Einführung in die Geometrie und Topologie

Dozent
Daniel Kasprowski

Assistentin
Arunima Ray

Mitschrift
Maximilian Kessler

Version
20. Mai 2021 12:04

Zusammenfassung

Bei folgenden Vorlesungsnotizen handelt es sich um (inoffizielle) Mitschriften zur 'Einführung in die Geometrie und Topologie', die im Sommersemester 2021 an der Universität Bonn gehalten wird. Ich garantiere weder für Korrektheit noch Vollständigkeit dieser Notizen, und bin dankbar für jegliche Art von Korrektur, sowohl inhaltlich, als auch Tippfehler. Schreibt hierzu eine Mail, oder nutzt das 'Issues' Feature auf GitHub.

Bemerkungen oder andere Umgebungen, die nicht zum eigentlichen Vorlesungsinhalt gehören, wurden mit einem * gekennzeichnet. Sie werden nach eigenem Ermessen hinzugefügt, um weitere Details oder evtl. mündliche Anmerkungen beizufügen. Insbesondere sind diese wohl besonders fehleranfällig, also verlasst euch nicht auf sie. Im Zweifelsfall ignoriert sie einfach.

Manche Umgebungen sind mit einem † versehen. Das ist dann der Fall, wenn ihr Inhalt so, oder zumindest in sehr ähnlicher Form, in der Vorlesung vorkam (unter Umständen auch mündlich), ich aber die Umgebung der Aussage geändert habe. Das ist z.B. dann der Fall, wenn ich aus Aussagen, die einfach erwähnt werden, ein **Lemma**† mache, um sie hervorzuheben. Diese Teile der Mitschrift solltet ihr also *nicht* ignorieren, aber es kann

vorkommen, dass ich auch hier Fehler mache.

Weitere Informationen zu diesem Skriptum finden sich bei GitHub oder auf der Vorlesungshomepage.

Inhaltsverzeichnis

Übersicht der Vorlesungen

Vorlesung 1
Di 18 Mai 2021 12:20

Wir erinnern uns daran, dass wir gerade dabei waren, **??** zu beweisen.

Lemma 0.1. Sei X ein normaler Raum, $A \subseteq X$ abgeschlossen und $U \subseteq X$ offen mit $A \subseteq U$. Dann existiert $V \subseteq X$ offen mit

$$A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U.$$

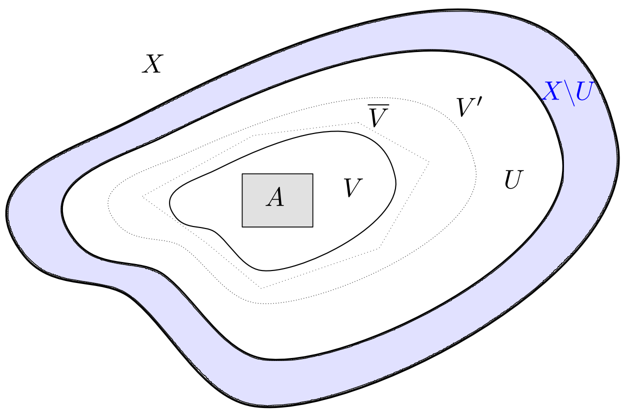


Abbildung 1: Skizze zu Lemma 0.1

Beweis. Wegen U offen ist $X \backslash U$ abgeschlossen. Wegen X normal gibt es V, V' offen mit $A \subseteq V$ und $(X \backslash U) \subseteq V'$ mit $V \cap V' = \varnothing$. Nun ist

$$A \subseteq V \subseteq X \backslash V' \subseteq U.$$

nach Definition des Abschlusses ist nun $A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq X \backslash V' \subseteq U$. □

Beweis von **??** *(***??***).*
Ziel. $\forall r \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ konstruiere $V_r \subseteq X$ offen, sodass

1. $A \subseteq V_0$
2. $B \subseteq X \backslash V_1$
3. $r < r' \Rightarrow \overline{V_r} \subseteq V_{r'}$

Dies genügt, denn dann wissen wir mit **??**, dass

$$\begin{aligned} &\exists f : X \to [0,1] \text{ stetig} \\ f(x) &= 0 \quad \forall x \in V_0 \supseteq A \\ f(x) &= 1 \quad \forall x \in X \backslash V_1 \supseteq B \end{aligned}$$

Wähle hierzu eine Abzählung $p_1, p_2, \ldots$ von $\mathbb{Q} \cap [0,1]$, sodass $p_1 = 1$ und $p_2 = 0$. Definiere nun $\{V_r\}$ rekursiv, wobei wir auch induktiv die Invariante erhalten wollen, dass $r < r' \Rightarrow \overline{V_r} \subseteq V_{r'}$.

- $p_1 = 1$. Setze $V_1 := X \backslash B$ (offen, weil B abgeschlossen ist)
- $p_2 = 0$. Nach Lemma 0.1 mit $A = A$ und $U = X \backslash B$ finden wir V_0 offen mit

$$A \subseteq V_0 \subseteq \overline{V}_0 \subseteq X \backslash B =: V_1.$$

- Sei $n \geqslant 3$, dann sind also $V_{p_1}, V_{p_2}, \ldots, V_{p_{n-1}}$ schon definiert. Es ist $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ wohlgeordnet, weil es sich um eine endliche Menge handelt, also gibt es unter ihnen einen direkten Vorgänger p_i von p_n, und einen direkten Nachfolger p_j von p_n.

  Es könnte z.B. $n = 5$ sein mit $\begin{array}{c|c|c|c|c} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{8}{9} & \frac{3}{5} \end{array}$ Dann ist die Menge als $\left\{0, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{8}{9}, 1\right\}$ geordnet, und wir sehen $p_i == \frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{8}{9} = p_j$.

  Verwende nun Lemma 0.1 mit $A = \overline{V_{p_i}}$ und $U = V_{p_j}$, (hier ist wichtig, dass wegen $p_i < p_j$ beretis $\overline{V_{p_i}} \subseteq V_{p_j}$ gilt, sonst können wir das Lemma nicht anwenden.)
  Also finden wir V mit $\overline{V_{p_i}} \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq V_{p_j}$. Man prüft leicht, dass wir so auch die Invariante der Induktion erhalten haben.

Also haben wir wie gewünscht die V_i gefunden, und somit unsere Funktion. □

Korollar 0.2 (Urysohn mit beliebigem Intervall)**.** Sei X ein normaler Raum und seien $A, B \subseteq X$ disjunkt und abgeschlossen, sowie $a \leqslant b \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann

$$\begin{aligned} \exists f : X &\to [a, b] \\ f(A) &= \{a\} \\ f(B) &= \{b\} \end{aligned}$$

Beweis. Zunächst verwenden wir Urysohn, um eine stetige Funktion $g : X \to [0, 1]$ zu erhalten mit $f(A) = \{0\}$ und $f(B) = \{1\}$, dann verknüpfen wir mit der stetigen Abbildung

$$h : \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & [a,b] \\ t & \longmapsto & (1-t)a + tb \end{array} \right.$$

und wir erhalten sofort die gewünschten Eigenschaften, indem wir $f = h \circ g$ setzen. □

1 Der Erweiterungssatz von Tietze

Wir sehen jetzt das **??** in Action:

Satz 1.1 (Erweiterungssatz von Tietze)**.** Sei X ein normaler Raum und $A \subseteq X$ abgeschlossen. Jede stetige Funktion $f : A \to [-1, 1]$ lässt sich fortsetzen zu einer stetigen Funktion $\overline{f} : X \to [-1, 1]$, d.h. $\overline{f}\,|_A \equiv f$.

Bemerkung. Das Urysohn'sche Lemma ist ein Spezialfall des Erweiterungssatz von Tietze:
Sei X normal und $B, C \subseteq X$ abgeschlossen, disjunkt. Dann betrachte

die Funktion

$$f : \left| \begin{array}{ccc} B \cup C & \longrightarrow & [-1,1] \\ B & \longmapsto & -1 \\ C & \longmapsto & 1 \end{array} \right.$$

Frage. Gibt es eine Fortsetzung $\overline{f} : X \to [-1,1]$?

Für jede solche Fortsetzung muss auch $\overline{f}\,|_B = f$, also $\overline{f}(B) = -1$ und $\overline{f}(C) = 1$ gelten, also genau das, was wir von Urysohn fordern. Allerdings sagt uns der Erweiterungssatz von Tietze genau, dass wir solche eine Fortsetzung finden.

Beweis von Satz 1.1 (Erweiterungssatz von Tietze).
Beweisstrategie. Wir konstruieren eine Folge stetiger Funktionen $\{s_n : X \to [-1,1]\}_{n \geqslant 1}$, sodass

(i) $\{s_n\}$ konvergiert **gleichmäßig** gegen eine Funktion $s : X \to [-1,1]$, d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ existiert $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$\forall x \in X, n \geqslant N: \qquad d(s_n(x), s(x)) < \varepsilon.$$

Weil $\{s_n\}$ gleichmäßig konvergiert, ist s stetig (Übungsblatt 5, Aufgabe 3 (iv)).

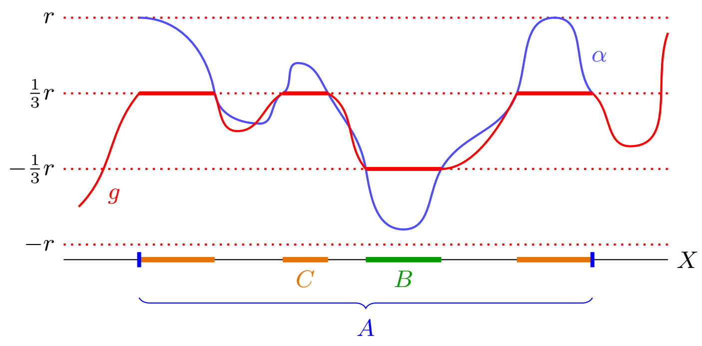
(ii) $s\,|_A = f$

Dazu benötigen wir erstmal einige Lemmata, die wir im folgenden erarbeiten. □

Lemma 1.2. Sei X normal und $A \subseteq X$ abgeschlossen. Sei $\alpha : A \to [-r, r]$ für $r \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ stetig. Dann existiert $g : X \to \left[-\frac{1}{3}r, \frac{1}{3}r\right]$ stetig mit $|\alpha(a) - g(a)| \leqslant \frac{2}{3}r$ für $a \in A$.

Beweis. Setze $B := \alpha^{-1}\left(\left[-r, -\frac{1}{3}r\right]\right)$ und $C := \alpha^{-1}\left(\left[\frac{1}{3}r, r\right]\right)$. Wegen α stetig sind B, C abgeschlossen, und sie sind auch disjunkt, weil die Intervalle disjunkt sind. Nach Urysohn mit beliebigem Intervall finden wir also eine stetige Funktion

$$\begin{aligned} g : X &\to \left[-\frac{1}{3}r, \frac{1}{3}r\right] \\ g(B) &= \left\{-\frac{1}{3}r\right\} \\ g(C) &= \left\{\frac{1}{3}r\right\} \end{aligned}$$



Behauptung 1. *g erfüllt die Bedingungen unseres Lemmas, d.h.*

$$|\alpha(a) - g(a)| \leqslant \frac{2}{3}r \qquad \forall a \in A.$$

Unterbeweis.
- Sei $a \in B$, Dann ist $\alpha(a) \in \left[-r, -\frac{1}{3}r\right]$ und $g(a) = -\frac{1}{3}r$, also gilt die Ungleichung.
- Sei $a \in C$. Dann ist $\alpha(a) \in \left[\frac{1}{3}r, r\right]$ und $g(a) = \frac{1}{3}r$, also, also gilt die Ungleichung.
- Sei $a \in A\backslash(B \cup C)$. Dann ist $\alpha(a), g(a) \in \left[-\frac{1}{3}r, \frac{1}{3}r\right]$, und damit ist der Abstand auch höchstens $\frac{2}{3}r$.

■

□

> **Bemerkung*.** In der Vorlesung kam die Frage auf, ob wir manche der gerade bewiesenen Resultate auch auf die Analysis übertragen können, indem wir z.B. den Fixpunktsatz von Banach anwenden.

darüber nachdenken

Fortsetzung des Beweises des Erweiterungssatz von Tietze. Definiere die Folgen s_n induktiv. Dazu

Schritt 1: Verwende Lemma 1.2 mit $\alpha = f$ und $r = 1$, also erhalten wir

$$g_1 : X \to \left[-\frac{1}{3}r, \frac{1}{3}r\right].$$

settig mit $|f(a) - g(a)| \leqslant \frac{2}{3}$ für jedes $a \in A$. Setze $s_1 = g_1$.

Induktionsschritt Angenommen, wir haben schon stetige Funktion $g_1, \ldots, g_n$ auf X mit

$$g_i : X \to \left[-\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} \cdot \frac{1}{3}, \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} \cdot \frac{1}{3}\right].$$

und

$$\left|f(a) - \sum_{i=1}^{n} g_i(a)\right| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n \qquad \forall a \in A.$$

Verwende nun wieder Lemma 1.2 mit $\alpha = f - \sum_{i=1}^{n} g_i \mid_A$ und $r = \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Es gibt also

$$g_{n+1} \colon X \to \left[-\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n, \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n\right].$$

Wir erhalten nun

$$\begin{aligned}\left|f(a) - \sum_{i=1}^{n} g_i(a) - g_{n+1}(a)\right| &= \left|f(a) - \sum_{i=1}^{n+1} g_i(a)\right| \\ &\leqslant \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\end{aligned}$$

Nun definiere

$$s_{n+1} \coloneqq \sum_{i=1}^{n+1} g_i : X \to \mathbb{R}.$$

Behauptung 1. *s_n hat Bild in $[-1, 1]$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.*

Unterbeweis.

$$
\begin{aligned}
|s_n(x)| &= \left|\sum_{i=1}^{n} g_i(x)\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n}|g_i(x)| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1}\cdot\frac{1}{3} \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1}\cdot\frac{1}{3} \\
&= \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{2}{3}} = 1
\end{aligned}
$$

Die andere Schranke zeigt man völlig analog. ■

Behauptung 2. *Die Folge* $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert gleichmäßig gegen* s.

Unterbeweis. Für $k > n$ ist

$$
\begin{aligned}
|s_k(x) - s_n(x)| &= \left|\sum_{i=n+1}^{k} g_i(x)\right| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} \\
&= \sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} \\
&= \frac{1}{3}\cdot\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}} \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^n
\end{aligned}
$$

(i) Für jedes $x \in X$ ist $\{s_n(x)\}_{n\geqslant 1}$ eine Cauchy-Folge, also konvergiert sie zu einem Punkt $s(x) \in [-1, 1]$.

(ii) Intuitiv reicht es für gleichmäßige Stetigkeit schon zu sehen, dass in obiger Abschätzung kein x vorkommt. Genauer:
Sei $\varepsilon > 0$, so $\exists N \in \mathbb{N}$ mit $\forall n > N \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^n < \varepsilon$. Dann ist

$$
\begin{aligned}
|s(x) - s_n(x)| &= \left|\lim_{k\to\infty} s_k(x) - s_n(x)\right| \\
&= \lim_{k\to\infty}|s_k(x) - s_n(x)| \\
&\leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n \\
&< \varepsilon
\end{aligned}
$$

also ist die Konvergenz gleichmäßig, und s ist stetig.

■

Setze nun $\overline{f} := s$, dann überprüfen wir

Behauptung 3. $\overline{f}$ *ist eine Fortsetzung von* f, *d.h.* $\overline{f}\,|_A = f$.

Unterbeweis. Es ist

$$
|f(a) - s_n(a)| = \left|f(a) - \sum_{i=1}^{n} g_i(a)\right| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n
$$

also

$$
\lim_{n\to\infty}|f(a) - s_n(a)| \leqslant \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0
$$

Also ist

$$s(a) := \lim_{n\to\infty} s_n(a) = f(a).$$

für jedes $a \in A$. ■

Wir haben also eine Fortsetzung gefunden, und sind damit fertig. □

Korollar 1.3 (Version des Satzes von Tietze)**.** Sei X ein normaler Raum und $A \subseteq X$ abgeschlossen. Dann gilt folgendes:

1. Jede stetige Funktion $f : A \to [a, b]$ lässt sich zu einer Funktion $\overline{f} : X \to [a, b]$ fortsetzen.
2. Jede stetige Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ lässt sich fortsetzen zu einer Funktion $\overline{f} \colon X \to \mathbb{R}$.

Beweis. Übung. □

2 Der Metrisierungssatz von Urysohn

Satz 2.1 (Metrisierungssatz von Urysohn)**.** Jeder normale Raum mit abzählbarer Basis der Topologie ist metrisierbar.

Beweis.
Beweisstrategie. Schritt 1: Betrachte $\prod_{\mathbb{N}}[0, 1]$ in der Produkttopologie und zeige, dass der Raum emtrisierbar ist. Dieser Raum heißt **Hilbert-Würfel**.

Schritt 2: Sei X normal mit abzählbarer Basis, wir zeigen, dass wir eine Einbettung $F : X \to \prod_{\mathbb{N}}[0, 1]$ finden. Dann sind wir fertig, da

$$X \cong F(X) \subseteq \prod_{\mathbb{N}}[0, 1].$$

ein Unterraum eines metrischen Raumes ist.

□ Vorlesung 2
Do 20 Mai 2021 10:07

Lemma 2.2 (Hilbert-Raum ist metrisierbar)**.** Der Raum $\prod_{i=1}^{\infty}[0, 1]$ ist metrisierbar (in der Produkttopologie).

Beweis. Übung. Die Metrik ist hierbei gegeben durch:

$$D((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sup\left\{\frac{|x_n - y_n|}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}.$$

□

Lemma 2.3. Sei X ein normaler Raum mit abzählbarer Basis

$$\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \ldots\}.$$

Dann gibt es eine abzählbare Familie

$$\{f_i \colon X \to [0, 1] \mid f_i \text{ stetig}\}.$$

sodass für jedes $x \in X$ und jede offene Umgebung $x \in U$ ein $i \in \mathbb{N}$

existiert, sodass $f_i(x) = 1$ und $f_i(y) = 0$ für $y \notin U$.

Bemerkung. Wir wissen schon, dass X normal $\Rightarrow X$ vollständig regulär, dass wir also solche Funktionen finden, ist bereits klar. Das wichtige am Beweis ist, dass wir abzählbar viele Funktionen finden können, die das schon für alle (!) Punkte tun.

Beweis von Lemma 2.3. Für jedes n, m mit $|B_n| \subseteq B_m$ wenden wir das **??**. an, also gibt es Funktionen

$$\begin{aligned} g_{n,m}\colon X &\to [0,1] \\ g_{n,m}(\overline{B_n}) &= \{1\} \\ g_{n,m}(X \backslash B_m) &= \{0\} \end{aligned}$$

Wir stellen zudem fest, dass diese Familie von Funktionen abzählbar ist, wegen $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \cong \mathbb{N}$.
Behauptung 1. *Die $(g_{n,m})_{n,m \in \mathbb{N}}$ erfüllen bereits die gewünschte Bedingung.*

Unterbeweis. Sei $x \in X$ mit einer Umgebung $x \in U$ gegeben. Da $\mathcal{B}$ eine Basis ist, finden wir $m \in \mathbb{N}$ mit $x \in B_m \subseteq U$, da U offen ist. Da X normal ist, finden wir zudem eine offene Menge V mit $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq B_m$ (Lemma 0.1, wir erinnern uns, dass Punkte in normalen Räumen abgeschlossen sind nach **??**). Analog finden wir nun $B_n \in \mathcal{B}$ mit $x \in B_n \subseteq V$, erneut, weil $\mathcal{B}$ eine Basis ist.

Dann ist $\overline{B_n} \subseteq \overline{V} \subseteq B_m$, und $g_{n,m}(x) = 1$ wegen $x \in B_n \subseteq \overline{B_n}$ und $g_{n,m}(y) = 0$ für $y \notin U$, da dann $y \notin B_m$. ■

□

Bemerkung*. Für den Beweis von Satz 2.1 brauchen wir nicht wirklich, dass wir eine abzählbare Basis finden, sondern es genügt die Eigenschaft ebigen Lemmas. Die abzählbare ist jedoch die einfachste Eigenschaft das zu garantieren.

Beweis des Metrisierungssatz von Urysohn. Seien $(f_i\colon X \to [0,1])_{i \in \mathbb{N}}$ wie in Lemma 2.3. Definiere

$$F : \left| \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \prod_{i=1}^{\infty} [0,1] \\ x & \longmapsto & (f_i(x))_{i \in \mathbb{N}} \end{array} \right.$$

Nach der universellen Eigenschaft der Produkttopologie ist f stetig.
Behauptung 1. *F ist eine Einbettung (d.h. ein Homöomorphismus mit dem Bild, siehe* **??***).*

Unterbeweis. Wir zeigen, dass F injektiv und $F\colon X \to F(X)$ offen ist, dann ist F eine Einbettung.

- Seien $x \neq y \in X$. Da X normal ist, finden wir eine offene Menge $x \in U$, $y \notin U$ (erneut, indem wir uns erinnern, dass normale Räume Hausdorff sind, und dann **??** anwenden). Wegen Lemma 2.3 gibt es also $n \in \mathbb{N}$ mit $f_n(x) \subseteq f_n(U) = 1$ und $f_n(X \backslash U) = 0$, also

  $$f_n(x) = 1 \neq f_n(y) \Rightarrow F(x) \neq F(y).$$

  Also ist F injektiv.

- Sei $U \subseteq X$ offen. Wir zeigen: $F(U) \subseteq \prod_{\mathbb{N}}$ ist offen. Sei $z \in F(U)$ mit (eindeutigem) Urbild $x \in U$. Wir konstruieren eine Menge $V \subseteq \prod_{\mathbb{N}}[0,1]$ offen, sodass $z \in V \cap F(X) \subseteq F(U)$, dann ist $F(U)$ offen in $F(X)$.
  Erneut nach Lemma 2.3 erhalten wir ein n mit $f_n(x) = 1$ und $f_n(X \backslash U) = 0$. Setze nun
  $$V = [0,1] \times \ldots \times (0,1] \times [0,1] \times \ldots.$$
  als offene Teilmenge von $\prod_{\mathbb{N}}[0,1]$, wobei $(0,1]$ im n-ten Faktor stehe.

  Behauptung 2. $V \cap F(X) \subseteq F(U)$
  Unterbeweis. Sei $z' = F(x') \in V \cap F(X)$. Es ist $z' \in V$, also $z'_n := f_n(x') \neq 0$, allerdings wissen wir auch $f_n(X \backslash U) = 0$, d.h. $x' \notin X \backslash U$, also folgt $x' \in U$ und somit $z' = F(x') \in F(U)$. ■
  Also ist $F(U)$ offen in $F(X)$ und somit $F\colon X \to F(X)$ offen.

Also ist $F\colon X \to F(X)$ offen und injektiv, und somit eine Einbettung. ■

Nun stellen wir also fest, dass $X \cong F(X)$ (wegen der Einbettung), aber $F(X) \subseteq \prod_{\mathbb{N}}[0,1]$ ist metrisierbar als Teilraum eines metrisierbaren Raums, also ist X metrisierbar. □

Noch erwähnen, dass $f_n(x) \in V$ wegen halboffenem Intervall an der Stelle im Beweis .

Bemerkung†**.** Wo haben wir jetzt wirklich benutzt, dass das Produkt abzählbar war?. Man überlegt sich, dass wir den exakt gleichen Beweis für jede Kardinalität einer Basis hätten durchführen können, um nach $\prod_{\aleph}[0,1]$ einzubetten. Das wirkliche Problem ergibt sich dann erst, wenn wir zeigen (in der Übung), dass $\prod_{\mathbb{N}}[0,1]$ metrisierbar ist. Es stellt sich heraus, dass das nur für $\aleph \leqslant \omega$, dh. für abzählbare Indexmengen der Fall ist.

Motivation für den 2. Teil der Vorlesung

Bisher haben wir Topologische Räume und ihre Eigenschaften wie Hausdorff, normal, Kompakt oder zsuammenhängend gesehen, um diese zu unterscheiden.

2. Teil: Wir kümmern uns um weitere Invarianten der topologischen Räume.

Beispiel. $\pi_0(X) =$ Menge der Wegkomponenten von X, d.h. $\pi_0(X) \subseteq \mathcal{P}(X)$ und $U \in \pi_0(X)$ genau dann, wenn U wegzusammenhängend, $\nexists V$ mit $U \subsetneq V$ und V wegzusammenhängend.

Beispiel.
- $\pi_0(\mathbb{R}) = \{\mathbb{R}\}, \pi_0(\mathbb{N}) = \{\{n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$
- $\pi_0(S) = \{|, S\}$

Beispiel. es gibt aber auch die Invariante für $x_0 \in X$, gegeben durch:
$$\pi_1(X, x_0) = \left\{\text{Abbildungen } f\colon S^1 \to X, 1 \mapsto x_0\right\} / \text{'Verschieben'}.$$

Ist $f : X \to Y$ stetig, so induziert f Abbildungen

$$f_* : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$$
$$f_* : p_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$$

Formal sind π_0, π_1 sogenannte **Funktoren**, deswegen wollen wir uns im Folgenden etwas genauer die sogenannte **Kategorientheorie** ansehen.

3 Kategorien

3.1 Einschub: Mengentheorie

Mengentheorie: Wir fordern neben den üblichen Axiomen von **ZFC** (hierbei steht **C** für das sogenannte **Auswahaxiom**), noch die Existenz mehrerer unerreichbarer Kardinalzahlen (d.h. welche außer $\aleph_0 := \operatorname{card}(\mathbb{N})$, die wir $\aleph_0 < \kappa < \kappa'$ nennen)

Definition† (unerreichbare Kardinalzahl)**.** κ ist eine **unerreichbare Kardinalzahl**, falls
- $\operatorname{card}\left(\bigcup_{i\in I} X_i\right) < \kappa$ für alle I, X_i mit $\operatorname{card}(I), \operatorname{card}(X_i) < \kappa$.
- $\operatorname{card}\{f\colon X \to Y \mid f \text{ Abbildung}\} < \kappa$ für alle Mengen X, Y mit $\operatorname{card}(X), \operatorname{card}(Y) < \kappa$.

Definition 3.1 (Menge,Klasse)**.**
- Der Begriff **Mengen** heißt für uns ab nun 'alle Mengen mit Kardinalität $< \kappa$', d.h. alles 'Interessante'.
- Der Begriff **Klasse** steht für alle Mengen mit Kardinalität $< \kappa'$.

3.2 Kategorien

Definition 3.2 (Kategorie)**.** Eine **Kategorie** $\mathcal{C}$ besteht aus
- Einer Klasse von **Objekten**, notiert $\operatorname{Ob}(\mathcal{C})$.
- $\forall X, Y \in \operatorname{Ob}(\mathcal{C})$ eine Menge $\operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ von **Morphismen**
- Verknüpfungsabbildungen

  $$\operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \to \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Z).$$

  mit $(f, g) \mapsto g \circ f$, die assoziativ sind.
- Jede Menge $\operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(X, X)$ enthält eine Identität id_X mit

  $$\mathrm{id}_X \circ f = f, g \circ \mathrm{id}_X = g.$$

Bemerkung.
- Ist $\operatorname{Ob}(\mathcal{C})$ eine Menge, so heißt $\mathcal{C}$ klein.
- Da $\operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ Mengen sind, heißt $\mathcal{C}$ manchmal lokal klein.

Beispiel.
- **Set** ist die Kategorie der Mengen und all ihrer Abbildungen dazwischen.
- **Top** ist die Kategorie der topologischen Räume und ihren

stetigen Abbildungen.

- **Grp** ist die Kategorie der Gruppen und ihren Gruppenhomomorphismen
- $\mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}$ ist die Kategorie der $\mathbb{R}$-Vektorräume und den linearen Abbildungen dazwischen.
- $\mathbf{Top}_\star$ ist die Kategorie der punktierten topologischen Räume. Wir setzen $\mathrm{Ob}(\mathbf{Top}_\star)$ als Klasse aller Topologischen Räume, schränken uns aber bei den Morphismen ein, d.h.

$$\mathrm{Mor}_{\mathbf{Top}_\star}((X,x_0),(Y,y_0)) = \{\text{stetige Abbildungen } f\colon X \to Y \mid f(x_0) = y_0\}\,.$$

Bemerkung†**.** Die Kategorientheorie bildet zunächst eine Sprache, mit der wir sehr vieles präziser ausdrücken können. Wir sollten auch so über sie nachdenken, d.h. die Kategorientheorie hilft uns, Dinge aus vielen verschiedenen Teildisziplinen (siehe Liste der Beispiele oben) elegant und knapp zusammenzufassen und Beweise, die gleich geführt werden, zu vereinheitlichen.

Definition 3.3 (Unterkategorie)**.**
- $\mathcal{U}$ ist eine **Unterkategorie** von $\mathcal{C}$, falls $\mathcal{U}$ eine Kategorie ist mit $\mathrm{Ob}(\mathcal{U}) \subseteq \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, und $\forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{U})$ ist

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{U}}(X,Y) \subseteq \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Y).$$

- Ist zudem $\forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{U})$ obige Inklusion sogar eine Gleichheit, so heißt $\mathcal{U}$ **volle** Unterkategorie.

Beispiel.
- $\mathbf{Fin} \subseteq \mathbf{Set}$ ist die Unterkategorie der endlichen Mengen.
- $\mathbf{CHaus} \subseteq \mathbf{Top}$ ist die Unterkategorie der kompakten Hausdorffräume.
- $\mathbf{Ab} \subseteq \mathbf{Grp}$ ist die Unterkategorie der abelschen Gruppen.

Alle 3 Beispiele sind volle Unterkategorien.

Definition 3.4 (Isomorphismus)**.** $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ ist ein **Isomorphismus**, wenn es ein $g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Y,X)$ gibt mit $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ und $g \circ f = \mathrm{id}_X$ (d.h. eine Umkehrabbildung).

Ein Isomorphismus hat immer ein eindeutiges Inverses. Sind g, g' beides Inverse von f, so ist

$$x.$$

Beispiel. $f \in \mathbf{Top}$ ist ein Isomorphismus, wenn f ein Homöomorphismus ist.

Definition 3.5 (Funktor)**.** Seien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien. Ein (kovarianter) **Funktor** $\mathcal{F}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ besteht aus:

- einer Abbildung $\mathcal{F}\colon \operatorname{Ob}(\mathcal{C}) \to \operatorname{Ob}(\mathcal{D})$.
- Abbildungen $\mathcal{F}\colon \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \operatorname{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y))$ für alle Objekte $X, Y \in \operatorname{Ob}(\mathcal{C})$.

sodass

- $\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g)$
- $\mathcal{F}(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(X)}$

Definition 3.6 (Isomorphismus von Kategorien)**.** Ein Funktor $\mathcal{F}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ist ein **Isomorphismus**, falls es einen Funktor $\mathcal{G}\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ gibt, sodass $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ und $\mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ die Identitäten sind. Ein Funktor ist hierbei die Identität ('der Identitätsfunktor'), wenn er sowohl Objekte als auch Abbildungen auf sich selbst schickt.

Bemerkung*. Zeug zu Isomorphismus vs. Äquivalenz schreiben.

Beispiel.

- Der Funktor **Top** → **Set**, der jeden topologischen Raum auf seine zugrunde liegende Menge schickt, nennt sich auch **vergesslicher Funktor**.
- **Ab** → **Grp** lässt sich als Inklusionsfunktior auffasen.
- Betrachte

$$\mathcal{F}: \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{Set} & \longrightarrow & \mathbf{Ab} \\ X & \longmapsto & \mathbb{Z}[X] \\ f & \longmapsto & \left(\sum_{i=1}^k n_i x_i \mapsto \sum_{i=1}^k n_i f(x_i)\right) \end{array} \right.$$

Mehr Referenzen einfügen

Stichwortverzeichnis