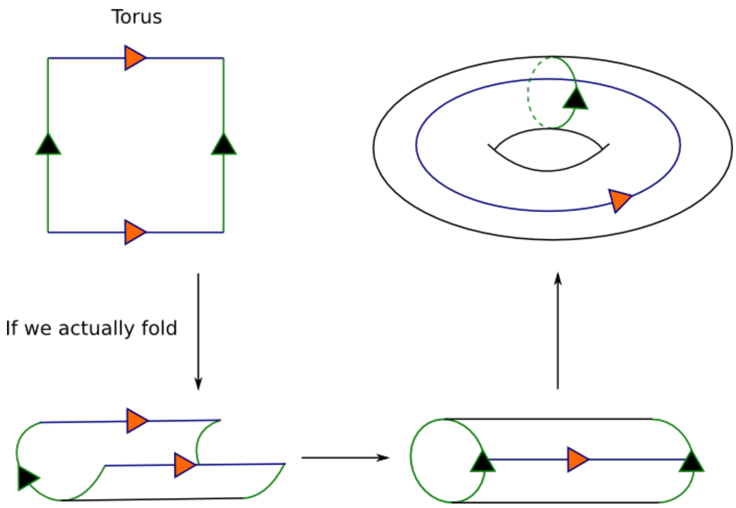


Abbildung 5: Entstehung des Torus als Quotientenraum von $[0,1]^2$.
Quelle: http://3.bp.blogspot.com/_swn7VcF-Vqc/TCpcMmi8qII/AAAAAAAAAHw/3QtMkZsikpY/s1600/part1(6).png

2) Sei $X = [0,1]^2 \subseteq \mathbb{R}^2$. Identifizieren wir $(t,0) \sim (t,1)$ sowie $(0,s) \sim (1, 1-s)$, so erhalten wir die **Kleinsche Flasche**.

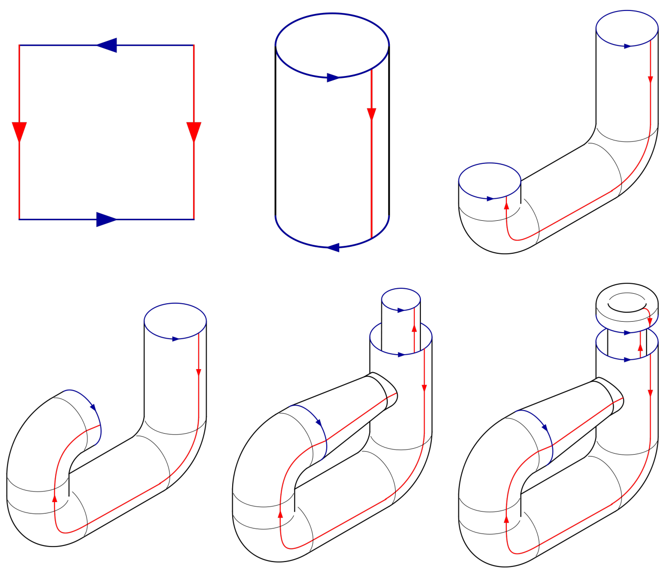


Abbildung 6: Entstehung der Kleinschen Flasche als Quotientenraum von $[0,1]^2$.
Quelle: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Klein_Bottle_Folding_1.svg

3) Betrachte auf dem $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ die Relation $x \sim \lambda x$ für $\lambda > 0 \in \mathbb{R}$. Dann ist $\mathbb{R}^{n+1} / \sim \cong S^n$. Zunächst ist nämlich die Abbildung

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} & \longrightarrow & S^n \\ x & \longmapsto & \frac{x}{\|x\|_2} \end{array} \right.$$

stetig und die induzierte Abbildung $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim \to S^n$ ist bijektiv. Das rechnen wir nach: Seien $x \neq y$ mit $d(x,y) < \delta$, so ist:

$$\begin{aligned}
d\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}\right) &\leqslant d\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|x\|}\right) + d\left(\frac{y}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}\right) \\
&= \frac{1}{\|x\|} d(x,y) + \sqrt{\sum \left(\frac{y_i}{\|x\|} - \frac{y_i}{\|y\|}\right)^2} \\
&= \frac{1}{\|x\|} d(x,y) + \sqrt{\frac{(\|x\| - \|y\|)^2}{\|x\|\|y\|}} \|y\| \\
&< \frac{1}{\|x\|} \cdot \delta + \frac{\delta}{\|x\|^2 + \delta\|x\|} (\|x\| + \delta) \to 0
\end{aligned} \tag{1}$$

also ist f stetig. Mit der Inklusion $\iota : S^n \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ erhalten wir

$$f \circ \iota = \mathrm{id}_{S^n} .$$

Übung: Daraus folgt bereits, dass S^n die Quotiententopologie trägt.

4) Setzen wir erneut $X = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, aber diesmal $x \sim \lambda x$ für $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so heißt der Quotient

$$X/\sim =: \mathbb{R}P^n .$$

der **reelle projektive Raum**. Es ist

$$\mathbb{R}P^n \cong S^n/(x \sim -x).$$

Dies sehen wir mittels folgendem Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[d, two heads] & S^n \arrow[l, shift left, "\iota"] \arrow[d, two heads] \\
\mathbb{R}P^n \arrow[r, dashed, shift left, "\overline{f}"] & S^n/(x \sim -x) \arrow[l, dashed, shift left, "\overline{\iota}"]
\end{tikzcd} \tag{2}$$

Die Abbildungen $\overline{\iota}$ und $\overline{f}$ sind stetig nach der universellen Eigenschaft und invers zueinander.

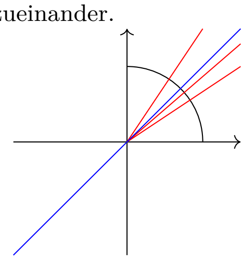


Abbildung 7: Konstruktion des reellen projektiven Raums für den Fall $n = 1$. Wir identifizieren die roten Strahlen miteinander, nicht jedoch den gesamten blauen, da $\lambda > 0$.

5) Sei X ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ eine Teilmenge. Definiere die Relation $\sim$ durch $a \sim a'$ für $a, a' \in A$ (bzw. erzeuge eine dadurch). Dann setzen wir

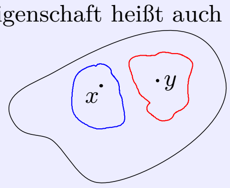
$$X/A := X/\sim .$$

Es ergibt sich
- $[0,1]/\{0,1\} \cong S^1$
- $[0,1]/[0,1)$ hat zwei Punkte $[0,1)$ und $\{1\}$. Es ist $[0,1) \subseteq [0,1]$ offen, aber $\{1\}$ nicht, also handelt es sich um den Sierpinski-Raum.

Bemerkung. Quotientenräume von metrischen Räumen sind im Allgemeinen nicht metrisierbar.

4 Trennungsaxiome

Definition 4.1 (Hausdorff'sch)**.** Ein topologischer Raum heißt **Hausdorff** (oder **Hausdorffsch**), wenn $\forall x, y \in X$ mit $x \neq y$ offene Mengen $U_x, U_y \subseteq X$ existieren mit $x \in U_x$ und $y \in U_y$, sodass $U_x \cap U_y = \varnothing$. Diese Eigenschaft heißt auch Trennungsaxiom T_2.



Satz 4.2. Ist X metrisierbar, so ist X Hausdorffsch.

Beweis. Sei d eine Metrik auf X, die die Topologie induziert. Seien $x, y \in X$ mit $x \neq y$. Setze

$$U_x := U\left(x, \frac{d(x,y)}{2}\right) \qquad U_y = U\left(y, \frac{d(x,y)}{2}\right).$$

Dann ist $U_x \cap U_y = \varnothing$, denn für alle $z \in U_x \cap U_y$ ist

$$d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y) < \frac{d(x,y)}{2} + \frac{d(x,y)}{2} = d(x,y).$$

, was nicht sein kann. $\square$

Beispiel. $\mathbb{R}^n$ ist Hausdorffsch.

Satz 4.3. Ist X Hausdorffsch und $x \in X$, dann ist $\{x\} \subseteq X$ abgeschlossen.

Beweis. Für $y \neq x$ existiert U_y offen mit $x \notin U_y$ und $y \in U_y$. Dann ist

$$X \setminus \{x\} = \bigcup_{y \neq x} U_y.$$

offen.

□

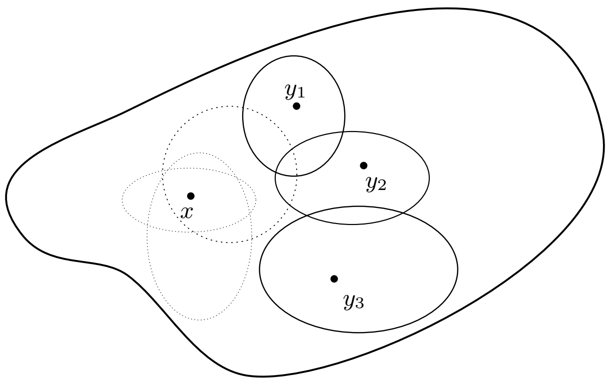


Abbildung 8: Skizze zum Beweis von Satz 4.3

Bemerkung. Ein topologischer Raum, für den alle $\{x\}$ abgeschlossen sind, heißt **T_1-Raum**.

Bemerkung*. Man findet in der Literatur auch folgende Definition: Ein topologischer Raum heißt T_1-Raum, wenn es für je zwei verschieden Punkte $x \neq y$ Umgebungen U_x, U_y gibt mit $x \in U_x, y \in U_y$ und $x \notin U_y, y \notin U_x$.
Im Gegensatz zum Hausdorff-Raum trennen wir zwei Punkte also durch 2 nicht notwendigerweies offene Umgebungen. Mit dem gleichen Beweis wie in Satz 4.3 zeigen wir dann, dass jeder Punkt abgeschlossen ist. Ist umgekehrt X ein Raum, in dem alle Punkte abgeschlossen sind, so können wir x, y stets durch die offenen Umgebungen $y \in X \setminus \{x\}$ sowie $x \in X \setminus \{y\}$ trennen. Die beiden Definitionen sind also äquivalent.

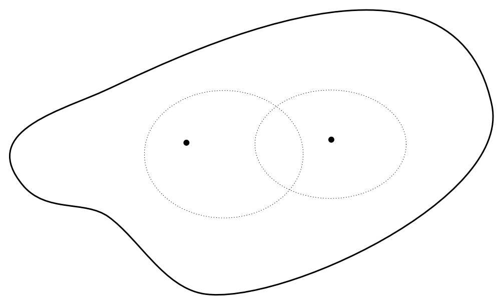


Abbildung 9: Ein T_1-Raum

Lemma 4.4. Sei X Hausdorffsch und $A \subseteq X$ ein Teilraum. Dann ist auch A Hausdorffsch.

Beweis. Sei $x \neq y \in A$. Dann existieren $U_x, U_y \subseteq X$ offen mit $x \in U_x$ und $y \in U_y$ sowie $U_x \cap U_y = \varnothing$. Dann sind

$$U_x \cap A \qquad U_y \cap A \subseteq A.$$

offen in A und erfüllen die Bedingungen. □

Bemerkung. Jeder diskrete Raum ist Hausdorffsch. Ist X endlich und Hausdorffsch, so ist X diskret.

Beweis. Für jedes $y \neq x$ existiert ein U_x^y offen mit $x \in U_x^y$ und $y \notin U_x^y$. Dann ist aber

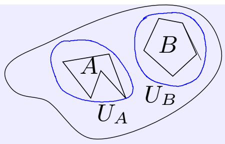
$$\{x\} = \bigcap_{y \neq x} U_x^y.$$

offen (da X endlich), also ist X diskret. Die Umkehrung ist offensichtlich. □

Beispiel. $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ ist Hausdorffsch.

Definition 4.5 (Normal)**.** Ein topologischer Raum heißt **normal**, falls

- X ist Hausdorffsch
- $\forall A, B \subseteq X$ abgeschlossen mit $A \cap B = \varnothing$ existieren $U_A, U_B \subseteq X$ offen mit $A \subseteq U_A$, $B \subseteq U_B$ und $U_A \cap U_B = \varnothing$. Diese Eigenschaft heißt auch Trennungsaxiom T_4.



Bemerkung. Manchmal gibt es diese Definition auch ohne Hausdorff'sch.

Satz 4.6. Ist X metrisierbar, dann ist X normal.

Der Beweis war Aufgabe bei Übungsblatt 2:

Beweis.* Der folgende Beweis wurde in unserem Tutorium mit Heiko Braun besprochen:

Wir wissen bereits mit Satz 4.2, dass X Hausdorffsch ist. Von Übungsblatt 1 wissen wir, dass

$$d_x : \left| \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & d(x,y) \end{array} \right.$$

eine stetige Abbildung ist. Dann ist für eine Teilmenge $A \subseteq X$ auch

$$d_A : \left| \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \inf\{d_x(y) \mid x \in A\} \end{array} \right.$$

eine stetige Funktion, die den Abstand zur Menge A ausdrückt.

Behauptung 1. *Ist A abgeschlossen, so ist $d_A(y) = 0 \Leftrightarrow y \in A$.*

Unterbeweis. Die Richtung '$\Leftarrow$' ist trivial, da dann $d_y(y) = 0$ Teil des Infimums ist. Die andere Richtung beweisen wir durch Kontraposition, d.h. sei $y \in X \backslash A$. Da $X \backslash A$ offen ist, gibt es $\varepsilon > 0$ mit $U(y, \varepsilon) \subseteq X \backslash A$, dann ist aber sicherlich $d_x(y) \geqslant \varepsilon$ für alle $y \in A$, und somit ist auch das Infimum über diese $\geqslant \varepsilon$. ■

Seien nun $A, B \subseteq X$ abgeschlossene, disjunkte Teilmengen. Definiere

$$f : \left| \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{d_A(x)}{d_A(x)+d_B(x)} \end{array} \right.$$

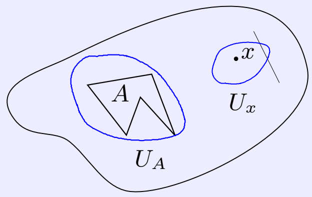
Der Nenner wird nie Null, da dazu $d_A(x) = 0 = d_B(x)$ gelten müsste, nach der Behauptung also $x \in A, B$ und dies trift nicht zu wegen $A \cap B = \varnothing$ nach Annahme. Als Verknüpfung stetiger Funktionen ist nun f stetig. Zudem stellen wir fest, dass $f(A) \equiv 0$ sowie $f(B) \equiv 1$. Dann sind

$$U := f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{2}\right)\right) \qquad V := f^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}, 1\right]\right).$$

zwei offene Umgebungen, die A, B enthalten und disjunkt sind, wie man leicht prüft. Also ist X normal. □

Bemerkung*. Wir haben eine scheinbar stärkere Eigenschaft gezeigt als die, dass X normal ist, nämlich, dass wir zwei abgeschlossene Mengen durch eine Funktion trennen können. Es stellt sich jedoch heraus, dass ein topologischer Raum genau dann diese Eigenschaft besitzt, wenn er normal ist, wobei 'normal' nicht fordert, dass der Raum Hausdorff ist. Dies nennt sich *Lemma von Urysohn*, und wir werden dieses auch später noch in der Vorlesung kennenlernen, für jetzt ist dies jedoch unwichtig. Die Trennung zweier abgeschlossener Mengen mittels einer Funktion ähnelt jedoch sehr stark der folgenden Definition (und das ist kein Zufall):

Definition 4.7 (Regulär)**.** Ein topologischer Raum X heißt **regulär**, falls X Hausdorff ist und $\forall A \subseteq X$ abgeschlossen und $x \in X \backslash A$ existieren U_a, U_x offen mit $A \subseteq U_A, x \in U_x$ und $U_A \cap U_x = \varnothing$. (Auch Trennungsaxiom T_3 genannt).



Bemerkung. Klarerweise gilt $T_4 \Rightarrow T_3$, d.h. jeder normale Raum ist auch regulär. Hierzu benötigen wir nur, dass Punkte in T_4-Räumen abgeschlossen sind, aber das folgt mit Satz 4.3, bzw. damit, dass wir bereits $T_4 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1$ wissen.

5 Kompaktheit

Aus der Analysis ist (vielleicht) folgender Satz bekannt.

Satz 5.1 (Heine-Borel)**.** Für $X \subseteq \mathbb{R}^n$ sind äquivalent:
1) X ist abgeschlossen und beschränkt.
2) Jede offene Überdeckung von X hat eine endliche Teilüberdeckung

'Jede offene Überdeckung besitzt eine endliche Teilüberdeckung' bedeutet:
Für jede Familie $\{U_i\}_{i \in I}$ mit $U_i \subseteq X$ offen und $X \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ existiert eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$ mit $X \subseteq \bigcup_{j \in J} U_j$

Beweis. später. □

Definition 5.2 (Kompaktheit)**.** Ein topologischer Raum X heißt **kompakt**, falls jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Bemerkung. Manchmal heißt obige Definition auch quasi-kompakt, und kompakt bedeutet dann quasi-kompakt + Hausdorff.

Beispiel. Die Räume

$$[0,1] \subseteq \mathbb{R} \qquad S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}.$$

sind beide kompakt (nach 5.1)

Vorlesung 4
Do 22 Apr 2021 10:15

Beispiel. Zur Frage von letzter Woche (wenn wir einen Hausdorff-Raum haben und eine Äquivalenzrelation, deren Klassen abgeschlossen sind, ist dann der Quotient wieder Hausdorff?): Wähle auf $[0,1]$ die Relation erzeugt von

$$\frac{1}{n} \sim 1 - \frac{1}{n}.$$

für alle $n \in \mathbb{N}_{>}0$. Betrachte dann die Abbildung:

$$[0,1] \twoheadrightarrow [0,1]/\sim .$$

Punkturbilder sind endlich, also abgeschlossen. Aber der Raum $[0,1]/\sim$ ist nicht hausdorffsch, denn wri können die Punkte $0, 1$ nicht trennen.

Satz 5.3. Sei X ein kompakter Raum und $Y \subseteq X$ abgeschlossen. Dann ist Y kompakt.

Beweis. Sei $\{U_i\}_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von Y. Dann existieren $U_i' \subseteq X$ offen mit $U_i = U_i' \cap Y$. Die Familie

$$\{U_i'\}_{i\in I} \cup \left\{ \underbrace{X \backslash Y}_{\text{offen}} \right\}.$$

ist nun eine offene Überdeckung von X. Dann existiert $J \subseteq I$ endlich, so dass

$$\{U_j'\}_{j\in J} \cup \{X\backslash Y\}.$$

die Menge X überdeckt. Also ist

$$\left\{ \underbrace{U_j' \cap Y}_{U_j} \right\}_{j\in J} \cup \left\{ \underbrace{X\backslash Y \cap Y}_{=\varnothing} \right\}$$

eine endliche Überdeckung für Y. □

Satz 5.4. Sei X ein Hausdorff-Raum und $Y \subseteq X$ kompakt. Dann ist Y abgeschlossen.

Korollar. Ist X kompakt und Hausdorffsch, dann sind äquivalent:
1) $Y \subseteq X$ ist abgeschlossen
2) Y ist kompakt.

Beweis. Unmittelbare Konsequenz aus Satz 5.3 und Satz 5.4. □

Lemma 5.5. Sei X ein Hausdorff Raum und $Y \subseteq X$ kompakt. Dann existiert $\forall x \in X \backslash Y$ offene Teilmengen $U_{x,Y}$ und $V_{x,Y}$ von X so dass: $x \in U_{x,Y}$ und $Y \subseteq V_{x,Y}$ und $U_{x,Y} \cap V_{x,Y} = \varnothing$.

Beweis. Sei $x \in X \backslash Y$. $\forall y \in Y$ existieren $U_{x,y}$ und $V_{x,y}$ offen mit $x \in U_{x,y}$ und $y \in V_{x,y}$, weil X Hausdorffsch.

Dann ist $\{V_{x,y} \cap Y\}_{y \in Y}$ eine offene Überdeckung von Y. Also existiert endliche Teilüberdeckung (da Y kompakt) induziert durch Punkte $y_1, \ldots, y_n$. Also:

$$Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{x,y_i}.$$

Sei

$$V_{x,Y} := \bigcup_{i=1}^{n} V_{x,y_i} \qquad U_{x,Y} := \bigcap_{i=1}^{n} U_{x,y_i}.$$

Es ist auch $x \in U_{x,Y}$, weil $x \in U_{x,y_i}$ für jedes i. Wir müssen also noch Disjunktheit prüfen, es ist:

$$U_{x,Y} \cap V_{x,y_i} \subseteq U_{x,y_i} \cap V_{x,y_i} = \varnothing.$$

Also auch

$$\varnothing = U_{x,Y} \cap \bigcup_{i=1}^{n} V_{x,y_i} = U_{x,Y} \cap V_{x,Y}.$$

□

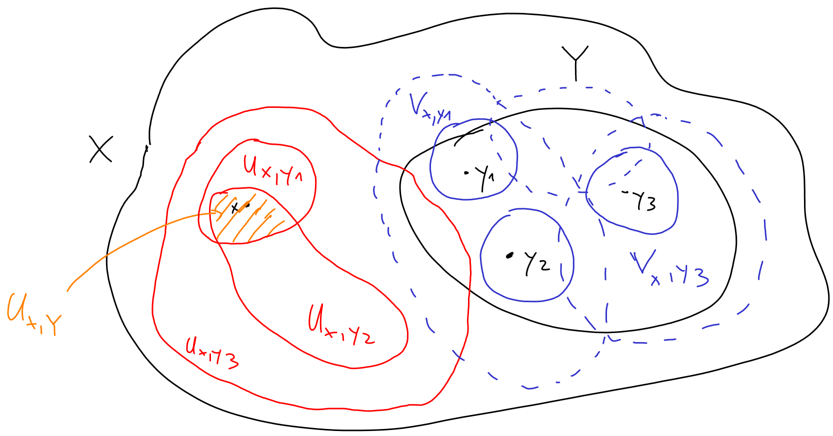


Abbildung 10: Skizze zum Beweis von Lemma 5.5

Beweis von Satz 5.4. Nach Lemma 5.5 existieren $\forall x \in X \backslash Y$ ein $U_{x,Y}$ mit $x \in U_{x,Y}$ und $U_{x,Y} \cap Y = \varnothing$. Also ist

$$X \backslash Y = \bigcup_{x \in X \backslash Y} U_{x,Y}.$$

offen und somit ist Y abgeschlossen. □

Beispiel ('Gegenbeispiel' zu Satz 5.4)**.** Sei G die **Gerade mit zwei Urpsrüngen**:
Betrachte $G := \mathbb{R} \cup \{0'\}$ als Menge, und charakterisiere die Umgebungen folgendermaßen:

- Für einen Punkt $a \in \mathbb{R}$, d.h. $a \neq 0'$ ist U eine Umgebung von a genau dann, wenn $\exists \varepsilon > 0$, sodass $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subseteq U$. (das Intervall $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ ist hier als Teilmenge von $\mathbb{R}$ zu verstehen)
- Für den Punkt $0' \notin \mathbb{R}$ ist U eine Umgebung von a genau dann, wenn $\exists \varepsilon > 0$ mit $(-\varepsilon, 0) \cup (0, \varepsilon) \subseteq U$.

Da offene Mengen genau diejenigen Mengen sind, die Umgebung all ihrer Punkte sind, haben wir damit die offenen Mengen von G charakterisiert.
Wir können uns G vorstellen als $\mathbb{R}$, in dem der Ursprung durch zwei gleichberechtigte Ursprünge ersetzt worden ist, die beide (bis auf sich selbst) die gleichen Umgebungen besitzen, die aber nicht zwingend gegenseitig in ihren Umgebungen liegen, d.h. nicht 'nah' beieinander sind.

Dann ist $[-1,1] \subseteq \mathbb{R} \subseteq G$ kompakt (Übungsblatt 2, Aufgabe 3), wir behaupten, dass $[-1,1]$ jedoch nicht abgeschlossen ist in G. Sonst wäre in der Tat $G \backslash [-1,1]$ offen, und es ist $0' \in G \backslash [-1,1]$, aber es handelt sich nicht um eine Umgebung von $0'$, weil für kein ε die Intervalle $(-\varepsilon, 0)$ und $(0, \varepsilon)$ in $G \backslash [-1,1]$ liegen.

Bemerkung*. Das Beispiel zeigt also, dass wir die Hausdorff-Bedingung in Satz 5.4 nicht fallen lassen können, d.h. es gibt nicht abgeschlossene, kompakte Mengen.

Bemerkung* (Mehr zur Gerade mit 2 Ursprüngen)**.** Wir geben zwei weitere (äquivalente) Definitionen der Gerade mit 2 Ursprüngen, um so hoffentlich eine bessere Vorstellung zu ermöglichen:

i) Setze $G := \mathbb{R} \backslash \{0\} \cup \{a, b\}$ als Mengen. Als Basis wählen wir
   - Alle offenen Bälle aus $\mathbb{R}$, die nicht die 0 enthalten.
   - Für jedes $\varepsilon > 0$ die Menge $(-\varepsilon, 0) \cup \{a\} \cup (0, \varepsilon)$
   - Für jedes $\varepsilon > 0$ die Menge $(-\varepsilon, 0) \cup \{b\} \cup (0, \varepsilon)$

   In diesem Fall können wir Homöomorphismen zu obiger Definition bauen, indem wir $0 \mapsto a$ und $0' \mapsto b$ wählen, und alle andere Punkte kanonisch 'auf sich selbst' schicken.

ii) Wir können G auch als Quotientenraum einer Teilmenge von $\mathbb{R}$ auffassen. Betrachte hierzu $\mathbb{R} \times \{0,1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ mit der Produkttopologie bzw. mit der Teilraumtopologie von $\mathbb{R}^2$ (diese beiden sind äquivalent, wie man sich leicht überlegt). Es handelt sich also um zwei parallele, voneinander getrennte Geraden. Nun identifizieren wir korrespondierende Punkte beider Geraden miteinander, allerdings nicht deren Ursprüngen. Wir erzeugen also die Äquivalenzrelation $\sim$ generiert durch $(x, 0) \sim (x, 1)$ für $x \neq 0$ und bilden bezüglich dieser Relation den Quotientenraum. Was wir erhalten, ist genau G. Indem wir mit G definiert wie in der Vorlesung die Abbildung von $\mathbb{R} \times \{0,1\}$ nach G definieren durch
$$(a, b) \mapsto \begin{cases} a & \text{falls } a \neq 0 \\ 0 & \text{falls } (a, b) = (0, 0) \\ 0' & \text{falls } (a, b) = (0, 1) \end{cases} .$$
   sehen wir schnell, dass diese über den Quotientenraum $\mathbb{R} \times \{0,1\} / \sim$ faktorisiert (universelle Eigenschaft!) und die entstehende Abbildung bijektiv und stetig ist. Dass es sich um einen Homöomorphismus handelt, sei hier nicht nachgerechnet sondern nur angemerkt.

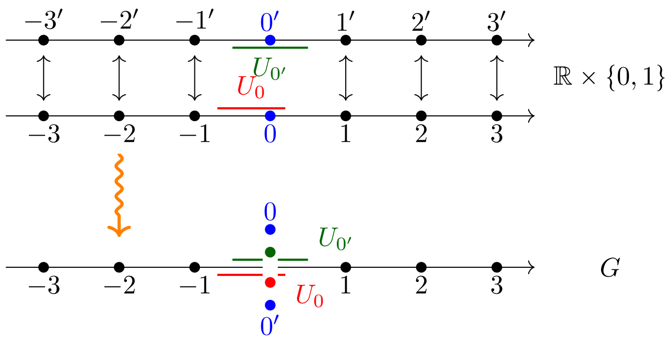


Abbildung 11: Gerade mit 2 Ursprüngen als Quotientenraum von $\mathbb{R} \times \{0,1\} \subseteq \mathbb{R}^2$

Nun sind wir gewappnet für den

Beweis von Satz 5.1 (Heine-Borel). '2) $\Rightarrow$ 1)'. Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt. Dann ist sie abgeschlossen nach 5.4. Zudem ist $X \subseteq \bigcup_{x \in X} U(x,1)$ eine offene Überdeckung. Da X kompakt finden wir endlich viele $x_1, \dots, x_n \in X$ mit

$$X \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U(x_i, 1).$$

Also ist

$$\operatorname{diam}(X) \leqslant \max\{d(x_i, x_j)\} + 2 < \infty.$$

und somit ist X auch beschränkt.

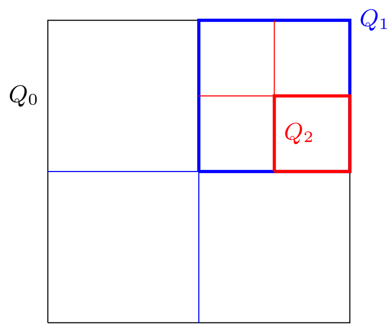
' 1) $\Rightarrow$ 2)'. Da X beschränkt ist, $\exists m > 0$ mit $X \subseteq [-m,m]^n \subseteq \mathbb{R}^n$. Da X abgeschlossen ist, genügt es nach Satz 5.3 zu zeigen, dass $[-m,m]^n$ kompakt ist.

Wir führen einen Widerspruchsbeweis, nimm also an, dass $[-m,m]^n$ nicht kompakt ist. Dann existiert eine offene Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ ohne endliche Teilüberdeckung.

Unterteile $[-m,m]^n$ in 2^n gleich große Unterwürfel (halbiere jede Seite). Mindestens ein Unterwürfel hat keine endliche Teilüberdeckung. Unterteile diesen Würfel weiter und wähle wieder einen Unterwüfel, der keine endliche Teilüberdeckung hat.
Wir erhalten eine Folge von Würfeln

$$[-m,m]^n = Q_0 \supseteq Q_1 \supseteq Q_2 \supseteq Q_3 \supseteq \dots.$$

die jeweils keine endliche Teilüberdeckung durch $U_i's$ besitzen.



Sei $x_i \in Q_i$ beliebig. Dann ist x_i eine Cauchy-Folge, also existiert $x = \lim_{i \to \infty} x_i$, und $x \in Q_0$, da Q_0 abgeschlossen.

Somit gibt es ein U_j mit $x \in U_j$, da die $\{U_i\}_{i \in I}$ eine Überedeckung von Q_0 waren. Damit ist auch $U(x,\varepsilon) \subseteq U_j$ für ein $\varepsilon > 0$. Wähle einen Würfel $x \in Q_k$ mit Kantenlänge $< \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$, dann ist auch $Q_k \subseteq U(x,\varepsilon) \subseteq U_j$. Das ist aber ein Widerspruch dazu, dass Q_k keine endliche Teilüberdeckung hat, $\lightning$.

Also ist Q_0 kompakt. $\square$

Satz 5.6 (Bilder kompakter Räume)**.** Sei $f : X \to Y$ stetig und surjektiv und X kompakt. Dann ist auch Y kompakt.

Beweis. Sei $\{U_i\}_{i \in I}$ offene Überdeckung von Y. Dann ist

$$\left\{f^{-1}(U_i)\right\}_{i \in I}.$$

offene Überdeckung von X. Da X kompakt ist, gibt es $J \subseteq I$ endlich mit $X = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(U_j)$. Dann ist

$$Y = f(X) = \bigcup_{j \in J} f(f^{-1}(U_j)) = \bigcup_{j \in J} U_j.$$

Also existiert eine endliche Teilüberdeckung von Y. □

Korollar 5.7. Sei $f : X \to Y$ stetig, X kompakt und Y Hausdorff. Dann ist f abgeschlossen, d.h. $\forall A \subseteq X$ abgeschlossen ist $f(A) \subseteq Y$ abgeschlossen.

Beweis. Sei $A \subseteq X$ abgeschlossen. Dann ist A kompakt nach Satz 5.4, also ist $f(A)$ kompakt nach Satz 5.6 (weil $f : X \to f(A) \subseteq Y$ surjektiv ist). Damit ist dann $f(A)$ abegschlossen nach Satz 5.4.

Also sind Bilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen. □

Korollar 5.8 (Homöomorphismen)**.** Ist $f : X \to Y$ stetig und bijektiv, X kompakt und Y Hausdorff, dann ist f ein Homöomorphismus.

Beweis. Wir müssen zeigen, dass die Umkehrabbildung stetig ist. Dafür reicht es zu zeigen, dass $\forall A \subseteq X$ abgeschlossen auch $f(A) = (f^{-1})^{-1}(A)$ abgeschlossen ist. Das gilt aber genau nach vorherigem Korollar 5.7 □

Korollar 5.9. Sei $f : X \to Y$ stetig und surjektiv, X kompakt und Y Hausdorffsch. Dann trägt Y die Quotiententopologie, d.h. $U \subseteq Y$ offen genau dann, wenn $f^{-1}(U) \subseteq X$ offen.

Beweis. '$\Rightarrow$' folgt wegen Stetigkeit.

'$\Leftarrow$' Ist $f^{-1}(U) \subseteq X$ offen, dann ist $f^{-1}(Y \backslash U) = X \backslash f^{-1}(U)$ abgeschlossen in X, also folgt aus dem Korollar 5.7

$$Y \backslash U \overset{\text{surj.}}{=} f\left(\underbrace{f^{-1}(Y \backslash U)}_{\text{abgeschlossen}}\right).$$

abgeschlossen ist, also ist $U \subseteq Y$ offen. □

Kommen wir nun zum

Beweis von Satz 3.3. Schon gezeigt:

$$\begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & S_1 \\ t & \longmapsto & 2^{2\pi i t} \end{array}$$

ist stetig und surjektiv und faktorisiert über

$$[0,1]/\{0,1\} \to S^1.$$

mit f stetig und bijektiv. Wir wissen nun: S^1 ist Hausdorffsch und $[0,1]$ ist kompakt. Nach Satz 5.6 ist auch $[0,1]/\{0,1\}$ kompakt, also ist f ein Homöomorphismus nach Korollar 5.8 □

Satz 5.10. Jeder kompakte Hausdorff-Raum ist normal.

Beweis. Seien $A, B \subseteq X$ abgeschlossen und disjunkt. Da X kompakt ist, sind A, B kompakt. Nach Lemma 5.5 existieren $\forall a \in A$ offene Mengen U_a, V_a mit $a \in U_a, B \subseteq V_a$ und $U_a \cap V_a = \varnothing$. Dann ist

$$A \subseteq \bigcup_{a \in A} U_a.$$

Also existieren $a_1, \ldots, a_n \in A$ mit

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{a_i}.$$

wegen A kompakt. Setze nun

$$U_A := \bigcup_{i=1}^{n} U_{a_i} \supseteq A \qquad U_B := \bigcap_{i=1}^{n} V_{a_i} \supseteq B.$$

$\forall i$ ist

$$U_{a_i} \cap U_B \subseteq U_{a_i} \cap V_{a_i} = \varnothing.$$

und daraus folgt, dass

$$U_A \cap U_B = \varnothing.$$

□

Satz 5.11 (Quotientenräume von Hausdorffräumen)**.** Sei X kompakt und Hausdorffsch, $q : X \to Z$ surjektiv, wobei Z die Quotientontopologie trage. Dann sind äquivalent:
1) Z ist Hausdorffsch
2) q ist abgeschlossen

Beweis. Die Richtung '1) $\Rightarrow$ 2)' ist genau Korollar 5.7

'2) $\Rightarrow_1$)': Jedes $z \in Z$ hat ein Urbild $x \in X$ unter q. Es ist $\{x\} \subseteq X$ abgeschlossen, da X hausdorffsch. Wegen q abgeschlossen folgt nun, dass auch

$$\{z\} = q(\{x\}).$$

abgeschlossen ist.

Wir nennen Teilmenge $W \subseteq X$ heißt **saturiert**, falls $W = q^{-1}(q(W))$ (insbesondere sind alle Urbilder saturiert, und $\Leftrightarrow \forall x \in X \backslash W : g(x) \in Z \backslash g(W)$).

Bemerkung. Sei $U \subseteq X$ offen und saturiert, dann ist $q(U)$ offen. Hierzu schreibe

$$U = q^{-1}(q(U)) \Rightarrow q(U) \text{ offen.}$$

Seien $y \neq z \in Z$. Dann sind $\{y\}, \{z\}$ abgeschlossen und disjunkt. Dann sind auch

$$A = q^{-1}(y) \qquad B = q^{-1}(z).$$

abgeschlossen und disjunkt (in X). Nach Annahme ist X kompakt und Hausdorff, also normal nach Satz 5.10. Also existieren $U_1, U_2 \subseteq X$ offen mit $A \subseteq U_1, B \subseteq U_2$ und $U_1 \cap U_2 = \varnothing$. Setze

$$V_1 := X \backslash q^{-1}(q(X \backslash U_1)) \qquad V_2 := X \backslash q^{-1}(q(X \backslash U_2)).$$

Behauptung 1. *Es sind V_1, V_2 offen, disjunkt und saturiert und $A \subseteq V_1$ sowie $B \subseteq V_2$.*

Unterbeweis. Nächstes Mal. ■

Es folgt, dass $q(V_1), q(V_2)$ offen in Z sind. Weiter ist $y \in q(A) \subseteq q(V_1)$ und $z \in q(B) \subseteq q(V_2)$. Da V_1, V_2 disjunkt und saturiert, sind auch $q(V_1), q(V_2)$ disjunkt und wir sind fertig. □

Vorlesung 5
Di 27 Apr 2021 12:16

Beweis der Behauptung. Es ist klar, dass V_1, V_2 offen sind. Für Disjunktheit sehen wir mit

$$X \backslash U_i \subseteq q^{-1}(q(X \backslash U_i)).$$

dass $U_i \supseteq X \backslash q^{-1}(q(X \backslash U_i)) = V_i$ Für Saturiertheit genügt es zu sehen, dass $q^{-1}(C)$ saturiert ist für alle $C \subseteq Z$, da

$$q^{-1}(q(q^{-1}(C))) = q^{-1}(C).$$

weil q surjektiv ist. Wegen

$$\begin{aligned} A \subseteq U_1 &\Rightarrow X \backslash A \supseteq X \backslash U_1 \\ &\Rightarrow q(X \backslash A) \supseteq q(X \backslash U_1) \\ &\Rightarrow \underbrace{q^{-1}(q(X \backslash A))}_{=X \backslash A} \supseteq q^{-1} q(X \backslash U_1)^{\cdot} \end{aligned}$$

liefert nun Komplementbildung unser gewnschtes Ergebnis, dass

$$A \subseteq X \backslash q^{-1}(q(X \backslash U_1)) = V_1.$$

□

Beispiel. $\mathbb{RP}^n$ ist Hausdorffsch.

Beweis. Es ist $\mathbb{RP}^n \cong S^n / x \sim -x$. Sei

$$q : S^n \to S^n / x \sim -x.$$

□

die Projektion. Da S^n kompakt und Hausdorffsch ist, ist $\mathbb{RP}^n$ Hausdorffsch genau dann, wenn q abgeschlossen ist. Ist $A \subseteq S^n$, so ist $q^{-1}(Q(A)) = A \cup -A$.
Da $- : S^n \to S^n$ ein Homöomorphismus ist, ist $-A$ abgeschlossen, wenn A abgeschlossen ist. Dann ist auch $A \cup -A$ abgeschlossen.

Korollar (Projektiver Raum)**.** Sei $\sim$ auf $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leqslant 1\}$ erzeugt durch $x \sim -x$ für alle $x \in S^{n-1} \subseteq D^n$. Dann ist

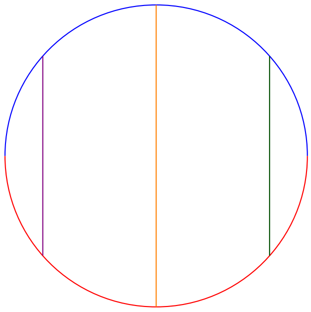
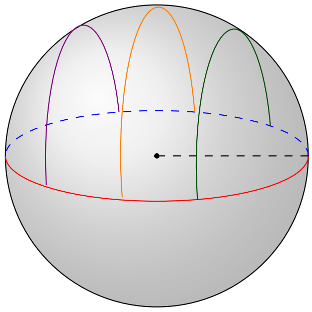
$$D^n / \sim \cong \mathbb{RP}^n.$$

Insbesondere ist

$$\mathbb{RP}^1 \cong D^1 / \{-1, 1\} \cong [0,1] / \{0,1\} \cong S^1$$

Beweis. Betrachte die stetige Abbildung

$$f : \left| \begin{array}{ccc} D^n & \longrightarrow & S^n \\ x & \longmapsto & (x, \sqrt{1 - \|x\|^2}) \end{array} \right.$$

Wir erhalten das Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
D^n \arrow[r] \arrow[d] & S^n \arrow[d] \\
D^n/\sim \arrow[r, dashed, "\overline{f}"'] & S^n/(x\sim -x) \cong \mathbb{RP}^n
\end{tikzcd}$$

Wir sehen leicht, dass $\overline{f}$ bijektiv ist. Da D^n kompakt, ist auch $D^n/\sim$ kompakt, und $\mathbb{RP}^n$ ist Hausdorffsch, also handelt es sich um einen Homöomorphismus (mit Korollar 5.8) □

Korollar 5.12. Sei X kompakt und Hausdorffsch und $A \subseteq X$. Dann sind äquivalent
1) X/A ist Hausdorffsch
2) A ist abgeschlossen.

Beweis. '1) $\Rightarrow_2$)'. Ist X/A Hausdorffsch, so ist die einpunktige Menge $\{[A]\}$ abgeschlossen (nach Satz 4.3). Also ist $q^{-1}(A) = A$ abgeschlossen nach Definition der Quotiententopologie.

'2) $\Rightarrow$ 1)' Nach Satz 5.11 genügt es zu zeigen, dass $q : X \to X/A$ abgeschlossen ist. Für $B \subseteq X$ abgeschlossen ist, müssen wir also zeigen, dass $q(B)$ abgeschlossen ist, nach Definiton also, dass $q^{-1}(q(B)) \subseteq X$ abgeschlossen ist. Nun ist

$$q^{-1}(q(B)) = \begin{cases} B & \text{falls } B\cap A = \varnothing \\ B\cup A & \text{falls } B \cap A \neq \varnothing \end{cases}.$$

abgeschlossen, weil A abgeschlossen ist. □

Beispiel. a) Es ist D^n/S^{n-1} Hausdorffsch. Alternativ können wir auch sehen, dass $D^n/S^{n-1} \cong S^n$ ist. Hierzu betrachte die Projektion:

$$\begin{aligned} D^n &\longrightarrow S^n \\ x &\longmapsto \begin{cases} (2x, \sqrt{1-\|2x\|^2} & 0 \leqslant \|x\| \leqslant \frac{1}{2} \\ \left(\frac{2-2\|x\|}{\|x\|}\cdot x, -\sqrt{1-(2-2\|x\|)^2}\right) & \frac{1}{2} \leqslant \|x\| \leqslant 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Diese ist stetig, denn falls $\|x\| = \frac{1}{2}$ ist

$$\frac{2-2\|x\|}{\|x\|} = \frac{2-1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

und

$$\sqrt{1-\|2x\|^2} = \sqrt{1-1} = 0 = -\sqrt{0} = -\sqrt{1-(2-2\|x\|)^2}.$$

Ist $\|x\| = 1$, so ist

$$\frac{2-2\|x\|}{\|x\|} = 0.$$

und somit ist $f(x) = (0,-1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Also faktorisiert f über $\overline{f} : D^n/S^{n-1} \to S^n$. Wir sehen wieder leicht, dass $\overline{f}$ stetige Bijektion ist. Da D^n/S^{n-1} kompakt und S^n Hausdorffsch, folgt wieder, dass $\overline{f}$ ein Homöomorphismus ist.

b) Wir erhalten nun eine Abbildung:

$$S^n \xrightarrow{q} S^n/(x \sim -x) \cong \mathbb{RP}^n \cong D^n/(x \sim -x) \longrightarrow D^n/S^{n-1} \cong S^n$$

und diese ist im Allgemeinen kein Homöomorphismus, denn jeder Punkt hat 2 Urbilder.

Abbildung skizzieren

6 Basen und Subbasen

Definition 6.1 (Basis)**.** Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Sei $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{O}$ eine Menge offener Mengen. Dann heißt $\mathcal{S}$

Basis , falls $\forall U \subseteq \mathcal{O}$ existiert $S_i \in \mathcal{S}$ mit $U = \bigcup_{i \in I} S_i$

Subbasis , falls $\forall U \in \mathcal{O}$ existieren I, K_i endlich sowie $S_k \in \mathcal{S}$ mit

$$U = \bigcup_{i \in I} \bigcap_{k \in K_i} S_k.$$

Bemerkung. Ist $\mathcal{S}$ eine Basis, so ist $\mathcal{S}$ eine Subbasis.

Beispiel. Ist (X, d) ein metrischer Raum, so ist

$$\mathcal{S} = \{U(x, \varepsilon) \mid x \in X, \varepsilon > 0\}.$$

eine Basis der Topologie.

Satz 6.2 (Erzeugte Topologie)**.** Sei X eine Menge, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine Menge von Teilmengen. Dann existiert genau eine Topologie auf X, für die $\mathcal{S}$ eine Subbasis ist, nämlich:

$$\mathcal{O} = \left\{ U \subseteq X \mid U = \bigcup_{i \in I} \bigcap_{k \in K_i} S_k \text{ mit } |K_i| < \infty, S_k \in \mathcal{S} \right\}.$$

Beweis. Übung. □

Notation. Wir nennen $\mathcal{O}$ die **von $\mathcal{S}$ erzeugte Topologie**.

Lemma 6.3 (Stetigkeit auf Subbasiselementen)**.** Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen, $\mathcal{S}$ eine Subbasis von Y. Dann sind äquivalent:

1) f ist stetig
2) $f^{-1}(S)$ ist offen für alle $S \in \mathcal{S}$

Beweis. '1) $\Rightarrow$ 2)' ist klar, da Subbasiselemente offen sind.
'2) $\Rightarrow$ 1)'. Sei $U \subseteq Y$ offen, dann $\exists K_i$ endlich und $S_k \in \mathcal{S}$ mit

$$U = \bigcup_{i \in I} \bigcap_{k \in K_i} S_k.$$

Dann ist aber genau

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} \bigcap_{k \in K_i} \underbrace{f^{-1}(S_k)}_{\text{offen}}.$$

offen, weil endliche Schnitte und beliebige Vereinigung offener Mengen offen sind. Also ist f stetig. ☐

Satz 6.4. Eine Subbasis $\mathcal{S}$ von $(X, \mathcal{O})$ ist eine Basis genau dann, wenn

$$\forall S_1, S_2 \in \mathcal{S}\ \exists S_i \in \mathcal{S} \colon S_1 \cap S_2 = \bigcup_{i \in I} S_i.$$

Beweis. '$\Rightarrow$' Da $S_1, S_2 \in \mathcal{S}$ sind diese offen. Dann ist auch $S_1 \cap S_2$ offen. Ist $\mathcal{S}$ Basis, dann gibt es also $S_i \in \mathcal{S}$ mit

$$S_1 \cap S_2 = \bigcup_{i \in I} S_i.$$

'$\Leftarrow$' Angenommen, $U \subseteq X$ ist offen und von der Form

$$U = \bigcup_{i \in I} \left(\bigcap_{k \in K_i} S_k \right).$$

mit K_i endlich und $S_k \in \mathcal{S}$. Nach Annahme ist

$$\bigcap_{k \in K_i} = \bigcup_{j \in J_i} S_j.$$

und damit ist

$$U = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J_i} S_j.$$

☐

Bemerkung*. Nach Annahme ist eigentlich erstmal der Schnitt von 2 Mengen die Vereinigung von S_i. Allerdings kann man dies per Induktion leicht auf n Teilmengen verallgemeinern, wenn wir

$$\bigcap_{k=1}^{n} S_k = S_1 \cap \bigcap_{k=2}^{n} S_k = S_1 \cap \bigcup_{i \in I} S_i = \bigcap_{i \in I} (S_i \cap S_k) = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J_i} S_j.$$

für geeignete $S_i, S_j \in \mathcal{S}$ schreiben.

Satz 6.5 (Satz von Alexander)**.** Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{S}$ eine Subbasis. Dann ist X kompakt genau dann, wenn jede Überdeckung durch Elemente aus $\mathcal{S}$ eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Beweis. '$\Rightarrow$' ist klar.

'$\Leftarrow$' Angenommen, X ist nicht kompakt, dann betrachte die Menge

$$\mathcal{C} := \left\{U \mid U \text{ offene Überdeckung } \underline{\text{ohne}} \text{ endliche Teilüberdeckung}\right\} \neq \varnothing.$$

Es ist $\mathcal{C}$ partiell geordnet, indem wir $U \leqslant U'$ für $U \subseteq U'$ setzen.

Ist $U_1 \subseteq U_2 \subseteq \ldots$ eine Kette, so ist $\bigcup_{U_i} \in \mathcal{C}$, denn

- Offenbar ist $\bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung.
- Hat $\bigcup_{i \in I} U_i$ eine endliche Teilüberdeckung, so ist diese schon in einem U_i enthalten, und damit enthielte auch dieses U_i bereits eine endliche Teilüberedckung $\lightning$

Wir können also das Lemma von Zorn anwenden, und somit existiert ein maximales Elment $U \in \mathcal{C}$.

Behauptung 1. *Ist $V \subseteq X$ offen und $V \notin U$, so hat $U \cup \{V\}$ eine endliche Teilüberdeckung*

Unterbeweis. Sonst wäre $U \cup \{V\} \in \mathcal{C}$ und somit wäre U nicht maximal ■

Behauptung 2. *$U \cap \mathcal{S}$ ist keine Überdeckung*

Unterbeweis. Sonst hätte U eine endliche Teilüberedckung nach Annahme. ■

Wegen Behauptung 2 existiert $x \in X$, der nicht von $U \cap \mathcal{S}$ überdeckt wird. Sei $W \in U$ mit $x \in W$. Da W offen ist, folgt

$$W = \bigcup_{i \in I} \bigcap_{k \in K_i} S_k.$$

mit K_i endlich und $S_k \in \mathcal{S}$. Dann existieren also $S_1, \ldots, S_n$ mit

$$x \in \bigcap_{i=1}^{n} S_i \subseteq W.$$

Da x nicht von $U \cap \mathcal{S}$ überdeckt wird, ist $S_i \notin U$. Aus der ersten Behauptung wissen wir nun aber, dass es $U_1^i, \ldots, u_{n_i}^i \in U$ mit

$$\left\{U_j^i\right\}_{j=1}^{n} \cup \{S_i\} \quad \text{ist Überdeckung von } X.$$

Sei nun

$$\hat{U} := \left\{U_j^i \mid 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n_i\right\} \subseteq U.$$

Für alle i gilt also

$$X \subseteq \bigcup_{V \in \hat{U}} V \cup S_i.$$

Also folgt

$$X \setminus \bigcup_{V \in \hat{U}} V \subseteq S_i.$$

und damit ist auch

$$X \setminus \bigcup_{V \in \hat{U}} V \subseteq S_1 \cap \ldots \cap S_n \subseteq W \in U.$$

Also ist $\hat{U} \cup \{W\}$ eine endliche Teilüberdeckung von U, $\lightning$. □

Vorlesung 6
Do 29 Apr 2021 10:01

7 Produkte

Definition 7.1 (Produkttopologie)**.** Seien X_1, X_2 topologische Räume. Die **Produkttopologie** auf $X_1 \times X_2$ ist die Topologie erzeugt von

$$\mathcal{B} = \{U_1 \times U_2 \mid U_1 \subseteq X_1 \text{ offen }, U_2 \subseteq X_2 \text{ offen}\}.$$

Beispiel. Seien (X_1, d_1) und (X_2, d_2) metrische Räume. Auf $X_1 \times X_2$ haben wir die Metriken definiert durch

$$\begin{aligned} d_{\max}((x_1, x_2), (y_1, y_2) &:= \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\} \\ \tilde{d}_1((x_1, x_2), (y_2, y_2)) &:= d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2) \\ \tilde{d}_2((x_1, x_2), (y_1, y_2)) &:= \sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2} \end{aligned} \quad .$$

Dies Metriken sind paarweise äquivalent (leicht zu prüfen). Zudem sind ε-Bälle in $d_{\max}$ gegeben durch

$$U_{d_{\max}}((x_1, x_2), \varepsilon)) = U_{d_1}(x_1, \varepsilon) \times U_{d_2}(x_2, \varepsilon).$$

D.h. die von $d_{\max}$ induzierte Topologie ist die Produkttopologie.

Beispiel. Es ist $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, wobei wir auf der linken Seite die Standardtopologie und auf der rechten Seite die Proudkttopologie meinen.

Bemerkung. $\mathcal{B}$ ist per Definition eine Subbasis der Produkttopologie, in der Tat handelt es sich jedoch sogar um eine Basis:

Beweis. Seien $U_1 \times U_2$ sowie $V_1 \times V_2 \in \mathcal{B}$ Basiselemente. Wir stellen fest, dass

$$(U_1 \times U_2) \cap (V_1 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2).$$

das Produkt zweier Basiselemente ist, und somit sind wir fertig. $\square$

Satz 7.2 (Projektion auf Komponenten)**.** Die Projektionen

$$p_x : \left| \begin{array}{ccc} X \times Y & \longrightarrow & X \\ (x, y) & \longmapsto & x \end{array} \right. \qquad p_Y : \left| \begin{array}{ccc} X \times Y & \longrightarrow & Y \\ (x, y) & \longmapsto & y \end{array} \right.$$

sind stetig und offen

Beweis. Sei $U \subseteq X$ offen. Dann ist $p_X^{-1}(U) = U \times Y \in \mathcal{B}$, also offen. Analoges gilt für p_Y.

Sei $U \subseteq X \times Y$ offen. Dann können wir U schreiben als

$$U = \bigcup_{i \in I} U_i \times V_i.$$

OBdA können wir $V_i \neq \varnothing$ annehmen. Dann ist aber

$$P_X(U) = \bigcup_{i \in I} p_X(U_i \times V_i) = \bigcup_{i \in I} U_i \subseteq X.$$

offen, also ist p_X offen. □

Bemerkung. Die Projektion p_X ist i.A. nicht abgeschlossen.

Beweis. Betrachte $A = \left\{\left(\frac{1}{n}, n\right) \in \mathbb{R}^2 \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\right\} \subseteq \mathbb{R}^2$ abgeschlossen. Dann ist aber $p_1(A) = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\right\} \subseteq \mathbb{R}$ nicht abgeschlossen. □

Satz 7.3. Ist Y kompakt, so ist p_X abgeschlossen.

Beweis. Sei $A \subseteq X \times Y$ abgeschlossen. Wir müssen zeigen, dass $X \backslash p_X(A)$ offen ist, also wähle $x \in X \backslash p_X(A)$. Für alle $y \in Y$ ist $(x, y) \notin A$ (sonst wäre $x \in p_X(A)$, also gibt es

$$x \in U_y \subseteq X \quad y \in V_y \subseteq Y \text{ offen}: (U_y \times V_y) \cap A = \varnothing.$$

Damit sind die $\{V_y\}_{y \in Y}$ eine offene Überdeckung von Y und wir finden mit Y kompakt eine endliche Teilüberdeckung $V_{y_1}, \ldots, V_{y_n}$ von Y. Setzen wir nun

$$U := \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}.$$

so ist $U \subseteq X$ offen als endlicher Schnitt und wir stellen mit

$$U \times V_{y_i} \subseteq U_{y_i} \times V_{y_i} \subseteq (X \times Y) \backslash A.$$

fest, dass bereits $U \times Y \subseteq (X \times Y) \backslash A$ (weil die V_{y_i} bereits Y überdecken). Nun muss aber bereits

$$U \subseteq X \backslash p_X(A).$$

gelten, und damit ist dieses U eine offene Umgebung von $x \in X \backslash p_X(A)$. □

Lemma 7.4 (Subbasis der Produkttopologie)**.** Seien X, Y topologische Räume. Die Menge

$$\mathcal{S} = \{U \times Y, X \times V \mid U \subseteq X \text{ offen}, V \subseteq Y \text{ offen}\}.$$

ist eine Subbasis der Produkttopologie.

Beweis. Sei $W \subseteq X \times Y$ offen. Dann gibt es nach der Definition der Produkttopologie $U_i \subseteq X, V_i \subseteq Y$ offen mit

$$W = \bigcup_{i \in I} (U_i \times V_i).$$

Also ist bereits

$$W = \bigcup_{i \in I} ((U_i \times Y) \cap (X \times V_i)).$$

eine Vereinigung endlicher Schnitt von unseren Subbasiselementen.

Umgekehrt ist klar, dass alle Elemente aus $\mathcal{S}$ auch offene Mengen in der Produkttopologie sind, da $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}$. □

Satz 7.5 (Universelle Eigenschaft des Produkts)**.** Seien A, X_1, X_2 topologische Räume sowie $f_i : A \to X_i$. Dann ist die Abbildung

$$(f_1 \times f_2) =: f \left| \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X_1 \times X_2 \\ a & \longmapsto & (f_1(a), f_2(a)) \end{array} \right.$$

stetig genau dann, wenn f_1, f_2 stetig sind.

$$\begin{tikzcd}
 & & X_1 \\
A \arrow[rru, bend left, "f_1"] \arrow[r, dashed, "f"] \arrow[rrd, bend right, "f_2"'] & X_1 \times X_2 \arrow[ru, "p_1"] \arrow[rd, "p_2"] & \\
 & & X_2
\end{tikzcd}$$

Beweis. Es ist $f_i = p_i \circ f$. Ist f stetig, so ist f_i stetig als Verknüpfung stetiger Funktionen.

Angenommen, es sind f_1, f_2 stetig. Wir müssen zeigen, dass für alle $U_1 \times U_2 \subseteq X_1 \times X_2$ mit $U_i \subseteq X_i$ offen auch $f^{-1}(U_1 \times U_2)$ offen ist. Hierzu stellen wir aber fest, dass

$$f^{-1}(U_1 \times U_2) = f_1^{-1}(U_1) \cap f_2^{-1}(U_2).$$

offen ist. □

Beispiel. a) Wir behaupten, dass

$$\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \cong S^n \times (0, \infty) \cong S^n \times \mathbb{R}.$$

ist. Betrachte hierzu

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} & \longrightarrow & S^n \times (0, \infty) \\ x & \longmapsto & \left(\frac{x}{\|x\|_2}, \|x\|_2 \right) \end{array} \right.$$

Wir sehen nun mit der universellen Eigenschaft sofort, dass es sich um eine stetige Abbildung handelt. Zudem haben wir die Umkehrfunktion

$$\begin{array}{ccc} S^n \times (0, \infty) & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \\ (y, t) & \longmapsto & t \cdot y \end{array}$$

Wir müssen noch prüfen, dass diese stetig ist (Übung), dann haben wir einen Homöomorphismus.

b) $S^1 \times S^1$ ist ein Torus. Betrachte hierzu

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} [0,1]^2 & \longrightarrow & S^1 \times S^1 \\ (s, t) & \longmapsto & (e^{2\pi i s}, e^{2\pi i t}) \end{array} \right.$$

φ ist stetig und erfüllt $\varphi(s, 0) = \varphi(s, 1)$ sowie $\varphi(0, t) = \varphi(1, t)$.

Also faktorisiert φ wie gewünscht als

$$\begin{tikzcd}
{[0,1]^2} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & S^1 \times S^1 \\
{[0,1]^2 / \sim} \arrow[ru, "\varphi'"'] &
\end{tikzcd}$$

wobei $\sim$ die Relation ist, die wir für die Konstruktion des Torus verwendet hatten. φ' ist stetig und surjektiv nach der Universellen Eigenschaft, und wir sehen leicht, dass φ' injektiv ist. Also ist φ' stetig und bijektiv. Nun ist aber $[0,1]^2$ kompakt und $S^1 \times S^1$ Hausdorff (z.B. als metrisierbare Teilmenge von $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$), und somit ist φ' ein Homöomorphismus nach Korollar 5.8

Korollar 7.6 (Komponente eines Produkts)**.** Seien X, Y topologische Räume sowie $y \in Y$. Dann ist $X \cong X \times \{y\} \subseteq X \times Y$ mittels $x \mapsto (x, y)$.

Beweis. Nenne diese Abbildung f, also

$$f : \left| \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X \times Y \\ x & \longmapsto & (x,y) \end{array} \right.$$

f ist stetig, da sowohl id_X als auch

$$c_Y : \left| \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ x & \longmapsto & y \end{array} \right.$$

stetig sind (mit universeller Eigenschaft). f faktorisiert nun über $X \times \{y\} \subseteq X \times Y$ und $f : X \to X \times \{y\}$ ist offensichtlich bijektiv. Wir müssen also noch zeigen, dass $f$offen ist.

Sei $U \subseteq X$ offen, dann ist $U \times Y \subseteq X \times Y$ offen. Es ist zudem

$$f(U) = U \times \{y\} = U \times Y \cap X \times \{y\} \subseteq X \times \{y\}\,.$$

in $X \times \{y\}$ offen. □

Satz 7.7 (Produkteigenschaften)**.** Seien X, Y topologische Räume.
1) Sind X und Y Hausdorffsch, so auch $X \times Y$
2) Sind X und Y kompakt, so auch $X \times Y$.

Beweis. 1) Seien $(x,y) \neq (x', y' \in X \times Y$. Dann ist $x \neq x'$ oder $y \neq y'$. OBdA sei $x \neq x'$. Dann existieren $U, U' \subseteq X$ offen mit $x \in U, x' \in U'$ und $U \cap U' = \varnothing$, weil X Hausdorffsch. Dann sind

$$(x,y) \in U \times Y \qquad (x', y') \in U' \times Y.$$

jeweils offen, und ihr Schnitt ist

$$(U \times Y) \times (U' \times Y) = (U \cap U') \times Y = \varnothing.$$

Also ist $X \times Y$ Hausdorffsch.

2) Wir wollen den Satz von Alexander (6.5) verwenden. Sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von $X \times Y$ mit Elementen der Form $U \times Y$ oder $X \times V$. Sei

$$W = \bigcup_{U \times Y \in \mathcal{U}} U \subseteq X \qquad W' = \bigcup_{X \times V \in \mathcal{U}} V \subseteq Y.$$

Ist $W = X$, so existiert eine endliche Teilüberdeckung von $\{U \mid U \times Y \in \mathcal{U}\}$ durch $U_1, \ldots, U_n$. Dann ist bereits

$$\{U_i \times Y \mid i = 1, \ldots, n\}\,.$$

eine endliche Teilüberdeckung von $X \times Y$. Für $W' = Y$ verfahren wir genauso. Ist $W \neq X$ und $W' \neq Y$, so existiert $x \in X \backslash W, y \in Y \backslash W'$. Dann ist (x, y) aber nicht von $\mathcal{U}$ überdeckt, weil er von keinem $U \times Y$ und von keinem $X \times V$ überdeckt wird, $\lightning$.
Also finden wir in beiden Fällen eine endliche Teilüberdeckung.

□

Bemerkung. Der Beweis geht auch ohne den Satz von Alexander. Viel leichter: Es genügt, offene Überdeckungen bezüglich einer Basis zu betrachten (Spezialfall von Alexander, leicht zu zeigen), dann verfahren wir wie folgt:
Sei $\mathcal{U}$ eine Überdeckung von $X \times Y$ mit Elementen aus $\mathcal{B}$. Dann gibt es eine endliche Teilüebredckung von $X \times \{y\}$. Sei diese $\{U_i^y \times V_i^y\}\, i = 1^{n_y}$. Setze

$$V_y := \bigcap_{i=1}^{n_Y} V_i^y .$$

Dann ist dies eine Überdeckung von $X \times V_y$. Die V_y bilden nun eine offene Überdeckung von Y, also finden wir wieder eine endliche Teilüberdeckung durch $V_{y_1}, \ldots, V_{y_n}$. Da wir aber die $X \times V_{y_i}$ jeweils endlich überdeckt haben, können wir nun auch $X \times Y$ endlich überdecken.

Definition† (Produkt endlich vieler Mengen)**.** Seien $X_1, \ldots, X_n$ topologische Räume. Dann definieren wir ihr Produkt rekursiv durch

$$X_1 \times \ldots \times X_n := (X_1 \times \ldots \times X_{n-1}) \times X_n .$$

Lemma 7.8 (Basis des Produktes)**.** Seien X, Y topologische Räume mit Basen $\mathcal{B}_X, \mathcal{B}_Y$. Dann ist

$$\mathcal{B}_{X \times Y} := \{U \times V \mid U \in \mathcal{B}_X, V \in \mathcal{B}_Y\} .$$

eine Basis der Topologie auf $X \times Y$.

Korollar (Basis endlicher Produkte)**.** Die Mengen $U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$ mit $U_i \subseteq X_i$ offen sind eine Basis der Topologie auf $X_1 \times \ldots \times X_n$. Insbesondere ist die Topologie unabhängig von der Klammerung.

Beweis. Setze $\mathcal{B}_{X_i} = \mathcal{O}_{X_i}$. □

Beweis von Lemma 7.8. Seien $W \in X, W' \subseteq Y$ offen. Dann existieren $U_i \in \mathcal{B}_X$ sowie $V_j \in \mathcal{B}_Y$ mit

$$W = \bigcup_{i \in I} U_i \qquad W' = \bigcup_{j \in J} V_j .$$

Dann ist bereits:

$$W \times W' = \bigcup_{\substack{i \in I \\ j \in J}} U_i \times V_j .$$

Ist nun $A \subseteq X \times Y$ beliebig offen, so gilt

$$A = \bigcup W_i \times W_i' = \bigcup_{\substack{i \in I \\ j \in J}} \bigcup U_i \times V_j .$$

Umgekehrt ist klar, dass die $U_i \times V_j$ offen in der Produkttopologie sind. $\square$

> **Bemerkung*.** Im Beweis wurden - der Einfachheit halber - manche Indexmengen

> **Bemerkung*.** Eigentlich haben wir im Beweis des Korollars die Aussage von Lemma 7.8 für beliebig viele Räumen (endlich viele) benutzt. Man verallgemeinert das Lemma jedoch induktiv leicht auf endlich viele Räume:

Beweis von Lemma 7.8.* Den Fall $n = 2$ verwenden wir als Induktionsanfang, er wurde bereits gezeigt. Seien nun $X_1, \dots, X_n$ mit Basen $\mathcal{B}_i$ gegeben, dann wissen wir per Induktionsannahme bereits, dass

$$\mathcal{B}_{X_1 \times \ldots \times X_{n-1}} := \{U_1 \times \ldots \times U_{n-1} \mid U_i \in \mathcal{B}_i\} .$$

eine Basis von $X_1 \times \ldots \times X_{n-1}$ ist. Zudem ist $\mathcal{B}_n$ eine Basis von X_n und somit ist

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{(X_1 \times \ldots \times X_{n-1}) \times X_n} &:= \{(U_1 \times \ldots U_{n-1}) \times U_n \mid U_i \in \mathcal{B}_i\} \\ &= \{U_1 \times \ldots \times U_n \mid U_i \in \mathcal{B}_i\} \\ &=: \mathcal{B}_{X_1 \times \ldots \times X_n} \end{aligned}$$

eine Basis von $(X_1 \times \ldots X_{n-1}) \times X_n = X_1 \times \ldots \times X_n$ und der Induktionsschritt ist erbracht. $\square$

> **Satz 7.9** (Diagonaleigenschaft)**.** Sei X ein topologischer Raum. Dann ist X Hausdorffsch, genau dann, wenn
>
> $$\Delta_X := \{(x, x) \mid x \in X\} \subseteq X \times X.$$
>
> abgeschlossen ist.

> **Notation.** Wir nennen $\Delta_X \subseteq X^2$ die **Diagonale von X**.

Beweis. '$\Rightarrow$' Nimm an, dass X Hausdroffsch ist und sei $(x, y) \in X \times X \backslash \Delta_X$, d.h. $x \neq y$. Dann existieren $x \in U_x, y \in U_y$ offen (in X), sodass $U_x \cap U_y = \varnothing$. Also ist

$$(x, y) \in U_x \times U_y \subseteq X \times X \backslash \Delta_X .$$

, denn wenn $(a, b) \in U_x \times U_y$, dann ist $a \neq b$. Also ist $X \times X \backslash \Delta_X$ offen nach Definition.

'$\Leftarrow$' Nimm nun an, dass die Diagonale abgeschlosen ist. Seien $x, y \in X$ mit $x \neq y$ beliebig. Dann ist

$$(x, y) \in X \times X \backslash \Delta_X = \bigcup_{i \in I} U_i \times V_i .$$

Also ist $(x,y) \in U \times V \subseteq X \times X \backslash \Delta_X$ für eine Wahl von U, V. Dann ist aber $x \in U, y \in V$ sowie $U \cap V = \emptyset$, denn wenn $a \in U \times V$, so $(a,a) \in U \times V \cap \Delta_X = \emptyset$, $\lightning$. □

Definition 7.10 (Produkte beliebiger Mengen)**.** Sei $\{X_i\}_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume. Die Produkttopologie auf

$$\prod_{i \in I} X_i := \{(x_i)_{i \in I} \mid x_i \in X_i\}.$$

ist die Topologie erzeugt von der Subbasis

$$\mathcal{S} := \left\{ U_j \times \prod_{i \neq j} X_i \mid j \in I, U_j \subseteq X_j \text{ offen} \right\}.$$

Bemerkung.

- $\mathcal{S}$ ist wirklich nur eine Subbasis. Eine Basis ist gegeben durch

$$\mathcal{B} := \left\{ \prod_{j \in J} U_j \times \prod_{i \in I \backslash J} X_i \mid J \subseteq I \text{ endlich}, U_j \subseteq X_j \text{ offen} \right\}.$$

  d.h. wir dürfen bei endlich vielen Faktoren eine endliche Teilmenge wählen, und wählen in den restlichen Faktoren den ganzen Raum
- Ist I endlich, so stimmt dies mit der vorherigen Definiton überein, weil wir für die Basis jeweils $J = I$ wählen können.
- ⚠ Ist I unendlich, so ist im Allgemeinen

$$\prod_{i \in I} U_i.$$

  mit $U_i \subseteq X_i$ offen <u>nicht</u> offen.

Bemerkung* (Mengentheorie-Spam)**.**

- Wir benötigen das Auswahlaxiom, um einzusehen, dass obiges Produkt überhaupt nichtleer ist, sofern keiner der Faktoren leer ist. Formal ist das Produkt der X_i nämlich definiert als

$$\prod_{i \in I} X_i := \left\{ f : I \to \bigcup_{i \in I} X_i \mid \forall i \colon f(i) \in X_i \right\}.$$

  und das Auswahlaxiom besagt genau, dass es für jede solche Familie nichtleerere Mengene (mindestens) eine solche Funktion gibt (es ist also äquivalent dazu, dass die Produkte nichtleer sind).
- Im Gegensatz zu dem, was in der Vorlesung genannt wurde, ist es kein Problem, wenn $I = \emptyset$, also die Familie leer ist. Dann

ist nämlich

$$\prod_{i\in I} X_i = \{f : \varnothing \to \varnothing \mid \forall i\colon f(i) \in \varnothing\} = \{\varnothing\}\,.$$

<u>nicht</u> leer. (Hierzu sollte man sich klarmachen, dass eine Funktion $f : A \to B$ eine Teilmenge von $A \times B$ war, sodass $\forall a \in A\ \exists! b \in B\colon (a,b) \in f$, und somit suchen wir eine Teilmenge $f \subseteq \varnothing \times \varnothing = \varnothing$).
Auch die Topologie ist in diesem Fall wohldefiniert, weil die Subbasis wieder die leere Menge ist (nämlich eine Teilmenge von $\prod X_i = \{\varnothing\}$, und zwar $\{\varnothing\}$ selbst), und diese ist auch eine vollständige Topologie, weil unser topologischer Raum nur einen Punkt enthält (nämlich $\varnothing$). Wir erhalten also den einpunktigen topologischen Raum.

Vorlesung 7
Di 04 Mai 2021 12:12

Satz 7.11 (Universelle Eigenschaft des Produkts)**.** Seien $(X_i)_{i\in I}$ topologische Räume, A ein topologischer Raum und seien $f_i : A \to X_i$ Funktionen. Sei

$$f : \left|\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \prod_{i\in I} X_i \\ a & \longmapsto & (f_i(a))_{i\in I} \end{array}\right.$$

Dann ist f stetig genau dann, wenn alle f_i stetig sind.

$$\begin{tikzcd}
& & X_1 \\
& & X_2 \\
A \arrow[uurr, bend left, "f_1"] \arrow[urr, bend left, "f_2"] \arrow[r, dashed, "f"] \arrow[drr, bend right, "f_i"'] \arrow[ddrr, dashed, bend right] & \prod_{i\in I} X_i \arrow[uur, "\mathrm{pr}_1"] \arrow[ur, "\mathrm{pr}_2"] \arrow[r, dashed] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_i"] \arrow[ddr, dashed] & \vdots \\
& & X_i \\
& & \vdots
\end{tikzcd}\,.$$

Bemerkung*. Die Universelle Eigenschaft ist genau genommen die Folgende:
Seine $(X_i)_{i\in I}$ topologische Räume. Ein topologischer Raum X zusammen mit Abbildung $\mathrm{pr}_i : X \to X_i$ wird Produkt der X_i genannt, wenn es für jedes A und stetige Abbildungen $f_i : A \to X_i$ genau eine induzierte Abbildung $f : A \to X$ gibt.
Diese Eigenschaft ist nun universell im Sinne der Kategorientheorie, d.h. bis auf eindeutig bestimmten Isomorphismus gibt es nur ein Paar $(X, (\mathrm{pr}_i)_{i\in I})$, das die oben genannten Eigenschaften bestimmt.
Wir haben zwar oben nicht die Eindeutigkeit des Produkts gezeigt, aber dessen Existenz (was aus der Kategorientheorie nicht ohne weiteres folgt), indem wir ein explizites solches Objekt konstruiert haben.

Bemerkung*. Insbesondere sollte man sich merken, dass die kanonischen Projektionen pr_i wichtiger Teil der Information eines Produktes sind. Bei unsere expliziten Konstruktion 'kanonisch', denkbar ist jedoch auch, eine völlig andere Trägermenge des Produkts zu wählen, dann ist die Angabe der Projektionen essentiell.

Beweis. '⇒' Sei $j \in I$, setze

$$pr_j : \left| \begin{array}{ccc} \prod_{i \in I} & \longrightarrow & X_j \\ (x_i)_{i \in I} & \longmapsto & x_j \end{array} \right.$$

als Projektion auf die j-te Komponente.

Behauptung 1. pr_j *ist stetig*

Unterbeweis. Ist $U \subseteq X_j$ offen, dann ist $pr_j^{-1}(U) = U \times \prod_{i \neq j} X_i \in \mathcal{S}$ ein Element der Subbasis der Produkttopologie, also offen. Also ist pr_j stetig. ■

Nun ist $f_j = pr_j \circ f$ stetig als Verknüpfung stetiger Funktionen.

Verknüpfungen stetiger Funktionen sind stetig:
Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ stetig, dann ist $g \circ f : X \to Z$ stetig.

Beweis. Ist $U \subseteq Z$ offen, so ist

$$(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U)) \subseteq X.$$

offen, indem wir zunächst g stetig und dann f stetig verwenden. □

'⇐' Es genügt zu zeigen, dass $f^{-1}(Y) \subseteq A$ offen ist für alle $Y \in \mathcal{S}$. Sei also solch ein $Y \in \mathcal{S}$ beliebig, dann ist dieses von der Form

$$Y = U \times \prod_{i \neq j} X_i.$$

Dann ist $f^{-1}(Y) = f_j^{-1}(A) \subseteq A$ offen, da f_j stetig ist. □

Satz 7.12 (Satz von Tychonoff)**.** Sei $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie kompakter Räume. Dann ist $\prod_{i \in I} X_i$ kompakt.

Beweis. Wir verwenden wieder den Satz von Alexander (Satz 6.5). Sei $\mathcal{U}$ eine Überdeckung durch Elemente aus $\mathcal{S}$. Sei $\mathcal{U}_j \subseteq \mathcal{U}$ gegeben durch die Elemente V von $\mathcal{U}$ der Form

$$V = W \times \prod_{i \neq j} X_i \qquad \text{mit } W \subseteq X_j \text{ offen.}$$

Dann ist

$$\mathcal{U} = \bigsqcup_{i \in I} \mathcal{U}_j.$$

Ist nun

$$\mathrm{pr}_i(\mathcal{U}_i) = \{\mathrm{pr}_i(V) \mid V \in \mathcal{U}_i\}.$$

eine offene Überdeckung von X_i, so existiert - weil X_i kompakt - eine endliche Teilüberdeckung $\mathrm{pr}_i(V_1) \cup \ldots \cup \mathrm{pr}_i(V_k)$ von X_i mit $V_j \in \mathcal{U}_i$. Dann ist $V_1, \ldots, V_k$ eine endliche Teilüberedckung von $\prod_{i \in I} X_i$.

Wir sind also fertig, außer im Fall
$\mathbb{A}$: $\mathrm{pr}_i(\mathcal{U}_i)$ ist keine Überdeckung von X_i für alle $i \in I$.
Dann finden wir $x_i \in X_i \setminus \bigcup_{V \in \mathcal{U}_i} \mathrm{pr}_i(V)$ für jedes $i \in I$. Dann ist aber der Punkt

$$(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i.$$

nicht von $\mathcal{U}$ überdeckt: Ist $(x_i)_{i \in I} \in V \in \mathcal{U}$, dann gibt es $i \in I$ mit $V \in \mathcal{U}_i$, und daraus folgt bereits $x_i \in \mathrm{pr}_i(V)$, $\lightning$. □

Bemerkung. Eigentlich haben wir die Notation pr_j für die Projektion $\prod_{i \in I} X_i \to X_j$ eingeführt, manchmal schreiben wir aber auch einfach nur p_j.

Beispiel. a) Seien $X_1, \ldots, X_n$ diskrete Räume. Dann ist auch $\prod_{i \in I} X_i$ diskret.
Beweis. Es ist

$$\{(x_1, \ldots, x_n)\} = \{x_1\} \times \ldots \times \{x_n\}.$$

Element der Produkttopologie, weil die $\{x_i\} \subseteq X_i$ offen sind. Also sind alle Punkte offen. □

b) Betrachte $\{0, 2\}$ mit der diskreten Topologie. Dann ist

$$\prod_{\mathbb{N}} \{0, 2\} =: \{0, 2\}^{\mathbb{N}}.$$

kompakt nach dem Satz von Tychonoff. Dann ist $\prod_{\mathbb{N}} \{0, 2\}$ aber nicht diskret, weil wir sonst die offene Überdeckung

$$\prod_{\mathbb{N}} \{0, 2\} = \bigcup_{x \in \{0,2\}^{\mathbb{N}}} \{x\}.$$

hätten, die keine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Bemerkung*. Das Beispiel zeigt die wichtige Eigenschaft, dass nicht (notwendigerweise) alle Mengen der Form $\prod_{i \in I} U_i$ für $U_i \subseteq X_i$ offen auch im Produkt $\prod_{i \in I} X_i$ offen sind.

Satz 7.13. Ist $\{X_i\}_{i \in I}$ eine Familie von Hausdorffräumen, so ist auch $\prod_{i \in I} X_i$ Hausdorffsch.

Beweis. Ist $(x_i)_{i \in I} \neq (y_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i$, dann gibt es $i \in I$ mit $x_i \neq y_i$. Da X_i Hausdorffsch ist, existieren $U_i, V_i \subseteq X_i$ offen mit $x_i \in U_i, y_i \in V_i$ und $U_i \cap V_i = \varnothing$. Dann sind aber beretis

$$U_i \times \prod_{i \neq j} X_j \qquad V_i \times \prod_{i \neq j} X_j.$$

zwei disjunkte, offene Umgebungen von $(x_i)_{i \in I}$ und $(y_i)_{i \in I}$. □

Ziel*. Wir wollen uns im Folgenden Fragen, wann wir Räume in 'schöne' Räume einbetten können, wobei 'schön' für uns Kompakt + Hausdorff heißen soll.

Definition 7.14 (Abschluss, Dichtheit)**.** Sei X ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$ eine Teilmenge.

1) Der **Abschluss** $\overline{Y}$ ist definiert als
$$\overline{Y} := \bigcap_{\substack{Y \subseteq A \\ A \subseteq X \text{ abg.}}} A.$$
Als Schnitt abgeschlossener Mengen ist $\overline{Y}$ selbst abgeschlossen (wie der Name suggeriert).
2) Y ist **dicht** in X, falls $\overline{Y} = X$.

Definition 7.15 (Einbettung)**.** Sei $f : X \to Y$ stetig. Dann ist f eine **Einbettung**, falls $f : X \to f(X)$ ein Homöomorphismus ist.

Definition 7.16 (Kompaktifizierung)**.** Sei $\iota : Y \hookrightarrow X$ eine Einbettung. Dann ist X eine **Kompaktifizierung** von Y, falls

1) X ist kompakt und Hausdorffsch.
2) $\iota(Y) \subseteq X$ ist dicht (in X).

Definition 7.17 (Vollständige Regularität)**.** Ein topologischer Raum X ist **vollständig regulär**, falls

1) X ist Hausdorffsch
2) $\forall A \subseteq X$ abgeschlossen und $x \in X \setminus A$ existiert eine stetige Abbildung $f : X \to [0,1]$, sodass $f(x) = 1$ und $f|_A \equiv 0$

Bemerkung. Jeder vollständig reguläre Raum ist regulär. Hierzu betrachte $f^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}, 1\right]\right)$ sowie $f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{2}\right)\right)$. Diese sind offenbar disjunkt, offen, und Umgebungen von x bzw. A.

Lemma 7.18. Ist X vollständig regulär und $Y \subseteq X$, dann ist auch Y vollständig regulär.

Beweis.
1) Da X Hausdorffsch ist, ist auch Y Hausdorffsch.
2) Sei $A \subseteq Y$ abgeschlossen und $y \in Y \setminus A$. Dann existiert $A' \subseteq X$ abgeschlossen mit $A' \cap Y = A$. Da X vollständig regulär ist, gibt es $f : X \to [0,1]$ stetig mit $f|_{A'} \equiv O$ und $f(y) = 1$. Dann erfüllt $f|_Y : Y \to [0,1]$ unsere gewünschten Bedingungen, weil
$$(f|_Y)|_A \equiv O \qquad f|_Y(y) = 1.$$

□

Satz 7.19. X ist genau dann vollständig regulär, wenn X eine Kompaktifizierung besitzt.

Beweis. Eine Richtung sei hier schon skizziert: Sei Y eine Kompaktifizierung von X. Da Y kompakt und Hausdorffsch, ist Y normal (nach Satz 5.10). Wir zeigen später, dass dann Y auch vollständig regulär ist. Mit Lemma 7.18 ist also auch $X \subseteq Y$ vollständig regulär. □

Bemerkung*. Hier verwenden wir entscheidend, dass wir nicht nur $X \hookrightarrow Y$ injektiv abgebildet, sondern eingebettet im Sinne von Definition 7.15 haben, damit wir X auch homöomorph mit einem Teilraum $X \subseteq Y$ identifizieren können.

Wir wollen nun zu einem beliebigen Raum eine Kompaktifizierung konstruieren. Sei X ein topologischer Raum. Sei

$$\mathcal{C}(X) := \{f : X \to [0,1] \mid f \text{ stetig}\}.$$

Nach dem Satz von Tychonoff ist $\prod_{\mathcal{C}(X)}[0,1]$ kompakt und nach Satz 7.13 Hausdorffsch. Definiere nun eine Abbildung

$$\iota : X \to \prod_{\mathcal{C}(X)} [0,1].$$

durch die Komponenten $\iota_f(x) = f(x)$. (wir benutzen also in der f-ten Komponente einfach die Abbildung f). Da alle $f \in \mathcal{C}(X)$ stetig sind, ist ι stetig (nach Satz 7.11). Setze nun

$$\beta X := \overline{\iota(X)} \subseteq \prod_{\mathcal{C}(X)} [0,1].$$

$\beta(X)$ ist kompakt und Hausdorffsch als abgeschlossener Teilraum eines kompakten Hausdorffraums.

Satz und Definition† (Stone-Čech-Kompaktifizierung)**.** Für einen topologischen Raum X heißt der eben konstruierte Raum $\beta X = \beta(X)$ **Stone-Čech-Kompaktifizierung** von X. βX ist ein kompakter Hausdorffraum.

Beweis.* Klar nach eben gesagtem, wir verwenden Satz von Tychonoff und Satz 7.13. □

Warnung. Diese ist jedoch nur eine Kompaktifizierung im Sinne von Definition 7.16 falls X vollständig regulär ist.

Bemerkung*. Wir wissen schon, dass es sich im Allgemeinen nicht um eine Kompaktifizierung nach Definition 7.16 handeln kann, weil wir im Beweis von Satz 7.19 gezeigt haben, dass eine Kompaktifizierung nur für vollständig reguläre Räume existieren kann. Der folgende Satz zeigt nun, dass es sich bei der Stonen-Čech-Kompaktifizierung tatsächlich um eine handelt, wenn X vollständig regulär ist:

Satz 7.20. $\iota : X \to \prod_{\mathcal{C}(X)}[0,1]$ ist eine Einbettung, falls X vollständig regulär ist.

Beweis. **Injektivität**: Seien $x \neq y \in X$. Dann sind $\{x\}, \{y\} \subseteq X$ abgeschlossen und es existiert $f : X \to [0,1]$ mit $f(x) = 0$ und $f(y) = 1$ (hier benutzen wir die vollständige Regularität). Dann ist aber bereits $\iota(x) \neq \iota(y)$ in Komponenten f.

Einbettung: Wir müssen noch zeigen, dass $\forall U \subseteq X$ offen $\iota(U) \subseteq \iota(X)$ offen ist, damit $\iota : X \to f(X)$ ein Homöomorphismus ist.

Sei $U \subseteq X$ offen, setze $A := X \backslash U$ und sei $x \in U$. Dann finden wir (nach vollständiger Regularität von X) eine Funktion $f : X \to [0,1]$, sodass $f(x) = 1$ und $f\mid_A = 0$. Setze

$$V := \left(\frac{1}{2}, 1\right]_f \times \prod_{\mathcal{C}(X)\backslash\{f\}} [0,1] \subseteq \prod_{\mathcal{C}(X)} [0,1].$$

als offene Teilmenge von $\prod_{\mathcal{C}(X)}[0,1]$. Dann ist

$$\iota(x) \in \underbrace{V \cap \iota(X)}_{\text{offen in } \iota(X)} \subseteq \iota(X\backslash A) = \iota(U).$$

Damit ist $\iota(U) \subseteq X$ Umgebung all seiner Punkte, also selbst offen. □

Bemerkung. Ist K kompakt und Hausdorffsch, so ist $\iota(K) \subseteq \prod_{\mathcal{C}(K)}[0,1]$ kompakt, also abgeschlossen, da $\prod_{\mathcal{C}(K)}[0,1]$ kompakt, und deswegen ist $\beta(K) = \overline{\iota(K)} = \iota(K) \cong K$.

Bemerkung*. Dass $\iota(K) \cong K$ folgt in vorheriger Bemerkung daraus, dass wir wegen K kompakt und Hausdorffsch nach Satz 5.10 wissen, dass K normal ist, und dann (mit der noch nicht bewiesenene Implikation normal $\Rightarrow$ vollständig regulär) den vorherigen Satz 7.20 anwenden können, weswegen ι eine Einbettung ist und somit einen Homöomorphismus $K \cong \iota(K)$ induziert.

Beweis von Satz 7.19.* Wir haben bereits gesehen, dass ein kompaktifizierbarer Raum notwendigerweise vollständig regulär ist (im ersten Teil des Beweises). Ist X nun vollständig regulär, so ist $\beta(X)$ ein kompakter Hausdorff-Raum, und nach Satz 7.20 handelt es sich bei $\iota_X : X \to \beta(X)$ genau um eine Einbettung. □

Lemma 7.21 (Fortsetzung stetiger Funktionen)**.** Sei $f : X \to Y$ stetig sowie $U \subseteq X$.
1) Dann ist $f(\overline{U}) \subseteq \overline{f(U)}$
2) Ist $U \subseteq X$ dicht, $g : X \to Y$ auch stetig und $f\mid_U = g\mid_U$ sowie Y Hausdorffsch, so ist beretis $f = g$

Beweis.* 1) Sei $y \in f(\overline{U})$, also gibt es $x \in \overline{U}$ mit $f(x) = y$. Sei $y \in V \subseteq X$ eine beliebige offene Umgebung von y. Dann ist $f^{-1}(V)$ eine offene Umgebung von x nach Stetigkeit von f. Da $x \in \overline{U}$ ist $f^{-1}(V) \cap U \neq \varnothing$ und wir wählen $x_0 \in f^{-1}(V) \cap U$. Dann ist $f(x_0) \in V \cap f(U)$ und somit $V \cap f(U) \neq \varnothing$. Da V beliebig war, ist nach Definition $y \in \overline{f(U)}$.

2) Nimm an, dass $f \neq g$, dann gibt es $x \in X$ mit $f(x)! = g(x)$. Da Y Hausdorffsch, können wir die beiden Punkte durch offene Mengen trennen, also finden wir $f(x) \in U_f, g(x) \in U_g$ mit $U_f \cap U_g = \varnothing$ und U_f, U_g offen. Dann sind auch $f^{-1}(U_f), g^{-1}(U_g)$ offene Mengen nach Stetigkeit von f, g, also ist auch $f^{-1}(U_f) \cap g^{-1}(U_g)$ offen. Zudem $x \in f^{-1}(U_f) \cap g^{-1}(U_g)$, da $f(x) \in U_f, g(x) \in U_g$ nach Voraussetzung. Da $U \subseteq X$ dicht ist, ist $U \cap (f^{-1}(U_f) \cap g^{-1}(U_g)) \neq \varnothing$ und wir finden $x_0 \in U \cap f^{-1}(U_f) \cap g^{-1}(U_g)$. Dann ist wegen $f|_U \equiv g|_U$ $f(x_0) = g(x_0)$, aber auch $f(x_0) \in U_f, g(x_0) \in U_g$, also $f(x_0) = g(x_0) \in U_f \in U_g$. Aber nach Voraussetzung ist $U_f \cap U_g = \varnothing$, $\lightning$. Also $f \equiv g$.

□

Bemerkung*. Der Beweis von Lemma 7.21 war eine Übungsaufgabe auf Blatt 4.

Satz 7.22 (Universelle Eigenschaft von β)**.** Sei $f : X \to K$ stetig, K kompakt und Hausdorffsch. Dann existiert eine eindeutige Fortsetzung $\hat{f} : \beta(X) \to K$, so dass

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "f"'] & \beta(X) \arrow[dl, dashed, "\hat{f}"] \\ K & \end{tikzcd} .$$

kommutiert.

Ist $f(X) \subseteq K$ dicht, so ist $\hat{f}$ surjektiv: Es ist $\hat{f}(\beta(X))$ kompakt, also abgeschlossen und enthält $f(X)$ (weil das Diagramm kommutiert), und daraus folgt $\overline{f(X)} \subseteq \hat{f}(\beta(X))$.

Beweis. Die Eindeutigkeit von $\hat{f}$ folgt direkt aus Lemma 7.21, weil $\hat{f}$ über die Kommutativität des Diagramms auf der dichten Teilmenge $\iota(X) \subseteq \beta(X)$ bereits eindeutig bestimmt ist.
Idee. Ist $K = [0,1]$, so wähle $\hat{f} = \mathrm{pr}_f|_{\beta(X)}$ als stetige Projektion. Dann kommutiert nämlich

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "f"'] & \prod_{\mathcal{C}(X)} [0,1] \arrow[d, dashed, "\mathrm{pr}_f"] \\ & {[0,1]} \end{tikzcd} .$$

nach Konstruktion von ι.

Das ganze können wir nun zwar nicht direkt für K machen, allerdings für jedes $g \in \mathcal{C}(K)$. Für jedes $g \in \mathcal{C}(K)$ erhalten wir durch Komposition $g \circ f \in \mathcal{C}(X)$ und damit nach vorheriger Überlegung eine Abbildung $\mathrm{pr}_{g\circ f}|_{\beta(X)} : \beta(X) \to [0,1]$. Verwenden wir diese als Komponentenabbildung nach $\prod_{\mathcal{C}(K)}[0,1]$, so induzieren wir eine Abbildung

$\hat{f} = \prod \mathrm{pr}_{g \circ f} \mid_{\beta(X)}$:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, hook, "\iota_X"] \arrow[d, "f"'] & & \beta(X) \arrow[d, dashed, "\hat{f}"] \arrow[dl, bend right, "\mathrm{pr}_{g_i \circ f}"'] \arrow[ddrr, bend left, "\mathrm{pr}_{g_j \circ f}"] & \subseteq & \prod_{\mathcal{C}(K)}[0,1] \\
K \arrow[rr, hook, "\iota_K"] \arrow[dr, "g_i"'] \arrow[drrrr, "g_j"] & & \prod_{\mathcal{C}(K)}[0,1] \arrow[dl, "\mathrm{pr}_{g_i}"] \arrow[drr, "\mathrm{pr}_{g_j}"] & & \\
& {[0,1]} & \dots & & {[0,1]}
\end{tikzcd}$$

Das linke obere Quadrat kommutiert auch: Hierzu müssen wir überprüfen, dass die Kompositionen mit den Projektionen auf die Komponenten von $\prod_{\mathcal{C}(K)}[0,1]$ jeweils gleich sind, diese sind aber - nach Konstruktion - jeweils $g_i \circ f$.

Wegen $\overline{\iota(X)} = \beta(X)$ ist nun

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\beta(X)) &= \hat{f}(\overline{\iota_X(X)}) \\
&\overset{\text{Lemma 7.21}}{\subseteq} \overline{(\hat{f} \circ \iota_X)(X)} \\
&\overset{\text{kommutiert}}{=} \overline{(\iota_k \circ f)(X)} \\
&\subseteq \overline{\iota_K(K)} \\
&\overset{K \text{ kompakt}}{=} \iota_K(K) \\
&\overset{\text{Satz 7.20}}{\cong} K
\end{aligned}$$

.

und damit können wir $\hat{f}$ mit ι_K^{-1} verknüpfen um unsere gewünschte Abbildung $\beta(X) \to K$ zu erhalten. □

Trivial Nonsense*. $\beta(X)$ ist sogar ein Funktor von **Top** (Kategorie der topologischen Räume) nach **CHaus** (Kategorie der kompakten Hausdorff-Räume). Das liegt daran, dass wir im Beweis von Satz 7.22 alle Schritte bis $\hat{f}(\beta(X)) \subseteq \overline{\iota_k(K)} = \beta(K)$ genauso durchführen können, ohne verwenden zu müssen, dass K kompakter Hausdorff-Raum ist, und wir damit für $f : X \to K$ eine entsprechende Abbildung $\hat{f} : \beta(X) \to \beta(K)$ induzieren, sodass

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\iota_X"] \arrow[d, "f"'] & \beta(X) \arrow[d, "\hat{f}"] \\
K \arrow[r, "\iota_K"'] & \beta(K)
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Alternativ können wir auch Satz 7.22 auf die Abbildung $\iota_k \circ f : X \to \beta(K)$ anwenden, da $\beta(K)$ nach Konstruktion kompakt und Hausdorffsch ist.

Bemerkung*. Man sollte nicht zu sehr darüber nachdenken, wie $\beta(X)$ aussieht: Die Konstruktion des Raumes ist äußerst nicht-konstruktiv und benutzt implizit das Auswahlaxiom (damit wir Tychonoff nutzen können. Man kann sich auch überlegen, dass der Satz von Tychonoff äquivalent ist zum Auswahlaxiom, weswegen wir auch nicht ohne es auskommen, das geht hier aber zu weit). Vielmehr sollte man die bloße Existenz eines solchen Raumes als theoretisches Ergebnis im Hinterkopf behalten, die wir benötigt haben, um die Frage nach der Kompaktifizierbarkeit eines Raumes zu beantworten. Auch der Spezialfall, dass $\beta(X) = X$ für kompakte Hausdorff-Räume ist wichtig.

Vorlesung 8
Do 06 Mai 2021 10:15

8 Vereinigungen

Definition 8.1 (Disjunkte Vereinigung)**.** Es sei $\{X_i\}_{i\in I}$ eine Familie von Mengen. Die **disjunkte Vereinigung** der X_i ist definiert als

$$\coprod_{i\in I} X_i := \{(i,x) \mid i \in I, x \in X_i\}.$$

Lemma[†]**.** Für jedes $j \in I$ ist die Abbildung

$$\iota_j : \left| \begin{array}{ccc} X_j & \longrightarrow & \coprod\limits_{i\in I} X_i \\ x & \longmapsto & (j,x) \end{array} \right.$$

injektiv und induziert eine Bijektion

$$X_j \leftrightarrow \{(j,x) \mid x \in X_j\} \subseteq \coprod_{i\in I} X_i.$$

Damit ist insbesondere

$$\coprod_{i\in I} X_i = \bigsqcup_{j\in I} \iota_j(X_j).$$

Beweis. Klar. □

Trivial Nonsense*. Bei $\coprod_{i\in I} X_i$ handelt es sich um das Koprodukt der X_i in **Set**.
Ein Koprodukt erfüllt die gleiche Universelle Eigenschaft, wenn man die Richtung aller Abbildungen umdreht, d.h. X ist Koprodukt der X_i in **Set** genau dann, wenn X Produkt der X_i in $\mathbf{Set}^{\mathbf{op}}$ ist. Für eine genauere Formulierung vergleiche Satz 8.3.

Notation*. Ich bemühe mich, folgende Trennung in der Notation vorzunehmen:

- Das Zeichen $\sqcup$ (eckige Vereinigung, `\sqcup`) steht zwar für eine disjunkte Vereinigung, allerdings soll es wie die normale Vereinigung behandelt werden und nur betonen, dass es sich um disjunkte Mengen handelt.
- Das Zeichen $\coprod$ (Koprodukt, `\coprod`) steht für die disjunkte Vereinigung beliebiger Mengen, wie sie in Definition 8.1 eingeführt wurde.

Ist z.B. U eine disjunkte Vereinigung von U_i, so schreibe ich $U =$

$\bigsqcup_{i\in I} U_i$, was sowohl bedeuten soll, dass $U_i \subseteq U$, als auch $U_i \cap U_j = \varnothing$ für $i \neq j$.
Ist hingegen $U = \coprod_{i\in I} U_i$, so folgt weder $U_i \subseteq U$ (allerdings ist ι_j nach dem vorherigen Lemma eine entsprechende Einbettung, weswegen wir U_j oft mit dem entsprechenden Bild identifizieren), noch, dass $U_i \cap U_j = \varnothing$ für $i \neq j$.
Ist $\bigsqcup_{i\in I} U_i$ definiert (d.h. die U_i paarweise disjunkt), so ist jedoch in jedem Fall

$$\bigsqcup_{i\in I} U_i \cong \coprod_{i\in I} U_i.$$

weswegen eine saubere Trennung oft redundant oder nicht möglich ist.

Definition 8.2 (Disjunkte Vereinigung topologischer Räume)**.** Sei $(X,\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ eine Familie von topologischen Räumen. Wir versehen $\coprod_{i\in I} X_i$ mit der Topologie, die von $\bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i$ als Basis erzeugt wird. Den entstehenden Raum nennen wir das Koprodukt der topologischen Räume.

Bemerkung*. Eigentlich müssen wir die Topologie erstmal als Subbasis von $\bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i$ erzeugen lassen, man überprüft jedoch mit Satz 6.4 leicht, dass es sich dann sogar um eine Basis handelt, was wir im Folgenden auch verwenden wollen.

Notationsmissbrauch[†]. Eigentlich ist $\mathcal{O}_i \not\subseteq \mathcal{P}(\coprod_{i\in I} X_i)$ keine Familie von Teilmengen von $\coprod_{i\in I} X_i$, weswegen die Definition keinen Sinn macht. Mittels den Einbettungen $\iota_j : X_j \to \coprod_{i\in I} X_i$ können wir jedoch $\mathcal{O}_j$ entsprechend auffassen. Man käme in Versuchung

$$\mathcal{O} := \bigcup_{i\in I} \iota_i(\mathcal{O}_i).$$

zu schreiben, doch eigentlich ist auch das falsch, weil wir ι_j nicht nur auf die Elemente von $\mathcal{O}_j$, sondern auf die Elemente der Elemente von $\mathcal{O}_j$ anwenden wollen - nämlich auf die Elemente der offenen Teilmengen, die in $\mathcal{O}_j$ spezifiziert waren. Im Folgenden wollen wir jedoch weiterhin $\bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i$ schreiben um obiges zu meinen, die Einbettungen ι_j sind in der Notation unterdrückt.

Warnung. Die Menge $\bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i$ ist im Allgemeinen <u>keine</u> Topologie. Z.B. ist

$$\coprod_{i\in I} X_i \notin \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i.$$

Lemma[†]. Eine Menge $U \subseteq \coprod_{i\in I} X_i$ ist offen, genau dann, wenn $\iota_j^{-1}(U) \subseteq X_j$ offen ist für alle $j \in I$.

Beweis.* '$\Rightarrow$' Sei $U \subseteq \coprod_{i\in I} X_i$ offen, dann können wir $U = \bigcup_{k\in K} U_k$

schreiben, wobei $U_k \in \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i$ ein Element der (Sub-) Basis ist Dann ist

$$\iota_j^{-1}(U) = i_j^{-1}\left(\bigcup_{k\in K} U_k\right) = \bigcup_{k\in K} \iota_j^{-1}(U_k).$$

Nun ist aber $\iota_j^{-1}(U_k) = \varnothing$, wenn U_k aus einem $\mathcal{O}_i$ mit $i \neq j$ stammt, und $\iota_j^{-1}(U_k) = U_k$ wenn U_k aus $\mathcal{O}_i$ stammt, also in jedem Fall eine offene Teilmenge von X_j, und damit ist das Urbild offen.

'$\Leftarrow$' Nimm umgekehrt an, dass $\iota_j^{-1}(U) \subseteq X_j$ offen ist für alle $j \in I$. Es genügt wegen $\coprod_{i\in I} X_i = \bigsqcup_{i\in I} \iota_i(X_i)$ festzustellen, dass

$$U = \bigcup_{i\in I}(U \cap \iota_i(X_i)) = \bigcup_{i\in I} \iota_i(\iota_i^{-1}(U)).$$

und dies ist offen nach Annahme, da ι_i eine Einbettung ist. □

Bemerkung. Per Definition ist für jedes $j \in I$ die Menge $\iota(X_j) = \{(j,x) \mid x \in X_j\}$ offen in $\coprod_{i\in I} X_i$ und die von ι_j induzierte Abbildung

$$X_j \to \{(j,x) \mid x \in X_j\} \subseteq \coprod_{i\in I} X_i.$$

ist eine Einbettung. Die X_i können wir also kanonisch als Teilraume von $\coprod_{i\in I} X_i$ auffassen.

Beispiel.
1. Betrachte einen Kreis und einen Torus, die getrennt in $\mathbb{R}^3$ liegen. Die Unterraumtopologie auf dieser Menge ist die gleiche wie die Topologie der disjunkten Vereinigung.
2. Auch wenn $[0,1] \cup [\frac{1}{2},1] = [0,1]$ ist die Koprodukttopologie auf $[0,1] \sqcup [\frac{1}{2},1]$ nicht die Unterraumtopologie auf $[0,1]$. (die beiden Räume sind schon als Mengen nicht gleich).

Satz 8.3 (Universelle Eigenschaft des Koprodukts)**.** Sei $\{X_i\}_{i\in I}$ eine Familie von topologischen Räumen und sei Y ein topologischer Raum. Seien $f_j : X_j \to Y$ Abbildungen für alle $j \in I$. Definiere die Abbildung

$$F : \left| \begin{array}{ccc} \coprod_{i\in I} X_i & \longrightarrow & Y \\ (j,x) & \longmapsto & f_j(x) \end{array} \right.$$

Dann ist F genau dann stetig, wenn alle f_j stetig sind.

$$\begin{tikzcd}
X_{j_1} \arrow[dr, hook, "\iota_{j_1}"'] \arrow[drr, bend left, "f_{j_1}"] & & \\
\vdots \arrow[r, hook, dotted] & \coprod_{i\in I} X_i \arrow[r, dashed, "F"] & Y \;. \\
X_{j_1} \arrow[ur, hook, "\iota_{j_2}"] \arrow[urr, bend right, "f_{j_2}"'] & &
\end{tikzcd}$$

Beweis. f_j ist stetig als Verknüpfung stetiger Abbildungen, da $F \circ \iota_j = f_j$.

'$\Leftarrow$' Sei nun f_j stetig für alle j. Sei $V \subseteq Y$ offen, dann müssen wir zeigen, dass $F^{-1}(V) \subseteq \coprod_{i \in I} X_i$ offen ist. Es ist nun aber

$$\iota_j^{-1}(F^{-1}(V)) = (F \circ \iota_j)^{-1}(V) = f_j^{-1}(V) \subseteq X_j.$$

offen in X_j, weil f_j stetig war. Nach Definition ist dann genau $F^{-1}(V)$ offen in $\coprod_{i \in I} X_i$. $\square$

Frage. Was ist, wenn die Vereinigung nicht disjunkt ist?

Sei X ein topologischer Raum und $X_1, X_2 \subseteq X$ Unterräume sowie $X_1 \cup X_2 = X$ Setze $X_0 := X_1 \cap X_2$. Wir wollen die Topologie auf X aus denen von X_0, X_1, X_2 rekonstruieren.

Beispiel. Falls $X_1 \cap X_2 = \varnothing$, so können wir aus den Einbettungen $X_1 \hookrightarrow X$ und $X_2 \hookrightarrow X$ nach der Universellen Eigenschaft eine Abbildung $F : X_1 \coprod X_2 \to X$ induzieren, die stetig und bijektiv ist. Diese ist offen, genau dann, wenn X_1, X_2 offen in X sind (wie wir später sehen werden).

Beispiel. Sei $X = [0,1], X_1 = [0, \frac{1}{2}]$ und $X_2 = (\frac{1}{2}, 1]$, also $X = X_1 \sqcup X_2$. Allerdings ist $X_1 \coprod X_2 \neq X$, weil die Menge $[0, \frac{1}{2}]$ offen in $X_1 \coprod X_2$ ist, allerdings nicht in $[0,1]$.

Bemerkung*. Man kann sich das wirklich bildlich so vorstellen, dass die disjunkte Vereinigung von $[0, \frac{1}{2}]$ und $(\frac{1}{2}, 1]$ bedeutet 'lege sie mit Abstand nebeneinander auf den Zahlenstrahl". Damit geht die 'Nähe' von $\frac{1}{2}$ zum Anfangsstück von $(\frac{1}{2}, 1]$ 'verloren'. In der Tat ist auch $[0, \frac{1}{2}] \coprod (\frac{1}{2}, 1] \cong [0, \frac{1}{2}] \cup (1, \frac{3}{2}]$ mit der Teilraumtopologie von $\mathbb{R}$.

Eine teilweise Antwort auf obige Frage gibt folgende Konstruktion:

Definition 8.4 (Disjunkte Vereinigung über einem Basisraum)**.** Seien X_0, X_1, X_2 topologischen Räume und $f_1 : X_0 \to X_1$ sowie $f_2 : X_0 \to X_2$ stetige Abbildungen. Definiere $X_1 \bigcup\limits_{X_0} X_2$ als Quotient

$$X_1 \coprod X_2 / \sim .$$

wobei $\sim$ erzeugt wird durch $f_1(x) \sim f_2(x)$ für alle $x \in X_0$.

Beispiel. Betrachte zwei Kopien von D^2. Wir können S^1 jeweils kanonisch als Rand einbetten, dann erhalten wir

$$D^2 \bigcup_{S^1} D^2 \cong S^2.$$

(Das ist noch kein Beweis, aber die Intuition ist klar - mehr dazu später).

Grafik

Warnung. Der Raum $X_1 \bigcup\limits_{X_0} X_2$ hängt von den Abbildungen f_1, f_2 ab.

Dazu folgendes:

Beispiel. Betrachte wieder zwei Kopien von D^2, bette $f_1 : S^1 \hookrightarrow D^2$ kanonisch ein, und bilde $f_2 : S^1 \to D^2$ konstant in den Mittelpunkt ab. Dann erhalten wir eine 'Kugel auf einem runden Tisch'

Grafik

Trivial Nonsense*. Der Raum $X_1 \coprod X_2/\sim$ ist der Limes (in **Top**) des folgenden Diagramms:

$$\begin{tikzcd} & X_1 \\ X_0 \arrow[ur, "f_1"] \arrow[dr, "f_2"'] & \\ & X_2 \end{tikzcd} .$$

Beweis. Zunächst konstruieren wir Abbildungen $g_i : X_i \to X_1 \coprod X_2/\sim$. g_1, g_2 können wir einfach als Komposition von $\iota_i : X_i \hookrightarrow X_1 \coprod X_2$ mit der kanonischen Projektion $p : X_1 \coprod X_2 \to X_1 \coprod X_2/\sim$ definieren.

Behauptung 1. *Es ist $p \circ \iota_1 \circ f_1 = p \circ \iota_2 \circ f_2$.*

Unterbeweis. Nach Konstruktion ist für $x \in X_0$: $\iota_1(f_1(x_0)) \sim \iota_2(f_2(x_0))$ (die Einbettungen hatten wir in der Definition von $\sim$ unterdrückt), und nach Defintion des Quotientenraumes schickt p die beiden also auf das gleiche Element. ■

Wir können nun $g_0 := p \circ \iota_1 \circ f_1 = p \circ \iota_2 \circ f_2$ definieren.

Warnung. Es ist $\iota_i \circ f_1 \neq \iota_2 \circ f_2$, so leicht ist unser Leben nicht!

Wir müssen noch prüfen, dass für jeden Morphismus des Diagramms die entsprechenden Abbildung nach $X_1 \coprod X_2/\sim$ kommutieren:

$$\begin{tikzcd} & X_1 \arrow[dr, "g_1"] & \\ X_0 \arrow[ur, "f_1"] \arrow[rr, "g_0"] \arrow[dr, "f_2"'] & & X_1 \coprod X_2/\sim \\ & X_2 \arrow[ur, "g_2"'] & \end{tikzcd} .$$

Das ist aber nach Konstruktion mit der Rechnung

$$g_1 \circ f_1 = g_1 \circ p \circ \iota_1 \circ f_1 \overset{\text{Behauptung 1}}{=} p \circ \iota_2 \circ f_2 = g_2 \circ f_2.$$

klar. Es bleibt zu zeigen, dass unser behaupteter Limes $X_1 \coprod X_2/\sim$ universell ist. Sei also L ein weiterer topologischer Raum mit Abbildungen g_0', g_1', g_2', sodass

$$\begin{tikzcd} & X_1 \arrow[dr, "g_1'"] & \\ X_0 \arrow[ur, "f_1"] \arrow[rr, "g_0'"] \arrow[dr, "f_2"'] & & L \\ & X_2 \arrow[ur, "g_2'"'] & \end{tikzcd} .$$

kommutiert, dann müssen wir zeigen, dass es genau eine Abbildung $f : L \to X_1 \coprod X_2/\sim$ gibt, sodass $g_i' = f \circ g_i$. Zunächst haben wir mit der Universellen Eigenschaft des Koprodukt eine von g_1, g_2 induzierte Abbildung $g : X_1 \coprod X_2 \to L$, also ergibt sich folgende Situation:

$$\begin{tikzcd} & X_1 \arrow[dr, "\iota_1"] \arrow[drr, "g_1'"] & & \\ X_0 \arrow[ur, "f_1"] \arrow[dr, "f_2"'] \arrow[rrr, bend left=60, "g_0'"] & & X_1 \coprod X_2 \arrow[r, "g"] & L \\ & X_2 \arrow[ur, "\iota_2"] \arrow[urr, "g_2'"'] & & \end{tikzcd} .$$

Warnung. Auch in diesem Diagramm kommutiert das linke Quadrat nicht, d.h. $\iota_1 \circ f_1 \neq \iota_2 \circ f_2$.

Behauptung 2. *g bildet äquivalente Elemente von $X_1 \coprod X_2$ auf gleiche Elemente in L ab.*

Unterbeweis. Es genügt zu zeigen, dass $g(\iota_1(f_1(x))) = g(\iota_2(f_2(x)))$ für $x \in X_0$ beliebig, weil die Äquivalenzrelation hiervon erzeugt wird. Dazu ist

$$g \circ \iota_1 \circ f_1 = g_1' \circ f_1 = g_0' = g_2' \circ f_2 = g \circ \iota_2 \circ f_2.$$

indem wir die Eigenschaften der induzierten Abbildung g und die des Limes L der Reihe nach anwenden. ■

Mit Behauptung 2 und der universellen Eigenschaft der Quotiententopologie faktorisiert nun g über $X_1 \coprod X_2/\sim$, also induziert g unsere gewünschte Abbildung $f : X_1 \coprod X_2/\sim \to L$, sodass

$$\begin{tikzcd} X_1 \coprod X_2 \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "p"'] & L \\ & X_1 \coprod X_2/\sim \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd} .$$

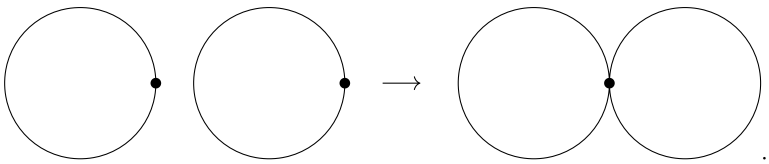
kommutiert. Dann erhalten wir auch schnell $g_1' = g \circ \iota_1 = f \circ p \circ \iota_1 = f \circ g_1$, analoges für g_2, sowie $g_0' = g_1' \circ f_1 = g_1 \circ f_1 = g_0$.
Es bleibt zu zeigen, dass die induzierte Abbildung f eindeutig ist. Nach der universellen Eigenschaft der Quotiententopologie genügt es, zu zeigen, dass g eindeutig bestimmt. g ist aber nach der universellen Eigenschaft von $X_1 \coprod X_2$ eindeutig bestimmt. Also war f eindeutig. Damit haben wir überprüft, dass $X_1 \coprod X_2/\sim$ alle Eigenschaften eines Limes erfüllt. □

Bemerkung*. Ja, der Beweis der Aussage ist sehr lang, dafür, dass er intuitiv klar ist, und das ist irgendwie typisch für Kategorientheorie. Ich hatte Lust, das mal ordentlich aufzuschreiben, aber normal verkürzt man den Beweis drastisch und verweist einfach die beiden anderen universellen Eigenschaften.

Beispiel. Ist $X_0 = \{\star\}$ ein Punkt, so ergibt sich

Definition 8.5 (Wedge-Produkt)**.** Seien X, Y nichtleere topologische Räume, $x \in X$ und $y \in Y$. Bilde $f_1 : \{\star\} \to X, \star \mapsto x$ und analog für Y ab. Der entstehende Raum $X \bigcup_{\{\star\}} Y$ heißt **Einpunktvereinigung** oder auch **Wedge-Produkt** von X, Y und wird mit $X \vee Y$ notiert.

Beispiel. Sei $(X, x) = (S^1, 1)$ und $(Y, y) = (S^1, 1)$. Dann ist $X \vee Y$ ein **Bouqet von 2 Kreisen**.



Beispiel. Es ist $[0, \frac{1}{2}] \vee_{\frac{1}{2}} [\frac{1}{2}, 1] \cong [0, 1]$. Verkleben wir allerdings die Punkte $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{4}$, so erhalten wir nicht das Einheitsintervall, sondern ein Plus-Zeichen.

Bemerkung*. Aus anderen mathematischen Richtungen kennt man das Wort 'Wedge' eigentlich als Symbol $\wedge$. In der Topologie ist dies jedoch anders. Das Symbol $\wedge$ heißt 'Smash' und definiert das Smash-Produkt zweier Räume:

$$X \wedge Y := X \times Y / X \vee Y.$$

Es ist z.B. $S^1 \wedge S^1 \cong S^2$ und sogar allgemein $S^n \wedge S^n \cong S^{2n}$.

Definition (Smash-Produkt)**.** Seien X, Y topologische Räume und $x \in X, y \in Y$ Punkte. Dann ist das **Smash-Produkt** definiert als

$$(X, x) \wedge (Y, y) = X \times Y / (X \times \{y\} \cup \{x\} \times Y).$$

Bemerkung*. In der Pause stellte sich die Frage, ob es ein Beispiel für einen nicht-normalen Hausdorff-Raum gibt. Siehe hierzu [Lyn70, Gegenbeispiel 86].

Beispiel (Punktierte Tychonoff-Planke)**.** Wir geben (nach einem Kommentar von Melvin Weiss) ein Beispiel für einen Hausdorff-Raum, der nicht normal ist, die sogenannte **gelöschte Tychonoff-Planke** (eng: 'deleted Tychonoff plank'). Sei hierzu $\aleph_0$ die erste unendliche Kardinalzahl und $\aleph_1$ die erste überabzählbare Kardinalzahl. Auf den Räumen $[0, \aleph_0]$ und $[0, \aleph_1]$ können wir in natürlicher Weise eine Topologie definieren, indem wir die Anfangs- und Endstücke des Intervalls als Subbasis wählen. Der Raum

$$T := [0, \aleph_0] \times [0, \aleph_1].$$

heißt Tychonoff-Planke und ist ein kompakter Hausdorff-Raum, also insbesondere normal. Der Teilraum

$$T_{\text{deleted}} := T \setminus \{\infty\} := T \setminus \{(\aleph_0, \aleph_1)\}.$$

heißt punktierte Tychonoff-Planke und ist ein lokal kompakter Hausdorffraum, allerdings nicht normal.

Beweisskizze. Wir verweisen an dieser Stelle darauf, dass $[0, \alpha]$ für jede Ordinalzahl α ein kompakter Hausdorffraum ist, das ganze beruht im Wesentlichen darauf, dass die Ordinalzahlen eine Wohlordnung bilden. Also ist T als produkt von kompakten Hausdorffräumen ebenfalls kompakter Hausdorffraum (Satz 7.13, Satz 7.12), also normal (Satz 5.10.
Der Teilraum T_{deleted} ist also als Teilraum eines Hausdorff-Raumes ebenfalls Hausdorff. Allerdings lassen sich die beiden abgeschlossenen Mengen

$$A := [0, \aleph_0) \times \{\aleph_1\}, \qquad B := \{\aleph_0\} \times [0, \aleph_1).$$

nicht durch offene Mengen trennen:
Angenommen, wir finden $A \subseteq U$ und $B \subseteq V$ mit U, V offen. Sei $n \in \mathbb{N} = \aleph_0$ beliebig, dann ist $(n, \aleph_1) \in A \subseteq U$. Da U offen, finden wir ein Basiselement der Produkttopologie, das $(n, \aleph_1)$ enthält, also gibt es $\alpha_n < \aleph_1$, sodass bereits das Intervall $\{n\} \times [\alpha_n, \aleph_1] \subseteq U$ ist (an dieser Stelle sollte man sich eigentlich genauer Fragen, wie die Topologie auf einer Ordinalzahl definiert ist, die Details, und warum die behauptete Aussage folgt, sind aber leicht zu überlegen). Jetzt kommt der Trick: Wir betrachten

$$\beta := \sup_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n.$$

Behauptung 1. $\beta < \aleph_1$

Unterbeweis. Es ist $\beta = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n$ (nach Konstruktion der Ordinalzahlen) wieder eine Ordinalzahl. Da $\alpha_n < \aleph_1$ ist α_n (als Menge) abzählbar, und somit auch β als abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen, also ist auch $\beta < \aleph_1$, weil $\aleph_1$ überabzählbar ist. ■

Jetzt wissen wir also, dass sogar der Streifen $[0, \aleph_0) \times [\beta, \aleph_1] \subseteq U$ ist (nach Wahl der α_n), d.h. die Menge U enthält sogar ein 'Rechteck positiver Höhe', was absurd ist. Formal können wir argumentieren, indem wir jetzt für den Punkt $(\aleph_0, \beta) \in B$ eine offene Umgebung wählen und somit ein Intervall $[\gamma, \aleph_0) \times \{\beta\} \subseteq V$ mit $\gamma < \aleph_0$ finden. Dann ist jedoch $(\gamma, \beta) \in U \cap V$, $\lightning$. □

Das absurde an dem Beispiel ist, dass wir das Supremum der α_n nehmen, die zwar alle $< \aleph_1$ sind, aber dennoch $\beta \neq \aleph_1$ folgt. Von den reellen Zahlen sind wir gewohnt, dass hier Gleichheit eintreten kann. Wir haben also sogar gezeigt, dass

Behauptung 2. *Im Raum* $[0, \aleph_1)$ *konvergiert jede monoton steigende Folge.*

obwohl der Raum nach oben keine Schranke besitzt. Die Moral daran ist ungefähr '$\aleph_1$ ist zu groß, um von Folgen erreicht zu werden'. Das motiviert auch die Einführung von Netzen für größere topologische Räume, die wir hier aber nicht behandeln.

Wir haben nun Abbildungen $j_i \colon X_i \to X_1 \bigcup_{X_0} X_2$:

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "\iota_1"] \arrow[dr, "j_1"'] & X_1 \coprod X_2 \arrow[d, "q"] \\ & X_1 \bigcup\limits_{X_0} X_2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X_2 \arrow[r, "\iota_2"] \arrow[dr, "j_2"'] & X_1 \coprod X_2 \arrow[d, "q"] \\ & X_2 \bigcup\limits_{X_0} X_1 \end{tikzcd} .$$

Lemma 8.6. Seien X_0, X_1, X_2 topologische Räume, $f_1 \colon X_0 \to X_1$, $f_2 \colon X_0 \to X_2$ stetig und betrachte die kanonischen Abbildungen $\iota_i \colon X_i \to X_1 \coprod X_2$ sowie $q : X_1 \coprod X_2 \to X_1 \bigcup\limits_{X_0} X_2$.

Ist f_1 injektiv so ist j_2 injektiv. Ist f_2 injektiv, so ist j_1 injektiv.

Beweis. Wir zeigen nur die erste Aussage, die zweite folgt aus Symmetriegründen. Seien $x, y \in X_2$ mit $j_2(x) = j_2(y)$, nach Konstruktion ist also $x \sim y$. Da die Äquivalenzrelation erzeugt ist von $f_1(x) \sim f_2(x)$, gibt es nun eine Folge von Punkten $x := p_1 \sim p_2 \sim \ldots \sim p_n =: y$, die jeweils von der Form $f_1(x) \sim f_2(x)$ sind.

Erzeugen wir eine Äquivalenzrelation durch $x_i \sim y_i$ für $i \in I$, so sind zwei Element x, y genau dann äquivalent, wenn es eine endliche Folge $x = a_0 \sim a_1 \sim \ldots \sim a_n = y$ gibt, wobei $\{a_i, a_{i+1}\} = \{(x_i, y_i\}$ für ein $i \in I$.

Genauer gibt es also $x_1 \in X_0$ mit $f_2(x_1) = p_1 = x$ und $f_1(x_1) = p_2$, und $\exists x_2 \in X_0$ mit $f_2(x_2) = p_3$ sowie $f_1(x_2) = p_2$ (auf welcher Seite f_1 bzw. f_2 steht, ergibt sich daraus, dass die Punkte p_i alternierend aus X_1,X_2 kommen müssen). Allgemein gibt es also $x_i \in X_0$ mit

$$f_2(x_{2i-1}) = p_{2i-1}, \quad f_1(x_{2i-1} = p_{2i}), \quad f_2(x_{2i} = p_{2i+1}), \quad f_1(x_{2i}) = p_{2i}$$

Nun wissen wir aber, dass f_1 injektiv ist, also ergibt sich $x_{2i-1} = x_{2i}$. Dann ist bereits:

$$x = f_2(x_1) = f_2(x_2) = p_3 == f_2(x_3) = f_2(x_4) = p_5 = \ldots = y.$$

und damit haben wir $x = y$ gezeigt und j_2 ist wie gewünscht injektiv. $\square$

Skizze

Wir kehren nun zu unserer Ausgangssituation bzw. Ausgangsfrage zurück:

Sei X ein topologischer Raum und seien $X_1, X_2 \subseteq X$ Unterräume, sodass $X_1 \cup X_2 = X$. Setze $X_0 := X_1 \cap X_2$.

Betrachte

$$f' : \left| \begin{array}{ccc} X_1 \coprod X_2 & \longrightarrow & X \\ (1, x) & \longmapsto & x \\ (2, x) & \longmapsto & x \end{array} \right.$$

(im Wesentlichen ist das die Projektion, sodass wir das 'disjunkt' aus der Vereinigung wieder loswerden). Dann faktorisiert f' nach der Universellen Eigenschaft der Quotiententopologie über $f : X_1 \bigcup_{X_0} X_2 \to X$, dh wir erhalten:

$$\begin{tikzcd} X_1 \coprod X_2 \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "q"'] & X \\ X_1 \bigcup_{X_0} X_2 \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Es ist f' surjektiv wegen $X_1 \cup X_2 = X$, also auch f', und wir prüfen auch leicht die Injektivität von f. Nun ist:

Satz 8.7. Betrachte die Konstruktion von eben. Nimm an, dass zusätzlich eine der Bedingungen

1. X_1, X_2 sind offen.
2. X_1, X_2 sind abgeschlossen.

gilt. Dann ist f ein Homöomorphismus.

Beweis. Wir zeigen die Aussage nur unter Verwendung von 2., der Fall 1. geht analog. Es genügt zu zeigen, dass f abgeschlossen ist (weil wir schon wissen, dass f eine stetige Bijektion ist). Sei $A \subseteq X_1 \bigcup\limits_{X_0} X_2$ abgeschlossen. Dann sind $j_1^{-1}(A) \subseteq X_1$ und $j_2^{-1}(A) \subseteq X_2$ abgeschlossen, da j_1, j_2 stetig. Wegen

$$f(A) = j_1^{-1}(A) \cup j_2^{-1}(A).$$

sind wir fertig, indem wir ($j_1^{-1}(A) \subseteq X_1$ abgeschlossen und $X_1 \subseteq X$ abgeschlossen) $\Rightarrow j_1^{-1}(A) \subseteq X$ abgeschlossen bemerken. $\square$

Bemerkung*. Die Stetigkeit von f^{-1} kann man auch mit Aufgabe 2, Übungsblatt 2 einsehen, weil $X = X_1 \cup X_2$ mit X_1, X_2 abgeschlossen ist, und die entsprechenden Teilabbildungen $X_1 \to X_1 \bigcup_{X_0} X_2$ Einbettungen sind. Im Wesentlichen wiederholen wir hier einfach nur die Aussage des Übungsblattes.

Beispiel. Sei $X = S^n$ und betrachte die Teilräume

$$X_1 = \{x \in S^n \mid x_{n+1} \geqslant 0\} \qquad X_2 = \{x \in S^n \mid x_{n+1} \leqslant 0\}$$

, also die obere und untere Halbkugel. Der Schnitt

$$X_0 := X_1 \cap X_2 = \{x \in S^n \mid x_{n+1} = 0\}.$$

ist dann genau der Äquator der Kugel, also lernen wir aus Satz 8.7, dass

$$S^n \cong X_1 \bigcup_{X_0} X_2.$$

Mit der Abbildung

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \longrightarrow & D^n \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) & \longmapsto & (x_1, \dots, x_n) \end{array}$$

(die Projektion auf die n-Dimensionale Scheibe) erhalten wir einen Homöomorphismus $D^n \cong X_1, X_2$, also haben wir eigentlich sogar

$$S^n \cong D^n \bigcup_{S^{n-1}} D^n.$$

gezeigt.

Warnung. Auch hier ist wieder wichtig, dass wir $S^{n-1} \hookrightarrow D^n$ jeweils kanonisch einbetten, für andere Abbildungen haben wir bereits gesehen, dass wir andere Räume erhalten können.

Vorlesung 9
Di 11 Mai 2021 12:16

9 Zusammenhang, Wegzusammenhang

Definition 9.1 (Zusammenhang)**.** Ein topologischer Raum heißt **zusammenhängend**, wenn er sich nicht in zwei nichtleere, disjunkte, offene Teilmengen zerlegen lässt.

Lemma[†] (Offen-abgeschlossene-Mengen)**.** Ein Raum ist zusammenhängend, wenn die leere Menge und der gesamte Raum die einzigen Teilmengen von X sind, die offen und abgeschlossen sind, d.h.

$$\nexists A \subseteq X, A \neq \varnothing, X: \quad A \text{ offen und abgeschlossen.}$$

Beweis.* Gibt es eine offene, abgeschlossene Menge $A \neq \varnothing, X$, so ist $X = A \sqcup A^c$ eine Zerlegung in offene, diesjunkte Mengen. Ist umgekehrt $X = U_1 \cup U_2$ mit U_1, U_2 offen, disjunkt und nichtleer, also auch nicht X, so sind U_1, U_2 beides offen abgeschlossene Mengen. □

Bemerkung. X ist nicht zusammenhängend, genau dann, wenn $X \cong X_1 \coprod X_2$ eine disjunkte Vereinigung von 2 Räumen $X_1, X_2 \neq \varnothing$ ist.

Beispiel.
1) $\mathbb{R}\setminus\{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ und $(-\infty, 0), (0, \infty)$ sind offen, disjunkt und nicht leer, also ist $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ nicht zusammenhängend.
2) Betrachte $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ mit der Unterraumtopologie. Dann ist

$$\mathbb{Q} = (\mathbb{Q} \cap (-\infty, \sqrt{2})) \cup (\mathbb{Q} \cap (\sqrt{2}, \infty)).$$

eine Zerlegung in offene, disjunkte, nichtleere Mengen, also ist auch $\mathbb{Q}$ nicht zusammenhängend.

Bemerkung*. Es ist meistens einfacher, zu zeigen, dass ein Raum nicht zusammenhängend ist, die Gegenrichtung erweist sich als schwerer. Deswegen folgender

Satz 9.2 (Einheitsintervall)**.** Das Intervall $[0,1]$ ist zusammenhängend.

Beweis. Nimm gegenteilig an, dass $[0,1]$ nicht zusammenhängend ist, schreibe also $[0,1] = A \cup B$ mit $A, B \neq \varnothing$, offen und disjunkt. OBdA sei $0 \in A$. Wegen $B \neq \varnothing$ gibt es $t := \inf B$. Da t abgeschlossen (weil A offen!), ist $t \in B$, also folgt $[0,t) \subseteq A$. Aber jede Umgebung von $t \in B$ schneidet $[0,t)$, also A, $\lightning$, weil $A \cap B = \varnothing$. $\square$

Definition† (Weg)**.** Sei X ein topologischer Raum und $x, y \in X$. Ein **Weg** von x nach y ist eine stetige Funktion $w : [0,1] \to X$, sodass $w(0) = x$ und $w(1) = y$.

Definition 9.3 (Wegzusammenhang)**.** Ein topologischer Raum X heißt **wegzusammenhängend**, falls für je zwei Punkte $x, y \in X$ ein **Weg** von x nach y existiert.

Beispiel. 1) Die Mengen $(a,b), [a,b), (a,b]$ und $\mathbb{R}$ sind alle wegzusammenhängend. Definiere hierzu

$$w : \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & ty + (1-t)x \end{array} \right.$$

Als Verknüpfung stetiger Funktionen ist t stetig, und wir sehen leicht, dass $0 \mapsto x, 1 \mapsto y$.

2) $\mathbb{R}^n, n \geqslant 0$ ist wegzusammenhängend. Dazu betrachte vorherige Abbildung auf den einzelnen Komponenten

3) $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, n \geqslant 2$ ist wegzusammenhängend. Seien hierzu $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Fall 1: Die Strecke von x nach y liegt in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Dann betrachten wir wieder die Abbildung aus 1) und sind fertig.

Fall 2: Die Strecke trifft die 0. Wähle dann einen dritten Punkt z, der nicht auf der Geraden durch x, y liegt. Dann gibt es einen Weg von x nach z und einen von z nach x, und die Vereinigung der beiden Wege ist dann ein Weg von x nach y.

Bemerkung*. Wir verwenden natürlich entscheidend, dass $ty + (1-t)x \in (a,b), [a,b), (a,b], \mathbb{R}$ für beliebige x, y, die auch in einer der

Mengen liegen (Das ist Teil der Definition eines Weges!).

Bemerkung*. Ebenfalls kann man sich kurz Überlegen, dass die Vereinigung von zwei Wegen wieder ein Weg ist. Seien hierzu w_1, w_2 Wege von x nach y bzw. von y nach z. Dann definieren wir

$$w : \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & X \\ x & \longmapsto & \begin{cases} w_1(2x) & 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \\ w_2(2x-1) & \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases} \end{array} \right.$$

so sehen wir leicht $w(0) = w_1(0) = x$, $w(1) = w_2(2 \cdot 1 - 1) = w_2(1) = z$, und w ist stetig, weil f auf $[0, \frac{1}{2}]$ und $[\frac{1}{2}, 1]$ stetig ist und bei $\frac{1}{2}$ beide Definitionen wegen $w_1(1) = y = w_2(0) = w_2(2 \cdot \frac{1}{2} - 1)$ übereinstimmen.

Lemma 9.4. Ist X wegzusammenhängend, so ist X zusammenhängend.

Warnung. Die Umkehrung von Lemma 9.4 gilt im Allgemenien nicht. Siehe hierzu Übungsblatt 5, Aufgabe 1.

Beweis von Lemma 9.4. Sei X wegzusammenhängend, und nimm gegenteilig an, dass $X = U_1 \sqcup U_2$ mit $U_i \subseteq X$ offen und disjunkt. Sei $x_1 \in U_1, x_2 \in U_2$. Dann gibt es einen Weg w von x_1 nach x_2, und wir erhalten

$$w^{-1}(U_1) \cup w^{-1}(U_2) = w^{-1}(U_1 \cup U_2) = [0,1].$$

Allerdings sind $w^{-1}(U_i)$ offen (w ist stetig), disjunkt (U_1, U_2 sind disjunkt) und nicht leer ($0 \in w^{-1}(U_1)$, $1 \in w^{-1}(U_2)$), also ist $[0,1]$ nicht zusammenhängend. $\lightning$ mit Satz 9.2. $\square$

Korollar 9.5. $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$ sind nicht homöomorph.

Beweis. Nimm an, es gibt einen solchen Homöomorphismus

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ 0 & \longmapsto & f(0) \end{array} \right.$$

Dann induziert f auch einen Homöomorphismus $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \cong \mathbb{R} \setminus \{f(0)\}$, allerdings ist $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ wegzusammenhängend, und $\mathbb{R} \setminus \{f(0)\}$ nicht, $\lightning$. $\square$

Frage. Sind $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ wegzusammenhängend?

Antwort. Nein, das gilt natürlich genau dann, wenn $n = m$. Allerdings warten wir mit einem solchen Beweis bis zur algebrasichen Topologie. Siehe hierzu auch den Satz zur 'Invariance of domain' von Brouwer (den wir hier aber erstmal nicht behandeln).

Satz* **(Invariance of domain).** Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U- >$

$\mathbb{R}^n$ injektiv und stetig. Dann ist $f(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und f ist ein Homöomorphismus $f : U \cong f(U)$.

Korollar*. $\mathbb{R}^n \ncong \mathbb{R}^m$ für $n \neq m$.

Ein Versuch für einen ähnlichen Beweis wie $\mathbb{R} \ncong \mathbb{R}^2$ scheitert, weil $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und $\mathbb{R}^3 \setminus \{f(0)\}$ beide (weg)zusammenhängend sind. Man könnte nun Versuchen, eine Gerade oder einen Kreis von $\mathbb{R}^2$ zu entfernen, der entsprechende Raum ist dann unzusammenhängend. Es erscheint auch klar, dass $\mathbb{R}^3 \setminus f(\text{Kreis / Gerade})$, allerdings ist ein entsprechender Beweis verhältnismäßig schwer. Die algebraische Topologie wird es uns ermöglichen, das wesentlich einfacher einzusehen.

Bemerkung*. Die Frage, ob eine Schleife in $\mathbb{R}^2$ (ein stetiges, injektives Bild von $\mathcal{S}^1$ in $\mathbb{R}^2$) den Raum in zwei Teile zerteilt, ist auch schwerer als man denkt, hierzu vergleiche den

Satz* (Jordan'scher Kurvensatz)**.** Es sei C eine Jordankurve in $\mathbb{R}^2$, d.h. das Bild einer injektiven stetigen Abbildung $\varphi : S^1 \to \mathbb{R}^2$. Dann besteht $\mathbb{R}^2 \setminus C$ aus genau 2 Komponenten, eine davon ist beschränkt (die Innere), eine unbeschränkt (die Äußere)'

Der Beweis verwendet aber auch Methoden aus der algebraischen Geometrie.

Lemma 9.6 (Bilder von zusammenhängenden Räumen)**.** Sei $f : X \to Y$ stetig und surjektiv.

1) Ist X wegzusammenhängend, so ist Y wegzusammenhängend.
2) Ist X zusammenhängend, so ist Y zusammenhängend.

Beweis. 1) Seien $y_1, y_2 \in Y$ beliebig. Da f surjektiv ist, finden wir $x_1, x_2 \in X$ mit $f(x_1) = y_1$, $f(x_2 = y_2)$. Nun finden wir wegen Wegzusammenhang von X einen Weg $w : [0,1] \to X$ mit $w(0) = x_1$ und $w(1) = x_2$. Dann ist die Verknüpfung

$$f \circ w : \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & Y \\ 0 & \longmapsto & f(x_1) = y_1 \\ 1 & \longmapsto & f(x_2) = y_2 \end{array} \right.$$

ein Weg von y_1 nach y_2, also ist Y wegzusammenhängend.

2) Nimm an, dass Y nicht zusammenhängend ist, also gibt es $U_1, U_2 \neq \varnothing$ offen und disjunkt mit $Y = U_1 \cup U_2$. Dann ist auch

$$X = f^{-1}(Y) = f^{-1}(U_1 \cup U_2) = f^{-1}(U_1) \cup f^{-1}(U_2).$$

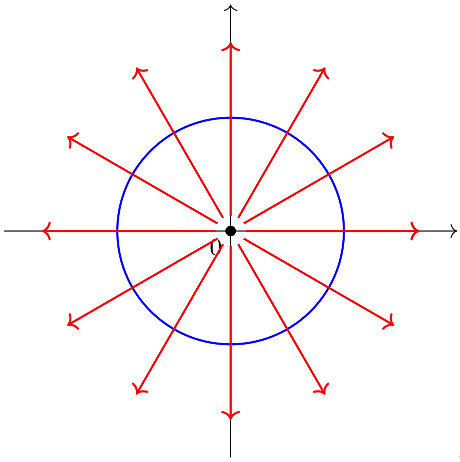
und $f^{-1}(U_i)$ sind offen, disjunkt und nichtleer, weil f surjektiv ist. Also ist X nicht zusammenhängend, $\lightning$.

$\square$

Beispiel. Die Sphäre $S^n, n \geqslant 1$ ist wegzusammenhängend. Hierzu stellen wir fest, dass

$$\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \cong S^{n-1} \times \mathbb{R} \xrightarrow{\text{Projektion}} S^{n-1}.$$

und wir wissen schon, dass $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ wegzusammenhängend ist, also auch S^{n-1}.



.

Bemerkung*. Der kanonische Isomorphismus ist erstmal $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \cong S^{n-1} \times \mathbb{R}$, indem wir $x \mapsto \left(\frac{x}{\|x\|_2}, \|x\|_2\right)$ abbilden. Allerdings ist $\mathbb{R} \cong (0, \infty)$, z.B. mit der Exponentialabbildung.

Beispiel† (Auf Nachfrage in der Vorlesungspause besprochen)**.** Eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt konvex, wenn für $x, y \in X$ auch die Verbindungsstrecke in X liegt, d.h. für $\lambda \in [0,1]$ ist auch $\lambda x + (1-\lambda)y \in X$. Eine Teilmenge heißt sternförmig, wenn es ein $x_0 \in X$ gibt, sodass für jedes $y \in X$ die Verbindungsstrecke von x_0 nach y in X liegt. Dann sehen wir, dass

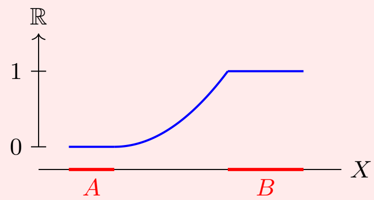
$$X \text{ konvex} \Rightarrow X \text{ sternförmig} \Rightarrow X \text{wegzusammenhängend}.$$

Die erste Implikation ist trivial, wähle $x_0 \in X$ beliebig, für die zweite bilden wir $[0,1]$ einfach auf die Verbindungsstrecke von x_0 nach y ab, dann sind alle Punkte mit x_0 verbunden, und deren Hintereinanderschalten ergibt Wege von x nach y für x, y beliebig. Im Wesentlichen ist das das gleiche Argument, dass wir auch schon für die Intervalle in $\mathbb{R}$ benutzt haben.

10 Lemma von Urysohn

Bemerkung†. In der Vorlesung wurde auch folgendes angemerkt: Im gesamten nächsten Kapitel können wir für die Definition eines normalen Raums die Hausdorff-Eigenschaft fallen lassen. Alle Aussagen gelten weiterhin. Beachte aber, dass wir dann mit Urysohn nicht zwingend zwei Punkt trennen können, weil diese nicht zwingend abgeschlossen sind.

Satz 10.1 (Urysohn'sches Lemma)**.** Sei X ein normaler topologischer Raum. Seien $A, B \subseteq X$ abegschlossen und disjunkt. Dann existiert eine stetige Abbildung $f : X \to [0,1]$, sodass $f\mid_A \equiv 0$ und $f\mid_B \equiv 1$.



.

Lemma 10.2. Sei X ein topologischer Raum, sodass für jedes $r \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ offene $V_r \subseteq X$, sodass $r < r' \Rightarrow \overline{V_r} \subseteq V_{r'}$. Dann existiert eine stetige Abbildung $f : X \to [0,1]$, sodass $f(x) = 0$ für $x \in V_0$ und $f(x) = 1$ für $x \notin V_1$.

Beweis. Definiere

$$f : \left| \begin{array}{ccl} X & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & x \notin V_1 \\ \inf\{r \mid x \in V_r\} & x \notin V_1 \end{cases} \end{array} \right.$$

Die Eigenschaften $f\mid_{V_0} \equiv 0$ und $f\mid_{X \setminus V_i} \equiv 1$ sind sofort klar. Es bleibt zu zeigen, dass f stetig ist. Da

$$\mathcal{S} := \{[0,a) \mid a \in [0,1]\} \cup \{(a,1] \mid a \in [0,1]\}.$$

eine Subbasis der Topologie auf $[0,1]$ ist, genügt es, Stetigkeit auf $\mathcal{S}$ zu prüfen. Sei

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}([0,a)) &\Leftrightarrow f(x) < a \leqslant 1 \\ &\overset{\text{Def von } f}{\Leftrightarrow} \inf\{r \mid x \in V_r\} < a \\ &\overset{\mathbb{Q} \text{ ist dicht}}{\Leftrightarrow} \exists r < a, r \in \mathbb{Q} \colon x \in V_r \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcup_{r<a} V_r \end{aligned}$$

Für den zweiten Typ von Basielementen ist

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}((a,1]) &\Leftrightarrow \begin{cases} x \notin V_1 & \text{oder} \\ x \in V_1, a < f(x) = \inf\{r \mid x \in V_r\} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists r' > a, r' \in \mathbb{Q}, x \notin V_{r'} \\ &\overset{\overline{V_r} \subseteq V_{r'}}{\Leftrightarrow} \exists r \in \mathbb{Q}, a < r < r', x \notin \overline{V_r} \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcup_{r>a} (X \setminus \overline{V_r}) \end{aligned}$$

also ist auch $f^{-1}((a,1])$ eine Vereinigung von offenen Mengen.

Also ist f stetig, wie zu zeigen war. □

Bemerkung*. Wir können uns die V_r wie eine Art 'Höhenprofil' oder 'Höhenlienien' vorstellen, die wir in unserem Raum gegeben haben.

Vorlesung 10
Di 18 Mai 2021 12:20

Wir erinnern uns daran, dass wir gerade dabei waren, Satz 10.1 zu beweisen.

Lemma 10.3. Sei X ein normaler Raum, $A \subseteq X$ abgeschlossen und $U \subseteq X$ offen mit $A \subseteq U$. Dann existiert $V \subseteq X$ offen mit

$$A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U.$$

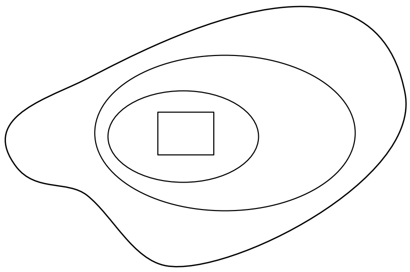


Abbildung 12: trennung von abgeschlossenen mengen durch offene in normalem Raum

Beweis. Wegen U offen ist $X \backslash U$ abgeschlossen. Wegen X normal gibt es V, V' offen mit $A \subseteq V$ und $(X \backslash U) \subseteq V'$ mit $V \cap V' = \varnothing$. Nun ist

$$A \subseteq V \subseteq X \backslash V' \subseteq U.$$

nach Definition des Abschlusses ist nun $A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq X \backslash V' \subseteq U$. □

bessere abbildung

Beweis von Satz 10.1 (Urysohn'sches Lemma).
Ziel. $\forall r \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ konstruiere $V_r \subseteq X$ offen, sodass

1. $A \subseteq V_0$
2. $B \subseteq X \backslash V_1$
3. $r < r' \Rightarrow \overline{V_r} \subseteq V_{r'}$

Dies genügt, denn dann wissen wir mit Lemma 10.2, dass

$$\begin{aligned} \exists f : X &\to [0,1] \text{ stetig} \\ f(x) &= 0 \quad \forall x \in V_0 \supseteq A \\ f(x) &= 1 \quad \forall x \in X \backslash V_1 \supseteq B \end{aligned}$$

Wähle hierzu eine Abzählung $p_1, p_2, \ldots$ von $\mathbb{Q} \cap [0,1]$, sodass $p_1 = 1$ und $p_2 = 0$. Definiere nun $\{V_r\}$ rekursiv, wobei wir auch induktiv die Invariante erhalten wollen, dass $r < r' \Rightarrow \overline{V_r} \subseteq V_{r'}$.

- $p_1 = 1$. Setze $V_1 := X \backslash B$ (offen, weil B abgeschlossen ist)
- $p_2 = 0$. Nach Lemma 10.3 mit $A = A$ und $U = X \backslash B$ finden wir V_0 offen mit
$$A \subseteq V_0 \subseteq \overline{V}_0 \subseteq X \backslash B =: V_1.$$
- Sei $n \geqslant 3$, dann sind also $V_{p_1}, V_{p_2}, \ldots, V_{p_{n-1}}$ schon definiert. Es ist $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ wohlgeordnet, weil es sich um eine endliche Menge handelt, also gibt es unter ihnen einen direkten Vorgänger p_i von p_n, und einen direkten Nachfolger p_j von p_n.

Es könnte z.B. $n = 5$ sein mit

p_1	p_2	p_3	p_4	p_4
1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{3}{5}$

Dann ist die Menge als $\left\{0, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{8}{9}, 1\right\}$ geordnet, und wir sehen mit p_n =?, dass ?.

Werte einfügen

Verwende nun Lemma 10.3 mit $A = \overline{V_{p_i}}$ und $U = V_{p_j}$, (hier ist wichtig, dass wegen $p_i < p_j$ beretis $\overline{V_{p_i}} \subseteq V_{p_j}$ gilt, sonst können wir das Lemma nicht anwenden.)
Also finden wir V mit $\overline{V_{p_i}} \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq V_{p_j}$. Man prüft leicht, dass wir so auch die Invariante der Induktion erhalten haben.

Also haben wir wie gewünscht die V_i gefunden, und somit unsere Funktion. □

Korollar 10.4 (Urysohn mit beliebigem Intervall)**.** Sei X ein normaler Raum und seien $A, B \subseteq X$ disjunkt und abgeschlossen, sowie $a \leqslant b \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann
$$\begin{aligned} \exists f : X &\to [a, b] \\ f(A) &= \{a\} \\ f(B) &= \{b\} \end{aligned}$$

Beweis. Verwende einen Homöomorphismus $[0, 1] \to [a, b]$ und Satz 10.1. □

Beweis ergänzen

11 Der Erweiterungssatz von Tietze

Wir sehen jetzt das Urysohn'sches Lemma in Action:

Satz 11.1 (Erweiterungssatz von Tietze)**.** Sei X ein normaler Raum und $A \subseteq X$ abgeschlossen. Jede stetige Funktion $f : A \to [-1, 1]$ lässt sich fortsetzen zu einer stetigen Funktion $\overline{f} : X \to [-1, 1]$, d.h. $\overline{f}\,|_A \equiv f$.

Bemerkung. Das Urysohn'sche Lemma ist ein Spezialfall des **??**:
Sei X normal und $B, C \subseteq X$ abgeschlossen, disjunkt. Dann betrachte

die Funktion

$$f : \left| \begin{array}{ccc} B \cup C & \longrightarrow & [-1,1] \\ B & \longmapsto & -1 \\ C & \longmapsto & 1 \end{array} \right.$$

Frage. Gibt es eine Fortsetzung $\overline{f} : X \to [-1,1]$?

Für jede solche Fortsetzung muss auch $\overline{f}\mid_B = f$, also $\overline{f}(B) = -1$ und $\overline{f}(C) = 1$ gelten, also genau das, was wir von Urysohn fordern. Allerdings sagt uns der **??** genau, dass wir solche eine Fortsetzung finden.

Beweis von **??** *(***??***.*

Beweisstrategie. Wir konstruieren eine Folge stetiger Funktionen $\{s_n : X \to [-1,1]\}_{n \geqslant 1}$, sodass

(i) $\{s_n\}$ konvergiert **gleichmäßig** gegen eine Funktion $s : X \to [-1,1]$, d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ existiert $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$\forall \in X, n \geqslant N : \qquad d(s_n(x), s(x)) < \varepsilon.$$

Weil $\{s_n\}$ gleichmäßig konvergiert, ist s stetig (Übungsblatt 5, Aufgabe 3 (iv)).

(ii) $s\mid_A = f$

Dazu benötigen wir erstmal einige Lemmata, die wir im folgenden erarbeiten. □

Lemma 11.2. Sei X normal und $A \subseteq X$ abgeschlossen. Sei $\alpha : A \to [-r, r]$ für $r \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ stetig. Dann existiert $g : X \to \left[-\frac{1}{3}r, \frac{1}{3}r\right]$ stetig mit $|\alpha(a) - g(a)| \leqslant \frac{2}{3}r$ für $a \in A$.

Beweis. Setze $B := \alpha^{-1}\left(\left[-r, -\frac{1}{3}r\right]\right)$ und $C := \alpha^{-1}\left(\left[\frac{1}{3}r, r\right]\right)$. Wegen α stetig sind B, C abgeschlossen, und sie sind auch disjunkt, weil die Intervalle disjunkt sind. Nach Urysohn mit beliebigem Intervall finden wir also eine stetige Funktion

$$\begin{aligned} g : X &\to \left[-\frac{1}{3}r, \frac{1}{3}r\right] \\ g(B) &= \left\{-\frac{1}{3}r\right\} \\ g(C) &= \left\{\frac{1}{3}r\right\} \end{aligned}$$

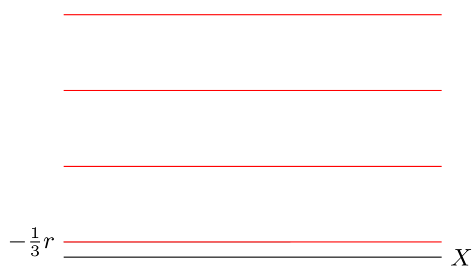


Bild fertig

Behauptung 1. *g erfüllt die Bedingungen unseres Lemmas, d.h.*

$$|\alpha(a) - g(a)| \leqslant \frac{2}{3}r \qquad \forall a \in A.$$

Unterbeweis.
- Sei $a \in B$, Dann ist $\alpha(a) \in \left[-r, -\frac{1}{3}r\right]$ und $g(a) = -\frac{1}{3}r$, also gilt die Ungleichung.
- Sei $a \in C$. Dann ist $\alpha(a) \in \left[\frac{1}{3}r, r\right]$ und $g(a) = \frac{1}{3}r$, also, also gilt die Ungleichung.
- Sei $a \in A \backslash (B \cup C)$. Dann ist $\alpha(a), g(a) \in \left[-\frac{1}{3}r, \frac{1}{3}r\right]$, und damit ist der Abstand auch höchstens $\frac{2}{3}r$.

■

□

Bemerkung*. In der Vorlesung kam die Frage auf, ob wir manche der gerade bewiesenen Resultate auch auf die Analysis übertragen können, indem wir z.B. den Fixpunktsatz von Banach anwenden.

darüber nachdenken

Fortsetzung des Beweises des **??**. Definiere die Folgen s_n induktiv. Dazu

Schritt 1: Verwende Lemma 11.2 mit $\alpha = f$ und $r = 1$, also erhalten wir

$$g_1 : X \to \left[-\frac{1}{3}r, \frac{1}{3}r\right].$$

settig mit $|f(a) - g(a)| \leqslant \frac{2}{3}$ für jedes $a \in A$. Setze $s_1 = g_1$.

Induktionsschritt Angenommen, wir haben schon stetige Funktion $g_1, \ldots, g_n$ auf X mit

$$g_i : X \to \left[-\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} \cdot \frac{1}{3}, \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} \cdot \frac{1}{3}\right].$$

und

$$\left| f(a) - \sum_{i=1}^{n} g_i(a) \right| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n \qquad \forall a \in A.$$

Verwende nun wieder Lemma 11.2 mit $\alpha = f - \sum_{i=1}^{n} g_i |_A$ und $r = \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Es gibt also

$$g_{n+1} \colon X \to \left[-\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n, \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n\right].$$

Wir erhalten nun

$$\begin{aligned} \left| f(a) - \sum_{i=1}^{n} g_i(a) - g_{n+1}(a) \right| &= \left| f(a) - \sum_{i=1}^{n+1} g_i(a) \right| \\ &\leqslant \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

Nun definiere

$$s_{n+1} := \sum_{i=1}^{n+1} g_i : X \to \mathbb{R}.$$

Behauptung 1. *s_n hat Bild in $[-1, 1]$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.*

Unterbeweis.

$$
\begin{aligned}
|s_n(x)| &= \left|\sum_{i=1}^{n} g_i(x)\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |g_i(x)| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} \cdot \frac{1}{3} \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} \cdot \frac{1}{3} \\
&= \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{2}{3}} = 1
\end{aligned}
$$

Die andere Schranke zeigt man völlig analog. ∎

Behauptung 2. *Die Folge* $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert gleichmäßig gegen* s.

Unterbeweis. Für $k > n$ ist

$$
\begin{aligned}
|s_k(x) - s_n(x)| &= \left|\sum_{i=n+1}^{k} g_i(x)\right| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} \\
&= \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}} \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^n
\end{aligned}
$$

(i) Für jedes $x \in X$ ist $\{s_n(x)\}_{n\geqslant 1}$ eine Cauchy-Folge, also konvergiert sie zu einem Punkt $s(x) \in [-1, 1]$.

(ii) Intuitiv reicht es für gleichmäßige Stetigkeit schon zu sehen, dass in obiger Abschätzung kein x vorkommt. Genauer:
Sei $\varepsilon > 0$, so $\exists N \in \mathbb{N}$ mit $\forall n > N \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^n < \varepsilon$. Dann ist

$$
\begin{aligned}
|s(x) - s_n(x)| &= \left|\lim_{k\to\infty} s_k(x) - s_n(x)\right| \\
&= \lim_{k\to\infty} |s_k(x) - s_n(x)| \\
&\leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n \\
&< \varepsilon
\end{aligned}
$$

also ist die Konvergenz gleichmäßig, und s ist stetig.

∎

Setze nun $\overline{f} := s$, dann überprüfen wir

Behauptung 3. $\overline{f}$ *ist eine Fortsetzung von* f, *d.h.* $\overline{f}\,|_A = f$.

Unterbeweis. Es ist

$$
|f(a) - s_n(a)| = \left|f(a) - \sum_{i=1}^{n} g_i(a)\right| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n
$$

also

$$
\lim_{n\to\infty} |f(a) - s_n(a)| \leqslant \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0
$$

Also ist

$$s(a) := \lim_{n\to\infty} s_n(a) = f(a).$$

für jedes $a \in A$. ■

Wir haben also eine Fortsetzung gefunden, und sind damit fertig. □

Schranken des Beweises nochmal checken

Beweisaufschrieb umstrukturieren

Korollar 11.3 (Version des Satzes von Tietze)**.** Sei X ein normaler Raum und $A \subseteq X$ abgeschlossen. Dann gilt folgendes:

1. Jede stetige Funktion $f : A \to [a, b]$ lässt sich zu einer Funktion $\overline{f} : X \to [a, b]$ fortsetzen.
2. Jede stetige Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ lässt sich fortsetzen zu einer Funktion $\overline{f} : X \to \mathbb{R}$.

Beweis. Übung. □

12 Der Metrisierungssatz von Urysohn

Satz 12.1 (Metrisierungssatz von Urysohn)**.** Jeder normale Raum mit abzählbarer Basis der Topologie ist metrisierbar.

Beweis.
Beweisstrategie. Schritt 1: Betrachte $\prod_{\mathbb{N}}[0, 1]$ in der Produkttopologie und zeige, dass der Raum emtrisierbar ist. Dieser Raum heißt **Hilbert-Würfel**.

Schritt 2: Sei X normal mit abzählbarer Basis, wir zeigen, dass wir eine Einbettung $F : X \to \prod_{\mathbb{N}}[0, 1]$ finden. Dann sind wir fertig, da

$$X \cong F(X) \subseteq \prod_{\mathbb{N}}[0, 1].$$

ein Unterraum eines metrischen Raumes ist.

□

Stichwortverzeichnis

n-Sphäre, 12

Basis, 32
Bouqet von 2 Kreisen, 56

Diagonale von X, 40
disjunkte Vereinigung, 50
Diskrete Metrik, 5
Diskrete Topologie, 8

Einbettung, 45
Einheitsintervall, 15
Einheitskreis, 12
Einpunktvereinigung, 56

gelöschte Tychonoff-Planke, 57
Gerade mit zwei Urpsrüngen, 25
gleichmäßig, 68

Hilbert-Würfel, 71
Homöomorphismus, 13
    homöomorph, 13

Kleinsche Flasche, 16
Kompaktifizierung, 45

Menge
    abgeschlossen, 10
    Abschluss, 45
    dicht, 45
    offen, 6
    saturiert, 29
Metrik, 4
    äquivalente, 9
Metrischer Raum, 5
Metrisierbar, 7

Offene Menge, 7
Offener ε-Ball um x, 5

Projektion
    kanonische, 13

Raum
    reell projektiv, 17

Sierpinski-Raum, 8
Smash-Produkt, 56
Stetig, 5, 7
    in $x \in X$, 5
Stone-Čech-Kompaktifizierung, 46
Subbasis, 32

Topologie, 7
    indiskrete, 8
    induzierte, 7
    Produkt-, 35
    Quotienten-, 14
    Teilraum-, 11
    Unterraum-, 11
    von $\mathcal{S}$ erzeugte, 33
Topologischer Raum, 7
    Hausdorff, 18
    Hausdorff'sch, 18
    kompakt, 23
    normal, 20
    regulär, 22
    vollständig regulär, 45
    zusammenhängend, 60
Trennungsaxiom, 18
    T_1, 19
    T_2, 18
    T_3, 22
    T_4, 20

Umgebung, 6
    von x, 10

Wedge-Produkt, 56
Weg, 61
wegzusammenhängend, 61

Äquivalenzklasse, 13
    Menge der, 13

Literatur

[Lyn70] Jr. Lynn Arthur Steen J. Arthur Seebach. *Counterexamples in Topology.* Springer-Verlag, 1970. ISBN: 0-486-68735-X.