Einführung in die Geometrie und Topologie

Dozent
Dr. Daniel Kasprowski

Mitschrift
Maximilian Kessler

Version
29. April 2021 22:37

Inhaltsverzeichnis

Vorlesung 1: Einführung

Di 13 Apr 2021 12:16

Organisatorisches

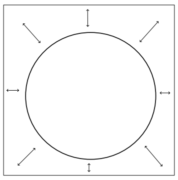
- Die Vorlesung wird aufgezeichnet.
- Wir duzen uns.
- Für die Übungen muss man sich auf eCampus anmelden, ob Do, 20:00 Uhr (Do 15 Apr 2021 20:00 Uhr)
- Die Übungsblätter werden Donnerstag zur Verfügung gestellt und werden nach 10 Tagen am Montag, 10 Uhr abgegeben.

- Es wird eine Fragestunde um Donnerstag, 16 Uhr geben.
- Es wird kein Skript geben, allerdings werden die geschriebenen Notizen auf eCampus zur Verfügung gestellt.
- Die Vorlesung orientiert sich an der vom letzten Jahr.
- Für Literatur siehe die 3 Vorschläge auf der Homepage

0 Motivation und Überblick

In der Topologie studieren wir topologische Räume. Diese verallgemeinern metrische Räume. Wir wollen zwei metrische Räume X, Y als 'gleich' ansehen, wenn es stetige, zueinander inverse Abbildungen $X \to Y, Y \to X$ gibt.

Beispiel. Betrachte ein Quadrat und einen Kreis, wir können sie durch Streckung aufeinander abbilden. Gleiches gilt für eine Tasse und einen Donut.



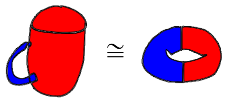


Abbildung 1: Beispiele 'gleicher' metrischer Räume (homöomorph)

Idee. Räume sind gewissermaßen aus 'Knete'.

Ziel. Wann sind zwei Räume gleich?

Dazu werden wir algebraische Invarianten verwenden.

Beispiel. $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ sind nicht 'gleich' für $n \neq m$.

Der Aufbau ist wie folgt:

1. Teil Grundlagen

2. Teil erste Invarianten: Fundamentalgruppe (dazu Überlagerungen)

1 Metrische Räume

Definition 1.1 (Metrik)**.** Eine **Metrik** auf einer Menge X ist eine Funktion $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(ii) $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$

(iii) (Dreiecksungleichung) $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$.

Ein **Metrischer Raum** ist ein Paar (X,d) aus einer Menge X und einer Metrik d auf X.

Definition 1.2 (Stetigkeit)**.** Seien (X,d) und (X',d') zwei metrische Räume. Dann ist eine Funktion $f : X \to Y$ **stetig in** $x \in X$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x' \colon d(x,x') < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

Eine Funktion f heißt **stetig**, wenn sie in jedem Punkt $x \in X$ stetig ist.

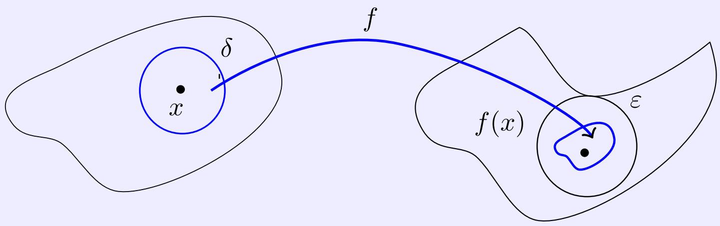


Abbildung 2: Definition von Stetigkeit in metrischen Räumen

Beispiel.

- Sei V ein reeller Vektorraum mit Norm $\|\cdot\|$. Dann definiert

$$d(v,w) := \|v - w\|.$$

eine Metrik auf V. Insbesondere ist $\mathbb{R}^n$ mit euklidischer Norm

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}.$$

dadurch ein metrischer Raum.

- Ist (X,d) ein metrischer Raum und $Y \subseteq X$ eine Teilmenge, dann ist $(Y, d|_{Y \times Y})$ ein metrischer Raum.
- Sei X eine Menge. Dann ist

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}.$$

eine Metrik auf X, genannt die **diskrete Metrik**.

Notation. Sei X ein metrischer Raum. Für $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ setzen wir

$$U(x,\varepsilon) := \{y \in X \mid d(x,y) < \varepsilon\}.$$

und nennen dies den **offenen ε-Ball um x**

Beobachte. Sei $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ eine Funktion, $x \in X$ sowie $\varepsilon, \delta > 0$. Dann sind äquivalent:

1) $\forall x' \in X$ mit $d_X(x', x) < \delta$ gilt $d_Y(f(x'), f(x)) < \varepsilon$
2) Es ist $f(U(x, \delta)) \subseteq U(f(x), \varepsilon)$

Definition 1.3 (Umgebung)**.** Sei X ein metrischer Raum, $U \subseteq X$ und $x \in X$. Dann heißt U **Umgebung von x**, falls ein $\varepsilon > 0$ existiert, sodass $U(x, \varepsilon) \subseteq U$.

Satz 1.4 (Urbilder von Umgebungen)**.** Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung zwischen metrischen Räumen und sei $x \in X$. Dann ist f stetig in x genau dann, wenn für alle Umgebungen V um $f(x)$ in Y das Urbild $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x ist.

Beweis. '$\Rightarrow$' Sei V eine Umgebung von $f(x)$. Dann $\exists\ \varepsilon > 0$ mit $U(f(x), \varepsilon) \subseteq V\}$. Da f stetig ist, $\exists\ \delta > 0$, sodass $f(X(x, \delta)) \subseteq U(f(x), \varepsilon) \subseteq V$. Also ist $U(x, \delta) \subseteq f^{-1}(V)$ und somit ist $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x.
'$\Leftarrow$'. Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $U(f(x), \varepsilon)$ eine Umgebung von $f(x)$. Also ist $f^{-1}(U(f(x), \varepsilon))$ eine Umgebung von x, also $\exists\ \delta > 0$ mit $U(x, \delta) \subseteq f^{-1}(U(f(x), \varepsilon))$. Also wie gewünscht $f(U(x, \delta)) \subseteq U(f(x), \varepsilon))$. □

Definition 1.5 (Offene Mengen)**.** Sei X ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt **offen**, falls sie Umgebung all ihrer Punkte ist, d.h. $\forall x \in U\ \exists \varepsilon > 0$ mit $U(x, \varepsilon) \subseteq U$.

Bemerkung. $U(x, \varepsilon)$ ist offen.

Beweis. Für alle $y \in U(x, \varepsilon)$ ist

$$U(y, \underbrace{\varepsilon - d(x, y)}_{>0}) \subseteq U(x, \varepsilon).$$

nach der Dreiecksungleichung. □

Satz 1.6 (Urbilder offener Mengen sind offen)**.** Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen metrischen Räumen ist stetig genau dann, wenn $\forall U \subseteq Y$ offen auch das Urbild $f^{-1}(U)$ offen in X ist.

Beweis. '$\Rightarrow$ '. Sei $U \subseteq Y$ eine offene Teilmenge und $x \in f^{-1}(U)$ beliebig. Dann ist $f(x) \in U$ und somit ist U eine Umgebung von $f(x)$. Da f stetig ist, ist $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von x nach Satz 1.4. Also ist $f^{-1}(U)$ offen, da x beliebig war.
'$\Leftarrow$' Sei $x \in X$, V eine Umgebung von $f(x)$. Dann $\exists \varepsilon > 0$ mit $U(f(x), \varepsilon) \subseteq V$.

Nach Annahme ist $f^{-1}(U(f(x), \varepsilon))$ offen. Also gibt es ein $\delta > 0$ mit $U(x, \delta) \subseteq f^{-1}(U(f(x), \varepsilon)) \subseteq f^{-1}(V)$. Also ist $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x.
Damit ist f stetig nach Satz 1.4 $\square$

Satz 1.7 (Offene Mengen in metrischen Räumen)**.** Sei X ein metrischer Raum. Dann gilt:

1) Die leere Menge $\varnothing$ und X sind offen
2) $\forall U_1, \ldots, U_n \subseteq X$ offen ist auch $\bigcap_{i=1}^n U_i$ offen.
3) Für jede Familie $\{U_i\}_{i \in I}$ von offenen Mengen ist auch $\bigcup_{i \in I} U_i$ offen.

Warnung. Eigenschaft 2) gilt nicht für unendliche Schnitte. Es ist $\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \subseteq \mathbb{R}$ offen für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$, allerdings ist dann

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}_{>0}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}\,.$$

nicht offen.

Beweis von Satz 1.7. 1) klar

2) Sei $x \in \bigcap_{i=1}^n U_i$. $\forall i = 1, \ldots, n$ gibt es nun ε_i mit $U(x, \varepsilon_i) \subseteq U_i$. Setze $\varepsilon := \min\{\varepsilon_i \mid i = 1, \ldots, n\}$. Dann ist

$$U(x, \varepsilon) \subseteq U(x, \varepsilon_i) \subseteq U_i.$$

für alle $i = 1, \ldots, n$ und somit wie gewünscht $U(x, \varepsilon) \subseteq \bigcap_{i=1}^n U_i$

3) Sei $x \in \bigcup_{\in I} U_i$ beliebig. Dann $\exists i \in I$ mit $x \in U_i$. Da U_i offen ist, $\exists \varepsilon > 0$ mit $U(x, \varepsilon) \subseteq U_i$. Also ist $U(x, \varepsilon) \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ und somit ist die Vereinigung offen.

$\square$

2 Topologische Räume

Definition 2.1 (Topologie)**.** Eine **Topologie** auf einer Menge X ist eine Menge $\mathcal{O}$ von Teilmengen von X, so dass gilt:

1) $\varnothing, X \in \mathcal{O}$
2) Für $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{O}$ ist auch $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{O}$
3) Für jede Familie $\{U_i\}_{i \in I}$ mit $U_i \in \mathcal{O}$ ist auch $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{O}$

Die Mengen in $\mathcal{O}$ heißen **offene Mengen**.
Ein **topologischer Raum** ist ein Paar $(X, \mathcal{O})$ aus einer Menge X und einer Topologie $\mathcal{O}$ auf X.

Definition 2.2 (Stetigkeit)**.** Seien X, Y topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt **stetig**, falls für jede offene Teilmenge $U \subseteq Y$ das Urbild $f^{-1}(U) \subseteq X$ offen ist.

Beispiel. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann ist

$$(X, \mathcal{O} := \{U \subseteq X \mid U \text{ ist offen bezüglich } d\}).$$

ein topologischer Raum. $\mathcal{O}$ ist die von der Metrik d **induzierte Topologie**.

Definition 2.3 (Metrisierbarkeit)**.** Ein topologischer Raum heißt **metrisierbar**, falls die Topologie von einer Metrik induziert ist.

Beispiel. Sei X eine Menge. Die **diskrete Topologie** auf X ist die Menge aller Teilmengen, d.h. $\mathcal{O} := \mathcal{P}(X)$. Diese ist von der diskreten Metrik

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}.$$

induziert.

Beweis. Ist $x \in X$, dann ist

$$\{x\} = U\left(x, \frac{1}{2}\right).$$

offen. Ist $U \subseteq X$ eine Teilmenge, dann ist

$$U = \bigcup_{x \in U} \{x\}.$$

offen als Vereinigung offener Mengen. □

Satz 2.4. Sei X ein endlicher (endlich als Menge), metrisierbarer topologischer Raum. Dann ist X diskret (d.h. X trägt die diskrete Topologie).

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass $\{x\}$ offen ist $\forall x \in X$. Sei d eine Metrik, die die Topologie induziert, dann wähle

$$\varepsilon := \min \{d(x, y) \mid x, y \in X, x \neq y\} > 0.$$

Beachte, dass dies existiert, da $d(x, y) > 0$ für $x \neq y$ und die Menge nach Voraussetzung endlich ist. Nun ist:

$$\{x\} = U(x, \varepsilon).$$

offen und wir sind fertig. □

Beispiel. 1) Wähle $X = \{a, b\}$ und setze

$$\mathcal{O} = \{\varnothing, X, \{a\}\}\,.$$

Dies ist ein topologischer Raum (leicht prüfen), er ist jedoch nicht metrisierbar, da endlich und nicht diskret. Dieser Raum heißt **Sierpinski-Raum**.

2) Sei X eine Menge. Die **indiskrete Topologie** auf X enthält nur $\varnothing, X$. Man prüft leicht, dass dies eine Topologie ist.

- Hat X mindestens 2 Elemente, so ist X nicht metrisierbar.

  Beweis. Nimm $|X| > 2$ an und wähle $x, y \in X$ mit $x \neq y$. Sei d eine Metrik, die die Topologie auf X induziert und setze $\varepsilon := d(x, y)$. Dann ist

  $$x \in U(x, \varepsilon) \quad y \notin U(x, \varepsilon).$$

  also ist $U(x, \varepsilon) \neq \varnothing, X$, Widerspruch. □

- Sei Y ein topologischer Raum. Dann ist $f : Y \to X$ stetig für beliebige Abbildungen f.

  Beweis. Es sind $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$ sowie $f^{-1}(X) = Y$ beide offen. □

Bemerkung. Ist Y diskret und X beliebig, so ist jede Abbildung $f : X \to Y$ stetig.

Vorlesung 2: Grundbegriffe

Do 15 Apr 2021 10:14

Definition 2.5 (Äquivalente Metriken)**.** Zwei Metriken d_1, d_2 auf X heißen **äquivalent**, falls Konstanten c_1, c_2 existieren, sodass

$$\forall x, y \in X: \quad c_1 \cdot d_1(x, y) \leqslant d_2(x, y) \leqslant c_2 \cdot d_1(x, y).$$

Satz 2.6. Äquivalenz (von Metriken) ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis. **Reflexivität:** Klar mit $c_1 = c_2 = 1$

Symmetrie: Seien c_1, c_2 wie in der Definition. Dann gilt mit entsprechender Division, dass

$$\forall x, y \in X: : \quad \frac{1}{c_2} \cdot d_2(x, y) \leqslant d_1(x, y) \leqslant \frac{1}{c_1} d_2(x, y).$$

Transitivität: . Seien c_1, c_2, c_1', c_2' gewählt, sodass $\forall x\ \forall y$: $c_1 d_1(x, y) \leqslant d_2(x, y) \leqslant c_2 d_1(x, y)$ sowie $c_1' d_2(x, y) \leqslant d_3(x, y) \leqslant c_2' d_2(x, y)$ (Also $d_1 \sim d_2$ und

$d_2 \sim d_3$). Dann ist auch

$$\forall x\ \forall y: \quad c_1 c_1' d_1(x,y) \leqslant c_1' d_2(x,y) \leqslant d_3(x,y) \leqslant c_2' d_2(x,y) \leqslant c_2 d_1(x,y).$$

□

Satz 2.7. Äquivalente Metriken induzieren dieselbe Topologie.

Beweis. Wegen der Symmetrie genügt es zu zeigen, dass Mengen, die offen bezüglich d_2 sind, auch offen bezüglich d_1 sind.
Sei nun $U \subseteq X$ offen bezüglich d_2 und $x \in U$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $U_{d_2}(x, \varepsilon) \subseteq U$. Ist nun $d_1(x,y) < \frac{\varepsilon}{c_2}$, dann ist

$$d_2(x,y) \leqslant c_2 d_1(x,y) < \varepsilon.$$

und damit ist

$$U_{d_1}\left(x, \frac{\varepsilon}{c_2}\right) \subseteq U_{d_2}(x, \varepsilon) \subseteq U.$$

und somit ist U auch offen bezüglich d_1. □

Bemerkung. Es gibt auch nicht-äquivalente Metriken, die die gleiche Topologie induzieren.

Bemerkung. Je zwei Normen auf $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent, induzieren also dieselbe Topologie.

Definition 2.8 (Umgebung)**.** Sei X ein topologischer Raum und $U \subseteq X$ sowie $x \in X$. Dann heißt U **Umgebung von x**, falls es eine offene Teilmenge $O \subseteq X$ gibt, mit $x \in O \subseteq U$.

Bemerkung. Für metrische Räume stimmt dies mit der vorherigen Definiton überein.

Satz 2.9. Sei X ein topologischer Raum und $U \subseteq X$. Dann sind äquivalent:

1) U ist offen.

2) U ist Umgebung aller ihrer Punkte.

Beweis. '1) $\Rightarrow$ 2)' ist klar, wähle einfach $O = U$.
'2) $\Rightarrow_1$)'. Für jedes $x \in U$ existiert also U_x mit $x \in U_x \subseteq U$. Dann ist aber

$$U = \bigcup_{x \in U} U_x.$$

offen als Vereinigung offener Mengen. □

Definition (Abgeschlossene Mengen)**.** Sei X ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt **abgeschlossen**, falls ihr Komplement $X \backslash A = \{x \in X \mid x \notin A\}$ offen ist.

Bemerkung. Für metrische Räume stimmt das mit dem Begriff aus der Analysis überein.

Satz 2.10 (Dualität)**.** Ein topologischer Raum lässt sich auch über seine abgeschlossenen Mengen charakterisieren. Diese müssen erfüllen:

i) $\varnothing, X$ sind abgeschlossen

ii) Für $A_1, \ldots, A_n$ abgeschlossen ist auch $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ abgeschlossen.

iii) Für eine Familie $\{A_i\}_{\in I}$ abgeschlossener Mengen ist auch

$$\bigcap_{i \in I} A_i.$$

abgeschlossen.

Wenn wir von einer Familie von Mengen $\{A_i\}_{\in I}$ sprechen, meinen wir, dass I eine Menge ist, und für jedes $\in I$ ist A_i eine Teilmenge von X. Formal können wir dies als eine Funktion $I \to \mathcal{P}(X)$ darstellen.

Beweis. i) $X \backslash \varnothing = X$, $X \backslash X = \varnothing$ sind abgeschlossen.

ii)

$$\underbrace{\bigcap_{i=1}^{n} (X \backslash A_i)}_{\text{offen}} = X \backslash \bigcup_{i=1}^{n} A_i \quad \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i \text{ abgeschlossen.}$$

iii)

$$\underbrace{\bigcup_{i \in I} (\underbrace{X \backslash A_i}_{\text{offen}})}_{\text{offen}} = X \backslash \bigcap_{i \in I} A_i \quad \Rightarrow \bigcap_{i \in I} A_i \text{ abgeschlossen.}$$

□

Satz 2.11 (Stetigkeit mit abgeschlossenen Mengen)**.** Sei $f : X \to Y$ eine Funktion zwischen topologischen Räumen. Dann sind äuqivalent:

1) f ist stetig

2) $\forall U \subseteq Y$ offen ist $f^{-1}(U) \subseteq X$ offen

3) $\forall A \subseteq Y$ abgeschlossen ist $f^{-1}(A)$ abgeschlossen

Beweis.

$$\begin{aligned} f \text{ stetig} &\Leftrightarrow \forall U \subseteq Y \text{ offen ist } f^{-1}(U) \text{ offen} \\ &\Leftrightarrow \forall A \subseteq Y \text{ abgeschlossen ist } f^{-1}(Y \backslash A) \text{ offen} \\ &\Leftrightarrow \forall A \subseteq Y \text{ abgeschlossen ist } X \backslash f^{-1}(A) \text{ offen} \\ &\Leftrightarrow \forall A \subseteq Y \text{ abgeschlossen ist } f^{-1}(A) \text{ abgeschlossen} \end{aligned}$$

□

Wir erinnern uns: Ist (X, d) ein metrischer Raum, so auch $(Y, d_{Y \times Y}) \quad \forall Y \subseteq X$. Wie ist dies für topologische Räume?

Warnung. $(Y, \mathcal{S}_X \cap \mathcal{P}(Y))$ ist im allgemeinen **kein** topologischer Raum. (wenn Y nicht offen ist, denn dann ist $Y \notin \mathcal{S}_X \cap \mathcal{P}(X)$)

Satz und Definition 2.12 (Teilraumtopologie)**.** Sei X ein topologischer Raum, $Y \subseteq X$. Dann ist

$$\mathcal{S}_Y := \{U \cap Y \mid U \subseteq X \text{ offen}\}.$$

eine Topologie auf Y, die **Teilraumtopologie** oder auch **Unterraumtopologie** genannt wird.

Beispiel. Betrachte $\mathbb{R}^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ als Unterraum. Schneiden wir eine offene Menge in $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{R}^1$, so erhalten wir ein offenes Intervall:

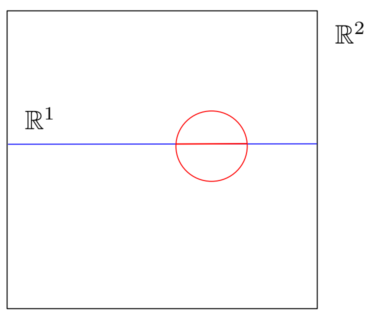


Abbildung 3: $\mathbb{R}^1$ als Unterraum von $\mathbb{R}^2$

Beweis.
- Es sind $\varnothing = \varnothing \cap Y$ und $Y = X \cap Y$ offen.
- Es ist
$$\bigcap_{i=1}^{n} (U_i \cap Y) = \left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i \right) \cap Y.$$

- Es ist

$$\bigcup_{i \in I} (U_i \cap Y) = \left(\bigcup_{i \in I} U_i \right) \cap Y.$$

□

Warnung. Für $Z \subseteq Y \subseteq X$ muss man zwischen 'offen in Y' und 'offen in X' unterscheiden, falls Y nicht offen ist.

Bemerkung*. Ist $Y \subseteq X$ offen, so stimmen die beiden vorherigen Konzepte tatsächlich überein, d.h. eine Menge $Z \subseteq Y$ ist offen in Y, genau dann, wenn sie offen in X ist.

Bemerkung. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $Y \subseteq X$ eine Teilmenge. Die Unterraumtopologie auf Y bzgl. der Topologie auf X ist gleich der Topologie indzuziert von der eingeschränkten Metrik.

Beweis. Für $y \in Y$ ist

$$U_{d|_{Y \times Y}}(y, \varepsilon) = U_d(y, \varepsilon) \cap Y.$$

, deswegen werden von beiden Metriken die gleichen offenen Mengen induziert.

□

Beispiel. Der **Einheitskreis** als Unterraum von $\mathbb{R}^2$:

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 = 1 \right\} =: S^1 \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Genauso gibt es die **n-Sphäre** definiert durch

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\|_2 = 1 \right\} =: S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}.$$

Definition 2.13 (Homöomorphie)**.** Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen heißt **Homöomorphismus**, falls f stetig und bijektiv ist und auch $f^{-1} : Y \to X$ stetig ist.
Existiert solch ein f, so heißen X, Y **homöomorph**

Beispiel. Die Räume $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ und $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ sind homöomorph mittels der Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x, y) & \longmapsto & x + iy \end{array}$$

Warnung. Nicht jede stetige Bijektion ist ein Homöomorphismus.

Beispiel. Betrachte für eine Menge X die Identitätsabbildung $(X, \mathcal{P}(X)) \xrightarrow{\mathrm{id}_X} (X, \{\varnothing, X\})$ von der diskreten in die indiskrete Topologie. Diese ist stetig, aber die Umkehrabbildung nicht (falls $|X| \geqslant 2$).

3 Quotientenräume

Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Für $x \in X$ definieren wir die **Äquivalenzklasse** $[x]$ von x durch:

$$[x] := \left\{x' \in X \mid x \sim x'\right\}.$$

Wir setzen

$$X/\sim := \{[x] \mid x \in X\}.$$

als die **Menge der Äquivalenzklassen** von X bezüglich $\sim$. Definiere nun

$$q : \left| \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X/\sim \\ x & \longmapsto & [x] \end{array} \right.$$

als die **kanonische Projektion** von X auf seine Äquivalenzklassen. Wir stellen fest, dass q surjektiv ist.

Für eine Surjektion $f : X \to Y$ ist $x \sim y :\Leftrightarrow f(x) = f(y)$ eine Äquivalenzrelation auf X und

$$\begin{array}{ccc} X/\sim & \longrightarrow & Y \\ [x] & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

ist eine Bijektion, wir erhalten also eine Korrespondenz zwischen Äquivalenzrelationen und surjektiven Abbildungen aus X.

Satz und Definition 3.1 (Quotiententopologie)**.** Sei X ein topologischer Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Sei $q : X \to X/\sim$ die kanonische Projektion. Dann definiert

$$\mathcal{S}_{X/\sim} := \left\{U \subseteq X/\sim \mid q^{-1}(U) \subseteq X \text{ offen}\right\}.$$

eine Topologie auf $X/\sim$, genannt die **Quotiententopologie**.

Beweis. Wir prüfen die Axiome einer Topologie:

- Es ist $q^{-1}(\varnothing) = \varnothing$ und $q^{-1}(X/\sim) = X$, also sind beide Mengen offen.
- Sind $U_1, \ldots, U_n \subseteq X/\sim$ offen, so ist

  $$q^{-1}(U_1 \cap \ldots \cap A_n) = q^{-1}(U_i) \cap \ldots \cap q^{-1}(U_n).$$

  offen in X, also ist $U_1 \cap \ldots \cap U_n$ offen in $X/\sim$ nach Definition.

- Ist $\{U_i\}_{i\in I}$ eine Familie offener Teilmengen von $X/\sim$, dann ist

$$q^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} U_i\right) = \bigcup_{i\in I} q^{-1}(U_i).$$

  offen in X, also ist $\bigcup_{i\in I} U_i$ offen in $X/\sim$ nach Definition.

$\square$

Bemerkung. Die Projektion $q : X \to X/\sim$ ist stetig und die Quotiententopologie ist maximal (bezüglich Inklusion, lies: 'am feinsten') unter allen Topologien auf $X/\sim$, für die q stetig ist.

Satz 3.2 (Universelle Eigenschaft der Quotiententopologie)**.** Sei $f : X \to Y$ stetig und $q : X \to X/\sim$ die kanonische Projektion. Angenommen, es existiert $g : X/\sim \to Y$ mit $f = g \circ q$. Dann ist g stetig und in diesem Fall ist g eindeutig.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] & Y \\ X/\sim \arrow[ur, dotted, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Bemerkung. g existiert genau dann, wenn $x \sim x' \Rightarrow f(x) = f(x')$

Bemerkung* (Kategorientheorie)**.** Das ist eine universelle Eigenschaft im Sinne der Kategorientheorie, d.h. für einen Raum X und eine Äquivalenzrelation existiert bis auf eindeutigen Isomorphismus stets genau ein topologischer Raum $(X/\sim, \mathcal{S})$ zusammen mit einer stetigen Abbildung $q : X \to X/\sim$, sodass $x \sim x' \Rightarrow q(x) = q(x')$, sodass das Tripel $(X, X/\sim, q)$ obige Eigenschaft hat. Wir können also obige Eigenschaft auch als Definition der Quotiententopologie verwenden, und aus dieser folgt auch die Eindeutigkeit. Existenz haben wir mit unserer vorherigen Definition gezeigt.

Beweis. Sei $U \subseteq Y$ offen. Dann ist

$$q^{-1}(g^{-1}(U)) \overset{f=g\circ q}{=} f^{-1}(U).$$

offen, weil f stetig ist. Also ist $g^{-1}(U)$ offen per Definition ($g^{-1}(U)$ ist nach Definition genau dann offen in $X/\sim$, wenn $q^{-1}(g^{-1}(U))$ offen in X ist) und somit ist g stetig. $\square$

Beispiel. Sei $X = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$ das **Einheitsintervall** (mit der Unterraumtopologie bezüglich $\mathbb{R}$) mit der Äquivalenzrelation erzeugt von $0 \sim 1$. Wir 'identifizieren' also die Punkte $\{0\}, \{1\}$ miteinander.

Satz 3.3 (Kreishomöomorphie)**.** Der Quotientenraum $[0,1]/(0 \sim 1)$ ist homöomorph zu S_1.

Vorlesung 3: Trennungsaxiome, Kompaktheit

Di 20 Apr 2021 12:16

Beweis. Betrachte die stetige Abbildung

$$f' : \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & S^1 \subseteq \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & e^{2\pi i t} \end{array} \right.$$

Wir sehen $f'(0) = f'(1) = 1$, also existiert nach der universellen Eigenschaft ein f, sodass folgendes kommutiert:

$$\begin{tikzcd} {[0,1]} \arrow[r, "f'"] \arrow[d, two heads] & S^1 \\ {[0,1]/(0 \sim 1)} \arrow[ur, two heads, "f"'] & \end{tikzcd}$$

und f stetig ist. Zudem ist f bijektiv. Es bleibt zu zeigen, dass f^{-1} stetig ist, das zeigen wir jedoch nicht jetzt (ginge mit viel rechnen), sondern später, wenn wir mehr Technik haben. Anschaulich ist das jedoch klar: $\square$

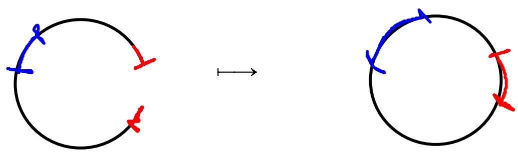


Abbildung 4: $[0,1]/(0 \sim 1)$ und S^1 sind homöomorph

Bemerkung. Die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} [0,1) & \longrightarrow & S^1 \\ t & \longmapsto & e^{2\pi i t} \end{array}$$

ist stetig und bijektiv, allerdings kein Homöomorphismus, denn $\left[0, \frac{1}{2}\right] \subseteq [0,1)$ ist offen, aber $f(\left[0, \frac{1}{2}\right]) = \left(f^{-1}\right)^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right)$ ist nicht offen im Kreis.

Beispiel. 1) Sei $X = [0,1]^2 \subseteq \mathbb{R}$. Identifiziere nun $(t,0) \sim (t,1)$ sowie $(0,s) \sim (1,s)$ für $s,t \in [9,1]$. Dann ist $X/\sim$ der Torus.

2) Sei $X = [0,1]^2 \subseteq \mathbb{R}^2$. Identifizieren wir $(t,0) \sim (t,1)$ sowie $(0,s) \sim (1,1-s)$, so erhalten wir die **Kleinsche Flasche**.

3) Betrachte auf dem $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ die Relation $x \sim \lambda x$ für $\lambda > 0 \in \mathbb{R}$. Dann ist $\mathbb{R}^{n+1}/\sim \cong S^n$. Zunächst ist nämlich die Abbildung

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\} & \longrightarrow & S^n \\ x & \longmapsto & \frac{x}{\|x\|_2} \end{array} \right.$$

stetig und die induzierte Abbildung $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}/\sim \to S^n$ ist bijektiv. Das rechnen wir nach: Seien $x \neq y$ mit $d(x,y) < \delta$, so ist:

$$\begin{aligned} d\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}\right) &\leqslant d\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|x\|}\right) + d\left(\frac{y}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}\right) \\ &= \frac{1}{\|x\|} d(x,y) + \sqrt{\sum \left(\frac{y_i}{\|x\|} - \frac{y_i}{\|y\|}\right)^2} \\ &= \frac{1}{\|x\|} d(x,y) + \sqrt{\frac{(\|x\| - \|y\|)^2}{\|x\|\|y\|}} \|y\| \\ &< \frac{1}{\|x\|} \cdot \delta + \frac{\delta}{\|x\|^2 + \delta\|x\|} (\|x\| + \delta) \to 0 \end{aligned} \tag{1}$$

also ist f stetig. Mit der Inklusion $\iota : S^n \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ erhalten wir

$$f \circ \iota = \mathrm{id}_{S^n}.$$

Übung: Daraus folgt bereits, dass S^n die Quotiententopologie trägt.

4) Setzen wir erneut $X = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, aber diesmal $x \sim \lambda x$ für $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so heißt der Quotient

$$X/\sim =: \mathbb{R}P^n.$$

der **reelle projektive Raum**. Es ist

$$\mathbb{R}P^n \cong S^n/(x \sim -x).$$

Dies sehen wir mittels folgendem Diagramm:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\} \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[d, two heads] & S^n \arrow[l, shift left, "\iota"] \arrow[d, two heads] \\ \mathbb{R}P^n \arrow[r, dashed, shift left, "\overline{f}"] & S^n/(x \sim -x) \arrow[l, dashed, shift left, "\overline{\iota}"] \end{tikzcd}$$

Die Abbildungen $\overline{\iota}$ und $\overline{f}$ sind stetig nach der universellen Eigenschaft und invers zueinander.

5) Sei X ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ eine Teilmenge. Definiere die Relation $\sim$ durch $a \sim a'$ für $a, a' \in A$ (bzw. erzeuge eine dadurch). Dann setzen wir

$$X/A := X/\sim.$$

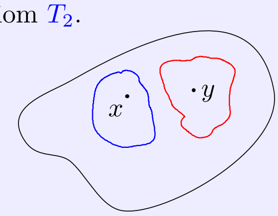
Es ergibt sich

- $[0,1]/\{0,1\} \cong S^1$
- $[0,1]/[0,1)$ hat zwei Punkte $[0,1)$ und $\{1\}$. Es ist $[0,1) \subseteq [0,1]$ offen, aber $\{1\}$ nicht, also handelt es sich um den Sierpinski-Raum.

Bemerkung. Quotientenräume von metrischen Räumen sind im Allgemeinen nicht metrisierbar.

4 Trennungsaxiome

Definition 4.1 (Hausdorff'sch)**.** Ein topologischer Raum heißt **Hausdorff** (oder **Hausdorffsch**), wenn $\forall x, y \in X$ mit $x \neq y$ offene Mengen $U_x, U_y \subseteq X$ existieren mit $x \in U_x$ und $y \in U_y$, sodass $U_x \cap U_y = \varnothing$. Diese Eigenschaft heißt auch Trennungsaxiom T_2.



Satz 4.2. Ist X metrisierbar, so ist X Hausdorffsch.

Beweis. Sei d eine Metrik auf X, die die Topologie induziert. Seien $x, y \in X$ mit $x \neq y$. Setze

$$U_x := U\left(x, \frac{d(x,y)}{2}\right) \qquad U_y = U\left(y, \frac{d(x,y)}{2}\right).$$

Dann ist $U_x \cap U_y = \varnothing$, denn für alle $z \in U_x \cap U_y$ ist

$$d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y) < \frac{d(x,y)}{2} + \frac{d(x,y)}{2} = d(x,y).$$

, was nicht sein kann. □

Beispiel. $\mathbb{R}^n$ ist Hausdorffsch.

Satz 4.3. Ist X Hausdorffsch und $x \in X$, dann ist $\{x\} \subseteq X$ abgeschlossen.

Beweis. Für $y \neq x$ existiert U_y offen mit $x \notin U_y$ und $y \in U_y$. Dann ist

$$X \setminus \{x\} = \bigcup_{y \neq x} U_y.$$

offen. □

Bemerkung. Ein topologischer Raum, für den alle $\{x\}$ abgeschlossen sind, heißt **T_1-Raum**.

Lemma 4.4. Sei X Hausdorffsch und $A \subseteq X$ ein Teilraum. Dann ist auch A Hausdorffsch.

Beweis. Sei $x \neq y \in A$. Dann existieren $U_x, U_y \subseteq X$ offen mit $x \in U_x$ und $y \in U_y$ sowie $U_x \cap U_y = \varnothing$. Dann sind

$$U_x \cap A \qquad U_y \cap A \subseteq A.$$

offen in A und erfüllen die Bedingungen. □

Bemerkung. Jeder diskrete Raum ist Hausdorffsch. Ist X endlich und Hausdorffsch, so ist X diskret.

Beweis. Für jedes $y \neq x$ existiert ein U_x^y offen mit $x \in U_x^y$ und $y \notin U_x^y$. Dann ist aber

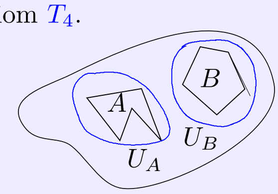
$$\{x\} = \bigcap_{y \neq x} U_x^y.$$

offen (da X endlich), also ist X diskret. Die Umkehrung ist offensichtlich. □

Beispiel. $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ ist Hausdorffsch.

Definition 4.5 (Normal)**.** Ein topologischer Raum heißt **normal**, falls

- X ist Hausdorffsch
- $\forall A, B \subseteq X$ abgeschlossen mit $A \cap B = \varnothing$ existieren $U_A, U_B \subseteq X$ offen mit $A \subseteq U_A$, $B \subseteq U_B$ und $U_A \cap U_B = \varnothing$. Diese Eigenschaft heißt auch Trennungsaxiom T_4.



Bemerkung. Manchmal gibt es diese Definition auch ohne Hausdorff'sch.

Satz 4.6. Ist X metrisierbar, dann ist X normal.

Beweis. Übung. □

Definition 4.7 (Regulär)**.** Ein topologischer Raum X heißt **regulär**, falls X Hausdorff ist und $\forall A \subseteq X$ abgeschlossen und $x \in X \setminus A$ existieren U_a, U_x offen mit $A \subseteq U_A, x \in U_x$ und $U_A \cap U_x = \varnothing$. (Auch Trennungsaxiom T_3 genannt).

Klar: $T_4 \Rightarrow T_3$

5 Kompaktheit

Aus der Analysis ist (vielleicht) folgender Satz bekannt.

Satz 5.1 (Heine-Borel)**.** Für $X \subseteq \mathbb{R}^n$ sind äquivalent:

1) X ist abgeschlossen und beschränkt.
2) Jede offene Überdeckung von X hat eine endliche Teilüberdeckung

'Jede offene Überdeckung besitzt eine endliche Teilüberdeckung' bedeutet: Für jede Familie $\{U_i\}_{i \in I}$ mit $U_i \subseteq X$ offen und $X \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ existiert eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$ mit $X \subseteq \bigcup_{j \in J} U_j$

Beweis. später. □

Definition 5.2 (Kompaktheit)**.** Ein topologischer Raum X heißt **kompakt**, falls jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Bemerkung. Manchmal heißt obige Definition auch quasi-kompakt, und kompakt bedeutet dann quasi-kompakt + Hausdorff.

Beispiel. Die Räume

$$[0, 1] \subseteq \mathbb{R} \qquad S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}.$$

sind beide kompakt (nach 5.1)

Vorlesung 4: Mehr zu Kompaktheit, Hausdorffräumen und Homöomorphismen

Do 22 Apr 2021 10:15

Beispiel. Zur Frage von letzter Woche (wenn wir einen Hausdorff-Raum haben und eine Äquivalenzrelation, deren Klassen abgeschlossen sind, ist dann der Quotient wieder Hausdorff?): Wähle auf $[0, 1]$ die Relation erzeugt von

$$\frac{1}{n} \sim 1 - \frac{1}{n}.$$

für alle $n \in \mathbb{N}_{>}0$. Betrachte dann die Abbildung:

$$[0,1] \twoheadrightarrow [0,1]/\sim.$$

Punkturbilder sind endlich, also abgeschlossen. Aber der Raum $[0,1]/\sim$ ist nicht hausdorffsch, denn wri können die Punkte $0, 1$ nicht trennen.

Satz 5.3. Sei X ein kompakter Raum und $Y \subseteq X$ abgeschlossen. Dann ist Y kompakt.

Beweis. Sei $\{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von Y. Dann existieren $U_i' \subseteq X$ offen mit $U_i = U_i' \cap Y$. Die Familie

$$\{U_i'\}_{i \in I} \cup \left\{ \underbrace{X \backslash Y}_{\text{offen}} \right\}.$$

ist nun eine offene Überdeckung von X. Dann existiert $J \subseteq I$ endlich, so dass

$$\{U_j'\}_{j \in J} \cup \{X \backslash Y\}.$$

die Menge X überdeckt. Also ist

$$\left\{ \underbrace{U_j' \cap Y}_{U_j} \right\}_{j \in J} \cup \left\{ \underbrace{X \backslash Y \cap Y}_{=\varnothing} \right\}$$

eine endliche Überdeckung für Y. □

Satz 5.4. Sei X ein Hausdorff-Raum und $Y \subseteq X$ kompakt. Dann ist Y abgeschlossen.

Korollar. Ist X kompakt und Hausdorffsch, dann sind äquivalent:

1) $Y \subseteq X$ ist abgeschlossen
2) Y ist kompakt.

Beweis. Unmittelbare Konsequenz aus Satz 5.3 und Satz 5.4. □

Lemma 5.5. Sei X ein Hausdorff Raum und $Y \subseteq X$ kompakt. Dann existiert $\forall x \in X \backslash Y$ offene Teilmengen $U_{x,Y}$ und $V_{x,Y}$ von X so dass: $x \in U_{x,Y}$ und $Y \subseteq V_{x,Y}$ und $U_{x,Y} \cap V_{x,Y} = \varnothing$.

Beweis. Sei $x \in X \backslash Y$. $\forall y \in Y$ existieren $U_{x,y}$ und $V_{x,y}$ offen mit $x \in U_{x,y}$ und $y \in V_{x,y}$, weil X Hausdorffsch.
Dann ist $\{V_{x,y} \cap Y\}_{y \in Y}$ eine offene Überdeckung von Y. Also existiert endliche Teilüberdeckung (da Y kompakt) induziert durch Punkte $y_1, \ldots, y_n$. Also:

$$Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{x,y_i}.$$

Sei

$$V_{x,Y} := \bigcup_{i=1}^{n} V_{x,y_i} \qquad U_{x,Y} := \bigcap_{i=1}^{n} U_{x,y_i}.$$

Es ist auch $x \in U_{x,Y}$, weil $x \in U_{x,y_i}$ für jedes i. Wir müssen also noch Disjunktheit prüfen, es ist:

$$U_{x,Y} \cap V_{x,y_i} \subseteq U_{x,y_i} \cap V_{x,y_i} = \varnothing.$$

Also auch

$$\varnothing = U_{x,Y} \cap \bigcup_{i=1}^{n} V_{x,y_i} = U_{x,Y} \cap V_{x,Y}.$$

□

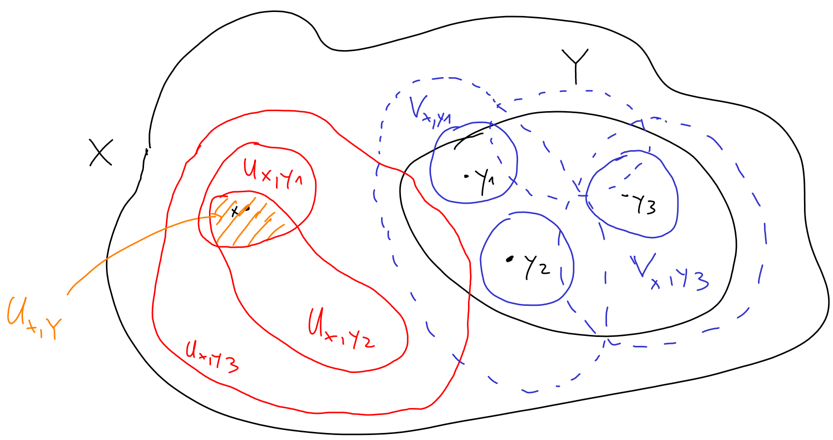


Abbildung 5: Skizze zum Beweis von Lemma 5.5

Beweis von Satz 5.4. Nach Lemma 5.5 existieren $\forall x \in X \backslash Y$ ein $U_{x,Y}$ mit $x \in U_{x,Y}$ und $U_{x,Y} \cap Y = \varnothing$. Also ist

$$X \backslash Y = \bigcup_{x \in X \backslash Y} U_{x,Y}.$$

offen und somit ist Y abgeschlossen. $\square$

Beispiel ('Gegenbeispiel' zu Satz 5.4)**.** Sei G die Gerade mit zwei Urpsrüngen:
Betrachte $\mathbb{R} \cup \{0'\}$ mit U Umgebung von $a \in \mathbb{R}$ falls $\exists \varepsilon > 0$ mit $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subseteq U$ und U Umgebung von $0'$ und U Umgebung von $0'$, falls $\exists \varepsilon > 0$ mit $(-\varepsilon, 0 \cup (0, \varepsilon) \subseteq U$ und $0' \in U$.
Wir können uns gewissermaßen $0, 0'$ gleichberechtigt vorstellen, nur dass die beiden Punkte verschieden sind.
Dann ist $[-1, 1] \subseteq G$ kompakt (Übung!), aber nicht abegschlossen, da $0' \in G \backslash [-1, 1]$ ist, dies aber keine Umgebung von $0'$ ist.

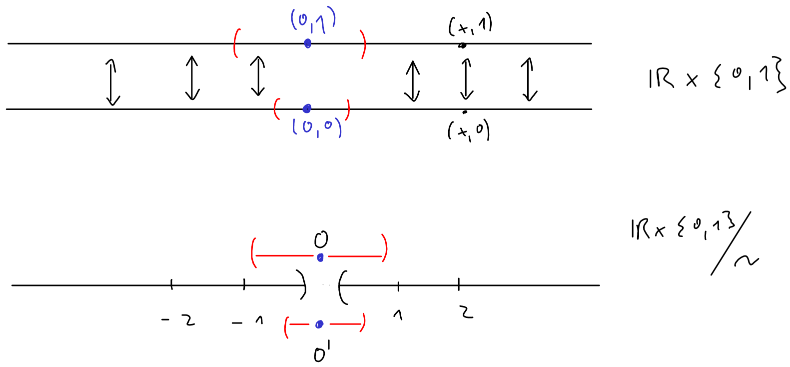


Abbildung 6: Gerade mit 2 Ursprüngen

Nun sind wir gewappnet für den

Beweis von Satz 5.1 (Heine-Borel). '2) ⇒ 1)'. Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt. Dann ist sie abgeschlossen nach 5.4. Zudem ist $X \subseteq \bigcup_{x \in X} U(x, 1)$ eine offene Überdeckung. Da X kompakt finden wir endlich viele $x_1, \ldots, x_n \in X$ mit

$$X \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U(x_i, 1).$$

Also ist

$$\operatorname{diam}(X) \leqslant \max \{d(x_i, x_j)\} + 2 < \infty.$$

und somit ist X auch beschränkt.
' 1) $\Rightarrow$ 2)'. Da X beschränkt ist, $\exists m > 0$ mit $X \subseteq [-m, m]^n \subseteq \mathbb{R}^n$. Da X abgeschlossen ist, genügt es nach 5.3 zu zeigen, dass $[-m, m]^n$ kompakt ist.
Wir führen einen Widerspruchsbeweis, nimm also an, dass $[-m, m]^n$ nicht kompakt ist. Dann existiert eine offene Überdeckung $\{U_i\}_{i\in I}$ ohne endliche Teilüberdeckung.
Unterteile $[-m, m]^n$ in 2^n gleich große Unterwürfel (halbiere jede Seite). Mindestens ein Unterwürfel hat keine endliche Teilüberdeckung. Unterteile diesen Würfel weiter und wähle wieder einen Unterwüfel, der keine endliche Teilüberdeckung hat.
Wir erhalten eine Folge von Würfeln

$$[-m, m]^n = Q_0 \supseteq Q_1 \supseteq Q_2 \supseteq Q_3 \supseteq \dots .$$

die jeweils keine endliche Teilüberdeckung durch $U_i's$ besitzen.
Sei $x_i \in Q_i$ beliebig. Dann ist x_i eine Cauchy-Folge, also existiert $x = \lim\limits_{i\to\infty} x_i$, und $x \in Q_0$, da Q_0 abgeschlossen.
Somit gibt es ein U_j mit $x \in U_j$, da die $\{U_i\}_{i\in I}$ eine Überedeckung von Q_0 waren. Damit ist auch $U(x, \varepsilon) \subseteq U_j$ für ein $\varepsilon > 0$. Wähle einen Würfel $x \in Q_k$ mit Kantenlänge $< \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$, dann ist auch $Q_k \subseteq U(x, \varepsilon) \subseteq U_j$. Das ist aber ein Widerspruch dazu, dass Q_k keine endliche Teilüberdeckung hat, $\lightning$.
Also ist Q_0 kompakt. $\square$

Satz 5.6 (Bilder kompakter Räume)**.** Sei $f : X \to Y$ stetig und surjektiv und X kompakt. Dann ist auch Y kompakt.

Beweis. Sei $\{U_i\}_{i\in I}$ offene Überdeckung von Y. Dann ist

$$\left\{f^{-1}(U_i)\right\}_{i\in I}.$$

offene Überdeckung von X. Da X kompakt ist, gibt es $J \subseteq I$ endlich mit $X = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(U_j)$. Dann ist

$$Y = f(X) = \bigcup_{j\in J} f(f^{-1}(U_j)) = \bigcup_{j\in J} U_j.$$

Also existiert eine endliche Teilüberdeckung von Y. $\square$

Korollar 5.7. Sei $f : X \to Y$ stetig, X kompakt und Y Hausdorff. Dann ist f abgeschlossen, d.h. $\forall A \subseteq X$ abgesclhossen ist $f(A) \subseteq Y$ abgeschlossen.

Beweis. Sei $A \subseteq X$ abgeschlossen. Dann ist A kompakt nach Satz 5.4, also ist $f(A)$ kompakt nach Satz 5.6 (weil $f : X \to f(A) \subseteq Y$ surjektiv ist). Damit ist dann $f(A)$ abegschlossen nach Satz 5.4.
Also sind Bilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen. $\square$

Korollar 5.8 (Homöomorphismen)**.** Ist $f : X \to Y$ stetig und bijektiv, X kompakt und Y Hausdorff, dann ist f ein Homöomorphismus.

Beweis. Wir müssen zeigen, dass die Umkehrabbildung stetig ist. Dafür reicht es zu zeigen, dass $\forall A \subseteq X$ abgeschlossen auch $f(A) = (f^{-1})^{-1}(A)$ abgeschlossen ist. Das gilt aber genau nach vorherigem Korollar 5.7 □

Korollar 5.9. Sei $f : X \to Y$ stetig und surjektiv, X kompakt und Y Hausdorffsch. Dann trägt Y die Quotiententopologie, d.h. $U \subseteq Y$ offen genau dann, wenn $f^{-1}(U) \subseteq X$ offen.

Beweis. '$\Rightarrow$' folgt wegen Stetigkeit.
'$\Leftarrow$' Ist $f^{-1}(U) \subseteq X$ offen, dann ist $f^{-1}(Y \backslash U) = X \backslash f^{-1}(U)$ abgeschlossen in X, also folgt aus dem Korollar 5.7

$$Y \backslash U \overset{\text{surj.}}{=} f\left(\underbrace{f^{-1}(Y \backslash U)}_{\text{abgeschlossen}}\right).$$

abgeschlossen ist, also ist $U \subseteq Y$ offen. □

Kommen wir nun zum

Beweis von Satz 3.3. Schon gezeigt:

$$\begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & S_1 \\ t & \longmapsto & 2^{2\pi i t} \end{array}$$

ist stetig und surjektiv und faktorisiert über

$$[0,1]/\{0,1\} \to S^1.$$

mit f stetig und bijektiv. Wir wissen nun: S^1 ist Hausdorffsch und $[0,1]$ ist kompakt. Nach Satz 5.6 ist auch $[0,1]/\{0,1\}$ kompakt, also ist f ein Homöomorphismus nach Korollar 5.8 □

Satz 5.10. Jeder kompakte Hausdorff-Raum ist normal.

Beweis. Seien $A, B \subseteq X$ abgeschlossen und disjunkt. Da X kompakt ist, sind A, B kompakt. Nach Lemma 5.5 existieren $\forall a \in A$ offene Mengen U_a, V_a mit $a \in U_a, B \subseteq V_a$ und $U_a \cap V_a = \varnothing$. Dann ist

$$A \subseteq \bigcup_{a \in A} U_a.$$

Also existieren $a_1, \ldots, a_n \in A$ mit

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{a_i}.$$

wegen A kompakt. Setze nun

$$U_A := \bigcup_{i=1}^{n} U_{a_i} \supseteq A \qquad U_B := \bigcap_{i=1}^{n} V_{a_i} \supseteq B.$$

$\forall i$ ist

$$U_{a_i} \cap U_B \subseteq U_{a_i} \cap V_{a_i} = \varnothing.$$

und daraus folgt, dass

$$U_A \cap U_B = \varnothing.$$

□

Satz 5.11 (Quotientenräume von Hausdorffräumen)**.** Sei X kompakt und Hausdorffsch, $q : X \to Z$ surjektiv, wobei Z die Quotiententopologie trage. Dann sind äquivalent:

1) Z ist Hausdorffsch
2) q ist abgeschlossen

Beweis. Die Richtung '1) $\Rightarrow$ 2)' ist genau Korollar 5.7
'2) $\Rightarrow_1$)': Jedes $z \in Z$ hat ein Urbild $x \in X$ unter q. Es ist $\{x\} \subseteq X$ abgeschlossen, da X hausdorffsch. Wegen q abgeschlossen folgt nun, dass auch

$$\{z\} = q(\{x\}).$$

abgeschlossen ist.
Wir nennen Teilmenge $W \subseteq X$ heißt **saturiert**, falls $W = q^{-1}(q(W))$ (insbesondere sind alle Urbilder saturiert, und $\Leftrightarrow \forall x \in X \backslash W : g(x) \in Z \backslash g(W)$).

Bemerkung. Sei $U \subseteq X$ offen und saturiert, dann ist $q(U)$ offen. Hierzu schreibe

$$U = q^{-1}(q(U)) \Rightarrow q(U) \text{ offen.}$$

Seien $y \neq z \in Z$. Dann sind $\{y\}, \{z\}$ abgeschlossen und disjunkt. Dann sind auch

$$A = q^{-1}(y) \qquad B = q^{-1}(z).$$

abgeschlossen und disjunkt (in X). Nach Annahme ist X kompakt und Hausdorff, also normal nach Satz 5.10. Also existieren $U_1, U_2 \subseteq X$ offen mit $A \subseteq U_1, B \subseteq U_2$ und $U_1 \cap U_2 = \varnothing$. Setze

$$V_1 := X \backslash q^{-1}(q(X \backslash U_1)) \qquad V_2 := X \backslash q^{-1}(q(X \backslash U_2)).$$

Behauptung 1. *Es sind V_1, V_2 offen, disjunkt und saturiert und $A \subseteq V_1$ sowie $B \subseteq V_2$.*

Beweis. □

Beweis einfügen

Es folgt, dass $q(V_1), q(V_2)$ offen in Z sind. Weiter ist $y \in q(A) \subseteq q(V_1)$ und $z \in q(B) \subseteq q(V_2)$. Da V_1, V_2 disjunkt und saturiert, sind auch $q(V_1), q(V_2)$ disjunkt und wir sind fertig. $\square$

Vorlesung 5: Basen, Subbasen

Di 27 Apr 2021 12:16

Beweis der Behauptung. Es ist klar, dass V_1, V_2 offen sind. Für Disjunktheit sehen wir mit

$$X \backslash U_i \subseteq q^{-1}(q(X \backslash U_i)).$$

dass $U_i \supseteq X \backslash q^{-1}(q(X \backslash U_i)) = V_i$ Für Saturiertheit genügt es zu sehen, dass $g^{-1}(C)$ saturiert ist für alle $C \subseteq Z$, da

$$q^{-1}(q(q^{-1}(C))) = q^{-1}(C).$$

weil q surjektiv ist. Wegen

$$A \subseteq U_1 \Rightarrow X \backslash A \supseteq X \backslash U_1 \Rightarrow q(X \backslash A) \supseteq q(X \backslash U_1) \Rightarrow \underbrace{q^{-1}(q(X \backslash A))}_{= X \backslash A} = q^{-1} q(X \backslash U_1).$$

Komplementbildung liefert unser gewünschtes Ergebnis. $\square$

Beispiel. $\mathbb{RP}^n$ ist Hausdorffsch.

Beweis. Es ist $\mathbb{RP}^n \cong S^n / x \sim -x$. Sei

$$q : S^n \to S^n / x \sim -x.$$

$\square$

die Projektion. Da S^n kompakt und Hausdorffsch ist, ist $\mathbb{RP}^n$ Hausdorffsch genau dann, wenn q abgeschlossen ist. Ist $A \subseteq S^n$, so ist $q^{-1}(Q(A)) = A \cup -A$.
Da $- : S^n \to S^n$ ein Homöomorphismus ist, ist $-A$ abgeschlossen, wenn A abgeschlossen ist. Dann ist auch $A \cup -A$ abgeschlossen.

Korollar (Projektiver Raum)**.** Sei $\sim$ auf $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leqslant 1\}$ erzeugt durch $x \sim -x$ für alle $x \in S^{n-1} \subseteq D^n$. Dann ist

$$D^n / \sim \cong \mathbb{RP}^n.$$

Insbesondere ist

$$\mathbb{RP}^1 \cong D^1 / \{-1, 1\} \cong [0,1] / \{0,1\} \cong S^1$$

Beweis. Betrachte die stetige Abbildung

$$f : \left| \begin{array}{ccc} D^n & \longrightarrow & S^n \\ x & \longmapsto & (x, \sqrt{1 - \|x\|^2}) \end{array} \right.$$

Skizze einfügen für 'ausbeulen' der Abbildung.

Wir erhalten das Diagramm Wir sehen leicht, dass $\overline{f}$ bijektiv ist. Da D^n kompakt,

$$\begin{tikzcd} D^n \arrow[r] \arrow[d] & S^n \arrow[d] \\ D^n/\sim \arrow[r, dashed, "\overline{f}"'] & S^n/(x \sim -x) \cong \mathbb{RP}^n \end{tikzcd}$$

ist auch $D^n/\sim$ kompakt, und $\mathbb{RP}^n$ ist Hausdorffsch, also handelt es sich um einen Homöomorphismus (mit **??**) $\square$

Korollar 5.12. Sei X kompakt und Hausdorffsch und $A \subseteq X$. Dann sind äquivalent

1) X/A ist Hausdorffsch

2) A ist abgeschlossen.

Beweis. '1) $\Rightarrow_2$)'. Ist X/A Hausdorffsch, so ist die einpunktige Menge $\{[A]\}$ abgeschlossen (nach Satz 4.3). Also ist $q^{-1}(A) = A$ abgeschlossen nach Definition der Quotiententopologie.
'2) $\Rightarrow$ 1)' Nach Satz 5.11 genügt es zu zeigen, dass $q : X \to X/A$ abgeschlossen ist. Für $B \subseteq X$ abgeschlossen ist, müssen wir also zeigen, dass $q(B)$ abgeschlossen ist, nach Definiton also, dass $q^{-1}(q(B)) \subseteq X$ abgeschlossen ist. Nun ist

$$q^{-1}(q(B)) = \begin{cases} B & \text{falls } B \cap A = \varnothing \\ B \cup A & \text{falls } B \cap A \neq \varnothing \end{cases}.$$

abgeschlossen, weil A abgeschlossen ist. $\square$

Beispiel. a) Es ist D^n/S^{n-1} Hausdorffsch. Alternativ können wir auch sehen, dass $D^n/S^{n-1} \cong S^n$ ist. Hierzu betrachte die Projektion:

$$\begin{array}{ccl} D^n & \longrightarrow & S^n \\ x & \longmapsto & \begin{cases} (2x, \sqrt{1-\|2x\|^2} & 0 \leqslant \|x\| \leqslant \frac{1}{2} \\ \left(\frac{2-2\|x\|}{\|x\|} \cdot x, -\sqrt{1-(2-2\|x\|)^2}\right) & \frac{1}{2} \leqslant \|x\| \leqslant 1 \end{cases} \end{array}$$

Diese ist stetig, denn falls $\|x\| = \frac{1}{2}$ ist

b) Wir erhalten nun eine Abbildung

$$\frac{2-2\|x\|}{\|x\|} = \frac{2-1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

und

$$\sqrt{1-\|2x\|^2} = \sqrt{1-1} = 0 = -\sqrt{0} = -\sqrt{1-(2-2\|x\|)^2}.$$

Ist $\|x\| = 1$, so ist

$$\frac{2 - 2\|x\|}{\|x\|} = 0.$$

und somit ist $f(x) = (0, -1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Also faktorisiert f über $\overline{f} : D^n/S^{n-1} \to S^n$. Wir sehen wieder leicht, dass $\overline{f}$ stetige Bijektion ist. Da D^n/S^{n-1} kompakt und S^n Hausdorffsch, folgt wieder, dass $\overline{f}$ ein Homöomorphismus ist.

$$S^n \xrightarrow{q} S^n/(x \sim -x) \cong \mathbb{RP}^n \cong D^n/(x \sim -x) \longrightarrow D^n/S^{n-1} \cong S^n$$

Abbildung skizzieren

6 Basen und Subbasen

Definition 6.1 (Basis)**.** Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Sei $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{O}$ eine Menge offener Mengen. Dann heißt $\mathcal{S}$

Basis , falls $\forall U \subseteq \mathcal{O}$ existiert $S_i \in \mathcal{S}$ mit $U = \bigcup_{i \in I} S_i$

Subbasis , falls $\forall U \in \mathcal{O}$ existieren I, K_i endlich sowie $S_k \in \mathcal{S}$ mit

$$U = \bigcup_{i \in I} \bigcap_{k \in K_i} S_k.$$

Bemerkung. Ist $\mathcal{S}$ eine Basis, so ist $\mathcal{S}$ eine Subbasis.

Beispiel. Ist (X, d) ein metrischer Raum, so ist

$$\mathcal{S} = \{U(x, \varepsilon) \mid x \in X, \varepsilon > 0\}.$$

eine Basis der Topologie.

Satz 6.2 (Erzeugte Topologie)**.** Sei X eine Menge, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine Menge von Teilmengen. Dann existiert genau eine Topologie auf X, für die $\mathcal{S}$ eine Subbasis ist, nämlich:

$$\mathcal{O} = \left\{ U \subseteq X \mid U = \bigcup_{i \in I} \bigcap_{k \in K_i} S_k \text{ mit } |K_i| < \infty, S_k \in \mathcal{S} \right\}.$$

Beweis. Übung. □

Notation. Wir nennen $\mathcal{O}$ die **von $\mathcal{S}$ erzeugte Topologie**.

Lemma 6.3 (Stetigkeit auf Subbasiselementen)**.** Sei $f : X \to Y$ eine

Abbildung zwischen topologischen Räumen, $\mathcal{S}$ eine Subbasis von Y. Dann sind äquivalent:

1) f ist stetig
2) $f^{-1}(S)$ ist offen für alle $S \in \mathcal{S}$

Beweis. '1) $\Rightarrow$ 2)' ist klar, da Subbasiselemente offen sind.
'2) $\Rightarrow$ 1)'. Sei $U \subseteq Y$ offen, dann $\exists K_i$ endlich und $S_k \in \mathcal{S}$ mit

$$U = \bigcup_{i \in I} \bigcap_{k \in K_i} S_k.$$

Dann ist aber genau

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} \bigcap_{k \in K_i} \underbrace{f^{-1}(S_k)}_{\text{offen}}.$$

offen, weil endliche Schnitte und beliebige Vereinigung offener Mengen offen sind. Also ist f stetig. □

Satz 6.4. Eine Subbasis $\mathcal{S}$ von $(X, \mathcal{O})$ ist eine Basis genau dann, wenn

$$\forall S_1, S_2 \in \mathcal{S}\ \exists S_i \in \mathcal{S} \colon S_1 \cap S_2 = \bigcup_{i \in I} S_i.$$

Beweis. '$\Rightarrow$' Da $S_1, S_2 \in \mathcal{S}$ sind diese offen. Dann ist auch $S_1 \cap S_2$ offen. Ist $\mathcal{S}$ Basis, dann gibt es also $S_i \in \mathcal{S}$ mit

$$S_1 \cap S_2 = \bigcup_{i \in I} S_i.$$

'$\Leftarrow$' Angenommen, $U \subseteq X$ ist offen und von der Form

$$U = \bigcup_{i \in I} \left(\bigcap_{k \in K_i} S_k \right).$$

mit K_i endlich und $S_k \in \mathcal{S}$. Nach Annahme ist

$$\bigcap_{k \in K_i} = \bigcup_{j \in J_i} S_j.$$

und damit ist

$$U = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J_i} S_j.$$

□

Bemerkung*. Nach Annahme ist eigentlich erstmal der Schnitt von 2 Mengen die Vereinigung von S_i. Allerdings kann man dies per Induktion leicht auf n Teilmengen verallgemeinern, wenn wir

$$\bigcap_{k=1}^{n} S_k = S_1 \cap \bigcap_{k=2}^{n} S_k = S_1 \cap \bigcup_{i \in I} S_i = \bigcap_{i \in I} (S_i \cap S_k) = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J_i} S_j.$$

für geeignete $S_i, S_j \in \mathcal{S}$ schreiben.

Satz 6.5 (Satz von Alexander)**.** Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{S}$ eine Subbasis. Dann ist X kompakt genau dann, wenn jede Überdeckung durch Elemente aus $\mathcal{S}$ eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Beweis. '$\Rightarrow$' ist klar.
'$\Leftarrow$' Angenommen, X ist nicht kompakt, dann betrachte die Menge

$$\mathcal{C} := \left\{ U \mid U \text{ offene Überdeckung } \underline{\text{ohne}} \text{ endliche Teilüberdeckung} \right\} \neq \varnothing.$$

Es ist $\mathcal{C}$ partiell geordnet, indem wir $U \leqslant U'$ für $U \subseteq U'$ setzen.
Ist $U_1 \subseteq U_2 \subseteq \ldots$ eine Kette, so ist $\bigcup_{U_i} \in \mathcal{C}$, denn

- Offenbar ist $\bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung.
- Hat $\bigcup_{i \in I} U_i$ eine endliche Teilüberdeckung, so ist diese schon in einem U_i enthalten, und damit enthielte auch dieses U_i bereits eine endliche Teilüberedckung $\lightning$

Wir können also das Lemma von Zorn anwenden, und somit existiert ein maximales Elment $U \in \mathcal{C}$.

Behauptung 1. *Ist $V \subseteq X$ offen und $V \notin U$, so hat $U \cup \{V\}$ eine endliche Teilüberdeckung*

Unterbeweis. Sonst wäre $U \cup \{V\} \in \mathcal{C}$ und somit wäre U nicht maximal ■

Behauptung 2. *$U \cap \mathcal{S}$ ist keine Überdeckung*

Unterbeweis. Sonst hätte U eine endliche Teilüberedckung nach Annahme. ■

Wegen Behauptung 2 existiert $x \in X$, der nicht von $U \cap \mathcal{S}$ überdeckt wird. Sei $W \in U$ mit $x \in W$. Da W offen ist, folgt

$$W = \bigcup_{i \in I} \bigcap_{k \in K_i} S_k.$$

mit K_i endlich und $S_k \in \mathcal{S}$. Dann existieren also $S_1, \ldots, S_n$ mit

$$x \in \bigcap_{i=1}^{n} S_i \subseteq W.$$

Da x nicht von $U \cap \mathcal{S}$ überdeckt wird, ist $S_i \notin U$. Aus der ersten Behauptung wissen wir nun aber, dass es $U_1^i, \ldots, u_{n_i}^i \in U$ mit

$$\left\{U_j^i\right\}_{j=1}^{n} \cup \{S_i\} \qquad \text{ist Überdeckung von } X.$$

Sei nun

$$\hat{U} := \left\{ U_j^i \mid 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n_i \right\} \subseteq U.$$

Für alle i gilt also

$$X \subseteq \bigcup_{V \in \hat{U}} V \cup S_i.$$

Also folgt

$$X \setminus \bigcup_{V \in \hat{U}} V \subseteq S_i.$$

und damit ist auch

$$X \setminus \bigcup_{V \in \hat{U}} V \subseteq S_1 \cap \ldots \cap S_n \subseteq W \in U.$$

Also ist $\hat{U} \cup \{W\}$ eine endliche Teilüberdeckung von U, $\lightning$. $\square$

Vorlesung 6: Produkte

Do 29 Apr 2021 10:01

7 Produkte

Definition 7.1 (Produkttopologie)**.** Seien X_1, X_2 topologische Räume. Die **Produkttopologie** auf $X_1 \times X_2$ ist die Topologie erzeugt von

$$\mathcal{B} = \{U_1 \times U_2 \mid U_1 \subseteq X_1 \text{ offen }, U_2 \subseteq X_2 \text{ offen}\}.$$

Beispiel. Seien (X_1, d_1) und (X_2, d_2) metrische Räume. Auf $X_1 \times X_2$ haben wir die Metriken definiert durch

$$\begin{aligned} d_{\max}((x_1, x_2), (y_1, y_2) &:= \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\} \\ \tilde{d}_1((x_1, x_2), (y_2, y_2)) &:= d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2) \\ \tilde{d}_2((x_1, x_2), (y_1, y_2)) &:= \sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2} \end{aligned} .$$

Dies Metriken sind paarweise äquivalent (leicht zu prüfen). Zudem sind ε-Bälle in $d_{\max}$ gegeben durch

$$U_{d_{\max}}((x_1, x_2), \varepsilon)) = U_{d_1}(x_1, \varepsilon) \times U_{d_2}(x_2, \varepsilon).$$

D.h. die von $d_{\max}$ induzierte Topologie ist die Produkttopologie.

Beispiel. Es ist $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, wobei wir auf der linken Seite die Standardtopologie und auf der rechten Seite die Proudkttopologie meinen.

Bemerkung. $\mathcal{B}$ ist per Definition eine Subbasis der Produkttopologie, in der Tat handelt es sich jedoch sogar um eine Basis:

Beweis. Seien $U_1 \times U_2$ sowie $V_1 \times V_2 \in \mathcal{B}$ Basiselemente. Wir stellen fest, dass

$$(U_1 \times U_2) \cap (V_1 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2).$$

das Produkt zweier Basiselemente ist, und somit sind wir fertig. ☐

Satz 7.2 (Projektion auf Komponenten)**.** Die Projektionen

$$p_x : \left| \begin{array}{ccc} X \times Y & \longrightarrow & X \\ (x,y) & \longmapsto & x \end{array} \right. \qquad p_Y : \left| \begin{array}{ccc} X \times Y & \longrightarrow & Y \\ (x,y) & \longmapsto & y \end{array} \right.$$

sind stetig und offen

Beweis. Sei $U \subseteq X$ offen. Dann ist $p_X^{-1}(U) = U \times Y \in \mathcal{B}$, also offen. Analoges gilt für p_Y.
Sei $U \subseteq X \times Y$ offen. Dann können wir U schreiben als

$$U = \bigcup_{i \in I} U_i \times V_i.$$

OBdA können wir $V_i \neq \varnothing$ annehmen. Dann ist aber

$$P_X(U) = \bigcup_{i \in I} p_X(U_i \times V_i) = \bigcup_{i \in I} U_i \subseteq X.$$

offen, also ist p_X offen. ☐

Bemerkung. Die Projektion p_X ist i.A. nicht abgeschlossen.

Beweis. Betrachte $A = \left\{ \left(\frac{1}{n}, n\right) \in \mathbb{R}^2 \mid n \in \mathbb{N}_{>0} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$ abgeschlossen. Dann ist aber $p_1(A) = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}_{>0} \right\} \subseteq \mathbb{R}$ nicht abgeschlossen. ☐

Satz 7.3. Ist Y kompakt, so ist p_X abgeschlossen.

Beweis. Sei $A \subseteq X \times Y$ abgeschlossen. Wir müssen zeigen, dass $X \backslash p_X(A)$ offen ist, also wähle $x \in X \backslash p_X(A)$. Für alle $y \in Y$ ist $(x,y) \notin A$ (sonst wäre $x \in p_X(A)$), also gibt es

$$x \in U_y \subseteq X \quad y \in V_y \subseteq Y \text{ offen: } (U_y \times V_y) \cap A = \varnothing.$$

Damit sind die $\{V_y\}_{y \in Y}$ eine offene Überdeckung von Y und wir finden mit Y kompakt eine endliche Teilüberdeckung $V_{y_1}, \dots, V_{y_n}$ von Y. Setzen wir nun

$$U := \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}.$$

so ist $U \subseteq X$ offen als endlicher Schnitt und wir stellen mit

$$U \times V_{y_i} \subseteq U_{y_i} \times V_{y_i} \subseteq (X \times Y) \backslash A.$$

fest, dass bereits $U \times Y \subseteq (X \times Y) \backslash A$ (weil die V_{y_i} bereits Y überdecken). Nun muss aber bereits

$$U \subseteq X \backslash p_X(A).$$

gelten, und damit ist dieses U eine offene Umgebung von $x \in X \backslash p_X(A)$. ☐

Lemma 7.4 (Subbasis der Produkttopologie)**.** Seien X, Y topologische Räume. Die Menge

$$\mathcal{S} = \{U \times Y, X \times V \mid U \subseteq X \text{ offen}, V \subseteq Y \text{ offen}\}.$$

ist eine Subbasis der Produkttopologie.

Beweis. Sei $W \subseteq X \times Y$ offen. Dann gibt es nach der Definition der Produkttopologie $U_i \subseteq X, V_i \subseteq Y$ offen mit

$$W = \bigcup_{i \in I} (U_i \times V_i).$$

Also ist bereits

$$W = \bigcup_{i \in I} ((U_i \times Y) \cap (X \times V_i)).$$

eine Vereinigung endlicher Schnitt von unseren Subbasiselementen.
Umgekehrt ist klar, dass alle Elemente aus $\mathcal{S}$ auch offene Mengen in der Produkttopologie sind, da $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}$. $\square$

Satz 7.5 (Universelle Eigenschaft des Produkts)**.** Seien A, X_1, X_2 topologische Räume sowie $f_i : A \to X_i$. Dann ist die Abbildung

$$(f_1 \times f_2) =: f \left| \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X_1 \times X_2 \\ a & \longmapsto & (f_1(a), f_2(a)) \end{array} \right.$$

stetig genau dann, wenn f_1, f_2 stetig sind.

$$\begin{tikzcd}
 & & X_1 \\
A \arrow[rru, bend left, "f_1"] \arrow[rrd, bend right, "f_2"'] \arrow[r, dashed, "f"] & X_1 \times X_2 \arrow[ru, "p_1"] \arrow[rd, "p_2"] & \\
 & & X_2
\end{tikzcd}$$

Beweis. Es ist $f_i = p_i \circ f$. Ist f stetig, so ist f_i stetig als Verknüpfung stetiger Funktionen.
Angenommen, es sind f_1, f_2 stetig. Wir müssen zeigen, dass für alle $U_1 \times U_2 \subseteq X_1 \times X_2$ mit $U_i \subseteq X_i$ offen auch $f^{-1}(U_1 \times U_2)$ offen ist. Hierzu stellen wir aber fest, dass

$$f^{-1}(U_1 \times U_2) = f_1^{-1}(U_1) \cap f_2^{-1}(U_2).$$

offen ist. $\square$

Beispiel. a) Wir behaupten, dass

$$\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \cong S^n \times (0, \infty) \cong S^n \times \mathbb{R}.$$

ist. Betrachte hierzu

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} & \longrightarrow & S^n \times (0, \infty) \\ x & \longmapsto & \left(\frac{x}{\|x\|_2}, \|x\|_2 \right) \end{array} \right.$$

Wir sehen nun mit der universellen Eigenschaft sofort, dass es sich um eine stetige Abbildung handelt. Zudem haben wir die Umkehrfunktion

$$\begin{array}{ccc} S^n \times (0, \infty) & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \\ (y, t) & \longmapsto & t \cdot y \end{array}$$

Wir müssen noch prüfen, dass diese stetig ist (Übung), dann haben wir einen Homöomorphismus.

b) $S^1 \times S^1$ ist ein Torus. Betrachte hierzu

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} [0, 1]^2 & \longrightarrow & S^1 \times S^1 \\ (s, t) & \longmapsto & (e^{2\pi i s}, e^{2\pi i t}) \end{array} \right.$$

φ ist stetig und erfüllt $\varphi(s, 0) = \varphi(s, 1)$ sowie $\varphi(0, t) = \varphi(1, t)$. Also faktorisiert φ wie gewünscht als

$$\begin{tikzcd} {[0,1]^2} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & S^1 \times S^1 \\ {[0,1]^2 / \sim} \arrow[ur, "\varphi'"'] & \end{tikzcd}$$

wobei $\sim$ die Relation ist, die wir für die Konstruktion des Torus verwendet hatten. φ' ist stetig und surjektiv nach der Universellen Eigenschaft, und wir sehen leicht, dass φ' injektiv ist. Also ist φ' stetig und bijektiv. Nun ist aber $[0, 1]^2$ kompakt und $S^1 \times S^1$ Hausdorff (z.B. als metrisierbare Teilmenge von $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$), und somit ist φ' ein Homöomorphismus nach Korollar 5.8

Korollar 7.6 (Komponente eines Produkts)**.** Seien X, Y topologische Räume sowie $y \in Y$. Dann ist $X \cong X \times \{y\} \subseteq X \times Y$ mittels $x \mapsto (x, y)$.

Beweis. Nenne diese Abbildung f, also

$$f : \left| \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X \times Y \\ x & \longmapsto & (x, y) \end{array} \right.$$

f ist stetig, da sowohl id_X als auch

$$c_Y : \left| \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ x & \longmapsto & y \end{array} \right.$$

stetig sind (mit universeller Eigenschaft). f faktorisiert nun über $X \times \{y\} \subseteq X \times Y$ und $f : X \to X \times \{y\}$ ist offensichtlich bijektiv. Wir müssen also noch zeigen, dass $f$offen ist.
Sei $U \subseteq X$ offen, dann ist $U \times Y \subseteq X \times Y$ offen. Es ist zudem

$$f(U) = U \times \{y\} = U \times Y \cap X \times \{y\} \subseteq X \times \{y\}\,.$$

in $X \times \{y\}$ offen. $\square$

Satz 7.7 (Produkteigenschaften)**.** Seien X, Y topologische Räume.

1) Sind X und Y Hausdorffsch, so auch $X \times Y$
2) Sind X und Y kompakt, so auch $X \times Y$.

Beweis. 1) Seien $(x, y) \neq (x', y' \in X \times Y$. Dann ist $x \neq x'$ oder $y \neq y'$. OBdA sei $x \neq x'$. Dann existieren $U, U' \subseteq X$ offen mit $x \in U, x' \in U'$ und $U \cap U' = \varnothing$, weil X Hausdorffsch. Dann sind

$$(x, y) \in U \times Y \qquad (x', y') \in U' \times Y.$$

jeweils offen, und ihr Schnitt ist

$$(U \times Y) \times (U' \times Y) = (U \cap U') \times Y = \varnothing.$$

Also ist $X \times Y$ Hausdorffsch.

2) Wir wollen den Satz von Alexander (6.5) verwenden. Sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von $X \times Y$ mit Elementen der Form $U \times Y$ oder $X \times V$. Sei

$$W = \bigcup_{U \times Y \in \mathcal{U}} U \subseteq X \qquad W' = \bigcup_{X \times V \in \mathcal{U}} V \subseteq Y.$$

Ist $W = X$, so existiert eine endliche Teilüberdeckung von $\{U \mid U \times Y \in \mathcal{U}\}$ durch $U_1, \ldots, U_n$. Dann ist bereits

$$\{U_i \times Y \mid i = 1, \ldots, n\}.$$

eine endliche Teilüberdeckung von $X \times Y$. Für $W' = Y$ verfahren wir genauso. Ist $W \neq X$ und $W' \neq Y$, so existiert $x \in X \backslash W, y \in Y \backslash W'$. Dann ist (x, y) aber nicht von $\mathcal{U}$ überdeckt, weil er von keinem $U \times Y$ und von keinem $X \times V$ überdeckt wird, $\lightning$.
Also finden wir in beiden Fällen eine endliche Teilüberdeckung.

$\square$

Bemerkung. Der Beweis geht auch ohne den Satz von Alexander. Viel leichter: Es genügt, offene Überdeckungen bezüglich einer Basis zu betrachten (Spezialfall von Alexander, leicht zu zeigen), dann verfahren wir wie folgt:
Sei $\mathcal{U}$ eine Überdeckung von $X \times Y$ mit Elementen aus $\mathcal{B}$. Dann gibt es eine endliche Teilüebredckung von $X \times \{y\}$. Sei diese $\{U_i^y \times V_i^y\} i = 1^{n_y}$. Setze

$$V_y := \bigcap_{i=1}^{n_Y} V_i^y.$$

Dann ist dies eine Überdeckung von $X \times V_y$. Die V_y bilden nun eine offene Überdeckung von Y, also finden wir wieder eine endliche Teilüberdeckung durch $V_{y_1}, \ldots, V_{y_n}$. Da wir aber die $X \times V_{y_i}$ jeweils endlich überdeckt haben, können wir nun auch $X \times Y$ endlich überdecken.

Definition (Produkt endlich vieler Mengen)**.** Seien $X_1, \ldots, X_n$ topologische Räume. Dann definieren wir ihr Produkt rekursiv durch

$$X_1 \times \ldots \times X_n := (X_1 \times \ldots \times X_{n-1}) \times X_n.$$

Lemma 7.8. Seien X, Y topologische Räume mit Basen $\mathcal{B}_X, \mathcal{B}_Y$. Dann ist

$$\mathcal{B}_{X \times Y} := \{U \times V \mid U \in \mathcal{B}_X, V \in \mathcal{B}_Y\}.$$

eine Basis der Topologie auf $X \times Y$.

Korollar (Basis endlicher Produkte)**.** Die Mengen $U_1 \times U_2 \times \ldots . \times U_n$ mit $U_i \subseteq X_i$ offen sind eine Basis der Topologie auf $X_1 \times \ldots \times X_n$.
Insbesondere ist die Topologie unabhängig von der Klammerung.

Beweis. Setze $\mathcal{B}_{X_i} = \mathcal{O}_{X_i}$. □

Beweis. Seien $W \in X, W' \subseteq Y$ offen. Dann existieren $U_i \in \mathcal{B}_X$ sowie $V_j \in \mathcal{B}_Y$ mit

$$W = \bigcup_{i \in I} U_i \qquad W' = \bigcup_{j \in J} V_j.$$

Dann ist bereits:

$$W \times W' = \bigcup_{\substack{i \in I \\ j \in J}} U_i \times V_j.$$

Ist nun $A \subseteq X \times Y$ beliebig offen, so gilt

$$A = \bigcup W_i \times W_i' = \bigcup \bigcup_{\substack{i \in I \\ j \in J}} U_i \times V_j.$$

Umgekehrt ist klar, dass die $U_i \times V_j$ offen in der Produkttopologie sind. □

Bemerkung*. Eigentlich haben wir in obigem Beweis nur den Fall $n = 2$ behandelt. Man verallgemeinert induktiv jedoch leicht (kanonisch) auf endlich viele Mengen.

Satz 7.9 (Diagonaleigenschaft)**.** Sei X ein topologischer Raum. Dann ist X Hausdorffsch, genau dann, wenn

$$\Delta_X := \{(x, x) \mid x \in X\} \subseteq X \times X.$$

abgeschlossen ist.

Notation. Wir nennen $\Delta_X \subseteq X^2$ die **Diagonale von X**.

Beweis. '$\Rightarrow$' Nimm an, dass X Hausdroffsch ist und sei $(x,y) \in X \times X \backslash \Delta_X$, d.h. $x \neq y$. Dann existieren $x \in U_x, y \in U_y$ offen (in X), sodass $U_x \cap U_y = \varnothing$. Also ist

$$(x,y) \in U_x \times U_y \subseteq X \times X \backslash \Delta_X.$$

, denn wenn $(a,b) \in U_x \times U_y$, dann ist $a \neq b$. Also ist $X \times X \backslash \Delta_X$ offen nach Definition.
'$\Leftarrow$' Nimm nun an, dass die Diagonale abgeschlosen ist. Seien $x, y \in X$ mit $x \neq y$ beliebig. Dann ist

$$(x,y) \in X \times X \backslash \Delta_X = \bigcup_{i \in I} U_i \times V_i.$$

Also ist $(x,y) \in U \times V \subseteq X \times X \backslash \Delta_X$ für eine Wahl von U, V. Dann ist aber $x \in U, y \in V$ sowie $U \cap V = \varnothing$, denn wenn $a \in U \times V$, so $(a,a) \in U \times V \cap \Delta_X = \varnothing$, $\lightning$. □

Definition 7.10 (Produkte beliebiger Mengen)**.** Sei $\{X_i\}_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume. Die Produkttopologie auf

$$\prod_{i \in I} X_i := \{(x_i)_{i \in I} \mid x_i \in X_i\}.$$

ist die Topologie erzeugt von der Subbasis

$$\mathcal{S} := \left\{ U_j \times \prod_{i \neq j} X_i \mid j \in I, U_j \subseteq X_j \text{ offen} \right\}.$$

Bemerkung.

- $\mathcal{S}$ ist wirklich nur eine Subbasis. Eine Basis ist gegeben durch

$$\mathcal{B} := \left\{ \prod_{j \in J} U_j \times \prod_{i \in I \backslash J} X_i \mid J \subseteq I \text{ endlich}, U_j \subseteq X_j \text{ offen} \right\}.$$

  d.h. wir dürfen bei endlich vielen Faktoren eine endliche Teilmenge wählen, und wählen in den restlichen Faktoren den ganzen Raum

- Ist I endlich, so stimmt dies mit der vorherigen Definiton überein, weil wir für die Basis jeweils $J = I$ wählen können.

- ⚠ Ist I unendlich, so ist im Allgemeinen

$$\prod_{i \in I} U_i.$$

  mit $U_i \subseteq X_i$ offen <u>nicht</u> offen.

Bemerkung* (Mengentheorie-Spam).

- Wir benötigen das Auswahlaxiom, um einzusehen, dass obiges Produkt überhaupt nichtleer ist, sofern keiner der Faktoren leer ist. Formal ist das Produkt der X_i nämlich definiert als

$$\prod_{i \in I} X_i := \left\{ f : I \to \bigcup_{i \in I} X_i \mid \forall i \colon f(i) \in X_i \right\}.$$

  und das Auswahlaxiom besagt genau, dass es für jede solche Familie nichtleerere Mengene (mindestens) eine solche Funktion gibt (es ist also äquivalent dazu, dass die Produkte nichtleer sind).

- Im Gegensatz zu dem, was in der Vorlesung genannt wurde, ist es kein Problem, wenn $I = \varnothing$, also die Familie leer ist. Dann ist nämlich

$$\prod_{i \in I} X_i = \{ f : \varnothing \to \varnothing \mid \forall i \colon f(i) \in \varnothing \} = \{ \varnothing \}.$$

  <u>nicht</u> leer. (Hierzu sollte man sich klarmachen, dass eine Funktion $f : A \to B$ eine Teilmenge von $A \times B$ war, sodass $\forall a \in A \; \exists! b \in B \colon (a, b) \in f$, und somit suchen wir eine Teilmenge $f \subseteq \varnothing \times \varnothing = \varnothing$). Auch die Topologie ist in diesem Fall wohldefiniert, weil die Subbasis wieder die leere Menge ist (nämlich eine Teilmenge von $\prod X_i = \{\varnothing\}$, und zwar $\{\varnothing\}$ selbst), und diese ist auch eine vollständige Topologie, weil unser topologischer Raum nur einen Punkt enthält (nämlich $\varnothing$). Wir erhalten also den einpunktigen topologischen Raum.

Stichwortverzeichnis