Einführung in die Geometrie und Topologie

Dozent
Daniel Kasprowski

Assistentin
Arunima Ray

Mitschrift
Maximilian Kessler

Version
21. Mai 2021 15:58

Zusammenfassung

Bei folgenden Vorlesungsnotizen handelt es sich um (inoffizielle) Mitschriften zur 'Einführung in die Geometrie und Topologie', die im Sommersemester 2021 an der Universität Bonn gehalten wird. Ich garantiere weder für Korrektheit noch Vollständigkeit dieser Notizen, und bin dankbar für jegliche Art von Korrektur, sowohl inhaltlich, als auch Tippfehler. Schreibt hierzu eine Mail, oder nutzt das 'Issues' Feature auf GitHub.

Für Details zur Nummerierung dieses Skript siehe Anhang B. Weitere Informationen zu diesem Skriptum finden sich bei GitHub oder auf der Vorlesungshomepage.

Inhaltsverzeichnis

Übersicht der Vorlesungen

Teil I

Anhang

A Übungsblätter

Das sind die Übungsaufgaben der Vorlesung. Sie sind vollständigkeitshalber hier, um darauf referenzieren zu können.

- Aufgabe 2.1 (2.1)
- 2.2 (2.2)
- 5.3 (5.3)
- Aufgabe 5.3

1. Übungsblatt

Aufgabe 1.1. Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $x \in X$ ein Punkt. Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} d_x \colon X &\to \mathbb{R} \\ y &\mapsto d(x, y) \end{aligned}$$

stetig.

Aufgabe 1.2. Wir betrachten die Menge $\mathbb{N}_{>0}$ mit der euklidischen Metrik d_1, d.h. $d_1(n, m) := |n - m|$, der diskreten Metrik d_2 und der Metrik d_3 gegeben durch $d_3(n, m) := |\frac{1}{n} - \frac{1}{m}|$.

i) Die Metriken d_1, d_2 und d_3 sind paarweise nicht äquivalent.
ii) Die Metriken d_1, d_2 und d_3 induzieren dieselbe Topologie auf $\mathbb{N}_{>0}$.

Aufgabe 1.3. Auf $\mathbb{N}$ betrachten wir die Menge von Teilmengen $\mathcal{O}_{ko-endl}$ für die gilt: $U \in \mathcal{O}_{ko-endl}$ genau dann wenn U leer oder $\mathbb{N} \backslash U$ endlich ist.

i) $\mathcal{O}_{ko-endl}$ ist eine Topologie auf $\mathbb{N}$ (die ko-endliche Topologie).
ii) Es seien $U_1, U_2 \in \mathcal{O}_{ko-endl}$ nicht leer. Dann ist auch $U_1 \cap U_2$ nicht leer.
iii) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann ist jede stetige Abbildung $f \colon (\mathbb{N}, \mathcal{O}_{ko-endl}) \to (X, d)$ konstant.
iv) $(\mathbb{N}, \mathcal{O}_{ko-endl})$ ist nicht metrisierbar.

Aufgabe 1.4. Es sei $Y = \{a, b\}$, mit der Topologie $\mathcal{T} = \{\varnothing, \{a\}, Y\}$. Zudem sei X ein topologischer Raum.

i) Eine Abbildung $f \colon X \to Y$ ist stetig genau dann, wenn $f^{-1}(a) \subseteq X$ offen ist.

ii) Die Zuordnung

$$\begin{aligned}\{\text{stetige Abbildungen } X \to Y\} &\to \{\text{offene Teilmengen in } X\}\\ f &\mapsto f^{-1}(a)\end{aligned}$$

ist bijektiv.

2. Übungsblatt

Aufgabe 2.1. Sei $p\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung. Ein *Schnitt* von p ist eine stetige Abbildung $s\colon Y \to X$ mit $p \circ s = \mathrm{id}_Y$.

i) Besitzt p einen Schnitt, so ist p surjektiv ist und die Topologie auf Y ist die Quotiententopologie bezüglich der Abbildung p.
ii) Gib zwei verschiedene Schnitte für die Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x + y$ an.

Aufgabe 2.2. Es sei X ein topologischer Raum und $\{X_i\}_{i\in I}$ eine Familie von Teilmengen von X mit $X = \bigcup_{i\in I} X_i$. Sei

i) X_i offen für alle $i \in I$ oder
ii) X_i abgeschlossen für alle $i \in I$ und I endlich.

Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Dann sind folgenden Aussagen äquivalent:

a) Die Abbildung f ist stetig.
b) Jede der eingeschränkten Abbildungen $f|_{X_i}\colon X_i \to Y$ mit $i \in I$ ist stetig.

Aufgabe 2.3. Jeder metrisierbare topologische Raum ist normal.

Aufgabe 2.4. Es sei X ein topologischer Raum und $A, B \subseteq X$ kompakte Unterräume (d.h. kompakt als topologische Räume mit der Unterraumtopologie).

i) Die Vereinigung $A \cup B \subseteq X$ ist ein kompakter Unterraum.
ii) Wenn X Hausdorffsch ist, dann ist auch $A \cap B$ kompakt.
iii) Die Teilraumtopologie auf $\mathbb{R}$ als Teilraum der Gerade mit zwei Ursprüngen ist die euklidische Topologie. Also ist das Intervall $[-1, 1]$ als Teilmenge der Geraden mit zwei Ursprüngen kompakt.
iv) Geben Sie ein Beispiel für X, A und B an, sodass A und B kompakt sind, aber $A \cap B$ nicht.

3. Übungsblatt

Aufgabe 3.1. Es sei X ein normaler topologischer Raum und $A \subseteq X$ ein Unterraum.

i) Ist A abgeschlossen, so ist A normal.
ii) Gib ein Beispiel für X und A, so dass A nicht normal ist.
Hinweis: Für diese Teilaufgabe heißt normal nur folgendes: Für

disjunkte abgeschlossene Teilmengen B_1, B_2 gibt es disjunkte offene Umgebungen. D.h. es genügt ein Beispiel in dem X nicht notwendig Hausdorffsch ist. Beispiele mit X Hausdorffsch gibt es auch, sind aber deutlich schwieriger zu finden.

iii) Es sei $f\colon X \to Y$ eine stetige, surjektive und abgeschlossene Abbildung. Dann ist auch Y normal.

Hinweis: Schritte im Beweis von iii), die genau analog sind zu solchen im Beweis von Satz 5.11, müssen nicht neu bewiesen werden. Ein Verweis genügt.

Aufgabe 3.2. i) Es sei X eine Menge und $\mathcal{S}$ eine Menge von Teilmengen von X. Sei

$$\mathcal{T}(\mathcal{S}) := \left\{ \bigcup_{i \in I} \bigcap_{k=1}^{n_i} S_{i,k} \mid S_{i,k} \in \mathcal{S}, n_i \geqslant 0 \right\}.$$

Hinweis: X ist als leerer Schnitt (d.h. $n_i = 0$ für ein $i \in I$) in $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ enthalten.

a) $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ ist eine Topologie auf X.

b) Ist $\mathcal{O}$ eine Topologie auf X mit $S \in \mathcal{O}$ für alle $S \in \mathcal{S}$, so gilt $\mathcal{T}(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{O}$.

ii) Es sei X ein metrischer Raum, $t > 0$. Welche der folgenden Mengen von Teilmengen von X bilden eine Basis der induzierten Topologie auf X?

a) $\mathcal{U}_t := \{U(x, \varepsilon) \mid x \in X, \varepsilon < t\}$.

b) $\mathcal{U}'_t := \{U(x, \varepsilon) \mid x \in X, \varepsilon > t\}$.

c) $\mathcal{U}'' := \{U(x, \frac{1}{n}) \mid x \in X, n \in \mathbb{N}_{>0}\}$.

Aufgabe 3.3. Zeige, dass $\mathcal{S} := \{(-\infty, a) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{(a, \infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$ eine Subbasis der euklidischen Topologie auf $\mathbb{R}$ ist. Benutze diese um nochmal zu zeigen, dass das Einheitsintervall $[0, 1]$ kompakt ist.

Aufgabe 3.4. Für eine Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen topologischen Räumen bezeichne

$$\Gamma(f) = \{\ (x, f(x)) \mid x \in X\} \ \subseteq\ X \times Y$$

den *Graph* von f, versehen mit der Unterraumtopologie der Produkttopologie auf $X \times Y$.

i) Die Abbildung

$$p_X|_{\Gamma(f)}\colon \Gamma(f) \to X\ ; \quad (x, y) \mapsto x$$

ist eine stetige Bijektion.

ii) $p_X|_{\Gamma(f)}$ ist genau dann offen (also ein Homöomorphismus), wenn f stetig ist.

4. Übungsblatt

Aufgabe 4.1. Es sei $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen und $U \subseteq X$ ein Unterraum.

i) Es gilt $f(\overline{U}) \subseteq \overline{f(U)}$.
ii) Sei U dicht in X, Y Hausdorffsch und $g\colon X \to Y$ eine weitere stetige Abbildung mit $g|_U = f|_U$, d.h. $g(u) = f(u)$ für alle $u \in U$. Dann gilt bereits $g = f$.

Aufgabe 4.2 (15 Punkte)**.** Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$C_n := \bigcup_{i=0}^{\frac{3^n-1}{2}} [\tfrac{2i}{3^n}, \tfrac{2i+1}{3^n}] \subseteq \mathbb{R}.$$

Dann ist C_n mit der Teilraumtopologie abgeschlossen. Sei $C := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$. Als Schnitt abgeschlossener Mengen ist $C \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen. Da C auch beschränkt ist, ist C kompakt. C heißt *Cantor Menge*. Weiterhin lässt sich jedes $x \in [0,1]$ in triadischer Darstellung schreiben, d.h. als $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}$ mit $a_i \in \{0,1,2\}$.

i) C besteht gerade aus den Punkten von $[0,1]$ für die eine triadische Darstellung mit $a_i \in \{0,2\}$ existiert.
ii) Für alle Punkte in C ist die triadische Darstellung mit $a_i \in \{0,2\}$ eindeutig.
iii) C ist homöomorph zu $\prod_{i=1}^{\infty}\{0,2\}$.
iv) C ist homöomorph zu $C \times C$.

Aufgabe 4.3 (Ein-Punkt-Kompaktifizierung, (15 Punkte))**.** Wir zeigen in dieser Aufgabe, dass man jeden lokal-kompakten Hausdorff-Raum durch Hinzufügen eines Punktes in einen kompakten Raum einbetten kann.
Es sei X ein topologischer Raum. X heißt *lokal-kompakt*, wenn es für jeden Punkt $x \in X$ und jede Umgebung U von x eine kompakte Umgebung $K \subseteq U$ von x gibt, die in U enthalten ist.

Es sei nun X ein lokal-kompakter Hausdorffraum. Dann definieren wir die *Ein-Punkt-Kompaktifizierung* von X als $X^+ = X \cup \{\infty\}$, und nennen eine Teilmenge $U \subseteq X^+$ offen genau dann, wenn entweder $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge von X ist oder wenn $\infty \in U$ ist und $X^+ \backslash U \subseteq X$ kompakt ist mit der Unterraumtopologie von X.

i) Dies definiert eine Topologie auf X^+, mit der die Inklusion $X \to X^+$ stetig und offen ist.
ii) X^+ ist kompakt und Hausdorffsch.
iii) Für die Menge $\mathbb{N}_{>0}$ der natürlichen Zahlen (ohne 0) mit der diskreten Topologie ist die Ein-Punkt-Kompaktifizierung $\mathbb{N}_{>0}^+$ homöomorph zu $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\} \cup \{0\} \subseteq \mathbb{R}$ ist.
iv) Sei $s\colon Y \to X$ ein Schnitt einer beliebigen stetigen Abbildung $f\colon X \to Y$, dann ist $s(Y)$ abgeschlossen.
v) X ist offen in $\beta(X)$.

5. Übungsblatt

Aufgabe 5.1 (Zusammenhängend $\neq$ Wegzusammenhängend)**.** Es gilt laut Vorlesung, dass jeder wegzusammenhängende topologische Raum auch zusammenhängend ist. In dieser Aufgabe zeigen wir, dass die Umkehrung nicht gilt.

Der Raum S sei definiert als folgender Unterraum des $\mathbb{R}^2$:

$$S = \left\{ \left(x, \sin\frac{1}{x} \right) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \right\} \ \cup \ \{0\} \times [-1, 1].$$

(Mit anderen Worten: S ist der Abschluss, in $\mathbb{R}^2$, des Graphen der Funktion $x \mapsto \sin\frac{1}{x}$ für $x > 0$.)

Zeige:

i) Der Raum S ist zusammenhängend.

ii) Der Raum S ist nicht wegzusammenhängend.

Aufgabe 5.2. Es seien X und Y zusammenhängende Räume. Zeige:

i) Dann ist auch $X \times Y$ zusammenhängend.

ii) Wenn X und Y beide mehr als ein Element besitzen, dann ist auch $X \times Y \setminus \{(x, y)\}$ für ein festes $(x, y) \in X \times Y$ zusammenhängend.

iii) Es gibt keinen topologischen Raum X, sodass $\mathbb{R}$ homöomorph zu $X \times X$ ist.

Aufgabe 5.3. Es sei X ein topologischer Raum. Eine Folge $(x_i)_{i\geqslant 1}$, $x_i \in X$ *konvergiert gegen* $x \in X$, wenn für jede Umgebung U von x alle bis auf endlich viele x_i in U enthalten sind. Dann heißt x *Limes* oder *Grenzwert* der Folge.

i) Sei X Haussdorffsch. Dann ist x eindeutig.

ii) Gib ein Beispiel einer Folge in einem topologischen Raum mit zwei unterschiedlichen Grenzwerte.

iii) Sei $f : X \to Y$, and $(x_i)_{i\geqslant 1}$ eine konvergente Folge in X. Beweise oder widerlege: $(f(x_i))_{i\geqslant 1}$ konvergiert gegen $f(y)$.

iv) Sei $(s_i)_{i\geqslant 1}$ eine Folge stetiger Funktionen $s_i : X \to Y$ und Y ein metrischer Raum. $(s_i)_{i\geqslant 1}$ konvergiere *gleichmäßig* gegen eine Funktion $s : X \to Y$, d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine $N \in \mathbb{N}$ so dass für alle $x \in X$, $n \geqslant \mathbb{N}$ gilt $d(s_i(x), s(x)) < \varepsilon$. Zeige, dass s stetig ist.

Aufgabe 5.4. Es sei X ein topologischer Raum. Wir sagen, dass X *folgenkompakt* ist, wenn jede Folge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in X eine konvergente Teilfolge hat.

i) Zeige, dass ein kompakter metrischer Raum X folgenkompakt ist.

ii) Beweise das Lebesgue-Lemma:
Es sei X ein folgenkompakter metrischer Raum und $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ sodass für jede Teilmenge A mit Durchmesser $D < \varepsilon$ ein $i \in I$ existiert, sodass $A \subseteq U_i$ gilt.

(Der Durchmesser eines metrischen Raumes A ist $\sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\}$.)

iii) Zeige, dass ein folgenkompakter metrischer Raum X kompakt ist.

B Erklärung der Umgebungen

Nummerierung

Die Nummerierung in dieser Mitschrift folgt derjenigen der Vorlesung. Das hat den Vorteil, dass die Nummern in dieser Mitschrift auch zum Referenzieren genutzt werden können (z.B. bei Übungsaufgaben).

Andererseits bedeutet dies, dass es einige Sätze (o.Ä.) gibt, die nicht nummeriert sind.

Abweichende Handhabung von Umgebungen

An manchen Stellen wurde die Umgebung einer Aussage verändert, das ist dann mit einem † markiert:

> **Lemma**† (Einfaches Lemma)**.** Diese Aussage wurde in der Vorlesung erwähnt, allerdings nicht als Lemma, sondern nur im Fließtext oder einem Nebensatz. Da ich der Meinung war, dass sie einen eigenen Platz verdient, ist sie nun ein Lemma.

Der Inhalt solcher Aussagen ist also Teil der Vorlesung, trotzdem sind solche Stellen sicherlich fehleranfälliger, da ich teilweise umformuliere.

Kommentare

Diese Mitschrift enthält Kommentare, die von mir selbst hinzugefügt wurden, diese sind dann mit einem * gekennzeichnet:

> **Bemerkung*.** An dieser Stelle hätten wir noch überprüfen müssen, dass X. Das ist klar, weil Y.

Wenn ihr sie lesenswert findet, so tut das, wenn nicht, ignoriert sie einfach. Insbesondere kann es auch hier vermehrt zu Fehlern kommen, seid besonders vorsichtig!

Es gibt (selten) auch Sätze, Beweise, etc, die mit einem * versehen sind, das hat dieselbe Bedeutung. Das passiert z.B. wenn in der Vorlesung auf einen Satz verwiesen wird, der nicht behandelt wird, den ich aber an dieser Stelle eingefügt habe. Ihr könnt sie ebenfalls ignorieren. Diese Mitschrift enthältmündliche Kommentare, d.h. Kommentare, die in der Vorlesung nicht schriftlich festgehalten, aber gesagt wurden. Ich versuche, relevante davon ebenfalls als

> **Mündliche Anmerkung.** festzuhalten.

Manchmal sind diese auch mit einem † markiert, wenn ich das Gefühl hatte, arg abzuschweifen.

Dass ich mündliche Kommentare so markiere, ist neu, insbesondere ist das am Anfang des Skript wohl noch nicht so.

D Literaturverzeichnis