Einführung in die
Geometrie und Topologie

Dozent
Daniel Kasprowski

Assistentin
Arunima Ray

Mitschrift
Maximilian Kessler

Version
21. Mai 2021 09:04

Zusammenfassung

Achtung: Diese Version des Skripts benutze ich zur Bearbeitung! Einige Dinge fehlen, dafür gibt es TODO-Notes. Für Inhalte, benutzt die normale Version

Liste der noch zu erledigenden Punkte

Inhaltsverzeichnis

Vorlesung 1
Di 18 Mai 2021 12:20

Wir erinnern uns daran, dass wir gerade dabei waren, **??** zu beweisen.

Lemma 0.1. Sei X ein normaler Raum, $A \subseteq X$ abgeschlossen und $U \subseteq X$ offen mit $A \subseteq U$. Dann existiert $V \subseteq X$ offen mit

$$A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U.$$

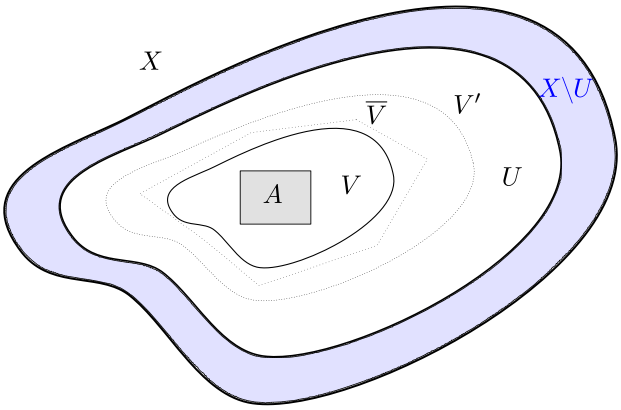


Abbildung 1: Skizze zu Lemma 0.1

Beweis. Wegen U offen ist $X \backslash U$ abgeschlossen. Wegen X normal gibt es V, V' offen mit $A \subseteq V$ und $(X \backslash U) \subseteq V'$ mit $V \cap V' = \varnothing$. Nun ist

$$A \subseteq V \subseteq X \backslash V' \subseteq U.$$

nach Definition des Abschlusses ist nun $A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq X \backslash V' \subseteq U$. $\square$

Beweis von **??** *(**??**).*
Ziel. $\forall r \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ konstruiere $V_r \subseteq X$ offen, sodass

1. $A \subseteq V_0$
2. $B \subseteq X \backslash V_1$
3. $r < r' \Rightarrow \overline{V_r} \subseteq V_{r'}$

Dies genügt, denn dann wissen wir mit **??**, dass

$$\begin{aligned} &\exists f : X \to [0,1] \text{ stetig} \\ f(x) &= 0 \quad \forall x \in V_0 \supseteq A \\ f(x) &= 1 \quad \forall x \in X \backslash V_1 \supseteq B \end{aligned}$$

Wähle hierzu eine Abzählung $p_1, p_2, \ldots$ von $\mathbb{Q} \cap [0,1]$, sodass $p_1 = 1$ und $p_2 = 0$. Definiere nun $\{V_r\}$ rekursiv, wobei wir auch induktiv die Invariante erhalten wollen, dass $r < r' \Rightarrow \overline{V_r} \subseteq V_{r'}$.

- $p_1 = 1$. Setze $V_1 := X \backslash B$ (offen, weil B abgeschlossen ist)
- $p_2 = 0$. Nach Lemma 0.1 mit $A = A$ und $U = X \backslash B$ finden wir V_0 offen mit

$$A \subseteq V_0 \subseteq \overline{V}_0 \subseteq X \backslash B =: V_1.$$

- Sei $n \geqslant 3$, dann sind also $V_{p_1}, V_{p_2}, \dots, V_{p_{n-1}}$ schon definiert. Es ist $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ wohlgeordnet, weil es sich um eine endliche Menge handelt, also gibt es unter ihnen einen direkten Vorgänger p_i von p_n, und einen direkten Nachfolger p_j von p_n.

  Es könnte z.B. $n = 5$ sein mit

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{3}{5}$

  Dann ist die Menge als $\{0, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{8}{9}, 1\}$ geordnet, und wir sehen $p_i == \frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{8}{9} = p_j$.

  Verwende nun Lemma 0.1 mit $A = \overline{V_{p_i}}$ und $U = V_{p_j}$, (hier ist wichtig, dass wegen $p_i < p_j$ beretis $\overline{V_{p_i}} \subseteq V_{p_j}$ gilt, sonst können wir das Lemma nicht anwenden.)
  Also finden wir V mit $\overline{V_{p_i}} \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq V_{p_j}$. Man prüft leicht, dass wir so auch die Invariante der Induktion erhalten haben.

Also haben wir wie gewünscht die V_i gefunden, und somit unsere Funktion. □

Korollar 0.2 (Urysohn mit beliebigem Intervall)**.** Sei X ein normaler Raum und seien $A, B \subseteq X$ disjunkt und abgeschlossen, sowie $a \leqslant b \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann

$$\begin{aligned} \exists f : X \to [a, b] \\ f(A) &= \{a\} \\ f(B) &= \{b\} \end{aligned}$$

Beweis. Zunächst verwenden wir Urysohn, um eine stetige Funktion $g : X \to [0, 1]$ zu erhalten mit $f(A) = \{0\}$ und $f(B) = \{1\}$, dann verknüpfen wir mit der stetigen Abbildung

$$h : \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & [a,b] \\ t & \longmapsto & (1-t)a + tb \end{array} \right.$$

und wir erhalten sofort die gewünschten Eigenschaften, indem wir $f = h \circ g$ setzen. □

1 Der Erweiterungssatz von Tietze

Wir sehen jetzt das **??** in Action:

Satz 1.1 (Erweiterungssatz von Tietze)**.** Sei X ein normaler Raum und $A \subseteq X$ abgeschlossen. Jede stetige Funktion $f : A \to [-1, 1]$ lässt sich fortsetzen zu einer stetigen Funktion $\overline{f} : X \to [-1, 1]$, d.h. $\overline{f}\,|_A \equiv f$.

Bemerkung. Das Urysohn'sche Lemma ist ein Spezialfall des Erweiterungssatz von Tietze:
Sei X normal und $B, C \subseteq X$ abgeschlossen, disjunkt. Dann betrachte

die Funktion

$$f : \left| \begin{array}{ccc} B \cup C & \longrightarrow & [-1,1] \\ B & \longmapsto & -1 \\ C & \longmapsto & 1 \end{array} \right.$$

Frage. Gibt es eine Fortsetzung $\overline{f} : X \to [-1,1]$?

Für jede solche Fortsetzung muss auch $\overline{f}\,|_B = f$, also $\overline{f}(B) = -1$ und $\overline{f}(C) = 1$ gelten, also genau das, was wir von Urysohn fordern. Allerdings sagt uns der Erweiterungssatz von Tietze genau, dass wir solche eine Fortsetzung finden.

Beweis von Satz 1.1 (Erweiterungssatz von Tietze).
Beweisstrategie. Wir konstruieren eine Folge stetiger Funktionen $\{s_n : X \to [-1,1]\}_{n \geqslant 1}$, sodass

(i) $\{s_n\}$ konvergiert **gleichmäßig** gegen eine Funktion $s : X \to [-1,1]$, d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ existiert $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$\forall x \in X, n \geqslant N : \qquad d(s_n(x), s(x)) < \varepsilon.$$

Weil $\{s_n\}$ gleichmäßig konvergiert, ist s stetig (Übungsblatt 5, Aufgabe 3 (iv)).

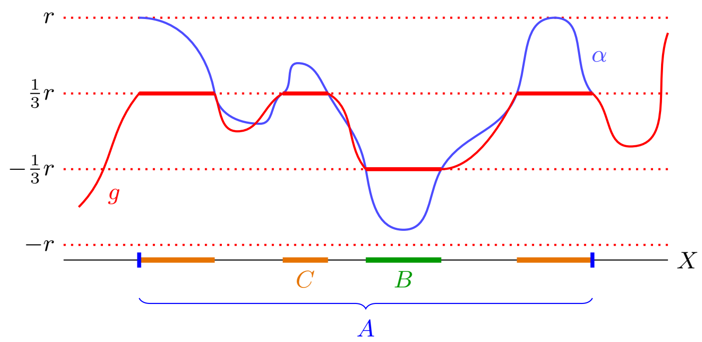
(ii) $s\,|_A = f$

Dazu benötigen wir erstmal einige Lemmata, die wir im folgenden erarbeiten. □

Lemma 1.2. Sei X normal und $A \subseteq X$ abgeschlossen. Sei $\alpha : A \to [-r, r]$ für $r \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ stetig. Dann existiert $g : X \to \left[-\frac{1}{3}r, \frac{1}{3}r\right]$ stetig mit $|\alpha(a) - g(a)| \leqslant \frac{2}{3}r$ für $a \in A$.

Beweis. Setze $B := \alpha^{-1}\left(\left[-r, -\frac{1}{3}r\right]\right)$ und $C := \alpha^{-1}\left(\left[\frac{1}{3}r, r\right]\right)$. Wegen α stetig sind B, C abgeschlossen, und sie sind auch disjunkt, weil die Intervalle disjunkt sind. Nach Urysohn mit beliebigem Intervall finden wir also eine stetige Funktion

$$\begin{aligned} g : X &\to \left[-\frac{1}{3}r, \frac{1}{3}r\right] \\ g(B) &= \left\{-\frac{1}{3}r\right\} \\ g(C) &= \left\{\frac{1}{3}r\right\} \end{aligned}$$



Behauptung 1. *g erfüllt die Bedingungen unseres Lemmas, d.h.*

$$|\alpha(a) - g(a)| \leqslant \frac{2}{3}r \qquad \forall a \in A.$$

Unterbeweis.
- Sei $a \in B$, Dann ist $\alpha(a) \in \left[-r, -\frac{1}{3}r\right]$ und $g(a) = -\frac{1}{3}r$, also gilt die Ungleichung.
- Sei $a \in C$. Dann ist $\alpha(a) \in \left[\frac{1}{3}r, r\right]$ und $g(a) = \frac{1}{3}r$, also, also gilt die Ungleichung.
- Sei $a \in A \backslash (B \cup C)$. Dann ist $\alpha(a), g(a) \in \left[-\frac{1}{3}r, \frac{1}{3}r\right]$, und damit ist der Abstand auch höchstens $\frac{2}{3}r$.

■

□

Bemerkung*. In der Vorlesung kam die Frage auf, ob wir manche der gerade bewiesenen Resultate auch auf die Analysis übertragen können, indem wir z.B. den Fixpunktsatz von Banach anwenden.

darüber nachdenken

Fortsetzung des Beweises des Erweiterungssatz von Tietze. Definiere die Folgen s_n induktiv. Dazu

Schritt 1: Verwende Lemma 1.2 mit $\alpha = f$ und $r = 1$, also erhalten wir

$$g_1 : X \to \left[-\frac{1}{3}r, \frac{1}{3}r\right].$$

settig mit $|f(a) - g(a)| \leqslant \frac{2}{3}$ für jedes $a \in A$. Setze $s_1 = g_1$.

Induktionsschritt Angenommen, wir haben schon stetige Funktion $g_1, \ldots, g_n$ auf X mit

$$g_i : X \to \left[-\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} \cdot \frac{1}{3}, \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} \cdot \frac{1}{3}\right].$$

und

$$\left| f(a) - \sum_{i=1}^{n} g_i(a) \right| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n \qquad \forall a \in A.$$

Verwende nun wieder Lemma 1.2 mit $\alpha = f - \sum_{i=1}^{n} g_i |_A$ und $r = \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Es gibt also

$$g_{n+1} \colon X \to \left[-\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n, \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n\right].$$

Wir erhalten nun

$$\begin{aligned} \left| f(a) - \sum_{i=1}^{n} g_i(a) - g_{n+1}(a) \right| &= \left| f(a) - \sum_{i=1}^{n+1} g_i(a) \right| \\ &\leqslant \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

Nun definiere

$$s_{n+1} := \sum_{i=1}^{n+1} g_i : X \to \mathbb{R}.$$

Behauptung 1. *s_n hat Bild in $[-1, 1]$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.*

Unterbeweis.

$$\begin{aligned}|s_n(x)| &= \left|\sum_{i=1}^{n} g_i(x)\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n}|g_i(x)| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1}\cdot\frac{1}{3} \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1}\cdot\frac{1}{3} \\ &= \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{2}{3}} = 1\end{aligned}$$

Die andere Schranke zeigt man völlig analog. ■

Behauptung 2. *Die Folge $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen s.*

Unterbeweis. Für $k > n$ ist

$$\begin{aligned}|s_k(x) - s_n(x)| &= \left|\sum_{i=n+1}^{k} g_i(x)\right| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} \\ &= \sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}} \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^n\end{aligned}$$

(i) Für jedes $x \in X$ ist $\{s_n(x)\}_{n\geqslant 1}$ eine Cauchy-Folge, also konvergiert sie zu einem Punkt $s(x) \in [-1, 1]$.

(ii) Intuitiv reicht es für gleichmäßige Stetigkeit schon zu sehen, dass in obiger Abschätzung kein x vorkommt. Genauer:
Sei $\varepsilon > 0$, so $\exists N \in \mathbb{N}$ mit $\forall n > N \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^n < \varepsilon$. Dann ist

$$\begin{aligned}|s(x) - s_n(x)| &= \left|\lim_{k\to\infty} s_k(x) - s_n(x)\right| \\ &= \lim_{k\to\infty}|s_k(x) - s_n(x)| \\ &\leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n \\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

also ist die Konvergenz gleichmäßig, und s ist stetig.

■

Setze nun $\overline{f} := s$, dann überprüfen wir

Behauptung 3. *$\overline{f}$ ist eine Fortsetzung von f, d.h. $\overline{f}\,|_A = f$.*

Unterbeweis. Es ist

$$|f(a) - s_n(a)| = \left|f(a) - \sum_{i=1}^{n} g_i(a)\right| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

also

$$\lim_{n\to\infty}|f(a) - s_n(a)| \leqslant \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

Also ist
$$s(a) := \lim_{n\to\infty} s_n(a) = f(a).$$
für jedes $a \in A$. ■

Wir haben also eine Fortsetzung gefunden, und sind damit fertig. □

Korollar 1.3 (Version des Satzes von Tietze)**.** Sei X ein normaler Raum und $A \subseteq X$ abgeschlossen. Dann gilt folgendes:

1. Jede stetige Funktion $f : A \to [a, b]$ lässt sich zu einer Funktion $\overline{f} : X \to [a, b]$ fortsetzen.
2. Jede stetige Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ lässt sich fortsetzen zu einer Funktion $\overline{f} \colon X \to \mathbb{R}$.

Beweis. Übung. □

2 Der Metrisierungssatz von Urysohn

Satz 2.1 (Metrisierungssatz von Urysohn)**.** Jeder normale Raum mit abzählbarer Basis der Topologie ist metrisierbar.

Beweis.
Beweisstrategie. Schritt 1: Betrachte $\prod_{\mathbb{N}}[0, 1]$ in der Produkttopologie und zeige, dass der Raum emtrisierbar ist. Dieser Raum heißt **Hilbert-Würfel**.

Schritt 2: Sei X normal mit abzählbarer Basis, wir zeigen, dass wir eine Einbettung $F : X \to \prod_{\mathbb{N}}[0, 1]$ finden. Dann sind wir fertig, da
$$X \cong F(X) \subseteq \prod_{\mathbb{N}}[0, 1].$$
ein Unterraum eines metrischen Raumes ist.

□ Vorlesung 2
Do 20 Mai 2021 10:07

Lemma 2.2 (Hilbert-Raum ist metrisierbar)**.** Der Raum $\prod_{i=1}^{\infty}[0, 1]$ ist metrisierbar (in der Produkttopologie).

Beweis. Übung. Die Metrik ist hierbei gegeben durch:
$$D((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sup\left\{ \frac{|x_n - y_n|}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$
□

Lemma 2.3. Sei X ein normaler Raum mit abzählbarer Basis
$$\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \ldots\}.$$
Dann gibt es eine abzählbare Familie
$$\{f_i \colon X \to [0, 1] \mid f_i \text{ stetig}\}.$$
sodass für jedes $x \in X$ und jede offene Umgebung $x \in U$ ein $i \in \mathbb{N}$

existiert, sodass $f_i(x) = 1$ und $f_i(y) = 0$ für $y \notin U$.

Bemerkung. Wir wissen schon, dass X normal $\Rightarrow X$ vollständig regulär, dass wir also solche Funktionen finden, ist bereits klar. Das wichtige am Beweis ist, dass wir abzählbar viele Funktionen finden können, die das schon für alle (!) Punkte tun.

Beweis von Lemma 2.3. Für jedes n, m mit $|B_n| \subseteq B_m$ wenden wir das **??**. an, also gibt es Funktionen

$$\begin{aligned} g_{n,m} \colon X &\to [0,1] \\ g_{n,m}(\overline{B_n}) &= \{1\} \\ g_{n,m}(X \backslash B_m) &= \{0\} \end{aligned}$$

Wir stellen zudem fest, dass diese Familie von Funktionen abzählbar ist, wegen $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \cong \mathbb{N}$.

Behauptung 1. *Die $(g_{n,m})_{n,m \in \mathbb{N}}$ erfüllen bereits die gewünschte Bedingung.*

Unterbeweis. Sei $x \in X$ mit einer Umgebung $x \in U$ gegeben. Da $\mathcal{B}$ eine Basis ist, finden wir $m \in \mathbb{N}$ mit $x \in B_m \subseteq U$, da U offen ist. Da X normal ist, finden wir zudem eine offene Menge V mit $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq B_m$ (Lemma 0.1, wir erinnern uns, dass Punkte in normalen Räumen abgeschlossen sind nach **??**). Analog finden wir nun $B_n \in \mathcal{B}$ mit $x \in B_n \subseteq V$, erneut, weil $\mathcal{B}$ eine Basis ist.

Dann ist $\overline{B_n} \subseteq \overline{V} \subseteq B_m$, und $g_{n,m}(x) = 1$ wegen $x \in B_n \subseteq \overline{B_n}$ und $g_{n,m}(y) = 0$ für $y \notin U$, da dann $y \notin B_m$. ■

□

Mündliche Anmerkung†. Für den Beweis von Satz 2.1 brauchen wir nicht wirklich, dass wir eine abzählbare Basis finden, sondern es genügt die Eigenschaft ebigen Lemmas. Die abzählbare ist jedoch die einfachste Eigenschaft das zu garantieren.

Beweis des Metrisierungssatz von Urysohn. Seien $(f_i \colon X \to [0,1])_{i \in \mathbb{N}}$ wie in Lemma 2.3. Definiere

$$F : \left| \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \prod_{i=1}^{\infty} [0,1] \\ x & \longmapsto & (f_i(x))_{i \in \mathbb{N}} \end{array} \right.$$

Nach der universellen Eigenschaft der Produkttopologie ist f stetig.

Behauptung 1. *F ist eine Einbettung (d.h. ein Homöomorphismus mit dem Bild, siehe* **??***).*

Unterbeweis. Wir zeigen, dass F injektiv und $F \colon X \to F(X)$ offen ist, dann ist F eine Einbettung.

- Seien $x \neq y \in X$. Da X normal ist, finden wir eine offene Menge $x \in U$, $y \notin U$ (erneut, indem wir uns erinnern, dass normale Räume Hausdorff sind, und dann **??** anwenden). Wegen Lemma 2.3 gibt es also $n \in \mathbb{N}$ mit $f_n(x) \subseteq f_n(U) = 1$ und $f_n(X \backslash U) = 0$, also

$$f_n(x) = 1 \neq f_n(y) \Rightarrow F(x) \neq F(y).$$

  Also ist F injektiv.

- Sei $U \subseteq X$ offen. Wir zeigen: $F(U) \subseteq \prod_{\mathbb{N}}$ ist offen. Sei $z \in F(U)$ mit (eindeutigem) Urbild $x \in U$. Wir konstruieren eine Menge $V \subseteq \prod_{\mathbb{N}}[0,1]$ offen, sodass $z \in V \cap F(X) \subseteq F(U)$, dann ist $F(U)$ offen in $F(X)$.
  Erneut nach Lemma 2.3 erhalten wir ein n mit $f_n(x) = 1$ und $f_n(X \backslash U) = 0$. Setze nun
  $$V = [0,1] \times \ldots \times (0,1] \times [0,1] \times \ldots.$$
  als offene Teilmenge von $\prod_{\mathbb{N}}[0,1]$, wobei $(0,1]$ im n-ten Faktor stehe.

  Behauptung 2. *$z \in V \cap F(X) \subseteq F(U)$ ist eine offene Umgebung (in $F(X)$) von z.*
  Unterbeweis. Sei $z' = F(x') \in V \cap F(X)$. Es ist $z' \in V$, also $z'_n := f_n(x') \neq 0$, allerdings wissen wir auch $f_n(X \backslash U) = 0$, d.h. $x' \notin X \backslash U$, also folgt $x' \in U$ und somit $z' = F(x') \in F(U)$. Zudem ist wegen $z_n = f_n(x) = 1 \neq 0$ auch $z \in V \cap F(X)$, also handelt es sich um eine offene Umgebung von z. ■
  Also ist $F(U)$ offen in $F(X)$ und somit $F\colon X \to F(X)$ offen.

Also ist $F\colon X \to F(X)$ offen und injektiv, und somit eine Einbettung. ■

Nun stellen wir also fest, dass $X \cong F(X)$ (wegen der Einbettung), aber $F(X) \subseteq \prod_{\mathbb{N}}[0,1]$ ist metrisierbar als Teilraum eines metrisierbaren Raums, also ist X metrisierbar und das wollten wir zeigen. □

> **Mündliche Anmerkung.** Wo haben wir jetzt wirklich benutzt, dass das Produkt abzählbar war?. Man überlegt sich, dass wir den exakt gleichen Beweis für jede Kardinalität einer Basis hätten durchführen können, um nach $\prod_{\aleph}[0,1]$ einzubetten. Das wirkliche Problem ergibt sich dann erst, wenn wir zeigen (in der Übung), dass $\prod_{\mathbb{N}}[0,1]$ metrisierbar ist. Es stellt sich heraus, dass das nur für $\aleph \leqslant \omega$, dh. für abzählbare Indexmengen der Fall ist.

Teil I
Algebraische Topologie

Motivation

Bisher haben wir Topologische Räume und ihre Eigenschaften wie Hausdorff, normal, Kompakt oder zsuammenhängend gesehen, um diese zu unterscheiden. Im 2. Teil der Vorlesung kümmern wir uns nun um weiter Topologische Invarianten.

Beispiel. Setze $\pi_0(X) :=$ als die Menge der Wegkomponenten von X, d.h. $\pi_0(X) \subseteq \mathcal{P}(X)$ und $U \in \pi_0(X)$ genau dann, wenn U wegzusammenhängend und inklusionsmaximal, d.h. $\nexists V$ wegzusammenhängend mit $U \subsetneq V$. Dann ist $\pi_0(X)$ eine topologischen Invariante.

Bemerkung*. Mit 'topologischen Invariante' meinen wir natürlich immer eine Eigenschaft eines topologischen Raumes, die von Homöomorphismen erhalten wird, also nicht von der konkreten Wahl des Raumes abhängt.

Beispiel.
- $\pi_0(\mathbb{R}) = \{\mathbb{R}\}$, da $\mathbb{R}$ wegzusammenhängend
- $\pi_0(\mathbb{N}) = \{\{n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$, weil die einzigen wegzusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{N}$ die einpunktigen Mengen sind
- Betrachte die Sinuskurve des Topologen (siehe Übungsblatt 5, Aufgabe 1). Diese ist definiert als der Abschluss des Graphen G von $x \mapsto \sin\frac{1}{x}$ für $x > 0$. Dann sind die Wegzusammenhangskomponenten genau G selbst (blau) sowie $\overline{G} \backslash G$ (rot).

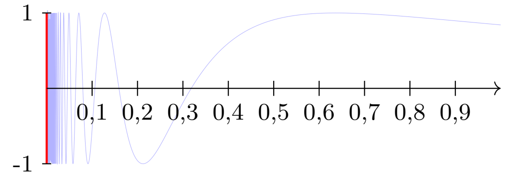


Abbildung 2: Sinuskurvve des Topologen

Beispiel. Eine Invariante, die wir noch nicht kennen, ist π_1. Hierzu definiere für $x_0 \in X$:

$$\pi_1(X, x_0) = \left\{\text{Abbildungen } f\colon S^1 \to X, 1 \mapsto x_0\right\} / \text{'Verschieben'}.$$

Mündliche Anmerkung. 'Verschieben' ist an dieser Stelle (bewusst) noch nicht präzisiert. Wir werden sehen, dass wir damit 'Homotopie' meinen, dazu aber später mehr, wenn wir das ganze detailliert behandeln.

Fakt. Ist $f : X \to Y$ stetig, so induziert f Abbildungen

$$f_* : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$$
$$f_* : p_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$$

Formal sind π_0, π_1 sogenannte **Funktoren**, deswegen wollen wir uns im Folgenden etwas genauer die sogenannte **Kategorientheorie** ansehen, die solche Konzepte behandelt.

3 Kategorien

3.1 Einschub: Mengentheorie

Bemerkung*. Das folgende Kapitel ist sehr formal und holt weit aus, was wir nicht (wirklich) verwenden. Es dient nur dazu, unserem folgenden Handeln eine formale Grundlage zu verleihen, hat aber keinen (wirklichen) weiteren Einfluss auf die Vorlesung.
Eine Einführung in die Logik und Mengenlehre, die auf die Topologie hinarbeitet, findet sich in [Mun18, Kapitel 1].
Für Formaleres zu Kardinalitäten sei auf auf das Vorlesungsskript [Koe18] verwiesen, dort wird allerdings auch vieles behandelt, das hier nicht relevant ist.

Wir fordern neben den üblichen Axiomen von **ZFC** (hierbei steht **C** für das sogenannte **Auswahlaxiom**), noch die Existenz mehrerer unerreichbarer Kardinalzahlen (d.h. welche außer $\aleph_0 := \operatorname{card}(\mathbb{N})$, die wir $\aleph_0 < \kappa < \kappa'$ nennen)

Definition[†] (unerreichbare Kardinalzahl)**.** κ ist eine **unerreichbare Kardinalzahl**, falls

- $\operatorname{card}\left(\bigcup_{i \in I} X_i\right) < \kappa$ für alle I, X_i mit $\operatorname{card}(I), \operatorname{card}(X_i) < \kappa$.
- $\operatorname{card}\{f \colon X \to Y \mid f \text{ Abbildung}\} < \kappa$ für alle Mengen X, Y mit $\operatorname{card}(X), \operatorname{card}(Y) < \kappa$.

Bemerkung* (Logik-Spam)**.** Eine überabzählbare unerreichbare Kardinalzahl liefert uns zugleich ein Modell von **ZFC**, wir können deren Existenz also nicht innerhalb von **ZFC** zeigen (vgl. Gödelscher Unvollständigkeitssatz), deren Existenz ist jedoch konsistent genau dann, wenn **ZFC** selbst Widerspruchsfrei ist (wovon wir ausgehen). Insbesondere sollte man über κ so nachdenken, dass alles, das man definieren kann / betrachtet, bzw. alle 'interessanten' Mengen $< \kappa$ sind. So sollte man auch über κ nachdenken: Durch keine Begriffsbildungen, die Dinge $< \kappa$ verwenden, können wir κ erreichen, also bildet κ etwas wie den Horizont des Universums (der Mengen).

Definition 3.1 (Menge,Klasse)**.**
- Der Begriff **Mengen** heißt für uns ab nun *alle Mengen mit Kardinalität* $< \kappa$.
- Der Begriff **Klasse** steht für alle Mengen mit Kardinalität $< \kappa'$.

Bemerkung*. Diese Begrifflichkeiten dienen nur dazu, dass wir über die Klasse aller Mengen V reden können, die keine Menge ist. (auch nicht im herkömmlichen Sinne). Es gibt auch andere Ansätze, um das zu ermöglichen, wie etwa das Beschreiben von Klassen mittels Formeln, für uns ist obiger Ansatz jedoch am einfachsten. Merken sollte man sich vor allem

- Jede Menge ist eine Klasse, aber nicht zwingend umgekehrt. $V = \{M \mid M \text{ ist Menge}\}$ ist die Klasse aller Mengen, oder auch das Universum aller Mengen.
- Wir können Mengen beliebig zu einer Klasse zusammenfassen, d.h. ist $\varphi(M)$ eine Formel (Eigenschaft) einer Menge M, so ist
$$\{M \mid \varphi(M)\} := \{M \mid \varphi(M), M \text{ ist Menge}\}\,.$$
eine Klasse.
- Für Klassen gilt das nicht mehr, d.h.
$$\{K \mid K \text{ ist Klasse}\}\,.$$
ist <u>keine</u> Klasse (und damit [für uns]) kein definierter Ausdruck. Sonst könnten wir das Russel'sche Paradoxon herleiten.

3.2 Kategorien

Bemerkung*. Für eine ausführlichere Einführung zur Kategorientheorie siehe z.B. [Lei14].

Definition 3.2 (Kategorie)**.** Eine **Kategorie** $\mathcal{C}$ besteht aus

- Einer Klasse von **Objekten**, notiert $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.
- $\forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ eine Menge $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ von **Morphismen**
- Für $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ Verknüpfungsabbildungen
$$\circ : \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Y) \times \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Y,Z) & \longrightarrow & \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Z) \\ (f,g) & \longmapsto & g \circ f \end{array} \right.$$
mit $(f, g) \mapsto g \circ f$, sodass $\circ$ assoziativ ist.
- Jede Menge $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, X)$ enthält eine Identität id_X, sodass
$$f \circ \mathrm{id}_X = f \qquad \mathrm{id}_X \circ g = g.$$
für $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ und $g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ beliebig.

Notationsmissbrauch*. Wir schreiben $X \in \mathcal{C}$ für $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

Notation*. Aus naheliegenden Gründen notieren wir $f : X \to Y$ für $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$

Bemerkung* (Assoziativität und kommutative Diagramme)**.** Mit Assoziativität meinen wir das folgende: Sind $X, Y, Z, W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ und $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, $g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, Z), h \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Z, W)$, so ist $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. Wir veranschaulichen dies in einem **kommutativen Diagramm** (das ist typische für die Kategorientheorie, wir malen Objekte als Punkte und Elemente von $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ als Pfeile von $X \to Y$, so sollte man sich das vorstellen):

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g\circ f"] \arrow[rrr, bend left=60, "h\circ(g\circ f)"] \arrow[rrr, bend right=60, "(h\circ g)\circ f"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "h\circ g"'] & Z \arrow[r, "h"] & W
\end{tikzcd} .$$

Wir fordern also, dass beide Möglichkeiten, sich eine Abbildung $X \to Z$ zusammenzubauen, die gleichen sind.

Bemerkung.
- Ist $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ eine Menge, so heißt $\mathcal{C}$ klein.
- Da $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ Mengen sind, heißt $\mathcal{C}$ in der Literatur manchmal lokal klein, manche Autoren lassen für $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ auch Klassen zu, wir jedoch nicht.

Beispiel.
- **Set** ist die Kategorie der Mengen und all ihrer Abbildungen dazwischen.
- **Top** X ist die Kategorie der topologischen Räume und ihren stetigen Abbildungen.
- **Grp** ist die Kategorie der Gruppen und ihren Gruppenhomomorphismen
- $\mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}$ ist die Kategorie der $\mathbb{R}$-Vektorräume und den linearen Abbildungen dazwischen.
- $\mathbf{Top}_{\star}$ ist die Kategorie der punktierten topologischen Räume. Wir setzen $\mathrm{Ob}(\mathbf{Top}_{\star})$ als Klasse aller Topologischen Räume, schränken uns aber bei den Morphismen ein, d.h.

$$\mathrm{Mor}_{\mathbf{Top}_{\star}}((X, x_0), (Y, y_0)) := \{f \colon X \to Y \text{ stetig} \mid f(x_0) = y_0\} .$$

Bemerkung†. Die Kategorientheorie bildet zunächst eine Sprache, mit der wir sehr vieles präziser ausdrücken können. Wir sollten auch so über sie nachdenken, d.h. die Kategorientheorie hilft uns, Dinge aus vielen verschiedenen Teildisziplinen (siehe Liste der Beispiele oben) elegant und knapp zusammenzufassen und Beweise, die gleich geführt werden, zu vereinheitlichen.

Definition 3.3 (Unterkategorie).
- $\mathcal{U}$ ist eine **Unterkategorie** von $\mathcal{C}$, falls $\mathcal{U}$ eine Kategorie ist mit $\mathrm{Ob}(\mathcal{U}) \subseteq \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, und $\forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{U})$ ist
$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{U}}(X,Y) \subseteq \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Y).$$
- Ist zudem für $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{U})$ obige Inklusion sogar eine Gleichheit, d.h. $\mathrm{Mor}_{\mathcal{U}}(X,Y) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Y)$, so heißt $\mathcal{U}$ **volle** Unterkategorie.

Beispiel.
- **Fin** $\subseteq$ **Set** ist die Unterkategorie der endlichen Mengen (jede endliche Menge ist eine Menge)
- **CHaus** $\subseteq$ **Top** ist die Unterkategorie der kompakten Hausdorffräume (jeder kompakte Hausdorff-Raum ist ein topologischer Raum)
- **Ab** $\subseteq$ **Grp** ist die Unterkategorie der abelschen Gruppen (jede abelsche Gruppe ist eine Gruppe)

Alle 3 Beispiele sind volle Unterkategorien.

Definition 3.4 (Isomorphismus). $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ ist ein **Isomorphismus**, wenn es ein $g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Y,X)$ gibt mit $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ und $g \circ f = \mathrm{id}_X$ (d.h. eine Umkehrabbildung).

Ist $f\colon X \to Y$ ein Isomorphismus, d.h. es gibt ein Inverses g, so ist g bereits eindeutig. Seien hierzu g, g' beides Inverse zu f, dann ergibt sich
$$g = g \circ \mathrm{id}_Y = g \circ (f \circ g') = (g \circ f) \circ g' = \mathrm{id}_X \circ g' = g'.$$

Beispiel. $f \in$ **Top** ist ein Isomorphismus, wenn f ein Homöomorphismus ist.

Definition 3.5 (Funktor). Seien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien. Ein (kovarianter) **Funktor** $\mathcal{F}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ besteht aus:
- einer Abbildung $\mathcal{F}\colon \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$.
- Abbildungen $\mathcal{F}\colon \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y))$ für alle Objekte $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

sodass
- $\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g)$
- $\mathcal{F}(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(X)}$

Definition 3.6 (Isomorphismus von Kategorien). Ein Funktor $\mathcal{F}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ist ein **Isomorphismus**, falls es einen Funktor $\mathcal{G}\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ gibt, sodass $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ und $\mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ die Identitäten sind.

Mündliche Anmerkung. Ein Funktor $\mathcal{F}$ ist hierbei die Identität ('der Identitätsfunktor'), wenn er sowohl Objekte als auch Abbildungen auf sich selbst schickt.

Mündliche Anmerkung†. Im Gegensatz zu den Begrifflichkeiten ist ein Isomorphismus von Kategorien nicht die gängigste Version von 'Gleichheit'. Nur in Seltenen Fällen sind Kategorien tatsächlich isomorph (nach ebiger Definition), allerdings oft *äquivalent*. Mehr dazu später.

Beispiel.
- Es gibt einen Funktor **Top** → **Set**, der jeden topologischen Raum auf seine Trägermenge sendet, und (stetige) Abbildungen zwischen den topologischen Räumen auf die zugehörigen Abbildungen zwischen den Trägermengen. Dieser Funktor heißt oft **vergesslicher Funktor**, auch wenn das kein Fachbegriff ist, sondern eher ein gängiges Schema. Wir können im wesentlichen alle möglichen Strukturen vergessen.
- **Ab** → **Grp** als Inklusion ist ein Funktor, da jede abelsche Gruppe auch Gruppe ist, und Gruppenhomomorphismen von abelschen Gruppen natürlich auch Gruppenhomomorphismen.
- Betrachte den Funktor

$$\mathcal{F}: \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{Set} & \longrightarrow & \mathbf{Ab} \\ X & \longmapsto & \mathbb{Z}[X] \\ f : X \to Y & \longmapsto & \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[X] & \longrightarrow & \mathbb{Z}[Y] \\ \sum\limits_{i=1}^{k} n_i x_i & \longmapsto & \sum\limits_{i=1}^{k} n_i f(x_i) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

  Wir senden hierbei eine Menge X auf die **freie abelsche Gruppe** , die von X generiert wird. Dabei ist $\mathbb{Z}[X]$ das (freie) $\mathbb{Z}$-Modul, das als Basis von X erzeugt wird.

B Stichwortverzeichnis

Literatur

[Koe18] Peter Koepke. *Set Theory*. Bonn, 2018. URL: http://www.math.uni-bonn.de/ag/logik/teaching/2018WS/set_theory/current_scriptum.pdf.

[Lei14] Tom Leinster. *Basic category theory*. Cambridge: Cambridge University Press, 2014. ISBN: 978-1107044241. URL: https://arxiv.org/abs/1612.09375.

[Mun18] James Munkres. *Topology (Classic Version), 2nd Edition*. Pearson, 20018. ISBN: 978-0131816299.