Einführung in die Geometrie und Topologie - SS 2021
Blatt 1 – Lösung

Aufgabe 1. Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $x \in X$ ein Punkt. Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} d_x \colon X &\to \mathbb{R} \\ y &\mapsto d(x, y) \end{aligned}$$

stetig.

Beweis. Beweis über ε-δ Stetigkeit:

$$d_x \text{ ist stetig } \iff \forall a \in X \text{ gilt} : \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall y \in X : d(y, a) < \delta \implies d(d_x(y), d_x(a)) < \varepsilon$$

Seien nun $\varepsilon > 0$ und $a \in X$. Wir wählen $\delta = \varepsilon$ und $y \in X$ beliebig so dass $d(y, a) < \varepsilon$. Nun gilt nach der Dreiecksungleichung

$$d(y, x) - d(a, x) \leq d(y, a) < \varepsilon \quad \text{und} \quad d(a, x) - d(y, x) \leq d(y, a) < \varepsilon\,,$$

und somit insgesamt

$$|d_x(y) - d_x(a)| = |d(x, y) - d(x, a)| < \varepsilon\,.$$

Somit ist d_x stetig. $\square$

Aufgabe 2. Wir betrachten die Menge $\mathbb{N}_{>0}$ mit der euklidischen Metrik d_1, d.h. $d_1(n,m) := |n-m|$, der diskreten Metrik d_2 und der Metrik d_3 gegeben durch $d_3(n,m) := |\frac{1}{n} - \frac{1}{m}|$.

i) Die Metriken d_1, d_2 und d_3 sind paarweise nicht äquivalent.

ii) Die Metriken d_1, d_2 und d_3 induzieren dieselbe Topologie auf $\mathbb{N}_{>0}$.

Beweis. i) **Die Metriken d_1, d_2 und d_3 sind paarweise nicht äqualent.**

(a) **d_1 und d_2 sind nicht äquivalent.**
Sei $c > 0$ und $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Es gilt:

$$\begin{aligned} c \cdot d_1(n, n+1+\lceil \tfrac{1}{c} \rceil) &= c \cdot |n - (n+1+\lceil \tfrac{1}{c} \rceil)| \\ &= c + c \cdot \lceil \tfrac{1}{c} \rceil \\ &> 1 = d_2(n, n+1+\lceil \tfrac{1}{c} \rceil). \end{aligned}$$

(b) **d_i und d_3 sind nicht äquivalent für $i = 1, 2$.**
Sei $c > 0$. Es gilt:

$$\begin{aligned} d_1(\lceil c \rceil, \lceil c \rceil + 1) = d_2(\lceil c \rceil, \lceil c \rceil + 1) &= 1 \\ &> \frac{1}{\lceil c \rceil + 1} \\ &\geq \frac{c}{\lceil c \rceil} \cdot \frac{1}{\lceil c \rceil + 1} \\ &= c \cdot d_3(\lceil c \rceil, \lceil c \rceil + 1). \end{aligned}$$

ii) **Die Metriken d_1, d_2 und d_3 induzieren dieselbe Topologie auf $\mathbb{N}_{>0}$.**

Es reicht zu zeigen, dass d_1 und d_3 die diskrete Topologie (die von der diskreten Metrik induziert wird) induzieren. Nach den Axiomen einer Topologie reicht es also zu zeigen, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_{>0}$ die Menge $\{n\}$ offen ist. Sei nun $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

Betrachten wir zuerst d_1:

$$\min\{|n-m| \,|\, n \neq m \in \mathbb{N}_{>0}\} = 1.$$

Daher gilt:

$$U_{d_1}(n, 1) = \{n\}.$$

Nun betrachten wir d_3:

$$\min\{|\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{m}| \,|\, n \neq m \in \mathbb{N}_{>0}\} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Daher gilt:

$$U_{d_3}(n, \frac{1}{n(n+1)}) = \{n\}.$$

□

Aufgabe 3. Auf $\mathbb{N}$ betrachten wir die Menge von Teilmengen $\mathcal{O}_{ko-endl}$ für die gilt: $U \in \mathcal{O}_{ko-endl}$ genau dann wenn U leer oder $\mathbb{N} \setminus U$ endlich ist.

i) $\mathcal{O}_{ko-endl}$ ist eine Topologie auf $\mathbb{N}$ (die ko-endliche Topologie).

ii) Es seien $U_1, U_2 \in \mathcal{O}_{ko-endl}$ nicht leer. Dann ist auch $U_1 \cap U_2$ nicht leer.

iii) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann ist jede stetige Abbildung $f\colon (\mathbb{N}, \mathcal{O}_{ko-endl}) \to (X, d)$ konstant.

iv) $(\mathbb{N}, \mathcal{O}_{ko-endl})$ ist nicht metrisierbar.

Beweis. i) Man muss zunächst überprüfen, dass mit $U_i \in \mathcal{O}_{ko-endl}$ für $i \in$, wobei I eine beliebige Menge ist, auch die Vereinigung $\bigcup_i U_i$ in $\mathcal{O}_{ko-endl}$ liegt. Da $U_i \in \mathcal{O}_{ko-endl}$, ist U_i entweder leer oder $\mathbb{N} \setminus U_i$ ist endlich für alle i. Also ist auch $\bigcup_i U_i$ leer (falls alle U_i leer sind) oder $\mathbb{N} \setminus \bigcup_i U_i = \bigcap_i \mathbb{N} \setminus U_i$ ist endlich (falls es ein $U_i \neq \emptyset$ gibt). Folglich ist $\bigcup_i U_i \in \mathcal{O}_{ko-endl}$.

Weiter muss man überprüfen, dass mit $U_i \in \mathcal{O}_{ko-endl}$ für $i \in$, wobei I eine endliche Menge ist, auch der Durchschnitt $\bigcap_i U_i$ in $\mathcal{O}_{ko-endl}$ liegt. Da $U_i \in \mathcal{O}_{ko-endl}$, ist U_i entweder leer oder $\mathbb{N} \setminus U_i$ ist endlich für alle i. Also ist auch $\bigcap_i U_i$ leer (falls ein U_i leer ist) oder $\mathbb{N} \setminus \bigcap_i U_i = \bigcup_i \mathbb{N} \setminus U_i$ ist endlich (falls stets $U_i \neq \emptyset$ gilt). Im zweiten Fall wurde verwendet, dass I endlich ist. Folglich ist $\bigcap_i U_i \in \mathcal{O}_{ko-endl}$.

Nicht zu vergessen ist, dann noch einmal festzustellen, dass $\emptyset$ und $\mathbb{N}$ offen sind.

ii) Es seien $U_1, U_2 \in \mathcal{O}_{ko-endl}$ nicht leer. Dann müssen $\mathbb{N} \setminus U_1, \mathbb{N} \setminus U_2$ endlich sein. Wären U_1 und U_2 nun disjunkt, so wäre $\mathbb{N} \setminus U_1 \cup \mathbb{N} \setminus U_2 = N \setminus (U_1 \cap U_2) = \mathbb{N}$.

iii) Sei (X, d) ein metrischer Raum und $f\colon (\mathbb{N}, \mathcal{O}_{ko-endl}) \to (X, d)$ eine stetige Abbildung. Seien $x \neq y$ zwei Punkte im Bild von f. Verschiedene Punkte in einem metrischen Raum besitzen disjunkte offene Umgbungen, wie z. B. $U_1 = U(x, d(x, y)/2)$ und $U_2 = U(y, d(x, y)/2)$ und dann sind auch $f^{-1}(U_1)$ und $f^{-1}(U_1)$ offen und auch disjunkt. Da x und y aber im Bild von f liegen, sind sie auch nichtleer, im Widerspruch zu ii). Also gilt $x = y$ und f ist konstant.

iv) Wäre $(\mathbb{N}, \mathcal{O}_{ko-endl})$ metrisierbar mit einer Metrik d, so wäre die Abbildung $d_x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ aus Aufgabe 1 für einen beliebigen Punkt $x \in \mathbb{N}$ stetig (nach ebendieser Aufgabe) und nichtkonstant (da $\mathbb{N}$ mehr als einen Punkt hat). Dies stände aber im Widerspruch zu iii), weil $\mathbb{R}$ ein metrischer Raum ist.

$\square$

Aufgabe 4. Es sei $Y = \{a, b\}$, mit der Topologie $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, Y\}$. Zudem sei X ein topologischer Raum.

i) Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ ist stetig genau dann, wenn $f^{-1}(a) \subset X$ offen ist.

ii) Die Zuordnung

$$\begin{aligned} \{\text{stetige Abbildungen } X \to Y\} &\to \{\text{offene Teilmengen in } X\} \\ f &\mapsto f^{-1}(a) \end{aligned}$$

ist bijektiv.

Beweis. i) Eine Abbildung ist per Definition stetig, falls Urbilder offener Mengen offen sind. Offene Mengen in Y sind genau $\emptyset$, $\{a\}$ und Y. Es gilt stets $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ sowie $f^{-1}(Y) = X$ und in jeder Topologie auf X sind $\emptyset, X \subset X$ offen. Das bedeutet aber, dass f stetig ist genau dann, wenn $f^{-1}(a) \subset X$ offen ist.

ii) Wir benennen die gegebene Zuordnung $\Phi\colon \{\text{stetige Abbildungen } X \to Y\} \to \{\text{offene Teilmengen in } X\}$. Nach dem vorigen Teil ist Φ wohldefiniert.
Seien $f, g\colon X \to Y$ stetige Abbildungen, sodass $\Phi(f) = \Phi(g)$, also $f^{-1}(a) = g^{-1}(a)$. Da Y als Menge nur aus zwei Punkten besteht, gilt $f(x) = b$ für alle $x \notin f^{-1}(a)$ und ebenso $g(x) = b$ für alle $x \notin g^{-1}(a)$. Da aber $f^{-1}(a) = g^{-1}(a)$, gilt $f(x) = b = g(x)$ für alle $x \notin f^{-1}(a)$ und ebenso $f(x) = a = g(x)$ für alle $x \in f^{-1}(a)$, insgesamt also $f(x) = g(x)$ für alle $x \in X$, d.h. $f = g$. Damit ist Φ injektiv.
Sei $U \subset X$ offen. Definiere

$$\begin{aligned} f\colon X &\to Y \\ x &\mapsto \begin{cases} a & \text{falls } x \in U \\ b & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Nach dem ersten Teil der Aufgabe ist f stetig, denn $f^{-1}(a) = U \subset X$ ist offen und es gilt $\Phi(f) = U$. Damit ist Φ surjektiv.

$\square$