

# Einführung in die Geometrie und Topologie

Dozent  
DANIEL KASPROWSKI

Assistentin  
ARUNIMA RAY

Mitschrift  
MAXIMILIAN KESSLER

Version  
7. Juni 2021 18:39

## **Zusammenfassung**

Bei folgenden Vorlesungsnotizen handelt es sich um (inoffizielle) Mitschriften zur 'Einführung in die Geometrie und Topologie', die im Sommersemester 2021 an der Universität Bonn gehalten wird. Ich garantiere weder für Korrektheit noch Vollständigkeit dieser Notizen, und bin dankbar für jegliche Art von Korrektur, sowohl inhaltlich, als auch Tippfehler. Schreibt hierzu eine [Mail](#), oder nutzt das 'Issues' Feature auf [GitHub](#).

Für Details zur Nummerierung dieses Skript siehe [Anhang B](#). Weitere Informationen zu diesem Skriptum finden sich bei [GitHub](#) oder auf der [Vorlesungshomepage](#).

# Inhaltsverzeichnis

Übersicht der Vorlesungen	5
0 Motivation und Überblick	6
<b>I Mengentheoretische Topologie</b>	<b>7</b>
1 Metrische Räume	7
2 Topologische Räume	9
3 Quotientenräume	15
4 Trennungsaxiome	20
5 Kompaktheit	24
6 Basen und Subbasen	34
7 Produkte	37
8 Vereinigungen	53
9 Zusammenhang, Wegzusammenhang	64
10 Lemma von Urysohn	70
11 Der Erweiterungssatz von Tietze	73
12 Der Metrisierungssatz von Urysohn	77
<b>II Algebraische Topologie</b>	<b>80</b>
Motivation	80
<b>13 Kategorien</b>	<b>81</b>
13.1 Einschub: Mengentheorie	81
13.2 Kategorien	82
13.3 Limiten und Kolimiten	90
<b>III Anhang</b>	<b>96</b>
<b>A Übungsblätter</b>	<b>96</b>
1. Übungsblatt	96
2. Übungsblatt	96
3. Übungsblatt	97
4. Übungsblatt	98
5. Übungsblatt	99
6. Übungsblatt	101
<b>B Erklärung der Umgebungen</b>	<b>103</b>

---

<b>C Stichwortverzeichnis</b>	<b>104</b>
<b>D Literaturverzeichnis</b>	<b>106</b>

# Übersicht der Vorlesungen

<b>Vorlesung 1 (Di 13 Apr 2021 12:16)</b>	<b>6</b>
Metrische Räume. Umgebungen, offene Mengen, Stetigkeit. Topologische Räume. Metrisierbarkeit.	
<b>Vorlesung 2 (Do 15 Apr 2021 10:14)</b>	<b>11</b>
Äquivalente Metriken. Abgeschlossene Mengen. Teilraumtopologie. Homöomorphismen. Quotientenräume und -topologie.	
<b>Vorlesung 3 (Di 20 Apr 2021 12:16)</b>	<b>17</b>
Torus, Kleinsche Flasche, Reeller Projektiver Raum. Trennungsaxiome: Hausdorff, normale und reguläre Räume. Kompaktheit.	
<b>Vorlesung 4 (Do 22 Apr 2021 10:15)</b>	<b>25</b>
Eigenschaften kompakter Hausdorffräume. Gerade mit zwei Ursprüngen. Heine-Borel. Homöomorphismen.	
<b>Vorlesung 5 (Di 27 Apr 2021 12:16)</b>	<b>32</b>
Weiteres zum reellen projektiven Raum und zu kompakten Hausdorffräumen. Basen, Subbasen. Erzeugte Topologie. Satz von Alexander.	
<b>Vorlesung 6 (Do 29 Apr 2021 10:01)</b>	<b>37</b>
Endliche Produkte. Projektionen auf Komponenten. Universelle Eigenschaft des Produkts. Produkte von kompakten und von Hausdorff-Räumen. Diagonaleigenschaft. Unendliche Produkte.	
<b>Vorlesung 7 (Di 04 Mai 2021 12:12)</b>	<b>45</b>
Universelle Eigenschaft unendlicher Produkte. Satz von Tychonoff. Abschluss, Dichtheit. Einbettungen. Kompaktifizierung. Vollständige Regularität. Universelle Eigenschaft der Stone-Čech-Kompaktifizierung. Fortsetzung stetiger Funktionen.	
<b>Vorlesung 8 (Do 06 Mai 2021 10:15)</b>	<b>53</b>
Disjunkte Vereinigungen. Koproducte. Disjunkte Vereinigungen über einem Basisraum. Wedge-Produkte. Rekonstruktion eines Raumes als Disjunkte Vereinigung über dem Schnitt zweier Teilräume.	
<b>Vorlesung 9 (Di 11 Mai 2021 12:16)</b>	<b>64</b>
Zusammenhang, Wegzusammenhang. Bilder (weg-) zusammenhängender Räume. Lemma von Urysohn.	
<b>Vorlesung 10 (Di 18 Mai 2021 12:20)</b>	<b>71</b>
Beweis des Lemmas von Urysohn. Urysohn für beliebige Intervalle. Satz von Tietze. 'Quetschen' von stetigen Funktionen auf normalen Räumen. Beweis des Satz von Tietze. Metrisierungssatz von Urysohn.	
<b>Vorlesung 11 (Do 20 Mai 2021 10:07)</b>	<b>77</b>
Metrisierbarkeit des Hilbertraums. Beweis des Metrisierungssatzes von Urysohn. Motivation für die Einführung von Algebraischer Topologie sowie Kategorientheorie. Mengen und Klassen. Anfänge der Kategorientheorie: Kategorien, Unterkategorien, Isomorphismen, Funktoren.	

---

**Vorlesung 12 (Di 01 Jun 2021 12:15)****85**

Kontravariante Funktoren. Dualkategorie. Dualraum als Funktor. Natürliche Transformationen und natürliche Äquivalenz von Kategorien. Doppelter Dualfunktor als natürliche Transformation. Abelsonierung von Gruppen. Diagramme. Initial- und Terminalobjekte. Diagramme. Kegel, Kegelkategorie. Limiten und Kolimiten: Produkt, Koproduct, Faserprodukt, Pushout.

**Vorlesung 13 (Mo 07 Jun 2021 18:28)****95**

- Organisatorisches.**
- Die Vorlesung wird aufgezeichnet.
  - Wir duzen uns.
  - Für die Übungen muss man sich auf eCampus anmelden, ob Do, 20:00 Uhr (Do 15 Apr 2021 20:00 Uhr)
  - Die Übungsblätter werden Donnerstag zur Verfügung gestellt und werden nach 10 Tagen am Montag, 10 Uhr abgegeben.
  - Es wird eine Fragestunde um Donnerstag, 16 Uhr geben.
  - Es wird kein Skript geben, allerdings werden die geschriebenen Notizen auf eCampus zur Verfügung gestellt.
  - Die Vorlesung orientiert sich an der vom letzten Jahr.
  - Für Literatur sind empfohlen: [Val], [Hat02] sowie [Bre93] (auch auf der Vorlesungshomepage zu finden).

## 0 Motivation und Überblick

In der Topologie studieren wir topologische Räume. Diese verallgemeinern metrische Räume. Wir wollen zwei metrische Räume  $X, Y$  als 'gleich' ansehen, wenn es stetige, zueinander inverse Abbildungen  $X \rightarrow Y, Y \rightarrow X$  gibt.

**Beispiel.** Betrachte ein Quadrat und einen Kreis, wir können sie durch Streckung aufeinander abbilden. Gleiches gilt für eine Tasse und einen Donut.



Abbildung 1: Beispiele 'gleicher' metrischer Räume (homöomorph)

**Idee.** Räume sind gewissermaßen aus 'Knete'.

**Ziel.** Wann sind zwei Räume gleich?

Dazu werden wir algebraische Invarianten verwenden.

**Beispiel.**  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{R}^m$  sind nicht 'gleich' für  $n \neq m$ .

Der Aufbau ist wie folgt:

1. Teil Grundlagen
2. Teil erste Invarianten: Fundamentalgruppe (dazu Überlagerungen)

# Teil I

## Mengentheoretische Topologie

### 1 Metrische Räume

**Definition 1.1** (Metrik). Eine **Metrik** auf einer Menge  $X$  ist eine Funktion  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  mit folgenden Eigenschaften:

- (i)  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- (ii)  $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$
- (iii) (Dreiecksungleichung)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

Ein **Metrischer Raum** ist ein Paar  $(X, d)$  aus einer Menge  $X$  und einer Metrik  $d$  auf  $X$ .

**Definition 1.2** (Stetigkeit). Seien  $(X, d)$  und  $(X', d')$  zwei metrische Räume. Dann ist eine Funktion  $f : X \rightarrow Y$  **stetig in  $x \in X$** , falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x' : d(x, x') < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

Eine Funktion  $f$  heißt **stetig**, wenn sie in jedem Punkt  $x \in X$  stetig



Abbildung 2: Definition von Stetigkeit in metrischen Räumen

**Beispiel.** • Sei  $V$  ein reeller Vektorraum mit Norm  $\|\cdot\|$ . Dann definiert

$$d(v, w) := \|v - w\|.$$

eine Metrik auf  $V$ . Insbesondere ist  $\mathbb{R}^n$  mit euklidischer Norm

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

dadurch ein metrischer Raum.

- Ist  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $Y \subseteq X$  eine Teilmenge, dann ist  $(Y, d|_{Y \times Y})$  ein metrischer Raum.
- Sei  $X$  eine Menge. Dann ist

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}.$$

eine Metrik auf  $X$ , genannt die **diskrete Metrik**.

**Notation.** Sei  $X$  ein metrischer Raum. Für  $x \in X$  und  $\varepsilon > 0$  setzen wir

$$U(x, \varepsilon) := \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}.$$

und nennen dies den **offenen  $\varepsilon$ -Ball um  $x$**

**Beobachte.** Sei  $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  eine Funktion,  $x \in X$  sowie  $\varepsilon, \delta > 0$ . Dann sind äquivalent:

- 1)  $\forall x' \in X$  mit  $d_X(x', x) < \delta$  gilt  $d_Y(f(x'), f(x)) < \varepsilon$
- 2) Es ist  $f(U(x, \delta)) \subseteq U(f(x), \varepsilon)$

**Definition 1.3** (Umgebung). Sei  $X$  ein metrischer Raum,  $U \subseteq X$  und  $x \in X$ . Dann heißt  $U$  **Umgebung von  $x$** , falls ein  $\varepsilon > 0$  existiert, sodass  $U(x, \varepsilon) \subseteq U$ .

**Satz 1.4** (Urbilder von Umgebungen). Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung zwischen metrischen Räumen und sei  $x \in X$ . Dann ist  $f$  stetig in  $x$  genau dann, wenn für alle Umgebungen  $V$  um  $f(x)$  in  $Y$  das Urbild  $f^{-1}(V)$  eine Umgebung von  $x$  ist.

*Beweis.* '⇒' Sei  $V$  eine Umgebung von  $f(x)$ . Dann  $\exists \varepsilon > 0$  mit  $U(f(x), \varepsilon) \subseteq V$ . Da  $f$  stetig ist,  $\exists \delta > 0$ , sodass  $f(U(x, \delta)) \subseteq U(f(x), \varepsilon) \subseteq V$ . Also ist  $U(x, \delta) \subseteq f^{-1}(V)$  und somit ist  $f^{-1}(V)$  eine Umgebung von  $x$ .

'⇐'. Sei  $\varepsilon > 0$ . Dann ist  $U(f(x), \varepsilon)$  eine Umgebung von  $f(x)$ . Also ist  $f^{-1}(U(f(x), \varepsilon))$  eine Umgebung von  $x$ , also  $\exists \delta > 0$  mit  $U(x, \delta) \subseteq f^{-1}(U(f(x), \varepsilon))$ . Also wie gewünscht  $f(U(x, \delta)) \subseteq U(f(x), \varepsilon)$ .  $\square$

**Definition 1.5** (Offene Mengen). Sei  $X$  ein metrischer Raum. Eine Teilmenge  $U \subseteq X$  heißt **offen**, falls sie Umgebung all ihrer Punkte ist, d.h.  $\forall x \in U \exists \varepsilon > 0$  mit  $U(x, \varepsilon) \subseteq U$ .

**Bemerkung.**  $U(x, \varepsilon)$  ist offen.

*Beweis.* Für alle  $y \in U(x, \varepsilon)$  ist

$$U(y, \underbrace{\varepsilon - d(x, y)}_{>0}) \subseteq U(x, \varepsilon).$$

nach der Dreiecksungleichung.  $\square$

**Satz 1.6** (Urbilder offener Mengen sind offen). Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  zwischen metrischen Räumen ist stetig genau dann, wenn  $\forall U \subseteq Y$  offen auch das Urbild  $f^{-1}(U)$  offen in  $X$  ist.

*Beweis.* '⇒' Sei  $U \subseteq Y$  eine offene Teilmenge und  $x \in f^{-1}(U)$  beliebig. Dann ist  $f(x) \in U$  und somit ist  $U$  eine Umgebung von  $f(x)$ . Da  $f$  stetig



ist, ist  $f^{-1}(U)$  eine Umgebung von  $x$  nach **Satz 1.4**. Also ist  $f^{-1}(U)$  offen, da  $x$  beliebig war.

' $\Leftarrow$ ' Sei  $x \in X$ ,  $V$  eine Umgebung von  $f(x)$ . Dann  $\exists \varepsilon > 0$  mit  $U(f(x), \varepsilon) \subseteq V$ . Nach Annahme ist  $f^{-1}(U(f(x), \varepsilon))$  offen. Also gibt es ein  $\delta > 0$  mit  $U(x, \delta) \subseteq f^{-1}(U(f(x), \varepsilon)) \subseteq f^{-1}(V)$ . Also ist  $f^{-1}(V)$  eine Umgebung von  $x$ .

Damit ist  $f$  stetig nach **Satz 1.4**  $\square$

**Satz 1.7** (Offene Mengen in metrischen Räumen). Sei  $X$  ein metrischer Raum. Dann gilt:

- 1) Die leere Menge  $\emptyset$  und  $X$  sind offen
- 2)  $\forall U_1, \dots, U_n \subseteq X$  offen ist auch  $\bigcap_{i=1}^n U_i$  offen.
- 3) Für jede Familie  $\{U_i\}_{i \in I}$  von offenen Mengen ist auch  $\bigcup_{i \in I} U_i$  offen.

**Warnung.** Eigenschaft 2) gilt nicht für unendliche Schnitte. Es ist  $(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \subseteq \mathbb{R}$  offen für alle  $n \in \mathbb{N}_{>0}$ , allerdings ist dann

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}_{>0}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}.$$

nicht offen.

*Beweis von Satz 1.7.* 1) klar

- 2) Sei  $x \in \bigcap_{i=1}^n U_i$ .  $\forall i = 1, \dots, n$  gibt es nun  $\varepsilon_i$  mit  $U(x, \varepsilon_i) \subseteq U_i$ . Setze  $\varepsilon := \min \{\varepsilon_i \mid i = 1, \dots, n\}$ . Dann ist

$$U(x, \varepsilon) \subseteq U(x, \varepsilon_i) \subseteq U_i.$$

für alle  $i = 1, \dots, n$  und somit wie gewünscht  $U(x, \varepsilon) \subseteq \bigcap_{i=1}^n U_i$

- 3) Sei  $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$  beliebig. Dann  $\exists i \in I$  mit  $x \in U_i$ . Da  $U_i$  offen ist,  $\exists \varepsilon > 0$  mit  $U(x, \varepsilon) \subseteq U_i$ . Also ist  $U(x, \varepsilon) \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$  und somit ist die Vereinigung offen.  $\square$

## 2 Topologische Räume

**Definition 2.1** (Topologie). Eine **Topologie** auf einer Menge  $X$  ist eine Menge  $\mathcal{O}$  von Teilmengen von  $X$ , so dass gilt:

- 1)  $\emptyset, X \in \mathcal{O}$
- 2) Für  $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{O}$  ist auch  $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{O}$
- 3) Für jede Familie  $\{U_i\}_{i \in I}$  mit  $U_i \in \mathcal{O}$  ist auch  $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{O}$

Die Mengen in  $\mathcal{O}$  heißen **offene Mengen**.

Ein **topologischer Raum** ist ein Paar  $(X, \mathcal{O})$  aus einer Menge  $X$  und einer Topologie  $\mathcal{O}$  auf  $X$ .

**Definition 2.2** (Stetigkeit). Seien  $X, Y$  topologische Räume. Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  heißt **stetig**, falls für jede offene Teilmenge  $U \subseteq Y$  das Urbild  $f^{-1}(U) \subseteq X$  offen ist.

**Beispiel.** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Dann ist

$$(X, \mathcal{O}) := \{U \subseteq X \mid U \text{ ist offen bezüglich } d\}.$$

ein topologischer Raum.  $\mathcal{O}$  ist die von der Metrik  $d$  **induzierte Topologie**.

**Definition 2.3** (Metrisierbarkeit). Ein topologischer Raum heißt **metrisierbar**, falls die Topologie von einer Metrik induziert ist.

**Beispiel.** Sei  $X$  eine Menge. Die **diskrete Topologie** auf  $X$  ist die Menge aller Teilmengen, d.h.  $\mathcal{O} := \mathcal{P}(X)$ . Diese ist von der diskreten Metrik

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}.$$

induziert.

*Beweis.* Ist  $x \in X$ , dann ist

$$\{x\} = U\left(x, \frac{1}{2}\right).$$

offen. Ist  $U \subseteq X$  eine Teilmenge, dann ist

$$U = \bigcup_{x \in U} \{x\}.$$

offen als Vereinigung offener Mengen.  $\square$

**Satz 2.4.** Sei  $X$  ein endlicher (endlich als Menge), metrisierbarer topologischer Raum. Dann ist  $X$  diskret (d.h.  $X$  trägt die diskrete Topologie).

*Beweis.* Es reicht zu zeigen, dass  $\{x\}$  offen ist  $\forall x \in X$ . Sei  $d$  eine Metrik, die die Topologie induziert, dann wähle

$$\varepsilon := \min \{d(x, y) \mid x, y \in X, x \neq y\} > 0.$$

Beachte, dass dies existiert, da  $d(x, y) > 0$  für  $x \neq y$  und die Menge nach Voraussetzung endlich ist. Nun ist:

$$\{x\} = U(x, \varepsilon).$$

offen und wir sind fertig.  $\square$

**Beispiel.** 1) Wähle  $X = \{a, b\}$  und setze

$$\mathcal{O} = \{\emptyset, X, \{a\}\}.$$

Dies ist ein topologischer Raum (leicht prüfen), er ist jedoch nicht metrisierbar, da endlich und nicht diskret. Dieser Raum heißt **Sierpinski-Raum**.

2) Sei  $X$  eine Menge. Die **indiskrete Topologie** auf  $X$  enthält

nur  $\emptyset, X$ . Man prüft leicht, dass dies eine Topologie ist.

- Hat  $X$  mindestens 2 Elemente, so ist  $X$  nicht metrisierbar.

*Beweis.* Nimm  $|X| > 2$  an und wähle  $x, y \in X$  mit  $x \neq y$ . Sei  $d$  eine Metrik, die die Topologie auf  $X$  induziert und setze  $\varepsilon := d(x, y)$ . Dann ist

$$x \in U(x, \varepsilon) \quad y \notin U(x, \varepsilon).$$

also ist  $U(x, \varepsilon) \neq \emptyset, X$ , Widerspruch.  $\square$

- Sei  $Y$  ein topologischer Raum. Dann ist  $f : Y \rightarrow X$  stetig für beliebige Abbildungen  $f$ .

*Beweis.* Es sind  $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$  sowie  $f^{-1}(X) = Y$  beide offen.  $\square$

**Bemerkung.** Ist  $Y$  diskret und  $X$  beliebig, so ist jede Abbildung  $f : Y \rightarrow X$  stetig.

Vorlesung 2  
Do 15 Apr 2021 10:14

**Definition 2.5** (Äquivalente Metriken). Zwei Metriken  $d_1, d_2$  auf  $X$  heißen **äquivalent**, falls Konstanten  $c_1, c_2$  existieren, sodass

$$\forall x, y \in X: \quad c_1 \cdot d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq c_2 \cdot d_1(x, y).$$

**Satz 2.6.** Äquivalenz (von Metriken) ist eine Äquivalenzrelation.

*Beweis.* **Reflexivität:** Klar mit  $c_1 = c_2 = 1$

**Symmetrie:** Seien  $c_1, c_2$  wie in der Definition. Dann gilt mit entsprechender Division, dass

$$\forall x, y \in X: \quad \frac{1}{c_2} \cdot d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq \frac{1}{c_1} d_2(x, y).$$

**Transitivität:** . Seien  $c_1, c_2, c'_1, c'_2$  gewählt, sodass  $\forall x \forall y: c_1 d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq c_2 d_1(x, y)$  sowie  $c'_1 d_2(x, y) \leq d_3(x, y) \leq c'_2 d_2(x, y)$  (Also  $d_1 \sim d_2$  und  $d_2 \sim d_3$ ). Dann ist auch

$$\forall x \forall y: \quad c_1 c'_1 d_1(x, y) \leq c'_1 d_2(x, y) \leq d_3(x, y) \leq c'_2 d_2(x, y) \leq c_2 c'_2 d_1(x, y).$$

$\square$

**Satz 2.7.** Äquivalente Metriken induzieren dieselbe Topologie.

*Beweis.* Wegen der Symmetrie genügt es zu zeigen, dass Mengen, die offen bezüglich  $d_2$  sind, auch offen bezüglich  $d_1$  sind.

Sei nun  $U \subseteq X$  offen bezüglich  $d_2$  und  $x \in U$ . Dann existiert ein  $\varepsilon > 0$  mit  $U_{d_2}(x, \varepsilon) \subseteq U$ . Ist nun  $d_1(x, y) < \frac{\varepsilon}{c_2}$ , dann ist

$$d_2(x, y) \leq c_2 d_1(x, y) < \varepsilon.$$

und damit ist

$$U_{d_1}\left(x, \frac{\varepsilon}{c_2}\right) \subseteq U_{d_2}(x, \varepsilon) \subseteq U.$$

und somit ist  $U$  auch offen bezüglich  $d_1$ .  $\square$

**Bemerkung.** Es gibt auch nicht-äquivalente Metriken, die die gleiche Topologie induzieren. Siehe hierzu [Aufgabe 1.2](#).

**Bemerkung.** Je zwei Normen auf  $\mathbb{R}^n$  sind äquivalent, induzieren also dieselbe Topologie, das beweisen wir jedoch hier nicht.

**Definition 2.8** (Umgebung). Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $U \subseteq X$  sowie  $x \in X$ . Dann heißt  $U$  **Umgebung von  $x$** , falls es eine offene Teilmenge  $O \subseteq X$  gibt, mit  $x \in O \subseteq U$ .

**Bemerkung.** Für metrische Räume stimmt dies mit der vorherigen Definition überein.

**Satz 2.9.** Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $U \subseteq X$ . Dann sind äquivalent:

- 1)  $U$  ist offen.
- 2)  $U$  ist Umgebung aller ihrer Punkte.

*Beweis.* '1)  $\Rightarrow$  2)' ist klar, wähle einfach  $O = U$ .

'2)  $\Rightarrow$  1)'. Für jedes  $x \in U$  existiert also  $U_x$  mit  $x \in U_x \subseteq U$ . Dann ist aber

$$U = \bigcup_{x \in U} U_x.$$

offen als Vereinigung offener Mengen.  $\square$

**Definition** (Abgeschlossene Mengen). Sei  $X$  ein topologischer Raum. Eine Teilmenge  $A \subseteq X$  heißt **abgeschlossen**, falls ihr Komplement  $X \setminus A = \{x \in X \mid x \notin A\}$  offen ist.

**Bemerkung.** Für metrische Räume stimmt das mit dem Begriff aus der Analysis überein.

**Satz 2.10** (Dualität). Ein topologischer Raum lässt sich auch über seine abgeschlossenen Mengen charakterisieren. Diese müssen erfüllen:

- i)  $\emptyset, X$  sind abgeschlossen
- ii) Für  $A_1, \dots, A_n$  abgeschlossen ist auch  $A_1 \cup \dots \cup A_n$  abgeschlossen.
- iii) Für eine Familie  $\{A_i\}_{i \in I}$  abgeschlossener Mengen ist auch

$$\bigcap_{i \in I} A_i.$$

abgeschlossen.

Wenn wir von einer Familie von Mengen  $\{A_i\}_{i \in I}$  sprechen, meinen wir, dass  $I$  eine Menge ist, und für jedes  $i \in I$  ist  $A_i$  eine Teilmenge von  $X$ . Formal können wir dies als eine Funktion  $I \rightarrow \mathcal{P}(X)$  darstellen.

*Beweis von Satz 2.10.* i)  $X \setminus \emptyset = X$ ,  $X \setminus X = \emptyset$  sind abgeschlossen.

ii)

$$\underbrace{\bigcap_{i=1}^n (X \setminus A_i)}_{\text{offen}} = X \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i \Rightarrow \bigcup_{i=1}^n A_i \text{ abgeschlossen.}$$

iii)

$$\bigcup_{i \in I} \underbrace{(X \setminus A_i)}_{\text{offen}} = X \setminus \underbrace{\bigcap_{i \in I} A_i}_{\text{offen}} \Rightarrow \bigcap_{i \in I} A_i \text{ abgeschlossen.}$$

□

**Satz 2.11** (Stetigkeit mit abgeschlossenen Mengen). Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Funktion zwischen topologischen Räumen. Dann sind äquivalent:

- 1)  $f$  ist stetig
- 2)  $\forall U \subseteq Y$  offen ist  $f^{-1}(U) \subseteq X$  offen
- 3)  $\forall A \subseteq Y$  abgeschlossen ist  $f^{-1}(A)$  abgeschlossen

*Beweis.*

$$\begin{aligned} f \text{ stetig} &\Leftrightarrow \forall U \subseteq Y \text{ offen ist } f^{-1}(U) \text{ offen} \\ &\Leftrightarrow \forall A \subseteq Y \text{ abgeschlossen ist } f^{-1}(Y \setminus A) \text{ offen} \\ &\Leftrightarrow \forall A \subseteq Y \text{ abgeschlossen ist } X \setminus f^{-1}(A) \text{ offen} \\ &\Leftrightarrow \forall A \subseteq Y \text{ abgeschlossen ist } f^{-1}(A) \text{ abgeschlossen} \end{aligned}$$

□

Wir erinnern uns: Ist  $(X, d)$  ein metrischer Raum, so auch  $(Y, d_{Y \times Y}) \quad \forall Y \subseteq X$ . Wie ist dies für topologische Räume?

**Warnung.**  $(Y, \mathcal{O}_X \cap \mathcal{P}(Y))$  ist im allgemeinen **kein** topologischer Raum. (wenn  $Y$  nicht offen ist, denn dann ist  $Y \notin \mathcal{S}_X \cap \mathcal{P}(X)$ )

**Satz und Definition 2.12** (Teilraumtopologie). Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $Y \subseteq X$ . Dann ist

$$\mathcal{O}_Y := \{U \cap Y \mid U \subseteq X \text{ offen}\}.$$

eine Topologie auf  $Y$ , die **Teilraumtopologie** oder auch **Unterraumtopologie** genannt wird.

**Beispiel.** Betrachte  $\mathbb{R}^1 \subseteq \mathbb{R}^2$  als Unterraum. Schneiden wir eine offene Menge in  $\mathbb{R}^2$  mit  $\mathbb{R}^1$ , so erhalten wir ein offenes Intervall:



Abbildung 3:  $\mathbb{R}^1$  als Unterraum von  $\mathbb{R}^2$

*Beweis.* • Es sind  $\emptyset = \emptyset \cap Y$  und  $Y = X \cap Y$  offen.

• Es ist

$$\bigcap_{i=1}^n (U_i \cap Y) = \left( \bigcap_{i=1}^n U_i \right) \cap Y.$$

• Es ist

$$\bigcup_{i \in I} (U_i \cap Y) = \left( \bigcup_{i \in I} U_i \right) \cap Y.$$

□

**Warnung.** Für  $Z \subseteq Y \subseteq X$  muss man zwischen 'offen in  $Y$ ' und 'offen in  $X$ ' unterscheiden, falls  $Y$  nicht offen ist.

**Bemerkung\*.** Ist  $Y \subseteq X$  offen, so stimmen die beiden vorherigen Konzepte tatsächlich überein, d.h. eine Menge  $Z \subseteq Y$  ist offen in  $Y$ , genau dann, wenn sie offen in  $X$  ist.

**Bemerkung.** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $Y \subseteq X$  eine Teilmenge. Die Unterraumtopologie auf  $Y$  bzgl. der Topologie auf  $X$  ist gleich der Topologie induziert von der eingeschränkten Metrik.

*Beweis.* Für  $y \in Y$  ist

$$U_{d|_{Y \times Y}}(y, \varepsilon) = U_d(y, \varepsilon) \cap Y.$$

, deswegen werden von beiden Metriken die gleichen offenen Mengen induziert. □

**Beispiel.** Der **Einheitskreis** als Unterraum von  $\mathbb{R}^2$ :

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 = 1\} =: S^1 \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Genauso gibt es die  **$n$ -Sphäre** definiert durch

$$\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\|_2 = 1\} =: S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}.$$

**Definition 2.13** (Homöomorphie). Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  zwischen topologischen Räumen heißt **Homöomorphismus**, falls  $f$  stetig und bijektiv ist und auch  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  stetig ist. Existiert solch ein  $f$ , so heißen  $X, Y$  **homöomorph**

**Beispiel.** Die Räume  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$  und  $(\mathbb{C}, |\cdot|)$  sind homöomorph mittels der Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x, y) &\longmapsto x + iy \end{aligned}$$

**Warnung.** Nicht jede stetige Bijektion ist ein Homöomorphismus.

**Beispiel.** Betrachte für eine Menge  $X$  die Identitätsabbildung  $(X, \mathcal{P}(X)) \xrightarrow{\text{id}_X} (X, \{\emptyset, X\})$  von der diskreten in die indiskrete Topologie. Diese ist stetig, aber die Umkehrabbildung nicht (falls  $|X| \geq 2$ ).

### 3 Quotientenräume

**Definition<sup>†</sup>** (Äquivalenzklasse). Sei  $\sim$  eine Äquivalenzrelation auf  $X$ . Für  $x \in X$  definieren wir die **Äquivalenzklasse**  $[x]$  von  $x$  durch:

$$[x] := \{x' \in X \mid x \sim x'\}.$$

Wir setzen

$$X/\sim := \{[x] \mid x \in X\}.$$

als die **Menge der Äquivalenzklassen** von  $X$  bezüglich  $\sim$ . Definiere nun

$$q : \begin{array}{c} X \\ x \end{array} \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longmapsto \end{array} \begin{array}{c} X/\sim \\ [x] \end{array}$$

als die **kanonische Projektion** von  $X$  auf seine Äquivalenzklassen.

**Fakt.** Wir stellen fest, dass  $q$  surjektiv ist.

Für eine Surjektion  $f : X \rightarrow Y$  ist  $x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$  eine Äquivalenzrelation auf  $X$  und

$$\begin{array}{c} X/\sim \\ [x] \end{array} \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longmapsto \end{array} \begin{array}{c} Y \\ f(x) \end{array}$$

ist eine Bijektion, wir erhalten also eine Korrespondenz zwischen Äquivalenzrelationen und surjektiven Abbildungen aus  $X$ .

**Satz und Definition 3.1** (Quotiententopologie). Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $\sim$  eine Äquivalenzrelation auf  $X$ . Sei  $q : X \rightarrow X/\sim$

die kanonische Projektion. Dann definiert

$$\mathcal{O}_{X/\sim} := \{U \subseteq X/\sim \mid q^{-1}(U) \subseteq X \text{ offen}\}.$$

eine Topologie auf  $X/\sim$ , genannt die **Quotiententopologie**.

*Beweis.* Wir prüfen die Axiome einer Topologie:

- Es ist  $q^{-1}(\emptyset) = \emptyset$  und  $q^{-1}(X/\sim) = X$ , also sind beide Mengen offen.
- Sind  $U_1, \dots, U_n \subseteq X/\sim$  offen, so ist

$$q^{-1}(U_1 \cap \dots \cap U_n) = q^{-1}(U_1) \cap \dots \cap q^{-1}(U_n).$$

offen in  $X$ , also ist  $U_1 \cap \dots \cap U_n$  offen in  $X/\sim$  nach Definition.

- Ist  $\{U_i\}_{i \in I}$  eine Familie offener Teilmengen von  $X/\sim$ , dann ist

$$q^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) = \bigcup_{i \in I} q^{-1}(U_i).$$

offen in  $X$ , also ist  $\bigcup_{i \in I} U_i$  offen in  $X/\sim$  nach Definition.  $\square$

**Bemerkung.** Die Projektion  $q : X \rightarrow X/\sim$  ist stetig und die Quotiententopologie ist maximal (bezüglich Inklusion, lies: 'am feinsten') unter allen Topologien auf  $X/\sim$ , für die  $q$  stetig ist.

**Satz 3.2** (Universelle Eigenschaft der Quotiententopologie). Sei  $f : X \rightarrow Y$  stetig und  $q : X \rightarrow X/\sim$  die kanonische Projektion. Angenommen, es existiert  $g : X/\sim \rightarrow Y$  mit  $f = g \circ q$ . Dann ist  $g$  stetig und in diesem Fall ist  $g$  eindeutig.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ q \downarrow & \nearrow g & \\ X/\sim & & \end{array}$$

**Bemerkung.**  $g$  existiert genau dann, wenn  $x \sim x' \Rightarrow f(x) = f(x')$

**Trivial Nonsense\*.** Das ist eine universelle Eigenschaft im Sinne der Kategorientheorie, d.h. für einen Raum  $X$  und eine Äquivalenzrelation existiert bis auf eindeutigen Isomorphismus stets genau ein topologischer Raum  $(X/\sim, \mathcal{S})$  zusammen mit einer stetigen Abbildung  $q : X \rightarrow X/\sim$ , sodass  $x \sim x' \Rightarrow q(x) = q(x')$ , sodass das Tripel  $(X, X/\sim, q)$  obige Eigenschaft hat. Wir können also obige Eigenschaft auch als Definition der Quotiententopologie verwenden, und aus dieser folgt auch die Eindeutigkeit. Existenz haben wir mit unserer vorherigen Definition gezeigt.

*Beweis von Aufgabe 3.2.* Sei  $U \subseteq Y$  offen. Dann ist

$$q^{-1}(g^{-1}(U)) \stackrel{f=g \circ q}{=} f^{-1}(U).$$



offen, weil  $f$  stetig ist. Also ist  $g^{-1}(U)$  offen per Definition ( $g^{-1}(U)$  ist nach Definition genau dann offen in  $X/\sim$ , wenn  $q^{-1}(g^{-1}(U))$  offen in  $X$  ist) und somit ist  $g$  stetig.  $\square$

**Beispiel<sup>†</sup>.** Sei  $X = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$  das **Einheitsintervall** (mit der Unterraumtopologie bezüglich  $\mathbb{R}$ ) mit der Äquivalenzrelation erzeugt von  $0 \sim 1$ . Wir 'identifizieren' also die Punkte  $\{0\}, \{1\}$  miteinander.

**Satz 3.3** (Kreishomöomorphie). Der Quotientenraum  $[0, 1]/(0 \sim 1)$  ist homöomorph zu  $S^1$ .

Vorlesung 3  
Di 20 Apr 2021 12:16

*Beweis.* Betrachte die stetige Abbildung

$$f' : \begin{array}{ccc} [0, 1] & \longrightarrow & S^1 \subseteq \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & e^{2\pi i t} \end{array}$$

Wir sehen  $f'(0) = f'(1) = 1$ , also existiert nach der universellen Eigenschaft ein  $f$ , sodass folgendes kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} [0, 1] & \xrightarrow{f'} & S^1 \\ \downarrow & \nearrow f & \\ [0, 1]/(0 \sim 1) & & \end{array} \quad \text{und } f \text{ stetig ist. Zudem ist } f \text{ bijektiv. Es}$$

bleibt zu zeigen, dass  $f^{-1}$  stetig ist, das zeigen wir jedoch nicht jetzt (ginge mit viel rechnen), sondern später, wenn wir mehr Technik haben. Anschaulich ist das jedoch klar:  $\square$

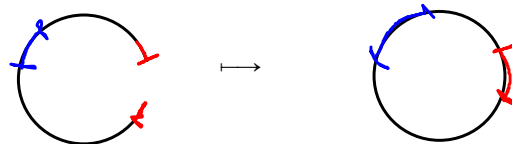


Abbildung 4:  $[0, 1]/(0 \sim 1)$  und  $S^1$  sind homöomorph

**Bemerkung.** Die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} [0, 1) & \longrightarrow & S^1 \\ t & \longmapsto & e^{2\pi i t} \end{array}$$

ist stetig und bijektiv, allerdings kein Homöomorphismus, denn  $[0, \frac{1}{2}] \subseteq [0, 1)$  ist offen, aber  $f([0, \frac{1}{2}]) = (f^{-1})^{-1}([0, \frac{1}{2}])$  ist nicht offen im Kreis.

**Beispiel.** 1) Sei  $X = [0, 1]^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ . Identifiziere nun  $(t, 0) \sim (t, 1)$  sowie  $(0, s) \sim (1, s)$  für  $s, t \in [0, 1]$ . Dann ist  $X / \sim$  der Torus.

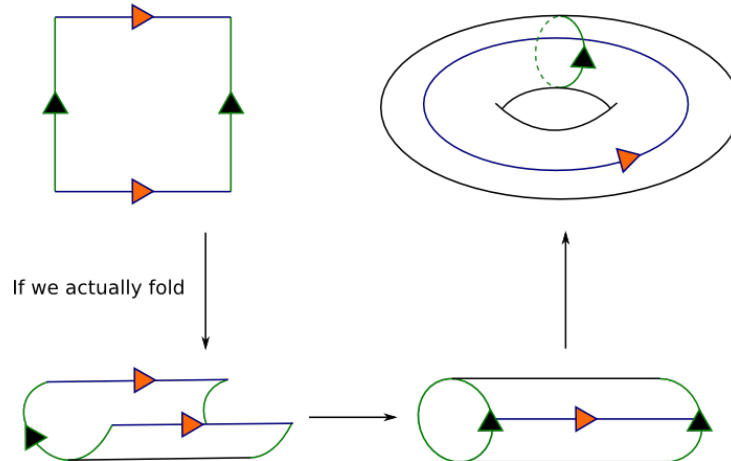


Abbildung 5: Entstehung des Torus als Quotientenraum von  $[0, 1]^2$ .

Quelle: [http://3.bp.blogspot.com/\\_swn7VcF-Vqc/TCpcMmi8qII/AAAAAAAAAHw/3QtMkZsikapY/s1600/part1\(6\).png](http://3.bp.blogspot.com/_swn7VcF-Vqc/TCpcMmi8qII/AAAAAAAAAHw/3QtMkZsikapY/s1600/part1(6).png)

2) Sei  $X = [0, 1]^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ . Identifizieren wir  $(t, 0) \sim (t, 1)$  sowie  $(0, s) \sim (1, 1 - s)$ , so erhalten wir die **Kleinsche Flasche**.

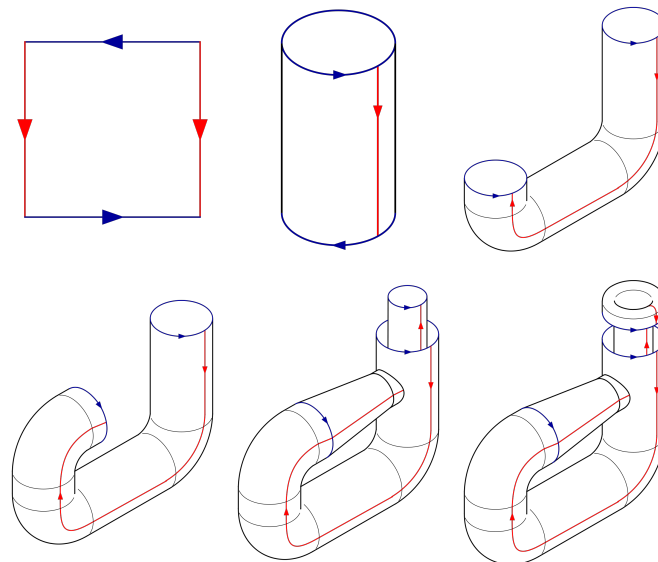


Abbildung 6: Entstehung der Kleinschen Flasche als Quotientenraum von  $[0, 1]^2$ .

Quelle: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Klein\\_Bottle\\_Folding\\_1.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Klein_Bottle_Folding_1.svg)

3) Betrachte auf dem  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  die Relation  $x \sim \lambda x$  für  $\lambda > 0 \in \mathbb{R}$ .

Dann ist  $\mathbb{R}^{n+1}/\sim \cong S^n$ . Zunächst ist nämlich die Abbildung

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} & \longrightarrow S^n \\ x & \longmapsto \frac{x}{\|x\|_2} \end{cases}$$

stetig und die induzierte Abbildung  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim \rightarrow S^n$  ist bijektiv. Das rechnen wir nach: Seien  $x \neq y$  mit  $d(x, y) < \delta$ , so ist:

$$\begin{aligned} d\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}\right) &\leq d\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|x\|}\right) + d\left(\frac{y}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}\right) \\ &= \frac{1}{\|x\|} d(x, y) + \sqrt{\sum \left(\frac{y_i}{\|x\|} - \frac{y_i}{\|y\|}\right)^2} \\ &= \frac{1}{\|x\|} d(x, y) + \sqrt{\frac{(\|x\| - \|y\|)^2}{\|x\| \|y\|}} \|y\| \\ &< \frac{1}{\|x\|} \cdot \delta + \frac{\delta}{\|x\|^2 + \delta \|x\|} (\|x\| + \delta) \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (1)$$

also ist  $f$  stetig. Mit der Inklusion  $\iota : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  erhalten wir

$$f \circ \iota = \text{id}_{S^n}.$$

Übung: Daraus folgt bereits, dass  $S^n$  die Quotiententopologie trägt.

- 4) Setzen wir erneut  $X = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ , aber diesmal  $x \sim \lambda x$  für  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , so heißt der Quotient

$$X / \sim =: \mathbb{R}P^n.$$

der **reelle projektive Raum**. Es ist

$$\mathbb{R}P^n \cong S^n / (x \sim -x).$$

Dies sehen wir mittels folgendem Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} & \xrightleftharpoons[\iota]{f} & S^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{R}P^n & \xrightleftharpoons[\bar{\iota}]{\bar{f}} & S^n / (x \sim -x) \end{array} \quad (2)$$

Die Abbildungen  $\bar{\iota}$  und  $\bar{f}$  sind stetig nach der universellen Eigenschaft und invers zueinander.



Abbildung 7: Konstruktion des reellen projektiven Raums für den Fall  $n = 1$ . Wir identifizieren die roten Strahlen miteinander, nicht jedoch den gesamten blauen, da  $\lambda > 0$ .

- 5) Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $A \subseteq X$  eine Teilmenge. Definiere die Relation  $\sim$  durch  $a \sim a'$  für  $a, a' \in A$  (bzw. erzeuge eine dadurch). Dann setzen wir

$$X/A := X / \sim .$$

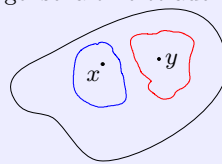
Damit ergibt sich

- 6)  $[0, 1] / \{0, 1\} \cong S^1$   
*Beweis.*  $[0, 1] / \{0, 1\}$  hat zwei Punkte  $[0, 1)$  und  $\{1\}$ . Es ist  $[0, 1) \subseteq [0, 1]$  offen, aber  $\{1\}$  nicht, also handelt es sich um den Sierpinski-Raum.  $\square$

**Bemerkung.** Quotientenräume von metrischen Räumen sind im Allgemeinen nicht metrisierbar.

## 4 Trennungsaxiome

**Definition 4.1** (Hausdorff'sch). Ein topologischer Raum heißt **Hausdorff** (oder **Hausdorffsch**), wenn  $\forall x, y \in X$  mit  $x \neq y$  offene Mengen  $U_x, U_y \subseteq X$  existieren mit  $x \in U_x$  und  $y \in U_y$ , sodass  $U_x \cap U_y = \emptyset$ . Diese Eigenschaft heißt auch Trennungsaxiom  $T_2$ .



**Satz 4.2.** Ist  $X$  metrisierbar, so ist  $X$  Hausdorffsch.

*Beweis.* Sei  $d$  eine Metrik auf  $X$ , die die Topologie induziert. Seien  $x, y \in X$  mit  $x \neq y$ . Setze

$$U_x := U\left(x, \frac{d(x, y)}{2}\right) \quad U_y = U\left(y, \frac{d(x, y)}{2}\right).$$

Dann ist  $U_x \cap U_y = \emptyset$ , denn für alle  $z \in U_x \cap U_y$  ist

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < \frac{d(x, y)}{2} + \frac{d(x, y)}{2} = d(x, y).$$

, was nicht sein kann.  $\square$

**Beispiel.**  $\mathbb{R}^n$  ist Hausdorffsch.

**Satz 4.3.** Ist  $X$  Hausdorffsch und  $x \in X$ , dann ist  $\{x\} \subseteq X$  abgeschlossen.

*Beweis.* Für  $y \neq x$  existiert  $U_y$  offen mit  $x \notin U_y$  und  $y \in U_y$ . Dann ist

$$X \setminus \{x\} = \bigcup_{y \neq x} U_y.$$

offen.  $\square$



Abbildung 8: Skizze zum Beweis von Satz 4.3

**Bemerkung.** Ein topologischer Raum, für den alle  $\{x\}$  abgeschlossen sind, heißt  **$T_1$ -Raum**.

**Bemerkung\*.** Man findet in der Literatur auch folgende Definition: Ein topologischer Raum heißt  $T_1$ -Raum, wenn es für je zwei verschiedenen Punkte  $x \neq y$  Umgebungen  $U_x, U_y$  gibt mit  $x \in U_x, y \in U_y$  und  $x \notin U_y, y \notin U_x$ .

Im Gegensatz zum Hausdorff-Raum trennen wir zwei Punkte also durch 2 nicht notwendigerweise offene Umgebungen. Mit dem gleichen Beweis wie in Satz 4.3 zeigen wir dann, dass jeder Punkt abgeschlossen ist. Ist umgekehrt  $X$  ein Raum, in dem alle Punkte abgeschlossen sind, so können wir  $x, y$  stets durch die offenen Umgebungen  $y \in X \setminus \{x\}$  sowie  $x \in X \setminus \{y\}$  trennen. Die beiden Definitionen sind also äquivalent.

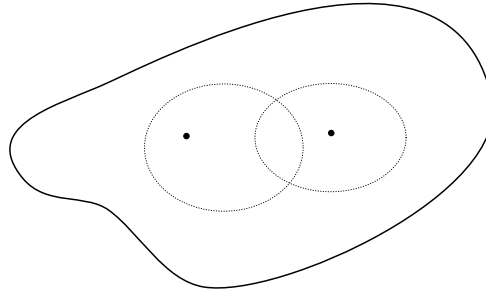


Abbildung 9: Ein  $T_1$ -Raum

**Lemma 4.4.** Sei  $X$  Hausdorffsch und  $A \subseteq X$  ein Teilraum. Dann ist auch  $A$  Hausdorffsch.

*Beweis.* Sei  $x \neq y \in A$ . Dann existieren  $U_x, U_y \subseteq X$  offen mit  $x \in U_x$  und  $y \in U_y$  sowie  $U_x \cap U_y = \emptyset$ . Dann sind

$$U_x \cap A \quad U_y \cap A \subseteq A.$$

offen in  $A$  und erfüllen die Bedingungen.  $\square$

**Bemerkung.** Jeder diskrete Raum ist Hausdorffsch. Ist  $X$  endlich und Hausdorffsch, so ist  $X$  diskret.

*Beweis.* Für jedes  $y \neq x$  existiert ein  $U_x^y$  offen mit  $x \in U_x^y$  und  $y \notin U_x^y$ . Dann ist aber

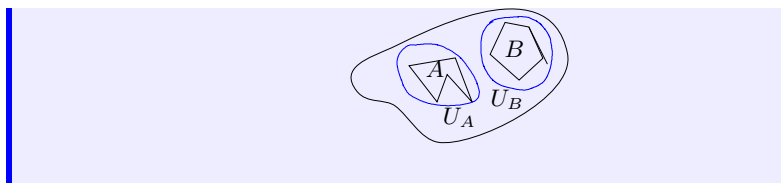
$$\{x\} = \bigcap_{y \neq x} U_x^y.$$

offen (da  $X$  endlich), also ist  $X$  diskret. Die Umkehrung ist offensichtlich.  $\square$

**Beispiel.**  $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  ist Hausdorffsch.

**Definition 4.5** (Normal). Ein topologischer Raum heißt **normal**, falls

- $X$  ist Hausdorffsch
- $\forall A, B \subseteq X$  abgeschlossen mit  $A \cap B = \emptyset$  existieren  $U_A, U_B \subseteq X$  offen mit  $A \subseteq U_A$ ,  $B \subseteq U_B$  und  $U_A \cap U_B = \emptyset$ . Diese Eigenschaft heißt auch Trennungsaxiom  $T_4$ .



**Bemerkung.** Manchmal gibt es diese Definition in der Literatur auch ohne Hausdorff'sch.

**Satz 4.6.** Ist  $X$  metrisierbar, dann ist  $X$  normal.

Der Beweis war als **Aufgabe 2.3** auf den Übungszetteln:

*Beweis\*.* Der folgende Beweis wurde in unserem Tutorium mit HEIKO BRAUN besprochen:

Wir wissen bereits mit **Satz 4.2**, dass  $X$  Hausdorffsch ist. Von **1.1** wissen wir, dass:

$$d_x : \begin{cases} X & \longrightarrow \mathbb{R} \\ y & \longmapsto d(x, y) \end{cases}$$

eine stetige Abbildung ist. Dann ist für eine Teilmenge  $A \subseteq X$  auch

$$d_A : \begin{cases} X & \longrightarrow \mathbb{R} \\ y & \longmapsto \inf \{d_x(y) \mid x \in A\} \end{cases}$$

eine stetige Funktion, die den Abstand zur Menge  $A$  ausdrückt.

**Behauptung 1.** Ist  $A$  abgeschlossen, so ist  $d_A(y) = 0 \Leftrightarrow y \in A$ .

*Unterbeweis.* Die Richtung ' $\Leftarrow$ ' ist trivial, da dann  $d_y(y) = 0$  Teil des Infimums ist. Die andere Richtung beweisen wir durch Kontraposition, d.h. sei  $y \in X \setminus A$ . Da  $X \setminus A$  offen ist, gibt es  $\varepsilon > 0$  mit  $U(y, \varepsilon) \subseteq X \setminus A$ , dann ist aber sicherlich  $d_x(y) \geq \varepsilon$  für alle  $x \in A$ , und somit ist auch das Infimum über diese  $\geq \varepsilon$ . ■

Seien nun  $A, B \subseteq X$  abgeschlossene, disjunkte Teilmengen. Definiere

$$f : \begin{cases} X & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{d_A(x)}{d_A(x) + d_B(x)} \end{cases}$$

Der Nenner wird nie Null, da dazu  $d_A(x) = 0 = d_B(x)$  gelten müsste, nach der Behauptung also  $x \in A, B$  und dies trifft nicht zu wegen  $A \cap B = \emptyset$  nach Annahme. Als Verknüpfung stetiger Funktionen ist nun  $f$  stetig. Zudem stellen wir fest, dass  $f(A) \equiv 0$  sowie  $f(B) \equiv 1$ . Dann sind

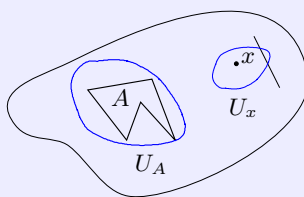
$$U := f^{-1} \left( \left[ 0, \frac{1}{2} \right) \right) \quad V := f^{-1} \left( \left( \frac{1}{2}, 1 \right] \right).$$

zwei offene Umgebungen, die  $A, B$  enthalten und disjunkt sind, wie man leicht prüft. Also ist  $X$  normal. □

**Bemerkung\*.** Wir haben eine scheinbar stärkere Eigenschaft gezeigt als die, dass  $X$  normal ist, nämlich, dass wir zwei abgeschlossene Mengen durch eine Funktion trennen können. Es stellt sich jedoch heraus, dass ein topologischer Raum genau dann diese Eigenschaft besitzt, wenn er normal ist, wobei 'normal' nicht fordert, dass der

Raum Hausdorff ist. Dies nennt sich *Lemma von Urysohn*, und wir werden dieses auch später noch in der Vorlesung kennenlernen, für jetzt ist dies jedoch unwichtig. Die Trennung zweier abgeschlossener Mengen mittels einer Funktion ähnelt jedoch sehr stark der folgenden Definition (und das ist kein Zufall):

**Definition 4.7** (Regulär). Ein topologischer Raum  $X$  heißt **regulär**, falls  $X$  Hausdorff ist und  $\forall A \subseteq X$  abgeschlossen und  $x \in X \setminus A$  existieren  $U_A, U_x$  offen mit  $A \subseteq U_A, x \in U_x$  und  $U_A \cap U_x = \emptyset$ . (Auch Trennungsaxiom  $T_3$  genannt).



**Bemerkung<sup>†</sup>**. Klarerweise gilt  $T_4 \Rightarrow T_3$ , d.h. jeder normale Raum ist auch regulär. Hierzu benötigen wir nur, dass Punkte in  $T_4$ -Räumen abgeschlossen sind, aber das folgt mit **Satz 4.3**, bzw. damit, dass wir bereits  $T_4 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1$  wissen.

## 5 Kompaktheit

Aus der Analysis ist (vielleicht) folgender Satz bekannt.

**Satz 5.1** (Heine-Borel). Für  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  sind äquivalent:

- 1)  $X$  ist abgeschlossen und beschränkt.
- 2) Jede offene Überdeckung von  $X$  hat eine endliche Teilüberdeckung

‘Jede offene Überdeckung besitzt eine endliche Teilüberdeckung’ bedeutet:

Für jede Familie  $\{U_i\}_{i \in I}$  mit  $U_i \subseteq X$  offen und  $X \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$  existiert eine endliche Teilmenge  $J \subseteq I$  mit  $X \subseteq \bigcup_{j \in J} U_j$

*Beweis.* später. □

**Definition 5.2** (Kompaktheit). Ein topologischer Raum  $X$  heißt



**kompakt**, falls jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

**Bemerkung.** Manchmal heißt obige Definition auch quasi-kompakt, und kompakt bedeutet dann quasi-kompakt + Hausdorff.

**Beispiel.** Die Räume

$$[0, 1] \subseteq \mathbb{R} \quad S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}.$$

sind beide kompakt (nach 5.1)

Vorlesung 4  
Do 22 Apr 2021 10:15

**Beispiel<sup>†</sup>** (mündlich vor der Vorlesung). Zur Frage von letzter Woche (wenn wir einen Hausdorff-Raum haben und eine Äquivalenzrelation, deren Klassen abgeschlossen sind, ist dann der Quotient wieder Hausdorff?): Wähle auf  $[0, 1]$  die Relation erzeugt von

$$\frac{1}{n} \sim 1 - \frac{1}{n}.$$

für alle  $n \in \mathbb{N}_{>0}$ . Betrachte dann die Abbildung:

$$[0, 1] \twoheadrightarrow [0, 1] / \sim.$$

Punkturbilder sind endlich, also abgeschlossen. Aber der Raum  $[0, 1] / \sim$  ist nicht hausdorffsch, denn wir können die Punkte 0, 1 nicht trennen.

**Satz 5.3.** Sei  $X$  ein kompakter Raum und  $Y \subseteq X$  abgeschlossen. Dann ist  $Y$  kompakt.

*Beweis.* Sei  $\{U_i\}_{i \in I}$  eine offene Überdeckung von  $Y$ . Dann existieren  $U'_i \subseteq X$  offen mit  $U_i = U'_i \cap Y$ . Die Familie

$$\{U'_i\}_{i \in I} \cup \underbrace{\left\{ X \setminus Y \right\}}_{\text{offen}}.$$

ist nun eine offene Überdeckung von  $X$ . Dann existiert  $J \subseteq I$  endlich, so dass

$$\{U'_j\}_{j \in J} \cup \{X \setminus Y\}.$$

die Menge  $X$  überdeckt. Also ist

$$\underbrace{\left\{ U'_j \cap Y \right\}}_{U_j}_{j \in J} \cup \underbrace{\left\{ X \setminus Y \cap Y \right\}}_{=\emptyset}$$

eine endliche Überdeckung für  $Y$ . □

**Satz 5.4.** Sei  $X$  ein Hausdorff-Raum und  $Y \subseteq X$  kompakt. Dann ist  $Y$  abgeschlossen.

**Korollar.** Ist  $X$  kompakt und Hausdorffsch, dann sind äquivalent:  
 1)  $Y \subseteq X$  ist abgeschlossen  
 2)  $Y$  ist kompakt.

*Beweis.* Unmittelbare Konsequenz aus Satz 5.3 und Satz 5.4. □

**Lemma 5.5.** Sei  $X$  ein Hausdorff Raum und  $Y \subseteq X$  kompakt. Dann existiert  $\forall x \in X \setminus Y$  offene Teilmengen  $U_{x,Y}$  und  $V_{x,Y}$  von  $X$  so dass:  $x \in U_{x,Y}$  und  $Y \subseteq V_{x,Y}$  und  $U_{x,Y} \cap V_{x,Y} = \emptyset$ .

*Beweis.* Sei  $x \in X \setminus Y$ .  $\forall y \in Y$  existieren  $U_{x,y}$  und  $V_{x,y}$  offen mit  $x \in U_{x,y}$  und  $y \in V_{x,y}$ , weil  $X$  Hausdorffsch.

Dann ist  $\{V_{x,y} \cap Y\}_{y \in Y}$  eine offene Überdeckung von  $Y$ . Also existiert endliche Teilüberdeckung (da  $Y$  kompakt) induziert durch Punkte  $y_1, \dots, y_n$ . Also:

$$Y \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_{x,y_i}.$$

Sei

$$V_{x,Y} := \bigcup_{i=1}^n V_{x,y_i} \quad U_{x,Y} := \bigcap_{i=1}^n U_{x,y_i}.$$

Es ist auch  $x \in U_{x,Y}$ , weil  $x \in U_{x,y_i}$  für jedes  $i$ . Wir müssen also noch Disjunktheit prüfen, es ist:

$$U_{x,Y} \cap V_{x,y_i} \subseteq U_{x,y_i} \cap V_{x,y_i} = \emptyset.$$

Also auch

$$\emptyset = U_{x,Y} \cap \bigcup_{i=1}^n V_{x,y_i} = U_{x,Y} \cap V_{x,Y}.$$

□



Abbildung 10: Skizze zum Beweis von Lemma 5.5

*Beweis von Satz 5.4.* Nach Lemma 5.5 existieren  $\forall x \in X \setminus Y$  ein  $U_{x,Y}$  mit  $x \in U_{x,Y}$  und  $U_{x,Y} \cap Y = \emptyset$ . Also ist

$$X \setminus Y = \bigcup_{x \in X \setminus Y} U_{x,Y}.$$

offen und somit ist  $Y$  abgeschlossen.  $\square$

**Beispiel** ('Gegenbeispiel' zu Satz 5.4). Sei  $G$  die **Gerade mit zwei Ursprüngen**:

Betrachte  $G := \mathbb{R} \cup \{0'\}$  als Menge, und charakterisiere die Umgebungen folgendermaßen:

- Für einen Punkt  $a \in \mathbb{R}$ , d.h.  $a \neq 0'$  ist  $U$  eine Umgebung von  $a$  genau dann, wenn  $\exists \varepsilon > 0$ , sodass  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subseteq U$ . (das Intervall  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  ist hier als Teilmenge von  $\mathbb{R}$  zu verstehen)
- Für den Punkt  $0' \notin \mathbb{R}$  ist  $U$  eine Umgebung von  $a$  genau dann, wenn  $\exists \varepsilon > 0$  mit  $(-\varepsilon, 0) \cup (0, \varepsilon) \subseteq U$ .

Da offene Mengen genau diejenigen Mengen sind, die Umgebung all ihrer Punkte sind, haben wir damit die offenen Mengen von  $G$  charakterisiert.

Wir können uns  $G$  vorstellen als  $\mathbb{R}$ , in dem der Ursprung durch zwei gleichberechtigte Ursprünge ersetzt worden ist, die beide (bis auf sich selbst) die gleichen Umgebungen besitzen, die aber nicht zwingend gegenseitig in ihren Umgebungen liegen, d.h. nicht 'nah' beieinander sind.

Dann ist  $[-1, 1] \subseteq \mathbb{R} \subseteq G$  kompakt (**Aufgabe 2.3**), wir behaupten, dass  $[-1, 1]$  jedoch nicht abgeschlossen ist in  $G$ . Sonst wäre in der Tat  $G \setminus [-1, 1]$  offen, und es ist  $0' \in G \setminus [-1, 1]$ , aber es handelt sich nicht um eine Umgebung von  $0'$ , weil für kein  $\varepsilon$  die Intervalle  $(-\varepsilon, 0)$  und  $(0, \varepsilon)$  in  $G \setminus [-1, 1]$  liegen.

**Bemerkung<sup>†</sup>.** Das Beispiel zeigt also, dass wir die Hausdorff-Bedingung in **Satz 5.4** nicht fallen lassen können, d.h. es gibt nicht abgeschlossene, kompakte Mengen.

**Bemerkung\*** (Mehr zur Gerade mit 2 Ursprüngen). Wir geben zwei weitere (äquivalente) Definitionen der Gerade mit 2 Ursprüngen, um so hoffentlich eine bessere Vorstellung zu ermöglichen:

- i) Setze  $G := \mathbb{R} \setminus \{0\} \cup \{a, b\}$  als Mengen. Als Basis wählen wir
  - Alle offenen Bälle aus  $\mathbb{R}$ , die nicht die 0 enthalten.
  - Für jedes  $\varepsilon > 0$  die Menge  $(-\varepsilon, 0) \cup \{a\} \cup (0, \varepsilon)$
  - Für jedes  $\varepsilon > 0$  die Menge  $(-\varepsilon, 0) \cup \{b\} \cup (0, \varepsilon)$

In diesem Fall können wir Homöomorphismen zu obiger Definition bauen, indem wir  $0 \mapsto a$  und  $0' \mapsto b$  wählen, und alle andere Punkte kanonisch 'auf sich selbst' schicken.

- ii) Wir können  $G$  auch als Quotientenraum einer Teilmenge von  $\mathbb{R}$  auffassen. Betrachte hierzu  $\mathbb{R} \times \{0, 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$  mit der Produkttopologie bzw. mit der Teilraumtopologie von  $\mathbb{R}^2$  (diese beiden sind äquivalent, wie man sich leicht überlegt). Es handelt sich also um zwei parallele, voneinander getrennte Geraden. Nun identifizieren wir korrespondierende Punkte beider Geraden miteinander, allerdings nicht deren Ursprüngen. Wir erzeugen also die Äquivalenzrelation  $\sim$  generiert durch  $(x, 0) \sim (x, 1)$  für  $x \neq 0$  und bilden bezüglich dieser Relation den Quotientenraum. Was wir erhalten, ist genau  $G$ . Indem wir mit  $G$  definiert wie in der Vorlesung die Abbildung von  $\mathbb{R} \times \{0, 1\}$  nach  $G$  definieren durch

$$(a, b) \mapsto \begin{cases} a & \text{falls } a \neq 0 \\ 0 & \text{falls } (a, b) = (0, 0) \\ 0' & \text{falls } (a, b) = (0, 1) \end{cases}.$$

sehen wir schnell, dass diese über den Quotientenraum  $\mathbb{R} \times \{0, 1\} / \sim$  faktorisiert (universelle Eigenschaft!) und die entstehende Abbildung bijektiv und stetig ist. Dass es sich um einen Homöomorphismus handelt, sei hier nicht nachgerechnet sondern nur angemerkt.

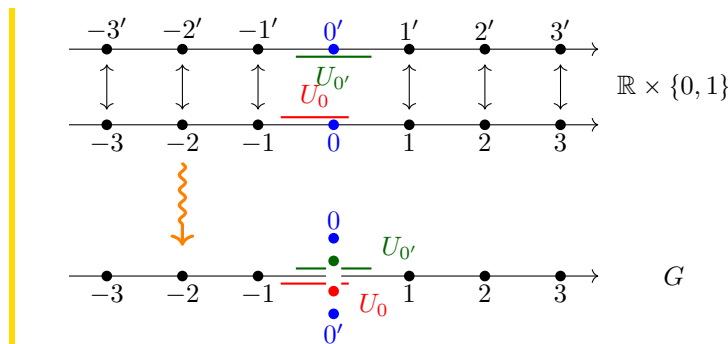


Abbildung 11: Gerade mit 2 Ursprüngen als Quotientenraum von  $\mathbb{R} \times \{0, 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$

Nun sind wir gewappnet für den

*Beweis von Satz 5.1 (Heine-Borel).* '2)  $\Rightarrow$  1)'. Sei  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  kompakt. Dann ist sie abgeschlossen nach 5.4. Zudem ist  $X \subseteq \bigcup_{x \in X} U(x, 1)$  eine offene Überdeckung. Da  $X$  kompakt finden wir endlich viele  $x_1, \dots, x_n \in X$  mit

$$X \subseteq \bigcup_{i=1}^n U(x_i, 1).$$

Also ist

$$\text{diam}(X) \leq \max \{d(x_i, x_j)\} + 2 < \infty.$$

und somit ist  $X$  auch beschränkt.

'1)  $\Rightarrow$  2)'. Da  $X$  beschränkt ist,  $\exists m > 0$  mit  $X \subseteq [-m, m]^n \subseteq \mathbb{R}^n$ . Da  $X$  abgeschlossen ist, genügt es nach Satz 5.3 zu zeigen, dass  $[-m, m]^n$  kompakt ist.

Wir führen einen Widerspruchsbeweis, nimm also an, dass  $[-m, m]^n$  nicht kompakt ist. Dann existiert eine offene Überdeckung  $\{U_i\}_{i \in I}$  ohne endliche Teilüberdeckung.

Unterteile  $[-m, m]^n$  in  $2^n$  gleich große Unterwürfel (halbiere jede Seite). Mindestens ein Unterwürfel hat keine endliche Teilüberdeckung. Unterteile diesen Würfel weiter und wähle wieder einen Unterwürfel, der keine endliche Teilüberdeckung hat.

Wir erhalten eine Folge von Würfeln

$$[-m, m]^n = Q_0 \supseteq Q_1 \supseteq Q_2 \supseteq Q_3 \supseteq \dots$$

die jeweils keine endliche Teilüberdeckung durch  $U_i$ 's besitzen.



Sei  $x_i \in Q_i$  beliebig. Dann ist  $x_i$  eine Cauchy-Folge, also existiert  $x = \lim_{i \rightarrow \infty} x_i$ , und  $x \in Q_0$ , da  $Q_0$  abgeschlossen.

Somit gibt es ein  $U_j$  mit  $x \in U_j$ , da die  $\{U_i\}_{i \in I}$  eine Überdeckung von  $Q_0$  waren. Damit ist auch  $U(x, \varepsilon) \subseteq U_j$  für ein  $\varepsilon > 0$ . Wähle einen Würfel  $x \in Q_k$  mit Kantenlänge  $< \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$ , dann ist auch  $Q_k \subseteq U(x, \varepsilon) \subseteq U_j$ . Das ist aber ein Widerspruch dazu, dass  $Q_k$  keine endliche Teilüberdeckung hat,  $\nexists$ .

Also ist  $Q_0$  kompakt.  $\square$

**Satz 5.6** (Bilder kompakter Räume). Sei  $f : X \rightarrow Y$  stetig und surjektiv und  $X$  kompakt. Dann ist auch  $Y$  kompakt.

*Beweis.* Sei  $\{U_i\}_{i \in I}$  offene Überdeckung von  $Y$ . Dann ist

$$\{f^{-1}(U_i)\}_{i \in I}.$$

offene Überdeckung von  $X$ . Da  $X$  kompakt ist, gibt es  $J \subseteq I$  endlich mit  $X = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(U_j)$ . Dann ist

$$Y = f(X) = \bigcup_{j \in J} f(f^{-1}(U_j)) = \bigcup_{j \in J} U_j.$$

Also existiert eine endliche Teilüberdeckung von  $Y$ .  $\square$

**Korollar 5.7.** Sei  $f : X \rightarrow Y$  stetig,  $X$  kompakt und  $Y$  Hausdorff. Dann ist  $f$  abgeschlossen, d.h.  $\forall A \subseteq X$  abgeschlossen ist  $f(A) \subseteq Y$  abgeschlossen.

*Beweis.* Sei  $A \subseteq X$  abgeschlossen. Dann ist  $A$  kompakt nach Satz 5.4, also ist  $f(A)$  kompakt nach Satz 5.6 (weil  $f : X \rightarrow f(A) \subseteq Y$  surjektiv ist). Damit ist dann  $f(A)$  abgeschlossen nach Satz 5.4.

Also sind Bilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen.  $\square$

**Korollar 5.8** (Homöomorphismen). Ist  $f : X \rightarrow Y$  stetig und bijektiv,  $X$  kompakt und  $Y$  Hausdorff, dann ist  $f$  ein Homöomorphismus.

*Beweis.* Wir müssen zeigen, dass die Umkehrabbildung stetig ist. Dafür reicht es zu zeigen, dass  $\forall A \subseteq X$  abgeschlossen auch  $f(A) = (f^{-1})^{-1}(A)$  abgeschlossen ist. Das gilt aber genau nach vorherigem Korollar 5.7  $\square$

**Korollar 5.9.** Sei  $f : X \rightarrow Y$  stetig und surjektiv,  $X$  kompakt und  $Y$  Hausdorffsch. Dann trägt  $Y$  die Quotiententopologie, d.h.  $U \subseteq Y$  offen genau dann, wenn  $f^{-1}(U) \subseteq X$  offen.

*Beweis.* ' $\Rightarrow$ ' folgt wegen Stetigkeit.

' $\Leftarrow$ ' Ist  $f^{-1}(U) \subseteq X$  offen, dann ist  $f^{-1}(Y \setminus U) = X \setminus f^{-1}(U)$  abgeschlossen in  $X$ , also folgt aus dem Korollar 5.7

$$Y \setminus U \stackrel{\text{surj.}}{=} f \left( \underbrace{f^{-1}(Y \setminus U)}_{\text{abgeschlossen}} \right).$$

abgeschlossen ist, also ist  $U \subseteq Y$  offen.  $\square$

Kommen wir nun zum

*Beweis von Satz 3.3 (Fortsetzung).* Schon gezeigt:

$$\begin{array}{ccc} [0, 1] & \longrightarrow & S^1 \\ t & \longmapsto & 2^{2\pi i t} \end{array}$$

ist stetig und surjektiv und faktorisiert über

$$[0, 1] / \{0, 1\} \rightarrow S^1.$$

mit  $f$  stetig und bijektiv. Wir wissen nun:  $S^1$  ist Hausdorffsch und  $[0, 1]$  ist kompakt. Nach Satz 5.6 ist auch  $[0, 1] / \{0, 1\}$  kompakt, also ist  $f$  ein Homöomorphismus nach Korollar 5.8  $\square$

**Satz 5.10.** Jeder kompakte Hausdorff-Raum ist normal.

*Beweis.* Seien  $A, B \subseteq X$  abgeschlossen und disjunkt. Da  $X$  kompakt ist, sind  $A, B$  kompakt. Nach Lemma 5.5 existieren  $\forall a \in A$  offene Mengen  $U_a, V_a$  mit  $a \in U_a, B \subseteq V_a$  und  $U_a \cap V_a = \emptyset$ . Dann ist

$$A \subseteq \bigcup_{a \in A} U_a.$$

Also existieren  $a_1, \dots, a_n \in A$  mit

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{a_i}.$$

wegen  $A$  kompakt. Setze nun

$$U_A := \bigcup_{i=1}^n U_{a_i} \supseteq A \quad U_B := \bigcap_{i=1}^n V_{a_i} \supseteq B.$$

$\forall i$  ist

$$U_{a_i} \cap U_B \subseteq U_{a_i} \cap V_{a_i} = \emptyset.$$

und daraus folgt, dass

$$U_A \cap U_B = \emptyset.$$

□

**Satz 5.11** (Quotientenräume von Hausdorffräumen). Sei  $X$  kompakt und Hausdorffsch,  $q : X \rightarrow Z$  surjektiv, wobei  $Z$  die Quotiententopologie trage. Dann sind äquivalent:

- 1)  $Z$  ist Hausdorffsch
- 2)  $q$  ist abgeschlossen

*Beweis.* Die Richtung '1)  $\Rightarrow$  2)' ist genau **Korollar 5.7**

'2)  $\Rightarrow$  1)': Jedes  $z \in Z$  hat ein Urbild  $x \in X$  unter  $q$ . Es ist  $\{x\} \subseteq X$  abgeschlossen, da  $X$  hausdorffsch. Wegen  $q$  abgeschlossen folgt nun, dass auch

$$\{z\} = q(\{x\}).$$

abgeschlossen ist.

**Definition**<sup>†</sup> (saturierte Menge). Wir nennen Teilmenge  $W \subseteq X$  heißt **saturiert**, falls  $W = q^{-1}(q(W))$  (insbesondere sind alle Urbilder saturiert, und  $\Leftrightarrow \forall x \in X \setminus W : q(x) \in Z \setminus q(W)$ ).

**Bemerkung.** Sei  $U \subseteq X$  offen und saturiert, dann ist  $q(U)$  offen. Hierzu schreibe

$$U = q^{-1}(q(U)) \Rightarrow q(U) \text{ offen.}$$

Seien  $y \neq z \in Z$ . Dann sind  $\{y\}, \{z\}$  abgeschlossen und disjunkt. Dann sind auch

$$A = q^{-1}(y) \quad B = q^{-1}(z).$$

abgeschlossen und disjunkt (in  $X$ ). Nach Annahme ist  $X$  kompakt und Hausdorff, also normal nach Satz 5.10. Also existieren  $U_1, U_2 \subseteq X$  offen mit  $A \subseteq U_1, B \subseteq U_2$  und  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ . Setze

$$V_1 := X \setminus q^{-1}(q(X \setminus U_1)) \quad V_2 := X \setminus q^{-1}(q(X \setminus U_2)).$$

**Behauptung 1.** *Es sind  $V_1, V_2$  offen, disjunkt und saturiert und  $A \subseteq V_1$  sowie  $B \subseteq V_2$ .*

*Unterbeweis.* Nächstes Mal. ■

Es folgt, dass  $q(V_1), q(V_2)$  offen in  $Z$  sind. Weiter ist  $y \in q(A) \subseteq q(V_1)$  und  $z \in q(B) \subseteq q(V_2)$ . Da  $V_1, V_2$  disjunkt und saturiert, sind auch  $q(V_1), q(V_2)$  disjunkt und wir sind fertig. □

*Beweis der Behauptung.* Es ist klar, dass  $V_1, V_2$  offen sind. Für Disjunktheit sehen wir mit

$$X \setminus U_i \subseteq q^{-1}(q(X \setminus U_i)).$$

dass  $U_i \supseteq X \setminus q^{-1}(q(X \setminus U_i)) = V_i$  Für Saturiertheit genügt es zu sehen, dass  $q^{-1}(C)$  saturiert ist für alle  $C \subseteq Z$ , da

$$q^{-1}(q(q^{-1}(C))) = q^{-1}(C).$$

weil  $q$  surjektiv ist. Wegen

$$\begin{aligned} A \subseteq U_1 &\Rightarrow X \setminus A \supseteq X \setminus U_1 \\ &\Rightarrow q(X \setminus A) \supseteq q(X \setminus U_1) \\ &\Rightarrow \underbrace{q^{-1}(q(X \setminus A))}_{=X \setminus A} \supseteq q^{-1}(q(X \setminus U_1)) \end{aligned}$$

liefert nun Komplementbildung unser gewünschtes Ergebnis, dass

$$A \subseteq X \setminus q^{-1}(q(X \setminus U_1)) = V_1.$$

□

**Beispiel.**  $\mathbb{RP}^n$  ist Hausdorffsch.

*Beweis.* Es ist  $\mathbb{RP}^n \cong S^n/x \sim -x$ . Sei

$$q : S^n \rightarrow S^n/x \sim -x.$$

□

die Projektion. Da  $S^n$  kompakt und Hausdorffsch ist, ist  $\mathbb{RP}^n$  Hausdorffsch genau dann, wenn  $q$  abgeschlossen ist. Ist  $A \subseteq S^n$ , so ist  $q^{-1}(Q(A)) = A \cup -A$ .

Da  $- : S^n \rightarrow S^n$  ein Homöomorphismus ist, ist  $-A$  abgeschlossen, wenn  $A$  abgeschlossen ist. Dann ist auch  $A \cup -A$  abgeschlossen.

**Korollar** (Projektiver Raum). Sei  $\sim$  auf  $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$  erzeugt durch  $x \sim -x$  für alle  $x \in S^{n-1} \subseteq D^n$ . Dann ist

$$D^n / \sim \cong \mathbb{RP}^n.$$

Insbesondere ist

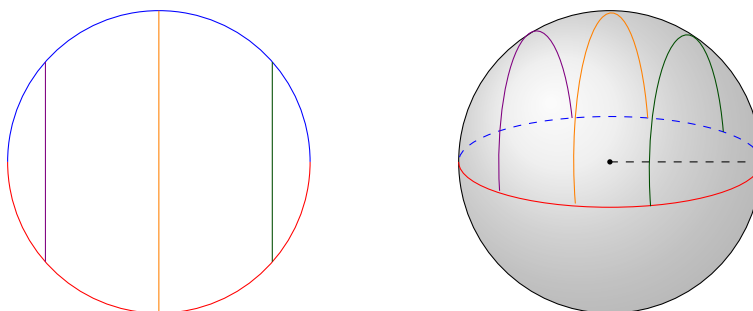
$$\mathbb{RP}^1 \cong D^1 / \{-1, 1\} \cong [0, 1] / \{0, 1\} \cong S^1$$

Vorlesung 5  
Di 27 Apr 2021 12:16



*Beweis.* Betrachte die stetige Abbildung

$$f : \begin{cases} D^n & \longrightarrow S^n \\ x & \longmapsto (x, \sqrt{1 - \|x\|^2}) \end{cases}$$



Wir erhalten das Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} D^n & \xrightarrow{\quad f \quad} & S^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^n / \sim & \xrightarrow[\bar{f}]{} & S^n / (x \sim -x) \cong \mathbb{RP}^n \end{array}$$

Wir sehen leicht, dass  $\bar{f}$  bijektiv ist. Da  $D^n$  kompakt, ist auch  $D^n / \sim$  kompakt, und  $\mathbb{RP}^n$  ist Hausdorffsch, also handelt es sich um einen Homöomorphismus (mit [Korollar 5.8](#))  $\square$

**Korollar 5.12.** Sei  $X$  kompakt und Hausdorffsch und  $A \subseteq X$ . Dann sind äquivalent

- 1)  $X/A$  ist Hausdorffsch
- 2)  $A$  ist abgeschlossen.

*Beweis.* '1)  $\Rightarrow$  2)'. Ist  $X/A$  Hausdorffsch, so ist die einpunktige Menge  $\{[A]\}$  abgeschlossen (nach [Satz 4.3](#)). Also ist  $q^{-1}(A) = A$  abgeschlossen nach Definition der Quotiententopologie.

'2)  $\Rightarrow$  1)'. Nach [Satz 5.11](#) genügt es zu zeigen, dass  $q : X \rightarrow X/A$  abgeschlossen ist. Für  $B \subseteq X$  abgeschlossen ist, müssen wir also zeigen, dass  $q(B)$  abgeschlossen ist, nach Definition also, dass  $q^{-1}(q(B)) \subseteq B$  abgeschlossen ist. Nun ist

$$q^{-1}(q(B)) = \begin{cases} B & \text{falls } B \cap A = \emptyset \\ B \cup A & \text{falls } B \cap A \neq \emptyset \end{cases}.$$

abgeschlossen, weil  $A$  abgeschlossen ist.  $\square$

**Beispiel.** a) Es ist  $D^n/S^{n-1}$  Hausdorffsch. Alternativ können wir auch sehen, dass  $D^n/S^{n-1} \cong S^n$  ist. Hierzu betrachte die Pro-

jektion:

$$\begin{aligned} D^n &\longrightarrow S^n \\ x &\longmapsto \begin{cases} (2x, \sqrt{1 - \|2x\|^2}) & 0 \leq \|x\| \leq \frac{1}{2} \\ \left(\frac{2-2\|x\|}{\|x\|} \cdot x, -\sqrt{1 - (2-2\|x\|)^2}\right) & \frac{1}{2} \leq \|x\| \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Diese ist stetig, denn falls  $\|x\| = \frac{1}{2}$  ist

$$\frac{2-2\|x\|}{\|x\|} = \frac{2-1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

und

$$\sqrt{1 - \|2x\|^2} = \sqrt{1 - 1} = 0 = -\sqrt{0} = -\sqrt{1 - (2-2\|x\|)^2}.$$

Ist  $\|x\| = 1$ , so ist

$$\frac{2-2\|x\|}{\|x\|} = 0.$$

und somit ist  $f(x) = (0, -1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ . Also faktorisiert  $f$  über  $\bar{f} : D^n/S^{n-1} \rightarrow S^n$ . Wir sehen wieder leicht, dass  $\bar{f}$  stetige Bijektion ist. Da  $D^n/S^{n-1}$  kompakt und  $S^n$  Hausdorffsch, folgt wieder, dass  $\bar{f}$  ein Homöomorphismus ist.

b) Wir erhalten nun eine Abbildung:

$$S^n \xrightarrow{q} S^n/(x \sim -x) \cong \mathbb{RP}^n \cong D^n/(x \sim -x) \longrightarrow D^n/S^{n-1} \cong S^n$$

und diese ist im Allgemeinen kein Homöomorphismus, denn jeder Punkt hat 2 Urbilder.

## 6 Basen und Subbasen

**Definition 6.1** (Basis). Sei  $(X, \mathcal{O})$  ein topologischer Raum. Sei  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{O}$  eine Menge offener Mengen. Dann heißt  $\mathcal{S}$

**Basis**, falls  $\forall U \in \mathcal{O}$  existiert  $S_i \in \mathcal{S}$  mit  $U = \bigcup_{i \in I} S_i$

**Subbasis**, falls  $\forall U \in \mathcal{O}$  existieren  $I, K_i$  endlich sowie  $S_k \in \mathcal{S}$  mit

$$U = \bigcup_{i \in I} \bigcap_{k \in K_i} S_k.$$

**Bemerkung.** Ist  $\mathcal{S}$  eine Basis, so ist  $\mathcal{S}$  eine Subbasis.

**Beispiel.** Ist  $(X, d)$  ein metrischer Raum, so ist

$$\mathcal{S} = \{U(x, \varepsilon) \mid x \in X, \varepsilon > 0\}.$$

eine Basis der Topologie.

**Satz 6.2** (Erzeugte Topologie). Sei  $X$  eine Menge,  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$  eine Menge von Teilmengen. Dann existiert genau eine Topologie auf  $X$ , für die  $\mathcal{S}$  eine Subbasis ist, nämlich:

$$\mathcal{O} = \left\{ U \subseteq X \mid U = \bigcup_{i \in I} \bigcap_{k \in K_i} S_k \text{ mit } |K_i| < \infty, S_k \in \mathcal{S} \right\}.$$

*Beweis.* Übung als **Aufgabe 3.2**. □

**Notation<sup>†</sup>.** Wir nennen  $\mathcal{O}$  die **von  $\mathcal{S}$  erzeugte Topologie**.

**Lemma 6.3** (Stetigkeit auf Subbasiselementen). Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung zwischen topologischen Räumen,  $\mathcal{S}$  eine Subbasis von  $Y$ . Dann sind äquivalent:

- 1)  $f$  ist stetig
- 2)  $f^{-1}(S)$  ist offen für alle  $S \in \mathcal{S}$

*Beweis.* '1)  $\Rightarrow$  2)' ist klar, da Subbasiselemente offen sind.

'2)  $\Rightarrow$  1)'. Sei  $U \subseteq Y$  offen, dann  $\exists K_i$  endlich und  $S_k \in \mathcal{S}$  mit

$$U = \bigcup_{i \in I} \bigcap_{k \in K_i} S_k.$$

Dann ist aber genau

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} \bigcap_{k \in K_i} \underbrace{f^{-1}(S_k)}_{\text{offen}}.$$

offen, weil endliche Schnitte und beliebige Vereinigung offener Mengen offen sind. Also ist  $f$  stetig. □

**Satz 6.4.** Eine Subbasis  $\mathcal{S}$  von  $(X, \mathcal{O})$  ist eine Basis genau dann, wenn

$$\forall S_1, S_2 \in \mathcal{S} \exists S_i \in \mathcal{S} : S_1 \cap S_2 = \bigcup_{i \in I} S_i.$$

*Beweis.* ' $\Rightarrow$ ' Da  $S_1, S_2 \in \mathcal{S}$  sind diese offen. Dann ist auch  $S_1 \cap S_2$  offen. Ist  $\mathcal{S}$  Basis, dann gibt es also  $S_i \in \mathcal{S}$  mit

$$S_1 \cap S_2 = \bigcup_{i \in I} S_i.$$

' $\Leftarrow$ ' Angenommen,  $U \subseteq X$  ist offen und von der Form

$$U = \bigcup_{i \in I} \left( \bigcap_{k \in K_i} S_k \right).$$

mit  $K_i$  endlich und  $S_k \in \mathcal{S}$ . Nach Annahme ist

$$\bigcap_{k \in K_i} S_k = \bigcup_{j \in J_i} S_j.$$

und damit ist

$$U = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J_i} S_j.$$

□

**Bemerkung\*.** Nach Annahme ist eigentlich erstmal der Schnitt von 2 Mengen die Vereinigung von  $S_i$ . Allerdings kann man dies per Induktion leicht auf  $n$  Teilmengen verallgemeinern, wenn wir

$$\bigcap_{k=1}^n S_k = S_1 \cap \bigcap_{k=2}^n S_k = S_1 \cap \bigcup_{i \in I} S_i = \bigcap_{i \in I} (S_1 \cap S_i) = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J_i} S_j.$$

für geeignete  $S_i, S_j \in \mathcal{S}$  schreiben.

**Satz 6.5** (Satz von Alexander). Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $\mathcal{S}$  eine Subbasis. Dann ist  $X$  kompakt genau dann, wenn jede Überdeckung durch Elemente aus  $\mathcal{S}$  eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

*Beweis.* '⇒' ist klar.

'⇐' Angenommen,  $X$  ist nicht kompakt, dann betrachte die Menge

$$\mathcal{C} := \{U \mid U \text{ offene Überdeckung ohne endliche Teilüberdeckung}\} \neq \emptyset.$$

Es ist  $\mathcal{C}$  partiell geordnet, indem wir  $U \leq U'$  für  $U \subseteq U'$  setzen.

Ist  $U_1 \subseteq U_2 \subseteq \dots$  eine Kette, so ist  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i \in \mathcal{C}$ , denn

- Offenbar ist  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i$  eine offene Überdeckung.
- Hat  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i$  eine endliche Teilüberdeckung, so ist diese schon in einem  $U_i$  enthalten, und damit enthielte auch dieses  $U_i$  bereits eine endliche Teilüberdeckung ↯

Wir können also das Lemma von Zorn anwenden, und somit existiert ein maximales Element  $U \in \mathcal{C}$ .

**Behauptung 1.** Ist  $V \subseteq X$  offen und  $V \notin U$ , so hat  $U \cup \{V\}$  eine endliche Teilüberdeckung

*Unterbeweis.* Sonst wäre  $U \cup \{V\} \in \mathcal{C}$  und somit wäre  $U$  nicht maximal ■

**Behauptung 2.**  $U \cap \mathcal{S}$  ist keine Überdeckung

*Unterbeweis.* Sonst hätte  $U$  eine endliche Teilüberdeckung nach Annahme. ■

Wegen Behauptung 2 existiert  $x \in X$ , der nicht von  $U \cap \mathcal{S}$  überdeckt wird. Sei  $W \in U$  mit  $x \in W$ . Da  $W$  offen ist, folgt

$$W = \bigcup_{i \in I} \bigcap_{k \in K_i} S_k.$$

mit  $K_i$  endlich und  $S_k \in \mathcal{S}$ . Dann existieren also  $S_1, \dots, S_n$  mit

$$x \in \bigcap_{i=1}^n S_i \subseteq W.$$

Da  $x$  nicht von  $U \cap \mathcal{S}$  überdeckt wird, ist  $S_i \notin U$ . Aus der ersten Behauptung wissen wir nun aber, dass es  $U_1^i, \dots, U_{n_i}^i \in U$  mit

$$\left\{ U_j^i \right\}_{j=1}^{n_i} \cup \{S_i\} \quad \text{ist Überdeckung von } X.$$

Sei nun

$$\hat{U} := \left\{ U_j^i \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n_i \right\} \subseteq U.$$

Für alle  $i$  gilt also

$$X \subseteq \bigcup_{V \in \hat{U}} V \cup S_i.$$

Also folgt

$$X \setminus \bigcup_{V \in \hat{U}} V \subseteq S_i.$$

und damit ist auch

$$X \setminus \bigcup_{V \in \hat{U}} V \subseteq S_1 \cap \dots \cap S_n \subseteq W \in U.$$

Also ist  $\hat{U} \cup \{W\}$  eine endliche Teilüberdeckung von  $U$ ,  $\nsubseteq$ .

□

Vorlesung 6  
Do 29 Apr 2021 10:01

## 7 Produkte

**Definition 7.1** (Produkttopologie). Seien  $X_1, X_2$  topologische Räume. Die **Produkttopologie** auf  $X_1 \times X_2$  ist die Topologie erzeugt von

$$\mathcal{B} = \{U_1 \times U_2 \mid U_1 \subseteq X_1 \text{ offen}, U_2 \subseteq X_2 \text{ offen}\}.$$

**Beispiel.** Seien  $(X_1, d_1)$  und  $(X_2, d_2)$  metrische Räume. Auf  $X_1 \times X_2$  haben wir die Metriken definiert durch

$$\begin{aligned} d_{\max}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) &:= \max \{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\} \\ \tilde{d}_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)) &:= d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2) \\ \tilde{d}_2((x_1, x_2), (y_1, y_2)) &:= \sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2} \end{aligned}$$

Dies Metriken sind paarweise äquivalent (leicht zu prüfen). Zudem sind  $\varepsilon$ -Bälle in  $d_{\max}$  gegeben durch

$$U_{d_{\max}}((x_1, x_2), \varepsilon) = U_{d_1}(x_1, \varepsilon) \times U_{d_2}(x_2, \varepsilon).$$

D.h. die von  $d_{\max}$  induzierte Topologie ist die Produkttopologie.

**Beispiel.** Es ist  $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , wobei wir auf der linken Seite die Standardtopologie und auf der rechten Seite die Produkttopologie meinen.

**Bemerkung.**  $\mathcal{B}$  ist per Definition eine Subbasis der Produkttopologie, in der Tat handelt es sich jedoch sogar um eine Basis:

*Beweis.* Seien  $U_1 \times U_2$  sowie  $V_1 \times V_2 \in \mathcal{B}$  Basiselemente. Wir stellen fest, dass

$$(U_1 \times U_2) \cap (V_1 \times V_2) = (U_1 \cap V_1) \times (U_2 \cap V_2).$$

das Produkt zweier Basiselemente ist, und somit sind wir fertig.  $\square$

**Satz 7.2** (Projektion auf Komponenten). Die Projektionen

$$p_x : \begin{array}{ccc} X \times Y & \longrightarrow & X \\ (x, y) & \longmapsto & x \end{array} \quad p_y : \begin{array}{ccc} X \times Y & \longrightarrow & Y \\ (x, y) & \longmapsto & y \end{array}$$

sind stetig und offen

*Beweis.* Sei  $U \subseteq X$  offen. Dann ist  $p_x^{-1}(U) = U \times Y \in \mathcal{B}$ , also offen. Analoges gilt für  $p_y$ .

Sei  $U \subseteq X \times Y$  offen. Dann können wir  $U$  schreiben als

$$U = \bigcup_{i \in I} U_i \times V_i.$$

OBdA können wir  $V_i \neq \emptyset$  annehmen. Dann ist aber

$$p_x(U) = \bigcup_{i \in I} p_x(U_i \times V_i) = \bigcup_{i \in I} U_i \subseteq X.$$

offen, also ist  $p_x$  offen.  $\square$

Was passiert mit der leeren Menge? Hierzu erinnern wir uns an

$$X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}.$$

also

$$X \times \emptyset = \{(x, y) \mid x \in X, y \in \emptyset\} = \emptyset.$$

**Bemerkung.** Die Projektion  $p_x$  ist i.A. nicht abgeschlossen.

*Beweis.* Betrachte  $A = \left\{ \left( \frac{1}{n}, n \right) \in \mathbb{R}^2 \mid n \in \mathbb{N}_{>0} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$  abgeschlossen. Dann ist aber  $p_1(A) = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}_{>0} \right\} \subseteq \mathbb{R}$  nicht abgeschlossen.  $\square$

**Satz 7.3.** Ist  $Y$  kompakt, so ist  $p_x$  abgeschlossen.

*Beweis.* Sei  $A \subseteq X \times Y$  abgeschlossen. Wir müssen zeigen, dass  $X \setminus p_x(A)$  offen ist, also wähle  $x \in X \setminus p_x(A)$ . Für alle  $y \in Y$  ist  $(x, y) \notin A$  (sonst wäre  $x \in p_x(A)$ ), also gibt es

$$x \in U_y \subseteq X \quad y \in V_y \subseteq Y \text{ offen: } (U_y \times V_y) \cap A = \emptyset.$$

Damit sind die  $\{V_y\}_{y \in Y}$  eine offene Überdeckung von  $Y$  und wir finden mit  $Y$  kompakt eine endliche Teilüberdeckung  $V_{y_1}, \dots, V_{y_n}$  von  $Y$ . Setzen wir nun

$$U := \bigcap_{i=1}^n U_{y_i}.$$

so ist  $U \subseteq X$  offen als endlicher Schnitt und wir stellen mit

$$U \times V_{y_i} \subseteq U_{y_i} \times V_{y_i} \subseteq (X \times Y) \setminus A.$$

fest, dass bereits  $U \times Y \subseteq (X \times Y) \setminus A$  (weil die  $V_{y_i}$  bereits  $Y$  überdecken).  
Nun muss aber bereits

$$U \subseteq X \setminus p_X(A).$$

gelten, und damit ist dieses  $U$  eine offene Umgebung von  $x \in X \setminus p_X(A)$ .



□

**Lemma 7.4** (Subbasis der Produkttopologie). Seien  $X, Y$  topologische Räume. Die Menge

$$\mathcal{S} = \{U \times Y, X \times V \mid U \subseteq X \text{ offen}, V \subseteq Y \text{ offen}\}.$$

ist eine Subbasis der Produkttopologie.

*Beweis.* Sei  $W \subseteq X \times Y$  offen. Dann gibt es nach der Definition der Produkttopologie  $U_i \subseteq X, V_i \subseteq Y$  offen mit

$$W = \bigcup_{i \in I} (U_i \times V_i).$$

Also ist bereits

$$W = \bigcup_{i \in I} ((U_i \times Y) \cap (X \times V_i)).$$

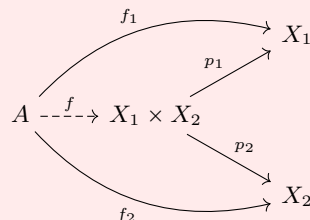
eine Vereinigung endlicher Schnitt von unseren Subbasiselementen.

Umgekehrt ist klar, dass alle Elemente aus  $\mathcal{S}$  auch offene Mengen in der Produkttopologie sind, da  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}$ . □

**Satz 7.5** (Universelle Eigenschaft des Produkts). Seien  $A, X_1, X_2$  topologische Räume sowie  $f_i : A \rightarrow X_i$ . Dann ist die Abbildung

$$(f_1 \times f_2) =: f \mid \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X_1 \times X_2 \\ a & \longmapsto & (f_1(a), f_2(a)) \end{array}$$

stetig genau dann, wenn  $f_1, f_2$  stetig sind.



*Beweis.* Es ist  $f_i = p_i \circ f$ . Ist  $f$  stetig, so ist  $f_i$  stetig als Verknüpfung stetiger Funktionen.

Angenommen, es sind  $f_1, f_2$  stetig. Wir müssen zeigen, dass für alle  $U_1 \times U_2 \subseteq X_1 \times X_2$  mit  $U_i \subseteq X_i$  offen auch  $f^{-1}(U_1 \times U_2)$  offen ist. Hierzu stellen wir aber fest, dass

$$f^{-1}(U_1 \times U_2) = f_1^{-1}(U_1) \cap f_2^{-1}(U_2).$$

offen ist. □

**Beispiel.** a) Wir behaupten, dass

$$\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \cong S^n \times (0, \infty) \cong S^n \times \mathbb{R}.$$

ist. Betrachte hierzu

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} & \longrightarrow & S^n \times (0, \infty) \\ x & \longmapsto & \left( \frac{x}{\|x\|_2}, \|x\|_2 \right) \end{cases}$$

Wir sehen nun mit der universellen Eigenschaft sofort, dass es sich um eine stetige Abbildung handelt. Zudem haben wir die Umkehrfunktion

$$\begin{aligned} S^n \times (0, \infty) &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \\ (y, t) &\longmapsto t \cdot y \end{aligned}$$

Wir müssen noch prüfen, dass diese stetig ist (Übung), dann haben wir einen Homöomorphismus.

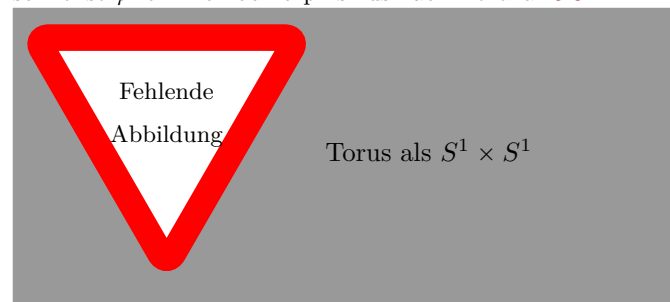
b)  $S^1 \times S^1$  ist ein Torus. Betrachte hierzu

$$\varphi : \begin{cases} [0, 1]^2 & \longrightarrow & S^1 \times S^1 \\ (s, t) & \longmapsto & (e^{2\pi i s}, e^{2\pi i t}) \end{cases}$$

$\varphi$  ist stetig und erfüllt  $\varphi(s, 0) = \varphi(s, 1)$  sowie  $\varphi(0, t) = \varphi(1, t)$ .

$$\begin{array}{ccc} [0, 1]^2 & \xrightarrow{\varphi} & S^1 \times S^1 \\ \downarrow & \nearrow \varphi' & \\ [0, 1]^2 / \sim & & \end{array}$$

wobei  $\sim$  die Relation ist, die wir für die Konstruktion des Torus verwendet hatten.  $\varphi'$  ist stetig und surjektiv nach der Universellen Eigenschaft, und wir sehen leicht, dass  $\varphi'$  injektiv ist. Also ist  $\varphi'$  stetig und bijektiv. Nun ist aber  $[0, 1]^2$  kompakt und  $S^1 \times S^1$  Hausdorff (z.B. als metrisierbare Teilmenge von  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ ), und somit ist  $\varphi'$  ein Homöomorphismus nach **Korollar 5.8**





**Korollar 7.6** (Komponente eines Produkts). Seien  $X, Y$  topologische Räume sowie  $y \in Y$ . Dann ist  $X \cong X \times \{y\} \subseteq X \times Y$  mittels  $x \mapsto (x, y)$ .

**Bemerkung\*** (Nummerierung). Dieses Korollar ist in der schriftlichen Fassung falsch als 7.5 nummeriert.

*Beweis.* Nenne diese Abbildung  $f$ , also

$$f : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X \times Y \\ x & \longmapsto & (x, y) \end{array}$$

$f$  ist stetig, da sowohl  $\text{id}_X$  als auch

$$c_Y : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ x & \longmapsto & y \end{array}$$

stetig sind (mit universeller Eigenschaft).  $f$  faktorisiert nun über  $X \times \{y\} \subseteq X \times Y$  und  $f : X \rightarrow X \times \{y\}$  ist offensichtlich bijektiv. Wir müssen also noch zeigen, dass  $f$  offen ist.

Sei  $U \subseteq X$  offen, dann ist  $U \times Y \subseteq X \times Y$  offen. Es ist zudem

$$f(U) = U \times \{y\} = U \times Y \cap X \times \{y\} \subseteq X \times \{y\}.$$

in  $X \times \{y\}$  offen. □

**Satz 7.7** (Produkteigenschaften). Seien  $X, Y$  topologische Räume.

- 1) Sind  $X$  und  $Y$  Hausdorffsch, so auch  $X \times Y$
- 2) Sind  $X$  und  $Y$  kompakt, so auch  $X \times Y$ .

*Beweis.* 1) Seien  $(x, y) \neq (x', y') \in X \times Y$ . Dann ist  $x \neq x'$  oder  $y \neq y'$ .  
 OBdA sei  $x \neq x'$ . Dann existieren  $U, U' \subseteq X$  offen mit  $x \in U, x' \in U'$  und  $U \cap U' = \emptyset$ , weil  $X$  Hausdorffsch. Dann sind

$$(x, y) \in U \times Y \quad (x', y') \in U' \times Y.$$

jeweils offen, und ihr Schnitt ist

$$(U \times Y) \cap (U' \times Y) = (U \cap U') \times Y = \emptyset.$$

Also ist  $X \times Y$  Hausdorffsch.

- 2) Wir wollen den **Satz von Alexander** (6.5) verwenden. Sei  $\mathcal{U}$  eine offene Überdeckung von  $X \times Y$  mit Elementen der Form  $U \times Y$  oder  $X \times V$ . Sei

$$W = \bigcup_{U \times Y \in \mathcal{U}} U \subseteq X \quad W' = \bigcup_{X \times V \in \mathcal{U}} V \subseteq Y.$$

Ist  $W = X$ , so existiert eine endliche Teilüberdeckung von  $\{U \mid U \times Y \in \mathcal{U}\}$  durch  $U_1, \dots, U_n$ . Dann ist bereits

$$\{U_i \times Y \mid i = 1, \dots, n\}.$$

eine endliche Teilüberdeckung von  $X \times Y$ . Für  $W' = Y$  verfahren wir genauso. Ist  $W \neq X$  und  $W' \neq Y$ , so existiert  $x \in X \setminus W, y \in Y \setminus W'$ . Dann ist  $(x, y)$  aber nicht von  $\mathcal{U}$  überdeckt, weil er von keinem  $U \times Y$  und von keinem  $X \times V$  überdeckt wird,  $\nexists$ .

Also finden wir in beiden Fällen eine endliche Teilüberdeckung. □

**Bemerkung.** Der Beweis geht auch ohne den **Satz von Alexander**. Viel leichter: Es genügt, offene Überdeckungen bezüglich einer Basis zu betrachten (Spezialfall von Alexander, leicht zu zeigen), dann verfahren wir wie folgt:  
Sei  $\mathcal{U}$  eine Überdeckung von  $X \times Y$  mit Elementen aus  $\mathcal{B}$ . Dann gibt es eine endliche Teilüberdeckung von  $X \times \{y\}$ . Sei diese  $\{U_i^y \times V_i^y\}_{i=1}^{n_y}$ . Setze

$$V_y := \bigcap_{i=1}^{n_y} V_i^y.$$

Dann ist dies eine Überdeckung von  $X \times Y$ . Die  $V_y$  bilden nun eine offene Überdeckung von  $Y$ , also finden wir wieder eine endliche Teilüberdeckung durch  $V_{y_1}, \dots, V_{y_n}$ . Da wir aber die  $X \times V_{y_i}$  jeweils endlich überdeckt haben, können wir nun auch  $X \times Y$  endlich überdecken.



**Definition<sup>†</sup>** (Produkt endlich vieler Mengen). Seien  $X_1, \dots, X_n$  topologische Räume. Dann definieren wir ihr Produkt rekursiv durch

$$X_1 \times \dots \times X_n := (X_1 \times \dots \times X_{n-1}) \times X_n.$$

**Lemma 7.8** (Basis des Produktes). Seien  $X, Y$  topologische Räume mit Basen  $\mathcal{B}_X, \mathcal{B}_Y$ . Dann ist

$$\mathcal{B}_{X \times Y} := \{U \times V \mid U \in \mathcal{B}_X, V \in \mathcal{B}_Y\}.$$

eine Basis der Topologie auf  $X \times Y$ .

**Korollar** (Basis endlicher Produkte). Die Mengen  $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$  mit  $U_i \subseteq X_i$  offen sind eine Basis der Topologie auf  $X_1 \times \dots \times X_n$ . Insbesondere ist die Topologie unabhängig von der Klammerung.

*Beweis.* Setze  $\mathcal{B}_{X_i} = \mathcal{O}_{X_i}$ . □

*Beweis von Lemma 7.8.* Seien  $W \in X, W' \subseteq Y$  offen. Dann existieren  $U_i \in \mathcal{B}_X$  sowie  $V_j \in \mathcal{B}_Y$  mit

$$W = \bigcup_{i \in I} U_i \quad W' = \bigcup_{j \in J} V_j.$$

Dann ist bereits:

$$W \times W' = \bigcup_{\substack{i \in I \\ j \in J}} U_i \times V_j.$$

Ist nun  $A \subseteq X \times Y$  beliebig offen, so gilt

$$A = \bigcup W_i \times W'_i = \bigcup_{\substack{i \in I \\ j \in J}} U_i \times V_j.$$

Umgekehrt ist klar, dass die  $U_i \times V_j$  offen in der Produkttopologie sind.  $\square$

**Bemerkung\*.** Im Beweis wurden - der Einfachheit halber - manche Indexmengen

**Bemerkung\*.** Eigentlich haben wir im Beweis des Korollars die Aussage von **Lemma 7.8** für beliebig viele Räumen (endlich viele) benutzt. Man verallgemeinert das Lemma jedoch induktiv leicht auf endlich viele Räume:

*Beweis von Lemma 7.8\*.* Den Fall  $n = 2$  verwenden wir als Induktionsanfang, er wurde bereits gezeigt. Seien nun  $X_1, \dots, X_n$  mit Basen  $\mathcal{B}_i$  gegeben, dann wissen wir per Induktionsannahme bereits, dass

$$\mathcal{B}_{X_1 \times \dots \times X_{n-1}} := \{U_1 \times \dots \times U_{n-1} \mid U_i \in \mathcal{B}_i\}.$$

eine Basis von  $X_1 \times \dots \times X_{n-1}$  ist. Zudem ist  $\mathcal{B}_n$  eine Basis von  $X_n$  und somit ist

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{(X_1 \times \dots \times X_{n-1}) \times X_n} &:= \{(U_1 \times \dots \times U_{n-1}) \times U_n \mid U_i \in \mathcal{B}_i\} \\ &= \{U_1 \times \dots \times U_n \mid U_i \in \mathcal{B}_i\} \\ &=: \mathcal{B}_{X_1 \times \dots \times X_n} \end{aligned}$$

eine Basis von  $(X_1 \times \dots \times X_{n-1}) \times X_n = X_1 \times \dots \times X_n$  und der Induktionsschritt ist erbracht.  $\square$

**Satz 7.9** (Diagonaleigenschaft). Sei  $X$  ein topologischer Raum. Dann ist  $X$  Hausdorffsch, genau dann, wenn

$$\Delta_X := \{(x, x) \mid x \in X\} \subseteq X \times X.$$

abgeschlossen ist.

**Notation.** Wir nennen  $\Delta_X \subseteq X^2$  die **Diagonale von  $X$** .

*Beweis.* '⇒' Nimm an, dass  $X$  Hausdorffsch ist und sei  $(x, y) \in X \times X \setminus \Delta_X$ , d.h.  $x \neq y$ . Dann existieren  $U_x, U_y$  offen (in  $X$ ), sodass  $U_x \cap U_y = \emptyset$ . Also ist

$$(x, y) \in U_x \times U_y \subseteq X \times X \setminus \Delta_X.$$

, denn wenn  $(a, b) \in U_x \times U_y$ , dann ist  $a \neq b$ . Also ist  $X \times X \setminus \Delta_X$  offen nach Definition.

' $\Leftarrow$ ' Nimm nun an, dass die Diagonale abgeschlossen ist. Seien  $x, y \in X$  mit  $x \neq y$  beliebig. Dann ist

$$(x, y) \in X \times X \setminus \Delta_X = \bigcup_{i \in I} U_i \times V_i.$$

Also ist  $(x, y) \in U \times V \subseteq X \times X \setminus \Delta_X$  für eine Wahl von  $U, V$ . Dann ist aber  $x \in U, y \in V$  sowie  $U \cap V = \emptyset$ , denn wenn  $a \in U \cap V$ , so  $(a, a) \in U \times V \cap \Delta_X = \emptyset$ ,  $\nexists$ .  $\square$

**Definition 7.10** (Produkte beliebiger Mengen). Sei  $\{X_i\}_{i \in I}$  eine Familie topologischer Räume. Die Produkttopologie auf

$$\prod_{i \in I} X_i := \{(x_i)_{i \in I} \mid x_i \in X_i\}.$$

ist die Topologie erzeugt von der Subbasis

$$\mathcal{S} := \left\{ U_j \times \prod_{i \neq j} X_i \mid j \in I, U_j \subseteq X_j \text{ offen} \right\}.$$

**Bemerkung.** •  $\mathcal{S}$  ist wirklich nur eine Subbasis. Eine Basis ist gegeben durch

$$\mathcal{B} := \left\{ \prod_{j \in J} U_j \times \prod_{i \in I \setminus J} X_i \mid J \subseteq I \text{ endlich}, U_j \subseteq X_j \text{ offen} \right\}.$$

d.h. wir dürfen bei endlich vielen Faktoren eine endliche Teilmenge wählen, und wählen in den restlichen Faktoren den ganzen Raum

- Ist  $I$  endlich, so stimmt dies mit der vorherigen Definition überein, weil wir für die Basis jeweils  $J = I$  wählen können.
- $\triangle$  Ist  $I$  unendlich, so ist im Allgemeinen

$$\prod_{i \in I} U_i.$$

mit  $U_i \subseteq X_i$  offen nicht offen.

**Bemerkung\*** (Mengentheorie-Spam). • Wir benötigen das Auswahlaxiom, um einzusehen, dass obiges Produkt überhaupt nichtleer ist, sofern keiner der Faktoren leer ist. Formal ist das Produkt der  $X_i$  nämlich definiert als

$$\prod_{i \in I} X_i := \left\{ f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i \mid \forall i: f(i) \in X_i \right\}.$$

und das Auswahlaxiom besagt genau, dass es für jede solche Familie nichtleerer Mengen (mindestens) eine solche Funktion gibt (es ist also äquivalent dazu, dass die Produkte nichtleer sind).

- Im Gegensatz zu dem, was in der Vorlesung genannt wurde, ist es kein Problem, wenn  $I = \emptyset$ , also die Familie leer ist. Dann ist nämlich

$$\prod_{i \in I} X_i = \{f : \emptyset \rightarrow \emptyset \mid \forall i: f(i) \in \emptyset\} = \{\emptyset\}.$$

nicht leer. (Hierzu sollte man sich klarmachen, dass eine Funktion  $f : A \rightarrow B$  eine Teilmenge von  $A \times B$  war, sodass  $\forall a \in A \exists! b \in B: (a, b) \in f$ , und somit suchen wir eine Teilmenge  $f \subseteq \emptyset \times \emptyset = \emptyset$ ).

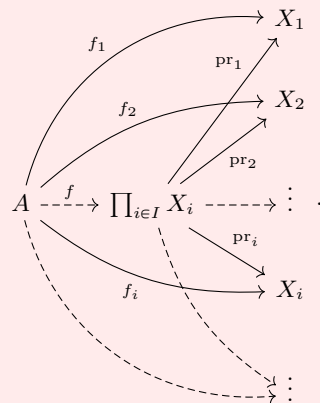
Auch die Topologie ist in diesem Fall wohldefiniert, weil die Subbasis wieder die leere Menge ist (nämlich eine Teilmenge von  $\prod X_i = \{\emptyset\}$ , und zwar  $\{\emptyset\}$  selbst), und diese ist auch eine vollständige Topologie, weil unser topologischer Raum nur einen Punkt enthält (nämlich  $\emptyset$ ). Wir erhalten also den einpunktigen topologischen Raum.

Vorlesung 7  
Di 04 Mai 2021 12:12

**Satz 7.11** (Universelle Eigenschaft des Produkts). Seien  $(X_i)_{i \in I}$  topologische Räume,  $A$  ein topologischer Raum und seien  $f_i : A \rightarrow X_i$  Funktionen. Sei

$$f : \begin{cases} A & \longrightarrow & \prod_{i \in I} X_i \\ a & \longmapsto & (f_i(a))_{i \in I} \end{cases}$$

Dann ist  $f$  stetig genau dann, wenn alle  $f_i$  stetig sind.



**Bemerkung\*.** Die Universelle Eigenschaft ist genau genommen die Folgende:

Seien  $(X_i)_{i \in I}$  topologische Räume. Ein topologischer Raum  $X$  zusammen mit Abbildungen  $pr_i : X \rightarrow X_i$  wird Produkt der  $X_i$  genannt, wenn es für jedes  $A$  und stetige Abbildungen  $f_i : A \rightarrow X_i$  genau eine induzierte Abbildung  $f : A \rightarrow X$  gibt.

Diese Eigenschaft ist nun universell im Sinne der Kategorientheorie, d.h. bis auf eindeutig bestimmten Isomorphismus gibt es nur ein Paar  $(X, (pr_i)_{i \in I})$ , das die oben genannten Eigenschaften bestimmt.

Wir haben zwar oben nicht die Eindeutigkeit des Produkts gezeigt,

aber dessen Existenz (was aus der Kategorientheorie nicht ohne weiteres folgt), indem wir ein explizites solches Objekt konstruiert haben.

**Bemerkung\*.** Insbesondere sollte man sich merken, dass die kanonischen Projektionen  $\text{pr}_i$  wichtiger Teil der Information eines Produktes sind. Bei unsere expliziten Konstruktion 'kanonisch', denkbar ist jedoch auch, eine völlig andere Trägermenge des Produkts zu wählen, dann ist die Angabe der Projektionen essentiell.

**Lemma und Definition<sup>†</sup>.** Sei  $j \in I$ , setze

$$\text{pr}_j : \begin{cases} \prod_{i \in I} X_i & \longrightarrow X_j \\ (x_i)_{i \in I} & \longmapsto x_j \end{cases}$$

als **Projektion** auf die  $j$ -te Komponente. Dann ist  $\text{pr}_j$  stetig.

*Beweis.* Ist  $U \subseteq X_j$  offen, dann ist  $\text{pr}_j^{-1}(U) = U \times \prod_{i \neq j} X_i \in \mathcal{S}$  ein Element der Subbasis der Produkttopologie, also offen. Also ist  $\text{pr}_j$  stetig.  $\square$

*Beweis von Satz 7.11.* ' $\Rightarrow$ '  $f_j = \text{pr}_j \circ f$  ist stetig als Verknüpfung stetiger Funktionen.

**Verknüpfungen stetiger Funktionen sind stetig:**

Seien  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow Z$  stetig, dann ist  $g \circ f : X \rightarrow Z$  stetig.

*Beweis.* Ist  $U \subseteq Z$  offen, so ist

$$(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U)) \subseteq X.$$

offen, indem wir zunächst  $g$  stetig und dann  $f$  stetig verwenden.  $\square$

' $\Leftarrow$ ' Es genügt zu zeigen, dass  $f^{-1}(Y) \subseteq A$  offen ist für alle  $Y \in \mathcal{S}$ . Sei also solch ein  $Y \in \mathcal{S}$  beliebig, dann ist dieses von der Form

$$Y = U \times \prod_{i \neq j} X_i.$$

Dann ist  $f^{-1}(Y) = f_j^{-1}(U) \subseteq A$  offen, da  $f_j$  stetig ist.  $\square$

**Satz 7.12** (Satz von Tychonoff). Sei  $(X_i)_{i \in I}$  eine Familie kompakter Räume. Dann ist  $\prod_{i \in I} X_i$  kompakt.

*Beweis.* Wir verwenden wieder den **Satz von Alexander** (Satz 6.5). Sei  $\mathcal{U}$  eine Überdeckung durch Elemente aus  $\mathcal{S}$ . Sei  $\mathcal{U}_j \subseteq \mathcal{U}$  gegeben durch die Elemente  $V$  von  $\mathcal{U}$  der Form

$$V = W \times \prod_{i \neq j} X_i \quad \text{mit } W \subseteq X_j \text{ offen.}$$

Dann ist

$$\mathcal{U} = \bigsqcup_{i \in I} \mathcal{U}_i.$$

Ist nun

$$\text{pr}_i(\mathcal{U}_i) = \{\text{pr}_i(V) \mid V \in \mathcal{U}_i\}.$$

eine offene Überdeckung von  $X_i$ , so existiert - weil  $X_i$  kompakt - eine endliche Teilüberdeckung  $\text{pr}_i(V_1) \cup \dots \cup \text{pr}_i(V_k)$  von  $X_i$  mit  $V_j \in \mathcal{U}_i$ . Dann ist  $V_1, \dots, V_k$  eine endliche Teilüberdeckung von  $\prod_{i \in I} X_i$ .

Wir sind also fertig, außer im Fall

A:  $\text{pr}_i(\mathcal{U}_i)$  ist keine Überdeckung von  $X_i$  für alle  $i \in I$ .

Dann finden wir  $x_i \in X_i \setminus \bigcup_{V \in \mathcal{U}_i} \text{pr}_i(V)$  für jedes  $i \in I$ . Dann ist aber der Punkt

$$(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i.$$

nicht von  $\mathcal{U}$  überdeckt: Ist  $(x_i)_{i \in I} \in V \in \mathcal{U}$ , dann gibt es  $i \in I$  mit  $V \in \mathcal{U}_i$ , und daraus folgt bereits  $x_i \in \text{pr}_i(V)$ ,  $\nexists$ .  $\square$

**Bemerkung.** Eigentlich haben wir die Notation  $\text{pr}_j$  für die Projektion  $\prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_j$  eingeführt, manchmal schreiben wir aber auch einfach nur  $p_j$ .

**Beispiel.** a) Seien  $X_1, \dots, X_n$  diskrete Räume. Dann ist auch  $\prod_{i \in I} X_i$  diskret.

*Beweis.* Es ist

$$\{(x_1, \dots, x_n)\} = \{x_1\} \times \dots \times \{x_n\}.$$

Element der Produkttopologie, weil die  $\{x_i\} \subseteq X_i$  offen sind. Also sind alle Punkte offen.  $\square$

b) Betrachte  $\{0, 2\}$  mit der diskreten Topologie. Dann ist

$$\prod_{\mathbb{N}} \{0, 2\} =: \{0, 2\}^{\mathbb{N}}.$$

kompakt nach dem **Satz von Tychonoff**. Dann ist  $\prod_{\mathbb{N}} \{0, 2\}$  aber nicht diskret, weil wir sonst die offene Überdeckung

$$\prod_{\mathbb{N}} \{0, 2\} = \bigcup_{x \in \{0, 2\}^{\mathbb{N}}} \{x\}.$$

hätten, die keine endliche Teilüberdeckung besitzt.

**Bemerkung\*.** Das Beispiel zeigt die wichtige Eigenschaft, dass nicht (notwendigerweise) alle Mengen der Form  $\prod_{i \in I} U_i$  für  $U_i \subseteq X_i$  offen auch im Produkt  $\prod_{i \in I} X_i$  offen sind.

**Satz 7.13.** Ist  $\{X_i\}_{i \in I}$  eine Familie von Hausdorffräumen, so ist auch  $\prod_{i \in I} X_i$  Hausdorffsch.

*Beweis.* Ist  $(x_i)_{i \in I} \neq (y_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i$ , dann gibt es  $i \in I$  mit  $x_i \neq y_i$ . Da

$X_i$  Hausdorffsch ist, existieren  $U_i, V_i \subseteq X_i$  offen mit  $x_i \in U_i, y_i \in V_i$  und  $U_i \cap V_i = \emptyset$ . Dann sind aber bereits

$$U_i \times \prod_{i \neq j} X_j \quad V_i \times \prod_{i \neq j} X_j.$$

zwei disjunkte, offene Umgebungen von  $(x_i)_{i \in I}$  und  $(y_i)_{i \in I}$ .  $\square$

**Ziel** (mündlich). Wir wollen uns im Folgenden Fragen, wann wir Räume in 'schöne' Räume einbetten können, wobei 'schön' für uns Kompakt + Hausdorff heißen soll.

**Definition 7.14** (Abschluss, Dichtheit). Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $Y \subseteq X$  eine Teilmenge.

- 1) Der **Abschluss**  $\bar{Y}$  ist definiert als

$$\bar{Y} := \bigcap_{\substack{Y \subseteq A \\ A \subseteq X \text{ abg.}}} A.$$

Als Schnitt abgeschlossener Mengen ist  $\bar{Y}$  selbst abgeschlossen (wie der Name suggeriert).

- 2)  $Y$  ist **dicht** in  $X$ , falls  $\bar{Y} = X$ .

**Definition 7.15** (Einbettung). Sei  $f : X \rightarrow Y$  stetig. Dann ist  $f$  eine **Einbettung**, falls  $f : X \rightarrow f(X)$  ein Homöomorphismus ist.

**Definition 7.16** (Kompaktifizierung). Sei  $\iota : Y \hookrightarrow X$  eine Einbettung. Dann ist  $X$  eine **Kompaktifizierung** von  $Y$ , falls

- 1)  $X$  ist kompakt und Hausdorffsch.
- 2)  $\iota(Y) \subseteq X$  ist dicht (in  $X$ ).

**Definition 7.17** (Vollständige Regularität). Ein topologischer Raum  $X$  ist **vollständig regulär**, falls

- 1)  $X$  ist Hausdorffsch
- 2)  $\forall A \subseteq X$  abgeschlossen und  $x \in X \setminus A$  existiert eine stetige Abbildung  $f : X \rightarrow [0, 1]$ , sodass  $f(x) = 1$  und  $f|_A \equiv 0$

**Bemerkung.** Jeder vollständig reguläre Raum ist regulär. Hierzu betrachte  $f^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$  sowie  $f^{-1}([0, \frac{1}{2}))$ . Diese sind offenbar disjunkt, offen, und Umgebungen von  $x$  bzw.  $A$ .

**Lemma 7.18.** Ist  $X$  vollständig regulär und  $Y \subseteq X$ , dann ist auch  $Y$  vollständig regulär.

*Beweis.* 1) Da  $X$  Hausdorffsch ist, ist auch  $Y$  Hausdorffsch.

- 2) Sei  $A \subseteq Y$  abgeschlossen und  $y \in Y \setminus A$ . Dann existiert  $A' \subseteq X$  abgeschlossen mit  $A' \cap Y = A$ . Da  $X$  vollständig regulär ist, gibt



es  $f : X \rightarrow [0, 1]$  stetig mit  $f|_{A'} \equiv 0$  und  $f(y) = 1$ . Dann erfüllt  $f|_Y : Y \rightarrow [0, 1]$  unsere gewünschten Bedingungen, weil

$$(f|_Y)|_A \equiv 0 \quad f|_Y(y) = 1.$$

□

**Satz 7.19.**  $X$  ist genau dann vollständig regulär, wenn  $X$  eine Kompaktifizierung besitzt.

*Beweis.* Eine Richtung sei hier schon skizziert: Sei  $Y$  eine Kompaktifizierung von  $X$ . Da  $Y$  kompakt und Hausdorffsch, ist  $Y$  normal (nach Satz 5.10). Wir zeigen später, dass dann  $Y$  auch vollständig regulär ist. Mit Lemma 7.18 ist also auch  $X \subseteq Y$  vollständig regulär. □

**Bemerkung\*.** Hier verwenden wir entscheidend, dass wir nicht nur  $X \hookrightarrow Y$  injektiv abgebildet, sondern eingebettet im Sinne von Definition 7.15 haben, damit wir  $X$  auch homöomorph mit einem Teilraum  $X \subseteq Y$  identifizieren können.

Wir wollen nun zu einem beliebigen Raum eine Kompaktifizierung konstruieren. Sei  $X$  ein topologischer Raum. Sei

$$\mathcal{C}(X) := \{f : X \rightarrow [0, 1] \mid f \text{ stetig}\}.$$

Nach dem Satz von Tychonoff ist  $\prod_{\mathcal{C}(X)} [0, 1]$  kompakt und nach Satz 7.13 Hausdorffsch. Definiere nun eine Abbildung

$$\iota : X \rightarrow \prod_{\mathcal{C}(X)} [0, 1].$$

durch die Komponenten  $\iota_f(x) = f(x)$ . (wir benutzen also in der  $f$ -ten Komponente einfach die Abbildung  $f$ ). Da alle  $f \in \mathcal{C}(X)$  stetig sind, ist  $\iota$  stetig (nach Satz 7.11). Setze nun

$$\beta X := \overline{\iota(X)} \subseteq \prod_{\mathcal{C}(X)} [0, 1].$$

$\beta(X)$  ist kompakt und Hausdorffsch als abgeschlossener Teilraum eines kompakten Hausdorffraums.

**Satz und Definition<sup>†</sup>** (Stone-Čech-Kompaktifizierung). Für einen topologischen Raum  $X$  heißt der eben konstruierte Raum  $\beta X = \beta(X)$  **Stone-Čech-Kompaktifizierung** von  $X$ .  $\beta X$  ist ein kompakter Hausdorffraum.

*Beweis\*.* Klar nach eben gesagtem, wir verwenden den Satz von Tychonoff und Satz 7.13. □

**Warnung.** Diese ist jedoch nur eine Kompaktifizierung im Sinne von Definition 7.16 falls  $X$  vollständig regulär ist.

**Bemerkung\*.** Wir wissen schon, dass es sich im Allgemeinen nicht um eine Kompaktifizierung nach Definition 7.16 handeln kann, weil wir im Beweis von Satz 7.19 gezeigt haben, dass eine Kompaktifizierung nur für vollständig reguläre Räume existieren kann. Der folgende Satz zeigt nun, dass es sich bei der Stone-Čech-Kompaktifizierung

tatsächlich um eine handelt, wenn  $X$  vollständig regulär ist:

**Satz 7.20.**  $\iota : X \rightarrow \prod_{C(X)} [0, 1]$  ist eine Einbettung, falls  $X$  vollständig regulär ist.

*Beweis. Injektivität:* Seien  $x \neq y \in X$ . Dann sind  $\{x\}, \{y\} \subseteq X$  abgeschlossen und es existiert  $f : X \rightarrow [0, 1]$  mit  $f(x) = 0$  und  $f(y) = 1$  (hier benutzen wir die vollständige Regularität). Dann ist aber bereits  $\iota(x) \neq \iota(y)$  in Komponenten  $f$ .

**Einbettung:** Wir müssen noch zeigen, dass  $\forall U \subseteq X$  offen  $\iota(U) \subseteq \iota(X)$  offen ist, damit  $\iota : X \rightarrow f(X)$  ein Homöomorphismus ist.

Sei  $U \subseteq X$  offen, setze  $A := X \setminus U$  und sei  $x \in U$ . Dann finden wir (nach vollständiger Regularität von  $X$ ) eine Funktion  $f : X \rightarrow [0, 1]$ , sodass  $f(x) = 1$  und  $f|_A = 0$ . Setze

$$V := \left( \frac{1}{2}, 1 \right]_f \times \prod_{C(X) \setminus \{f\}} [0, 1] \subseteq \prod_{C(X)} [0, 1].$$

als offene Teilmenge von  $\prod_{C(X)} [0, 1]$ . Dann ist

$$\iota(x) \in \underbrace{V \cap \iota(X)}_{\text{offen in } \iota(X)} \subseteq \iota(X \setminus A) = \iota(U).$$

Damit ist  $\iota(U) \subseteq X$  Umgebung all seiner Punkte, also selbst offen.  $\square$

**Bemerkung.** Ist  $K$  kompakt und Hausdorffsch, so ist  $\iota(K) \subseteq \prod_{C(K)} [0, 1]$  kompakt, also abgeschlossen, da  $\prod_{C(K)} [0, 1]$  kompakt, und deswegen ist  $\beta(K) = \overline{\iota(K)} = \iota(K) \cong K$ .

**Bemerkung\*.** Dass  $\iota(K) \cong K$  folgt in vorheriger Bemerkung daraus, dass wir wegen  $K$  kompakt und Hausdorffsch nach **Satz 5.10** wissen, dass  $K$  normal ist, und dann (mit der noch nicht bewiesene Implikation  $\text{normal} \Rightarrow \text{vollständig regulär}$ ) den vorherigen **Satz 7.20** anwenden können, weswegen  $\iota$  eine Einbettung ist und somit einen Homöomorphismus  $K \cong \iota(K)$  induziert.

*Beweis von Satz 7.19\*.* Wir haben bereits gesehen, dass ein kompaktifizierbarer Raum notwendigerweise vollständig regulär ist (im ersten Teil des Beweises). Ist  $X$  nun vollständig regulär, so ist  $\beta(X)$  ein kompakter Hausdorff-Raum, und nach **Satz 7.20** handelt es sich bei  $\iota_X : X \rightarrow \beta(X)$  genau um eine Einbettung.  $\square$

**Lemma 7.21** (Fortsetzung stetiger Funktionen). Sei  $f : X \rightarrow Y$  stetig sowie  $U \subseteq X$ .

- 1) Dann ist  $f(\overline{U}) \subseteq \overline{f(U)}$
- 2) Ist  $U \subseteq X$  dicht,  $g : X \rightarrow Y$  auch stetig und  $f|_U = g|_U$  sowie  $Y$  Hausdorffsch, so ist  $f = g$

**Bemerkung\*.** Der Beweis von **Lemma 7.21** ist genau **Aufgabe 4.1**.

*Beweis von Lemma 7.21\*.* 1) Sei  $y \in f(\overline{U})$ , also gibt es  $x \in \overline{U}$  mit  $f(x) = y$ . Sei  $y \in V \subseteq X$  eine beliebige offene Umgebung von  $y$ . Dann ist  $f^{-1}(V)$  eine offene Umgebung von  $x$  nach Stetigkeit von  $f$ . Da  $x \in \overline{U}$  ist  $f^{-1}(V) \cap U \neq \emptyset$  und wir wählen  $x_0 \in f^{-1}(V) \cap U$ . Dann ist  $f(x_0) \in V \cap f(U)$  und somit  $V \cap f(U) \neq \emptyset$ . Da  $V$  beliebig war, ist nach Definition  $y \in f(\overline{U})$ .

2) Nimm an, dass  $f \neq g$ , dann gibt es  $x \in X$  mit  $f(x) \neq g(x)$ . Da  $Y$  Hausdorffsch, können wir die beiden Punkte durch offene Mengen trennen, also finden wir  $f(x) \in U_f, g(x) \in U_g$  mit  $U_f \cap U_g = \emptyset$  und  $U_f, U_g$  offen. Dann sind auch  $f^{-1}(U_f), g^{-1}(U_g)$  offene Mengen nach Stetigkeit von  $f, g$ , also ist auch  $f^{-1}(U_f) \cap g^{-1}(U_g)$  offen. Zudem  $x \in f^{-1}(U_f) \cap g^{-1}(U_g)$ , da  $f(x) \in U_f, g(x) \in U_g$  nach Voraussetzung. Da  $U \subseteq X$  dicht ist, ist  $U \cap (f^{-1}(U_f) \cap g^{-1}(U_g)) \neq \emptyset$  und wir finden  $x_0 \in U \cap f^{-1}(U_f) \cap g^{-1}(U_g)$ . Dann ist wegen  $f|_U \equiv g|_U$   $f(x_0) = g(x_0)$ , aber auch  $f(x_0) \in U_f, g(x_0) \in U_g$ , also  $f(x_0) = g(x_0) \in U_f \cap U_g$ . Aber nach Voraussetzung ist  $U_f \cap U_g = \emptyset$ ,  $\nabla$ . Also  $f \equiv g$ .

□

**Satz 7.22** (Universelle Eigenschaft von  $\beta$ ). Sei  $f : X \rightarrow K$  stetig,  $K$  kompakt und Hausdorffsch. Dann existiert eine eindeutige Fortsetzung  $\hat{f} : \beta(X) \rightarrow K$ , so dass

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\iota} & \beta(X) \\ f \downarrow & \swarrow \hat{f} & \\ K & & \end{array} .$$

kommutiert.

Ist  $f(X) \subseteq K$  dicht, so ist  $\hat{f}$  surjektiv: Es ist  $\hat{f}(\beta(X))$  kompakt, also abgeschlossen und enthält  $f(X)$  (weil das Diagramm kommutiert), und daraus folgt  $\hat{f}(X) \subseteq \hat{f}(\beta(X))$ .

*Beweis.* Die Eindeutigkeit von  $\hat{f}$  folgt direkt aus **Lemma 7.21**, weil  $\hat{f}$  über die Kommutativität des Diagramms auf der dichten Teilmenge  $\iota(X) \subseteq \beta(X)$  bereits eindeutig bestimmt ist.

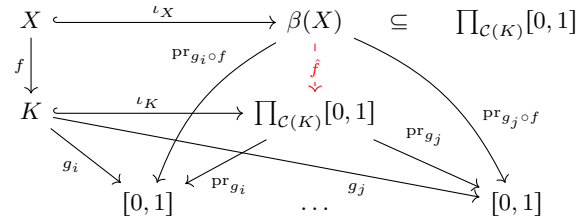
**Idee.** Ist  $K = [0, 1]$ , so wähle  $\hat{f} = \text{pr}_f|_{\beta(X)}$  als stetige Projektion. Dann kommutiert nämlich

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\iota} & \prod_{C(X)} [0, 1] \\ f \searrow & & \downarrow \text{pr}_f \\ & & [0, 1] \end{array} .$$

nach Konstruktion von  $\iota$ .

Das ganze können wir nun zwar nicht direkt für  $K$  machen, allerdings für jedes  $g \in \mathcal{C}(K)$ . Für jedes  $g \in \mathcal{C}(K)$  erhalten wir durch Komposition  $g \circ f \in \mathcal{C}(X)$  und damit nach vorheriger Überlegung eine Ab-

bildung  $\text{pr}_{g \circ f} |_{\beta(X)} : \beta(X) \rightarrow [0, 1]$ . Verwenden wir diese als Komponentenabbildung nach  $\prod_{C(K)} [0, 1]$ , so induzieren wir eine Abbildung  $\hat{f} = \prod \text{pr}_{g \circ f} |_{\beta(X)}$ :



Das linke obere Quadrat kommutiert auch: Hierzu müssen wir überprüfen, dass die Kompositionen mit den Projektionen auf die Komponenten von  $\prod_{C(K)} [0, 1]$  jeweils gleich sind, diese sind aber - nach Konstruktion - jeweils  $g_i \circ f$ .

Wegen  $\overline{\iota(X)} = \beta(X)$  ist nun

$$\begin{aligned}
 \hat{f}(\beta(X)) &= \hat{f}(\overline{\iota(X)}) \\
 &\stackrel{\text{Lemma 7.21}}{\subseteq} \overline{(\hat{f} \circ \iota_X)(X)} \\
 &\stackrel{\text{kommutiert}}{=} \overline{(\iota_K \circ f)(X)} \\
 &\subseteq \overline{\iota_K(K)} \\
 &\stackrel{K \text{ kompakt}}{=} \iota_K(K) \\
 &\stackrel{\text{Satz 7.20}}{\cong} K
 \end{aligned}$$

und damit können wir  $\hat{f}$  mit  $\iota_K^{-1}$  verknüpfen um unsere gewünschte Abbildung  $\beta(X) \rightarrow K$  zu erhalten.  $\square$

**Trivial Nonsense\*.**  $\beta(X)$  ist sogar ein Funktor von **Top** (Kategorie der topologischen Räume) nach **CHaus** (Kategorie der kompakten Hausdorff-Räume). Das liegt daran, dass wir im Beweis von **Satz 7.22** alle Schritte bis  $\hat{f}(\beta(X)) \subseteq \iota_K(K) = \beta(K)$  genauso durchführen können, ohne verwenden zu müssen, dass  $K$  kompakter Hausdorff-Raum ist, und wir damit für  $f : X \rightarrow K$  eine entsprechende Abbildung  $\hat{f} : \beta(X) \rightarrow \beta(K)$  induzieren, sodass

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\iota_X} & \beta(X) \\
 f \downarrow & & \downarrow \hat{f} \\
 K & \xrightarrow{\iota_K} & \beta(K)
 \end{array}$$

kommutiert. Alternativ können wir auch **Satz 7.22** auf die Abbildung  $\iota_K \circ f : X \rightarrow \beta(K)$  anwenden, da  $\beta(K)$  nach Konstruktion kompakt und Hausdorffsch ist.

**Bemerkung\*.** Man sollte nicht zu sehr darüber nachdenken, wie  $\beta(X)$  aussieht: Die Konstruktion des Raumes ist äußerst nicht-konstruktiv und benutzt implizit das Auswahlaxiom (damit wir Tychonoff nutzen können. Man kann sich auch überlegen, dass der Satz

von Tychonoff äquivalent ist zum Auswahlaxiom, weswegen wir auch nicht ohne es auskommen, das geht hier aber zu weit). Vielmehr sollte man die bloße Existenz eines solchen Raumes als theoretisches Ergebnis im Hinterkopf behalten, die wir benötigt haben, um die Frage nach der Kompaktifizierbarkeit eines Raumes zu beantworten. Auch der Spezialfall, dass  $\beta(X) = X$  für kompakte Hausdorff-Räume ist wichtig.

Vorlesung 8  
Do 06 Mai 2021 10:15

## 8 Vereinigungen

**Definition 8.1** (Disjunkte Vereinigung). Es sei  $\{X_i\}_{i \in I}$  eine Familie von Mengen. Die **disjunkte Vereinigung** der  $X_i$  ist definiert als

$$\coprod_{i \in I} X_i := \{(i, x) \mid i \in I, x \in X_i\}.$$

**Lemma<sup>†</sup>**. Für jedes  $j \in I$  ist die Abbildung

$$\iota_j : \begin{cases} X_j & \longrightarrow \coprod_{i \in I} X_i \\ x & \longmapsto (j, x) \end{cases}$$

injektiv und induziert eine Bijektion

$$X_j \leftrightarrow \{(j, x) \mid x \in X_j\} \subseteq \coprod_{i \in I} X_i.$$

Damit ist insbesondere

$$\coprod_{i \in I} X_i = \bigsqcup_{j \in I} \iota_j(X_j).$$

*Beweis.* Klar. □

**Trivial Nonsense\***. Bei  $\coprod_{i \in I} X_i$  handelt es sich um das Koprodukt der  $X_i$  in **Set**.

Ein Koprodukt erfüllt die gleiche Universelle Eigenschaft, wenn man die Richtung aller Abbildungen umdreht, d.h.  $X$  ist Koprodukt der  $X_i$  in **Set** genau dann, wenn  $X$  Produkt der  $X_i$  in **Set** op ist. Für eine genauere Formulierung vergleiche **Satz 8.3**.

**Notation\***. Ich bemühe mich, folgende Trennung in der Notation vorzunehmen:

- Das Zeichen  $\sqcup$  (eckige Vereinigung, `\sqcup`) steht zwar für eine disjunkte Vereinigung, allerdings soll es wie die normale Vereinigung behandelt werden und nur betonen, dass es sich um disjunkte Mengen handelt.
- Das Zeichen  $\coprod$  (Koprodukt, `\coprod`) steht für die disjunkte Vereinigung beliebiger Mengen, wie sie in **Definition 8.1** eingeführt wurde.

Ist z.B.  $U$  eine disjunkte Vereinigung von  $U_i$ , so schreibe ich  $U = \bigsqcup_{i \in I} U_i$ , was sowohl bedeuten soll, dass  $U_i \subseteq U$ , als auch  $U_i \cap U_j = \emptyset$  für  $i \neq j$ .

Ist hingegen  $U = \coprod_{i \in I} U_i$ , so folgt weder  $U_i \subseteq U$  (allerdings ist  $\iota_j$  nach dem vorherigen Lemma eine entsprechende Einbettung, weswegen wir  $U_j$  oft mit dem entsprechenden Bild identifizieren), noch, dass  $U_i \cap U_j = \emptyset$  für  $i \neq j$ .

Ist  $\bigsqcup_{i \in I} U_i$  definiert (d.h. die  $U_i$  paarweise disjunkt), so ist jedoch in jedem Fall

$$\bigsqcup_{i \in I} U_i \cong \coprod_{i \in I} U_i.$$

weswegen eine saubere Trennung oft redundant oder nicht möglich ist.

**Definition 8.2** (Disjunkte Vereinigung topologischer Räume). Sei  $(X, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$  eine Familie von topologischen Räumen. Wir versehen  $\coprod_{i \in I} X_i$  mit der Topologie, die von  $\bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i$  als Basis erzeugt wird. Den entstehenden Raum nennen wir das Koprodukt der topologischen Räume.

**Bemerkung\***. Eigentlich müssen wir die Topologie erstmal als Subbasis von  $\bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i$  erzeugen lassen, man überprüft jedoch mit **Satz 6.4** leicht, dass es sich dann sogar um eine Basis handelt, was wir im Folgenden auch verwenden wollen.

**Notationsmissbrauch<sup>†</sup>**. Eigentlich ist  $\mathcal{O}_i \notin \mathcal{P}(\coprod_{i \in I} X_i)$  keine Familie von Teilmengen von  $\coprod_{i \in I} X_i$ , weswegen die Definition keinen Sinn macht. Mittels den Einbettungen  $\iota_j : X_j \rightarrow \coprod_{i \in I} X_i$  können wir jedoch  $\mathcal{O}_j$  entsprechend auffassen. Man käme in Versuchung

$$\mathcal{O} := \bigcup_{i \in I} \iota_i(\mathcal{O}_i).$$

zu schreiben, doch eigentlich ist auch das falsch, weil wir  $\iota_j$  nicht nur auf die Elemente von  $\mathcal{O}_j$ , sondern auf die Elemente der Elemente von  $\mathcal{O}_j$  anwenden wollen - nämlich auf die Elemente der offenen Teilmengen, die in  $\mathcal{O}_j$  spezifiziert waren. Im Folgenden wollen wir jedoch weiterhin  $\bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i$  schreiben um obiges zu meinen, die Einbettungen  $\iota_j$  sind in der Notation unterdrückt.

**Warnung**. Die Menge  $\bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i$  ist im Allgemeinen keine Topologie. Z.B. ist

$$\coprod_{i \in I} X_i \notin \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i.$$

**Lemma<sup>†</sup>**. Eine Menge  $U \subseteq \coprod_{i \in I} X_i$  ist offen, genau dann, wenn  $\iota_j^{-1}(U) \subseteq X_j$  offen ist für alle  $j \in I$ .

*Beweis\**. '⇒' Sei  $U \subseteq \coprod_{i \in I} X_i$  offen, dann können wir  $U = \bigcup_{k \in K} U_k$

schreiben, wobei  $U_k \in \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i$  ein Element der (Sub-) Basis ist. Dann ist

$$\iota_j^{-1}(U) = i_j^{-1} \left( \bigcup_{k \in K} U_k \right) = \bigcup_{k \in K} \iota_j^{-1}(U_k).$$

Nun ist aber  $\iota_j^{-1}(U_k) = \emptyset$ , wenn  $U_k$  aus einem  $\mathcal{O}_i$  mit  $i \neq j$  stammt, und  $\iota_j^{-1}(U_k) = U_k$  wenn  $U_k$  aus  $\mathcal{O}_i$  stammt, also in jedem Fall eine offene Teilmenge von  $X_j$ , und damit ist das Urbild offen.

' $\Leftarrow$ ' Nimm umgekehrt an, dass  $\iota_j^{-1}(U) \subseteq X_j$  offen ist für alle  $j \in I$ . Es genügt wegen  $\bigsqcup_{i \in I} X_i = \bigsqcup_{i \in I} \iota_i(X_i)$  festzustellen, dass

$$U = \bigcup_{i \in I} (U \cap \iota_i(X_i)) = \bigcup_{i \in I} \iota_i(\iota_i^{-1}(U)).$$

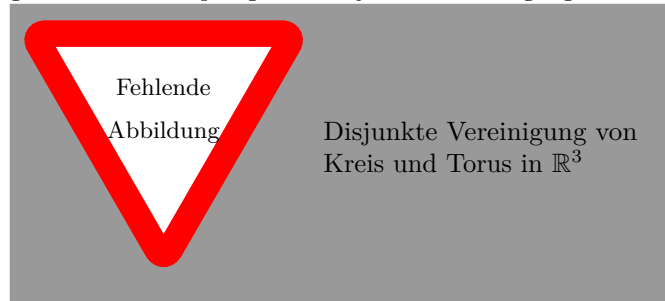
und dies ist offen nach Annahme, da  $\iota_i$  eine Einbettung ist.  $\square$

**Bemerkung.** Per Definition ist für jedes  $j \in I$  die Menge  $\iota(X_j) = \{(j, x) \mid x \in X_j\}$  offen in  $\bigsqcup_{i \in I} X_i$  und die von  $\iota_j$  induzierte Abbildung

$$X_j \rightarrow \{(j, x) \mid x \in X_j\} \subseteq \bigsqcup_{i \in I} X_i.$$

ist eine Einbettung. Die  $X_i$  können wir also kanonisch als Teilräume von  $\bigsqcup_{i \in I} X_i$  auffassen.

**Beispiel.** 1. Betrachte einen Kreis und einen Torus, die getrennt in  $\mathbb{R}^3$  liegen. Die Unterraumtopologie auf dieser Menge ist die gleiche wie die Topologie der disjunkten Vereinigung.

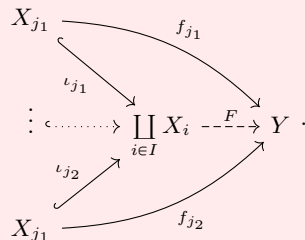


2. Auch wenn  $[0, 1] \cup [\frac{1}{2}, 1] = [0, 1]$  ist die Koprodukttopologie auf  $[0, 1] \sqcup [\frac{1}{2}, 1]$  nicht die Unterraumtopologie auf  $[0, 1]$ . (die beiden Räume sind schon als Mengen nicht gleich).

**Satz 8.3** (Universelle Eigenschaft des Koprodukts). Sei  $\{X_i\}_{i \in I}$  eine Familie von topologischen Räumen und sei  $Y$  ein topologischer Raum. Seien  $f_j : X_j \rightarrow Y$  Abbildungen für alle  $j \in I$ . Definiere die Abbildung

$$F : \begin{array}{c} \bigsqcup_{i \in I} X_i \\ (j, x) \end{array} \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longmapsto \end{array} \begin{array}{c} Y \\ f_j(x) \end{array}$$

Dann ist  $F$  genau dann stetig, wenn alle  $f_j$  stetig sind.



*Beweis.*  $f_j$  ist stetig als Verknüpfung stetiger Abbildungen, da  $F \circ \iota_j = f_j$ .

' $\Leftarrow$ ' Sei nun  $f_j$  stetig für alle  $j$ . Sei  $V \subseteq Y$  offen, dann müssen wir zeigen, dass  $F^{-1}(V) \subseteq \coprod_{i \in I} X_i$  offen ist. Es ist nun aber

$$\iota_j^{-1}(F^{-1}(V)) = (F \circ \iota_j)^{-1}(V) = f_j^{-1}(V) \subseteq X_j.$$

offen in  $X_j$ , weil  $f_j$  stetig war. Nach Definition ist dann genau  $F^{-1}(V)$  offen in  $\coprod_{i \in I} X_i$ .  $\square$

**Frage.** Was ist, wenn die Vereinigung nicht disjunkt ist?

Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $X_1, X_2 \subseteq X$  Unterräume sowie  $X_1 \cup X_2 = X$  Setze  $X_0 := X_1 \cap X_2$ . Wir wollen die Topologie auf  $X$  aus denen von  $X_0, X_1, X_2$  rekonstruieren.

**Beispiel.** Falls  $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ , so können wir aus den Einbettungen  $X_1 \hookrightarrow X$  und  $X_2 \hookrightarrow X$  nach der Universellen Eigenschaft eine Abbildung  $F : X_1 \coprod X_2 \rightarrow X$  induzieren, die stetig und bijektiv ist. Diese ist offen, genau dann, wenn  $X_1, X_2$  offen in  $X$  sind (wie wir später sehen werden).

**Beispiel.** Sei  $X = [0, 1]$ ,  $X_1 = [0, \frac{1}{2}]$  und  $X_2 = (\frac{1}{2}, 1]$ , also  $X = X_1 \sqcup X_2$ . Allerdings ist  $X_1 \coprod X_2 \neq X$ , weil die Menge  $[0, \frac{1}{2}]$  offen in  $X_1 \coprod X_2$  ist, allerdings nicht in  $[0, 1]$ .



**Bemerkung\*.** Man kann sich das wirklich bildlich so vorstellen, dass die disjunkte Vereinigung von  $[0, \frac{1}{2}]$  und  $(\frac{1}{2}, 1]$  bedeutet 'lege sie mit Abstand nebeneinander auf den Zahlenstrahl'. Damit geht die



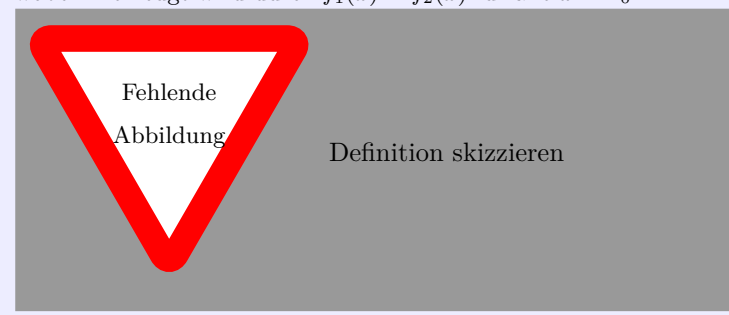
'Nähe' von  $\frac{1}{2}$  zum Anfangsstück von  $(\frac{1}{2}, 1]$  'verloren'. In der Tat ist auch  $[0, \frac{1}{2}] \coprod (\frac{1}{2}, 1] \cong [0, \frac{1}{2}] \cup (1, \frac{3}{2}]$  mit der Teilraumtopologie von  $\mathbb{R}$ .

Eine teilweise Antwort auf obige Frage gibt folgende Konstruktion:

**Definition 8.4** (Disjunkte Vereinigung über einem Basisraum). Seien  $X_0, X_1, X_2$  topologischen Räume und  $f_1 : X_0 \rightarrow X_1$  sowie  $f_2 : X_0 \rightarrow X_2$  stetige Abbildungen. Definiere  $X_1 \bigcup_{X_0} X_2$  als Quotient

$$X_1 \coprod X_2 / \sim .$$

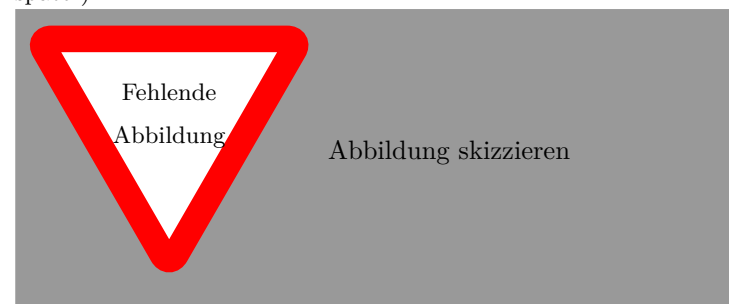
wobei  $\sim$  erzeugt wird durch  $f_1(x) \sim f_2(x)$  für alle  $x \in X_0$ .



**Beispiel.** Betrachte zwei Kopien von  $D^2$ . Wir können  $S^1$  jeweils kanonisch als Rand einbetten, dann erhalten wir

$$D^2 \bigcup_{S^1} D^2 \cong S^2.$$

(Das ist noch kein Beweis, aber die Intuition ist klar - mehr dazu später).

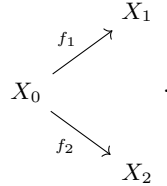


**Warnung.** Der Raum  $X_1 \bigcup_{X_0} X_2$  hängt von den Abbildungen  $f_1, f_2$  ab.

Dazu folgendes:

**Beispiel.** Betrachte wieder zwei Kopien von  $D^2$ , biete  $f_1 : S^1 \hookrightarrow D^2$  kanonisch ein, und bilde  $f_2 : S^1 \rightarrow D^2$  konstant in den Mittelpunkt ab. Dann erhalten wir eine 'Kugel auf einem runden Tisch'

**Trivial Nonsense\*.** Der Raum  $X_1 \coprod X_2 / \sim$  ist der Limes (in **Top**) des folgenden Diagramms:



*Beweis.* Zunächst konstruieren wir Abbildungen  $g_i : X_i \rightarrow X_1 \coprod X_2 / \sim$ .  $g_1, g_2$  können wir einfach als Komposition von  $\iota_i : X_i \hookrightarrow X_1 \coprod X_2$  mit der kanonischen Projektion  $p : X_1 \coprod X_2 \rightarrow X_1 \coprod X_2 / \sim$  definieren.

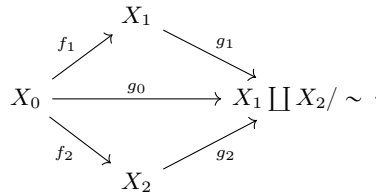
**Behauptung 1.** Es ist  $p \circ \iota_1 \circ f_1 = p \circ \iota_2 \circ f_2$ .

*Unterbeweis.* Nach Konstruktion ist für  $x \in X_0$ :  $\iota_1(f_1(x_0)) \sim \iota_2(f_2(x_0))$  (die Einbettungen hatten wir in der Definition von  $\sim$  unterdrückt), und nach Definition des Quotientenraumes schickt  $p$  die beiden also auf das gleiche Element. ■

Wir können nun  $g_0 := p \circ \iota_1 \circ f_1 = p \circ \iota_2 \circ f_2$  definieren.

**Warnung.** Es ist  $\iota_i \circ f_1 \neq \iota_2 \circ f_2$ , so leicht ist unser Leben nicht!

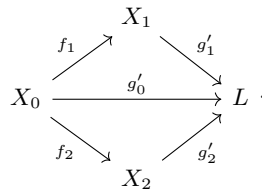
Wir müssen noch prüfen, dass für jeden Morphismus des Diagramms die entsprechende Abbildung nach  $X_1 \coprod X_2 / \sim$  kommutieren:



Das ist aber nach Konstruktion mit der Rechnung

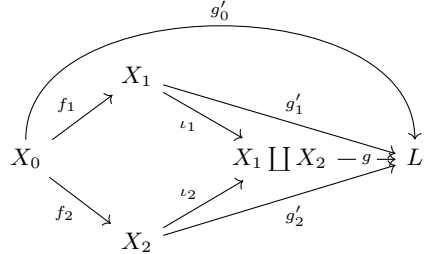
$$g_1 \circ f_1 = g_1 \circ p \circ \iota_1 \circ f_1 \stackrel{\text{Behauptung 1}}{=} p \circ \iota_2 \circ f_2 = g_2 \circ f_2.$$

klar. Es bleibt zu zeigen, dass unser behaupteter Limes  $X_1 \coprod X_2 / \sim$  universell ist. Sei also  $L$  ein weiterer topologischer Raum mit Abbildungen  $g'_0, g'_1, g'_2$ , sodass



kommutiert, dann müssen wir zeigen, dass es genau eine Abbildung  $f : L \rightarrow X_1 \coprod X_2 / \sim$  gibt, sodass  $g'_i = f \circ g_i$ . Zunächst haben wir mit der Universellen Eigenschaft des Koprodukt eine von  $g_1, g_2$  induzierte

Abbildung  $g : X_1 \coprod X_2 \rightarrow L$ , also ergibt sich folgende Situation:



**Warnung.** Auch in diesem Diagramm kommutiert das linke Quadrat nicht, d.h.  $\iota_1 \circ f_1 \neq \iota_2 \circ f_2$ .

**Behauptung 2.**  $g$  bildet äquivalente Elemente von  $X_1 \coprod X_2$  auf gleiche Elemente in  $L$  ab.

*Unterbeweis.* Es genügt zu zeigen, dass  $g(\iota_1(f_1(x))) = g(\iota_2(f_2(x)))$  für  $x \in X_0$  beliebig, weil die Äquivalenzrelation hiervon erzeugt wird. Dazu ist

$$g \circ \iota_1 \circ f_1 = g'_1 \circ f_1 = g'_0 = g'_2 \circ f_2 = g \circ \iota_2 \circ f_2.$$

indem wir die Eigenschaften der induzierten Abbildung  $g$  und die des Limes  $L$  der Reihe nach anwenden. ■

Mit Behauptung 2 und der universellen Eigenschaft der Quotiententopologie faktorisiert nun  $g$  über  $X_1 \coprod X_2 / \sim$ , also induziert  $g$  unsere gewünschte Abbildung  $f : X_1 \coprod X_2 / \sim \rightarrow L$ , sodass

$$\begin{array}{ccc} X_1 \coprod X_2 & \xrightarrow{g} & L \\ & \searrow p & \uparrow f \\ & & X_1 \coprod X_2 / \sim \end{array} .$$

kommutiert. Dann erhalten wir auch schnell  $g'_1 = g \circ \iota_1 = f \circ p \circ \iota_1 = f \circ g_1$ , analoges für  $g_2$ , sowie  $g'_0 = g'_1 \circ f_1 = g_1 \circ f_1 = g_0$ .

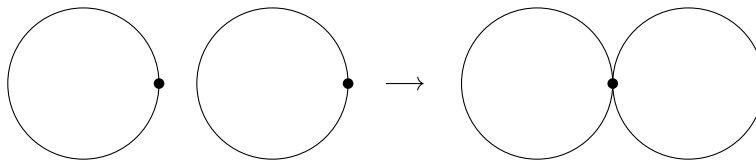
Es bleibt zu zeigen, dass die induzierte Abbildung  $f$  eindeutig ist. Nach der universellen Eigenschaft der Quotiententopologie genügt es, zu zeigen, dass  $g$  eindeutig bestimmt.  $g$  ist aber nach der universellen Eigenschaft von  $X_1 \coprod X_2$  eindeutig bestimmt. Also war  $f$  eindeutig. Damit haben wir überprüft, dass  $X_1 \coprod X_2 / \sim$  alle Eigenschaften eines Limes erfüllt. □

**Bemerkung\*.** Ja, der Beweis der Aussage ist sehr lang, dafür, dass er intuitiv klar ist, und das ist irgendwie typisch für Kategorientheorie. Ich hatte Lust, das mal ordentlich aufzuschreiben, aber normal verkürzt man den Beweis drastisch und verweist einfach die beiden anderen universellen Eigenschaften.

**Beispiel.** Ist  $X_0 = \{\star\}$  ein Punkt, so ergibt sich

**Definition 8.5** (Wedge-Produkt). Seien  $X, Y$  nichtleere topologische Räume,  $x \in X$  und  $y \in Y$ . Bilde  $f_1 : \{\star\} \rightarrow X, \star \mapsto x$  und analog für  $Y$  ab. Der entstehende Raum  $X \bigcup_{\{\star\}} Y$  heißt **Einpunktvereinigung** oder auch **Wedge-Produkt** von  $X, Y$  und wird mit  $X \vee Y$  notiert.

**Beispiel.** Sei  $(X, x) = (S^1, 1)$  und  $(Y, y) = (S^1, 1)$ . Dann ist  $X \vee Y$  ein **Bouquet von 2 Kreisen**.



**Beispiel.** Es ist  $[0, \frac{1}{2}] \vee_{\frac{1}{2}} [\frac{1}{2}, 1] \cong [0, 1]$ . Verkleben wir allerdings die Punkte  $\frac{1}{4}$  und  $\frac{3}{4}$ , so erhalten wir nicht das Einheitsintervall, sondern ein Plus-Zeichen.

**Bemerkung\*.** Aus anderen mathematischen Richtungen kennt man das Wort 'Wedge' eigentlich als Symbol  $\wedge$ . In der Topologie ist dies jedoch anders. Das Symbol  $\wedge$  heißt 'Smash' und definiert das Smash-Produkt zweier Räume:

$$X \wedge Y := X \times Y / X \vee Y.$$

Es ist z.B.  $S^1 \wedge S^1 \cong S^2$  und sogar allgemein  $S^n \wedge S^n \cong S^{2n}$ .

**Definition** (Smash-Produkt). Seien  $X, Y$  topologische Räume und  $x \in X, y \in Y$  Punkte. Dann ist das **Smash-Produkt** definiert als

$$(X, x) \wedge (Y, y) = X \times Y / (X \times \{y\} \cup \{x\} \times Y).$$



**Bemerkung\*.** In der Pause stellte sich die Frage, ob es ein Beispiel für einen nicht-normalen Hausdorff-Raum gibt. Siehe hierzu [Lyn70,

Gegenbeispiel 86].

**Beispiel\*** (Punktierte Tychonoff-Planke). Wir geben (nach einem Kommentar von MELVIN WEISS) ein Beispiel für einen Hausdorff-Raum, der nicht normal ist, die sogenannte **gelöschte Tychonoff-Planke** (eng: 'deleted Tychonoff plank'). Sei hierzu  $\aleph_0$  die erste unendliche Kardinalzahl und  $\aleph_1$  die erste überabzählbare Kardinalzahl. Auf den Räumen  $[0, \aleph_0]$  und  $[0, \aleph_1]$  können wir in natürlicher Weise eine Topologie definieren, indem wir die Anfangs- und Endstücke des Intervalls als Subbasis wählen. Der Raum

$$T := [0, \aleph_0] \times [0, \aleph_1].$$

heißt Tychonoff-Planke und ist ein kompakter Hausdorff-Raum, also insbesondere normal. Der Teilraum

$$T_{\text{deleted}} := T \setminus \{\infty\} := T \setminus \{(\aleph_0, \aleph_1)\}.$$

heißt punktierte Tychonoff-Planke und ist ein lokal kompakter Hausdorffraum, allerdings nicht normal.

*Beweisskizze.* Wir verweisen an dieser Stelle darauf, dass  $[0, \alpha]$  für jede Ordinalzahl  $\alpha$  ein kompakter Hausdorffraum ist, das ganze beruht im Wesentlichen darauf, dass die Ordinalzahlen eine Wohlordnung bilden. Also ist  $T$  als Produkt von kompakten Hausdorffräumen ebenfalls kompakter Hausdorffraum (Satz 7.13, Satz 7.12), also normal (Satz 5.10).

Der Teilraum  $T_{\text{deleted}}$  ist also als Teilraum eines Hausdorff-Raumes ebenfalls Hausdorff. Allerdings lassen sich die beiden abgeschlossenen Mengen

$$A := [0, \aleph_0) \times \{\aleph_1\}, \quad B := \{\aleph_0\} \times [0, \aleph_1).$$

nicht durch offene Mengen trennen:

Angenommen, wir finden  $A \subseteq U$  und  $B \subseteq V$  mit  $U, V$  offen. Sei  $n \in \mathbb{N} = \aleph_0$  beliebig, dann ist  $(n, \aleph_1) \in A \subseteq U$ . Da  $U$  offen, finden wir ein Basiselement der Produkttopologie, das  $(n, \aleph_1)$  enthält, also gibt es  $\alpha_n < \aleph_1$ , sodass bereits das Intervall  $\{n\} \times [\alpha_n, \aleph_1] \subseteq U$  ist (an dieser Stelle sollte man sich eigentlich genauer Fragen, wie die Topologie auf einer Ordinalzahl definiert ist, die Details, und warum die behauptete Aussage folgt, sind aber leicht zu überlegen). Jetzt kommt der Trick: Wir betrachten

$$\beta := \sup_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n.$$

**Behauptung 1.**  $\beta < \aleph_1$

*Unterbeweis.* Es ist  $\beta = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n$  (nach Konstruktion der Ordinalzahlen) wieder eine Ordinalzahl. Da  $\alpha_n < \aleph_1$  ist  $\alpha_n$  (als Menge) abzählbar, und somit auch  $\beta$  als abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen, also ist auch  $\beta < \aleph_1$ , weil  $\aleph_1$  überabzählbar ist. ■

Jetzt wissen wir also, dass sogar der Streifen  $[0, \aleph_0) \times [\beta, \aleph_1] \subseteq U$  ist (nach Wahl der  $\alpha_n$ ), d.h. die Menge  $U$  enthält sogar ein 'Rechteck

positiver Höhe', was absurd ist. Formal können wir argumentieren, indem wir jetzt für den Punkt  $(\aleph_0, \beta) \in B$  eine offene Umgebung wählen und somit ein Intervall  $[\gamma, \aleph_0) \times \{\beta\} \subseteq V$  mit  $\gamma < \aleph_0$  finden. Dann ist jedoch  $(\gamma, \beta) \in U \cap V$ ,  $\nmid$ .

Das absurde an dem Beispiel ist, dass wir das Supremum der  $\alpha_n$  nehmen, die zwar alle  $< \aleph_1$  sind, aber dennoch  $\beta \neq \aleph_1$  folgt. Von den reellen Zahlen sind wir gewohnt, dass hier Gleichheit eintreten kann. Wir haben also sogar gezeigt, dass

**Behauptung 2.** *Im Raum  $[0, \aleph_1)$  konvergiert jede monoton steigende Folge.*

**obwohl** der Raum nach oben keine Schranke besitzt. Die Moral daran ist ungefähr 'aleph\_1 ist zu groß, um von Folgen erreicht zu werden'. Das motiviert auch die Einführung von Netzen für größere topologische Räume, die wir hier aber nicht behandeln.

Wir haben nun Abbildungen  $j_i: X_i \rightarrow X_1 \bigcup_{X_0} X_2$ :

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{\iota_1} & X_1 \coprod X_2 \\ & \searrow j_1 & \downarrow q \\ & & X_1 \bigcup_{X_0} X_2 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X_2 & \xrightarrow{\iota_2} & X_1 \coprod X_2 \\ & \searrow j_2 & \downarrow q \\ & & X_2 \bigcup_{X_0} X_1 \end{array} .$$

**Lemma 8.6.** Seien  $X_0, X_1, X_2$  topologische Räume,  $f_1: X_0 \rightarrow X_1$ ,  $f_2: X_0 \rightarrow X_2$  stetig und betrachte die kanonischen Abbildungen  $\iota_i: X_i \rightarrow X_1 \coprod X_2$  sowie  $q: X_1 \coprod X_2 \rightarrow X_1 \bigcup_{X_0} X_2$ .

Ist  $f_1$  injektiv so ist  $j_2$  injektiv. Ist  $f_2$  injektiv, so ist  $j_1$  injektiv.

*Beweis.* Wir zeigen nur die erste Aussage, die zweite folgt aus Symmetriegründen. Seien  $x, y \in X_2$  mit  $j_2(x) = j_2(y)$ , nach Konstruktion ist also  $x \sim y$ . Da die Äquivalenzrelation erzeugt ist von  $f_1(x) \sim f_2(x)$ , gibt es nun eine Folge von Punkten  $x := p_1 \sim p_2 \sim \dots \sim p_n =: y$ , die jeweils von der Form  $f_1(x) \sim f_2(x)$  sind.

Erzeugen wir eine Äquivalenzrelation durch  $x_i \sim y_i$  für  $i \in I$ , so sind zwei Elemente  $x, y$  genau dann äquivalent, wenn es eine endliche Folge  $x = a_0 \sim a_1 \sim \dots \sim a_n = y$  gibt, wobei  $\{a_i, a_{i+1}\} = \{(x_i, y_i)\}$  für ein  $i \in I$ .

Genauer gibt es also  $x_1 \in X_0$  mit  $f_2(x_1) = p_1 = x$  und  $f_1(x_1) = p_2$ , und  $\exists x_2 \in X_0$  mit  $f_2(x_2) = p_3$  sowie  $f_1(x_2) = p_2$  (auf welcher Seite  $f_1$  bzw.  $f_2$  steht, ergibt sich daraus, dass die Punkte  $p_i$  alternierend aus  $X_1, X_2$  kommen müssen). Allgemein gibt es also  $x_i \in X_0$  mit

$$f_2(x_{2i-1}) = p_{2i-1}, \quad f_1(x_{2i-1}) = p_{2i}, \quad f_2(x_{2i}) = p_{2i+1}, \quad f_1(x_{2i}) = p_{2i}$$

Nun wissen wir aber, dass  $f_1$  injektiv ist, also ergibt sich  $x_{2i-1} = x_{2i}$ . Dann ist bereits:

$$x = f_2(x_1) = f_2(x_2) = p_3 = f_2(x_3) = f_2(x_4) = p_5 = \dots = y.$$

und damit haben wir  $x = y$  gezeigt und  $j_2$  ist wie gewünscht injektiv.



□

Wir kehren nun zu unserer Ausgangssituation bzw. Ausgangsfrage zurück:

Sei  $X$  ein topologischer Raum und seien  $X_1, X_2 \subseteq X$  Unterräume, sodass  $X_1 \cup X_2 = X$ . Setze  $X_0 := X_1 \cap X_2$ .

Betrachte

$$f' : \begin{cases} X_1 \amalg X_2 & \longrightarrow & X \\ (1, x) & \longmapsto & x \\ (2, x) & \longmapsto & x \end{cases}$$

(im Wesentlichen ist das die Projektion, sodass wir das 'disjunkt' aus der Vereinigung wieder loswerden). Dann faktorisiert  $f'$  nach der Universellen Eigenschaft der Quotiententopologie über  $f : X_1 \bigcup_{X_0} X_2 \rightarrow X$ , dh wir erhalten:

$$\begin{array}{ccc} X_1 \amalg X_2 & \xrightarrow{f'} & X \\ q \downarrow & \nearrow f & \\ X_1 \bigcup_{X_0} X_2 & & \end{array}$$

Es ist  $f'$  surjektiv wegen  $X_1 \cup X_2 = X$ , also auch  $f'$ , und wir prüfen auch leicht die Injektivität von  $f$ . Nun ist:

**Satz 8.7.** Betrachte die Konstruktion von eben. Nimm an, dass zusätzlich eine der Bedingungen

1.  $X_1, X_2$  sind offen.
  2.  $X_1, X_2$  sind abgeschlossen.
- gilt. Dann ist  $f$  ein Homöomorphismus.

*Beweis.* Wir zeigen die Aussage nur unter Verwendung von 2., der Fall 1. geht analog. Es genügt zu zeigen, dass  $f$  abgeschlossen ist (weil wir schon wissen, dass  $f$  eine stetige Bijektion ist). Sei  $A \subseteq X_1 \bigcup_{X_0} X_2$  abgeschlossen.

Dann sind  $j_1^{-1}(A) \subseteq X_1$  und  $j_2^{-1}(A) \subseteq X_2$  abgeschlossen, da  $j_1, j_2$  stetig. Wegen

$$f(A) = j_1^{-1}(A) \cup j_2^{-1}(A).$$

sind wir fertig, indem wir ( $j_1^{-1}(A) \subseteq X_1$  abgeschlossen und  $X_1 \subseteq X$  abgeschlossen)  $\Rightarrow j_1^{-1}(A) \subseteq X$  abgeschlossen bemerken. □

**Bemerkung\*.** Die Stetigkeit von  $f^{-1}$  kann man auch mit **Aufgabe 2.2** einsehen, weil  $X = X_1 \cup X_2$  mit  $X_1, X_2$  abgeschlossen ist, und die entsprechenden Teilabbildungen  $X_1 \rightarrow X_1 \bigcup_{X_0} X_2$  Einbettungen

sind. Im Wesentlichen wiederholen wir hier einfach nur die Aussage des Übungsblattes.

**Beispiel.** Sei  $X = S^n$  und betrachte die Teilräume

$$X_1 = \{x \in S^n \mid x_{n+1} \geq 0\} \quad X_2 = \{x \in S^n \mid x_{n+1} \leq 0\}$$

, also die obere und untere Halbkugel. Der Schnitt

$$X_0 := X_1 \cap X_2 = \{x \in S^n \mid x_{n+1} = 0\}.$$

ist dann genau der Äquator der Kugel, also lernen wir aus **Satz 8.7**, dass

$$S^n \cong X_1 \bigcup_{X_0} X_2.$$

Mit der Abbildung

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \longrightarrow & D^n \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) & \longmapsto & (x_1, \dots, x_n) \end{array}$$

(die Projektion auf die  $n$ -Dimensionale Scheibe) erhalten wir einen Homöomorphismus  $D^n \cong X_1, X_2$ , also haben wir eigentlich sogar

$$S^n \cong D^n \bigcup_{S^{n-1}} D^n.$$

gezeigt.



**Warnung.** Auch hier ist wieder wichtig, dass wir  $S^{n-1} \hookrightarrow D^n$  jeweils kanonisch einbetten, für andere Abbildungen haben wir bereits gesehen, dass wir andere Räume erhalten können.

Vorlesung 9  
Di 11 Mai 2021 12:16

## 9 Zusammenhang, Wegzusammenhang

**Definition 9.1** (Zusammenhang). Ein topologischer Raum heißt **zusammenhängend**, wenn er sich nicht in zwei nichtleere, disjunkte, offene Teilmengen zerlegen lässt.

**Lemma<sup>†</sup>** (Offen-abgeschlossene-Mengen). Ein Raum ist zusammenhängend, wenn die leere Menge und der gesamte Raum die einzigen



Teilmengen von  $X$  sind, die offen und abgeschlossen sind, d.h.

$$\nexists A \subseteq X, A \neq \emptyset, X: \quad A \text{ offen und abgeschlossen.}$$

*Beweis\**. Gibt es eine offene, abgeschlossene Menge  $A \neq \emptyset, X$ , so ist  $X = A \sqcup A^c$  eine Zerlegung in offene, disjunkte Mengen. Ist umgekehrt  $X = U_1 \cup U_2$  mit  $U_1, U_2$  offen, disjunkt und nichtleer, also auch nicht  $X$ , so sind  $U_1, U_2$  beides offen abgeschlossene Mengen.  $\square$

**Bemerkung.**  $X$  ist nicht zusammenhängend, genau dann, wenn  $X \cong X_1 \coprod X_2$  eine disjunkte Vereinigung von 2 Räumen  $X_1, X_2 \neq \emptyset$  ist.

**Beispiel.** 1)  $\mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$  und  $(-\infty, 0), (0, \infty)$  sind offen, disjunkt und nicht leer, also ist  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  nicht zusammenhängend.

2) Betrachte  $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$  mit der Unterraumtopologie. Dann ist

$$\mathbb{Q} = (\mathbb{Q} \cap (-\infty, \sqrt{2})) \cup (\mathbb{Q} \cap (\sqrt{2}, \infty)).$$

eine Zerlegung in offene, disjunkte, nichtleere Mengen, also ist auch  $\mathbb{Q}$  nicht zusammenhängend.

**Bemerkung\***. Es ist meistens einfacher, zu zeigen, dass ein Raum nicht zusammenhängend ist, die Gegenrichtung erweist sich als schwerer. Deswegen folgender

**Satz 9.2** (Einheitsintervall). Das Intervall  $[0, 1]$  ist zusammenhängend.

*Beweis.* Nimm gegenteilig an, dass  $[0, 1]$  nicht zusammenhängend ist, schreibe also  $[0, 1] = A \cup B$  mit  $A, B \neq \emptyset$ , offen und disjunkt. OBdA sei  $0 \in A$ . Wegen  $B \neq \emptyset$  gibt es  $t := \inf B$ . Da  $t$  abgeschlossen (weil  $A$  offen!), ist  $t \in B$ , also folgt  $[0, t) \subseteq A$ . Aber jede Umgebung von  $t \in B$  schneidet  $[0, t)$ , also  $A$ ,  $\nexists$ , weil  $A \cap B = \emptyset$ .  $\square$

**Definition**<sup>†</sup> (Weg). Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $x, y \in X$ . Ein **Weg** von  $x$  nach  $y$  ist eine stetige Funktion  $w : [0, 1] \rightarrow X$ , sodass  $w(0) = x$  und  $w(1) = y$ .

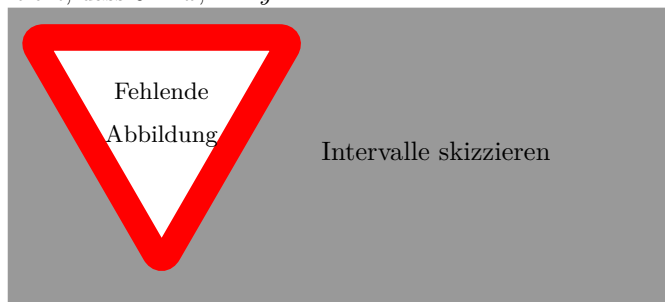


**Definition 9.3** (Wegzusammenhang). Ein topologischer Raum  $X$  heißt **wegzusammenhängend**, falls für je zwei Punkte  $x, y \in X$  ein **Weg** von  $x$  nach  $y$  existiert.

**Beispiel.** 1) Die Mengen  $(a, b)$ ,  $[a, b)$ ,  $(a, b]$  und  $\mathbb{R}$  sind alle wegzusammenhängend. Definiere hierzu

$$w : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longmapsto ty + (1 - t)x \end{cases}$$

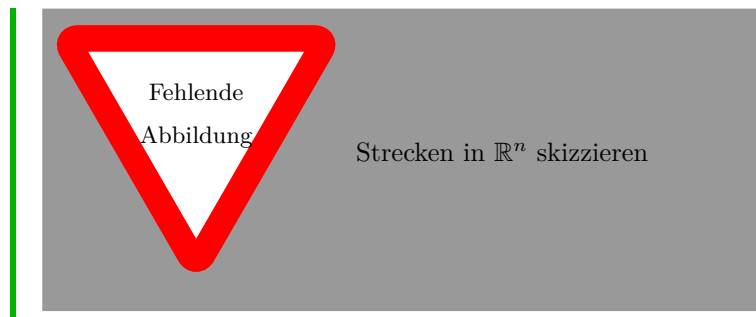
Als Verknüpfung stetiger Funktionen ist  $t$  stetig, und wir sehen leicht, dass  $0 \mapsto x, 1 \mapsto y$ .



- 2)  $\mathbb{R}^n, n \geq 0$  ist wegzusammenhängend. Dazu betrachte vorherige Abbildung auf den einzelnen Komponenten
- 3)  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, n \geq 2$  ist wegzusammenhängend. Seien hierzu  $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

**Fall 1:** Die Strecke von  $x$  nach  $y$  liegt in  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Dann betrachten wir wieder die Abbildung aus 1) und sind fertig.

**Fall 2:** Die Strecke trifft die 0. Wähle dann einen dritten Punkt  $z$ , der nicht auf der Geraden durch  $x, y$  liegt. Dann gibt es einen Weg von  $x$  nach  $z$  und einen von  $z$  nach  $y$ , und die Vereinigung der beiden Wege ist dann ein Weg von  $x$  nach  $y$ .



**Bemerkung\*.** Wir verwenden natürlich entscheidend, dass  $ty + (1-t)x \in (a, b), [a, b), (a, b], \mathbb{R}$  für beliebige  $x, y$ , die auch in einer der Mengen liegen (Das ist Teil der Definition eines Weges!).

**Bemerkung\*.** Ebenfalls kann man sich kurz Überlegen, dass die Vereinigung von zwei Wegen wieder ein Weg ist. Seien hierzu  $w_1, w_2$  Wege von  $x$  nach  $y$  bzw. von  $y$  nach  $z$ . Dann definieren wir

$$w : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow X \\ x & \longmapsto \begin{cases} w_1(2x) & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ w_2(2x - 1) & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \end{cases}$$

so sehen wir leicht  $w(0) = w_1(0) = x$ ,  $w(1) = w_2(2 \cdot 1 - 1) = w_2(1) = z$ , und  $w$  ist stetig, weil  $f$  auf  $[0, \frac{1}{2}]$  und  $[\frac{1}{2}, 1]$  stetig ist und bei  $\frac{1}{2}$  beide Definitionen wegen  $w_1(1) = y = w_2(0) = w_2(2 \cdot \frac{1}{2} - 1)$  übereinstimmen.

**Lemma 9.4.** Ist  $X$  wegzusammenhängend, so ist  $X$  zusammenhängend.

**Warnung.** Die Umkehrung von **Lemma 9.4** gilt im Allgemeinen nicht. Vergleiche hierzu **Abbildung 14**.

*Beweis von Lemma 9.4.* Sei  $X$  wegzusammenhängend, und nimm gegen- teilig an, dass  $X = U_1 \sqcup U_2$  mit  $U_i \subseteq X$  offen und disjunkt. Sei  $x_1 \in U_1, x_2 \in U_2$ . Dann gibt es einen Weg  $w$  von  $x_1$  nach  $x_2$ , und wir erhalten

$$w^{-1}(U_1) \cup w^{-1}(U_2) = w^{-1}(U_1 \cup U_2) = [0, 1].$$

Allerdings sind  $w^{-1}(U_i)$  offen ( $w$  ist stetig), disjunkt ( $U_1, U_2$  sind dis- junkt) und nicht leer ( $0 \in w^{-1}(U_1), 1 \in w^{-1}(U_2)$ ), also ist  $[0, 1]$  nicht zusammenhängend. ⚡ mit **Satz 9.2**.  $\square$

**Korollar 9.5.**  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{R}^2$  sind nicht homöomorph.

*Beweis.* Nimm an, es gibt einen solchen Homöomorphismus

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ 0 & \longmapsto f(0) \end{cases}$$

Dann induziert  $f$  auch einen Homöomorphismus  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \cong \mathbb{R} \setminus \{f(0)\}$ , allerdings ist  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  wegzusammenhängend, und  $\mathbb{R} \setminus \{f(0)\}$  nicht,  $\ncong$ .  $\square$

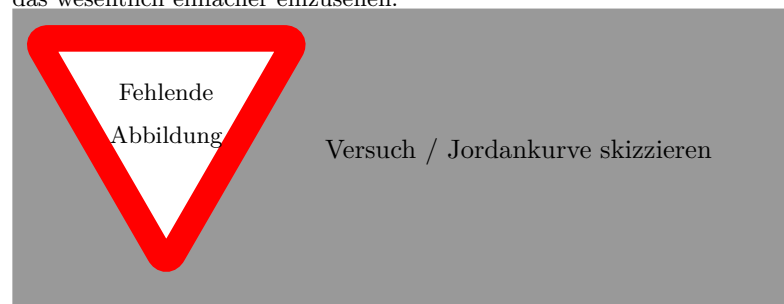
**Frage.** Sind  $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$  wegzusammenhängend?

**Antwort.** Nein, das gilt natürlich genau dann, wenn  $n = m$ . Allerdings warten wir mit einem solchen Beweis bis zur algebraischen Topologie. Siehe hierzu auch den Satz zur 'Invariance of domain' von Brouwer (den wir hier aber erstmal nicht behandeln).

**Satz\*** (Invariance of domain). Es sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  injektiv und stetig. Dann ist  $f(U) \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f$  ist ein Homöomorphismus  $f : U \cong f(U)$ .

**Korollar\*.**  $\mathbb{R}^n \not\cong \mathbb{R}^m$  für  $n \neq m$ .

Ein Versuch für einen ähnlichen Beweis wie  $\mathbb{R} \not\cong \mathbb{R}^2$  scheitert, weil  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  und  $\mathbb{R}^3 \setminus \{f(0)\}$  beide (weg)zusammenhängend sind. Man könnte nun Versuchen, eine Gerade oder einen Kreis von  $\mathbb{R}^2$  zu entfernen, der entsprechende Raum ist dann unzusammenhängend. Es erscheint auch klar, dass  $\mathbb{R}^3 \setminus f(\text{Kreis / Gerade})$ , allerdings ist ein entsprechender Beweis verhältnismäßig schwer. Die algebraische Topologie wird es uns ermöglichen, das wesentlich einfacher einzusehen.



**Bemerkung\*.** Die Frage, ob eine Schleife in  $\mathbb{R}^2$  (ein stetiges, injektives Bild von  $S^1$  in  $\mathbb{R}^2$ ) den Raum in zwei Teile zerteilt, ist auch schwerer als man denkt, hierzu vergleiche den

**Satz\*** (Jordan'scher Kurvensatz). Es sei  $C$  eine Jordankurve in  $\mathbb{R}^2$ , d.h. das Bild einer injektiven stetigen Abbildung  $\varphi : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Dann besteht  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  aus genau 2 Komponenten, eine davon ist beschränkt (die Innere), eine unbeschränkt (die Äußere)

Der Beweis verwendet aber auch Methoden aus der algebraischen Geometrie.

**Lemma 9.6** (Bilder von zusammenhängenden Räumen). Sei  $f : X \rightarrow Y$  stetig und surjektiv.

1) Ist  $X$  wegzusammenhängend, so ist  $Y$  wegzusammenhängend.

2) Ist  $X$  zusammenhängend, so ist  $Y$  zusammenhängend.

*Beweis.* 1) Seien  $y_1, y_2 \in Y$  beliebig. Da  $f$  surjektiv ist, finden wir  $x_1, x_2 \in X$  mit  $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$ . Nun finden wir wegen Wegzusammenhang von  $X$  einen Weg  $w : [0, 1] \rightarrow X$  mit  $w(0) = x_1$  und  $w(1) = x_2$ . Dann ist die Verknüpfung

$$f \circ w : \begin{array}{ccc} [0, 1] & \longrightarrow & Y \\ 0 & \longmapsto & f(x_1) = y_1 \\ 1 & \longmapsto & f(x_2) = y_2 \end{array}$$

ein Weg von  $y_1$  nach  $y_2$ , also ist  $Y$  wegzusammenhängend.

2) Nimm an, dass  $Y$  nicht zusammenhängend ist, also gibt es  $U_1, U_2 \neq \emptyset$  offen und disjunkt mit  $Y = U_1 \cup U_2$ . Dann ist auch

$$X = f^{-1}(Y) = f^{-1}(U_1 \cup U_2) = f^{-1}(U_1) \cup f^{-1}(U_2).$$

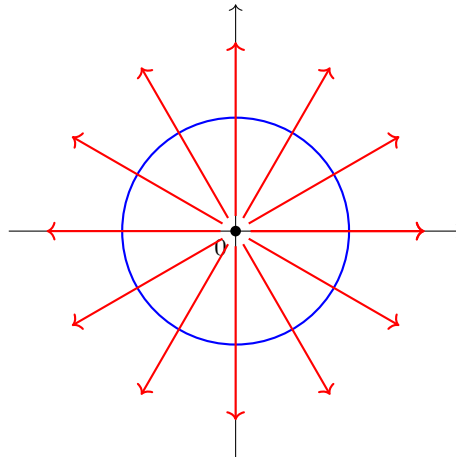
und  $f^{-1}(U_i)$  sind offen, disjunkt und nichtleer, weil  $f$  surjektiv ist. Also ist  $X$  nicht zusammenhängend,  $\nexists$ .

□

**Beispiel.** Die Sphäre  $S^n, n \geq 1$  ist wegzusammenhängend. Hierzu stellen wir fest, dass

$$\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \cong S^{n-1} \times \mathbb{R} \xrightarrow{\text{Projektion}} S^{n-1}.$$

und wir wissen schon, dass  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  wegzusammenhängend ist, also auch  $S^{n-1}$ .



**Bemerkung\*.** Der kanonische Isomorphismus ist erstmal  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \cong S^{n-1} \times \mathbb{R}$ , indem wir  $x \mapsto \left( \frac{x}{\|x\|_2}, \|x\|_2 \right)$  abbilden. Allerdings ist  $\mathbb{R} \cong (0, \infty)$ , z.B. mit der Exponentialabbildung.

**Beispiel<sup>†</sup>** (Auf Nachfrage in der Vorlesungspause besprochen). Eine Teilmenge  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt konvex, wenn für  $x, y \in X$  auch die Verbindungsstrecke in  $X$  liegt, d.h. für  $\lambda \in [0, 1]$  ist auch  $\lambda x + (1 - \lambda)y \in X$ . Eine Teilmenge heißt sternförmig, wenn es ein  $x_0 \in X$  gibt, sodass für jedes  $y \in X$  die Verbindungsstrecke von  $x_0$  nach  $y$  in  $X$  liegt. Dann sehen wir, dass

$$X \text{ konvex} \Rightarrow X \text{ sternförmig} \Rightarrow X \text{ wegzusammenhängend.}$$

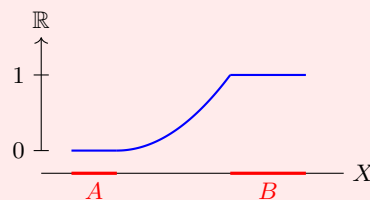
Die erste Implikation ist trivial, wähle  $x_0 \in X$  beliebig, für die zweite bilden wir  $[0, 1]$  einfach auf die Verbindungsstrecke von  $x_0$  nach  $y$  ab, dann sind alle Punkte mit  $x_0$  verbunden, und deren Hintereinanderschalten ergibt Wege von  $x$  nach  $y$  für  $x, y$  beliebig. Im Wesentlichen ist das das gleiche Argument, dass wir auch schon für die Intervalle in  $\mathbb{R}$  benutzt haben.



## 10 Lemma von Urysohn

**Bemerkung<sup>†</sup>**. In der Vorlesung wurde auch folgendes angemerkt: Im gesamten nächsten Kapitel können wir für die Definition eines normalen Raums die Hausdorff-Eigenschaft fallen lassen. Alle Aussagen gelten weiterhin. Beachte aber, dass wir dann mit Urysohn nicht zwingend zwei Punkt trennen können, weil diese nicht zwingend abgeschlossen sind.

**Satz 10.1** (Lemma von Urysohn). Sei  $X$  ein normaler topologischer Raum. Seien  $A, B \subseteq X$  abgeschlossen und disjunkt. Dann existiert eine stetige Abbildung  $f : X \rightarrow [0, 1]$ , sodass  $f|_A \equiv 0$  und  $f|_B \equiv 1$ .



**Lemma 10.2.** Sei  $X$  ein topologischer Raum, sodass für jedes  $r \in$

$[0, 1] \cap \mathbb{Q}$  offene  $V_r \subseteq X$ , sodass  $r < r' \Rightarrow \overline{V_r} \subseteq V_{r'}$ . Dann existiert eine stetige Abbildung  $f : X \rightarrow [0, 1]$ , sodass  $f(x) = 0$  für  $x \in V_0$  und  $f(x) = 1$  für  $x \notin V_1$ .



*Beweis.* Definiere

$$f : \begin{cases} X & \longrightarrow [0, 1] \\ x & \longmapsto \begin{cases} 1 & x \notin V_1 \\ \inf \{r \mid x \in V_r\} & x \in V_1 \end{cases} \end{cases}$$

Die Eigenschaften  $f|_{V_0} \equiv 0$  und  $f|_{X \setminus V_1} \equiv 1$  sind sofort klar. Es bleibt zu zeigen, dass  $f$  stetig ist. Da

$$\mathcal{S} := \{[0, a] \mid a \in [0, 1]\} \cup \{(a, 1] \mid a \in [0, 1]\}.$$

eine Subbasis der Topologie auf  $[0, 1]$  ist, genügt es, Stetigkeit auf  $\mathcal{S}$  zu prüfen. Sei

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}([0, a)) & \Leftrightarrow f(x) < a \leq 1 \\ & \stackrel{\text{Def von } f}{\Leftrightarrow} \inf \{r \mid x \in V_r\} < a \\ & \stackrel{\mathbb{Q} \text{ ist dicht}}{\Leftrightarrow} \exists r < a, r \in \mathbb{Q} : x \in V_r \\ & \Leftrightarrow x \in \bigcup_{r < a} V_r \end{aligned}$$

Für den zweiten Typ von Basiementen ist

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}((a, 1]) & \Leftrightarrow \begin{cases} x \notin V_1 \\ x \in V_1, a < f(x) = \inf \{r \mid x \in V_r\} \end{cases} \quad \text{oder} \\ & \Leftrightarrow \exists r' > a, r' \in \mathbb{Q}, x \notin V_{r'} \\ & \stackrel{\overline{V_r} \subseteq V_{r'}}{\Leftrightarrow} \exists r \in \mathbb{Q}, a < r < r', x \notin \overline{V_r} \\ & \Leftrightarrow x \in \bigcup_{r > a} (X \setminus \overline{V_r}) \end{aligned}$$

also ist auch  $f^{-1}((a, 1])$  eine Vereinigung von offenen Mengen.

Also ist  $f$  stetig, wie zu zeigen war.  $\square$

**Bemerkung\*.** Wir können uns die  $V_r$  wie eine Art 'Höhenprofil' oder 'Höhenlinien' vorstellen, die wir in unserem Raum gegeben haben.

Wir erinnern uns daran, dass wir gerade dabei waren, **Satz 10.1** zu beweisen.

Vorlesung 10  
Di 18 Mai 2021 12:20

**Lemma 10.3.** Sei  $X$  ein normaler Raum,  $A \subseteq X$  abgeschlossen und  $U \subseteq X$  offen mit  $A \subseteq U$ . Dann existiert  $V \subseteq X$  offen mit

$$A \subseteq V \subseteq \bar{V} \subseteq U.$$

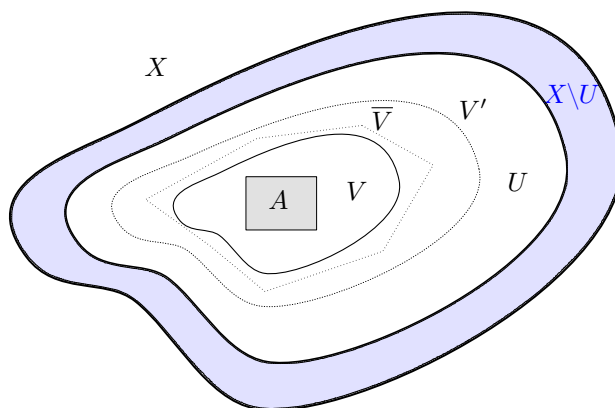


Abbildung 12: Skizze zu Lemma 10.3

*Beweis.* Wegen  $U$  offen ist  $X \setminus U$  abgeschlossen. Wegen  $X$  normal gibt es  $V, V'$  offen mit  $A \subseteq V$  und  $(X \setminus U) \subseteq V'$  mit  $V \cap V' = \emptyset$ . Nun ist

$$A \subseteq V \subseteq X \setminus V' \subseteq U.$$

nach Definition des Abschlusses ist nun  $A \subseteq V \subseteq \bar{V} \subseteq X \setminus V' \subseteq U$ .  $\square$

*Beweis von Satz 10.1 (Lemma von Urysohn).*

**Ziel.**  $\forall r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$  konstruiere  $V_r \subseteq X$  offen, sodass

1.  $A \subseteq V_0$
2.  $B \subseteq X \setminus V_1$
3.  $r < r' \Rightarrow \bar{V}_r \subseteq V_{r'}$

Dies genügt, denn dann wissen wir mit Lemma 10.2, dass

$$\begin{aligned} \exists f : X &\rightarrow [0, 1] \text{ stetig} \\ f(x) &= 0 \quad \forall x \in V_0 \supseteq A \\ f(x) &= 1 \quad \forall x \in X \setminus V_1 \supseteq B \end{aligned}$$

Wähle hierzu eine Abzählung  $p_1, p_2, \dots$  von  $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ , sodass  $p_1 = 1$  und  $p_2 = 0$ . Definiere nun  $\{V_r\}$  rekursiv, wobei wir auch induktiv die Invariante erhalten wollen, dass  $r < r' \Rightarrow \bar{V}_r \subseteq V_{r'}$ .

- $p_1 = 1$ . Setze  $V_1 := X \setminus B$  (offen, weil  $B$  abgeschlossen ist)
- $p_2 = 0$ . Nach Lemma 10.3 mit  $A = A$  und  $U = X \setminus B$  finden wir  $V_0$  offen mit

$$A \subseteq V_0 \subseteq \bar{V}_0 \subseteq X \setminus B =: V_1.$$

- Sei  $n \geq 3$ , dann sind also  $V_{p_1}, V_{p_2}, \dots, V_{p_{n-1}}$  schon definiert. Es ist  $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  wohlgeordnet, weil es sich um eine endliche Menge handelt, also gibt es unter ihnen einen direkten Vorgänger  $p_i$  von  $p_n$ , und einen direkten Nachfolger  $p_j$  von  $p_n$ .



Es könnte z.B.  $n = 5$  sein mit

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 \\ \hline 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{8}{9} & \frac{3}{5} \end{array}$$
 Dann ist die Menge als  $\{0, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{8}{9}, 1\}$  geordnet, und wir sehen  $p_i = \frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{8}{9} = p_j$ .

Verwende nun **Lemma 10.3** mit  $A = \overline{V_{p_i}}$  und  $U = V_{p_j}$ , (hier ist wichtig, dass wegen  $p_i < p_j$  bereits  $\overline{V_{p_i}} \subseteq V_{p_j}$  gilt, sonst können wir das Lemma nicht anwenden.)

Also finden wir  $V$  mit  $\overline{V_{p_i}} \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq V_{p_j}$ . Man prüft leicht, dass wir so auch die Invariante der Induktion erhalten haben.

Also haben wir wie gewünscht die  $V_i$  gefunden, und somit unsere Funktion.  $\square$

**Korollar 10.4** (Urysohn mit beliebigem Intervall). Sei  $X$  ein normaler Raum und seien  $A, B \subseteq X$  disjunkt und abgeschlossen, sowie  $a \leq b \in \mathbb{R}$  beliebig. Dann

$$\begin{aligned} \exists f : X &\rightarrow [a, b] \\ f(A) &= \{a\} \\ f(B) &= \{b\} \end{aligned}$$

*Beweis.* Zunächst verwenden wir Urysohn, um eine stetige Funktion  $g : X \rightarrow [0, 1]$  zu erhalten mit  $f(A) = \{0\}$  und  $f(B) = \{1\}$ , dann verknüpfen wir mit der stetigen Abbildung

$$h : \begin{array}{c|c} [0, 1] & \longrightarrow [a, b] \\ t & \longmapsto (1-t)a + tb \end{array}$$

und wir erhalten sofort die gewünschten Eigenschaften, indem wir  $f = h \circ g$  setzen.  $\square$

## 11 Der Erweiterungssatz von Tietze

Wir sehen jetzt das **Lemma von Urysohn** in Action:

**Satz 11.1** (Erweiterungssatz von Tietze). Sei  $X$  ein normaler Raum und  $A \subseteq X$  abgeschlossen. Jede stetige Funktion  $f : A \rightarrow [-1, 1]$  lässt sich fortsetzen zu einer stetigen Funktion  $\bar{f} : X \rightarrow [-1, 1]$ , d.h.  $\bar{f}|_A \equiv f$ .

**Bemerkung.** Das Urysohn'sche Lemma ist ein Spezialfall des **Erweiterungssatz von Tietze**:

Sei  $X$  normal und  $B, C \subseteq X$  abgeschlossen, disjunkt. Dann betrachte die Funktion

$$f : \begin{array}{c|c} B \cup C & \longrightarrow [-1, 1] \\ \hline B & \longmapsto -1 \\ C & \longmapsto 1 \end{array}$$

**Frage.** Gibt es eine Fortsetzung  $\bar{f} : X \rightarrow [-1, 1]$ ?

Für jede solche Fortsetzung muss auch  $\bar{f}|_B = f$ , also  $\bar{f}(B) = -1$  und  $\bar{f}(C) = 1$  gelten, also genau das, was wir von Urysohn fordern. Allerdings sagt uns der **Erweiterungssatz von Tietze** genau, dass wir solche eine Fortsetzung finden.

*Beweis von Satz 11.1 (Erweiterungssatz von Tietze).*

**Beweisstrategie.** Wir konstruieren eine Folge stetiger Funktionen

$\{s_n : X \rightarrow [-1, 1]\}_{n \geq 1}$ , sodass

- (i)  $\{s_n\}$  konvergiert **gleichmäßig** gegen eine Funktion  $s : X \rightarrow [-1, 1]$ ,  
d.h. für jedes  $\varepsilon > 0$  existiert  $N \in \mathbb{N}$ , sodass

$$\forall x \in X, n \geq N: \quad d(s_n(x), s(x)) < \varepsilon.$$

Weil  $\{s_n\}$  gleichmäßig konvergiert, ist  $s$  stetig (nach Aufgabe 5.3.(iv)).

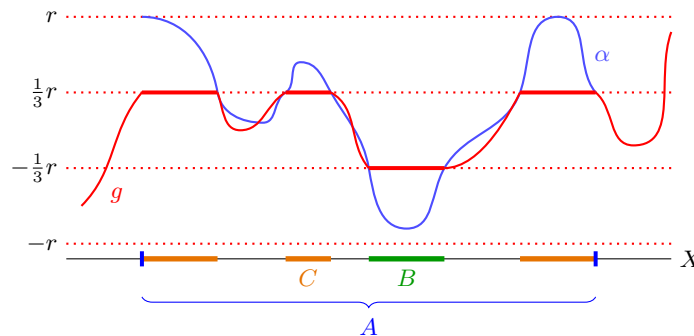
- (ii)  $s|_A = f$

Dazu benötigen wir erstmal einige Lemmata, die wir im folgenden erarbeiten.  $\square$

**Lemma 11.2.** Sei  $X$  normal und  $A \subseteq X$  abgeschlossen. Sei  $\alpha : A \rightarrow [-r, r]$  für  $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  stetig. Dann existiert  $g : X \rightarrow [-\frac{1}{3}r, \frac{1}{3}r]$  stetig mit  $|\alpha(a) - g(a)| \leq \frac{2}{3}r$  für  $a \in A$ .

*Beweis.* Setze  $B := \alpha^{-1}([-r, -\frac{1}{3}r])$  und  $C := \alpha^{-1}([\frac{1}{3}r, r])$ . Wegen  $\alpha$  stetig sind  $B, C$  abgeschlossen, und sie sind auch disjunkt, weil die Intervalle disjunkt sind. Nach **Urysohn mit beliebigem Intervall** finden wir also eine stetige Funktion

$$\begin{aligned} g : X &\rightarrow \left[-\frac{1}{3}r, \frac{1}{3}r\right] \\ g(B) &= \left\{-\frac{1}{3}r\right\} \\ g(C) &= \left\{\frac{1}{3}r\right\} \end{aligned}$$



**Behauptung 1.**  $g$  erfüllt die Bedingungen unseres Lemmas, d.h.

$$|\alpha(a) - g(a)| \leq \frac{2}{3}r \quad \forall a \in A.$$

*Unterbeweis.* • Sei  $a \in B$ , Dann ist  $\alpha(a) \in [-r, -\frac{1}{3}r]$  und  $g(a) = -\frac{1}{3}r$ , also gilt die Ungleichung.

- Sei  $a \in C$ . Dann ist  $\alpha(a) \in [\frac{1}{3}r, r]$  und  $g(a) = \frac{1}{3}r$ , also, also gilt die Ungleichung.
- Sei  $a \in A \setminus (B \cup C)$ . Dann ist  $\alpha(a), g(a) \in [-\frac{1}{3}r, \frac{1}{3}r]$ , und damit ist der Abstand auch höchstens  $\frac{2}{3}r$ .

■

□

**Bemerkung\*.** In der Vorlesung kam die Frage auf, ob wir manche der gerade bewiesenen Resultate auch auf die Analysis übertragen können, indem wir z.B. den Fixpunktsatz von Banach anwenden.

*Fortsetzung des Beweises des Erweiterungssatz von Tietze.* Definiere die Folgen  $s_n$  induktiv. Dazu

Schritt 1: Verwende Lemma 11.2 mit  $\alpha = f$  und  $r = 1$ , also erhalten wir

$$g_1 : X \rightarrow \left[ -\frac{1}{3}r, \frac{1}{3}r \right].$$

setzt mit  $|f(a) - g(a)| \leq \frac{2}{3}$  für jedes  $a \in A$ . Setze  $s_1 = g_1$ .

Induktionsschritt Angenommen, wir haben schon stetige Funktion  $g_1, \dots, g_n$  auf  $X$  mit

$$g_i : X \rightarrow \left[ -\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} \cdot \frac{1}{3}, \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} \cdot \frac{1}{3} \right].$$

und

$$\left| f(a) - \sum_{i=1}^n g_i(a) \right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \forall a \in A.$$

Verwende nun wieder Lemma 11.2 mit  $\alpha = f - \sum_{i=1}^n g_i|_A$  und  $r = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ .

Es gibt also

$$g_{n+1} : X \rightarrow \left[ -\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n, \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n \right].$$

Wir erhalten nun

$$\begin{aligned} \left| f(a) - \sum_{i=1}^n g_i(a) - g_{n+1}(a) \right| &= \left| f(a) - \sum_{i=1}^{n+1} g_i(a) \right| \\ &\leq \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

Nun definiere

$$s_{n+1} := \sum_{i=1}^{n+1} g_i : X \rightarrow \mathbb{R}.$$

**Behauptung 1.**  $s_n$  hat Bild in  $[-1, 1]$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$ .

*Unterbeweis.*

$$\begin{aligned}
 |s_n(x)| &= \left| \sum_{i=1}^n g_i(x) \right| \leq \sum_{i=1}^n |g_i(x)| \\
 &\leq \sum_{i=1}^n \left( \frac{2}{3} \right)^{i-1} \cdot \frac{1}{3} \\
 &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{2}{3} \right)^{i-1} \cdot \frac{1}{3} \\
 &= \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 1
 \end{aligned}$$

Die andere Schranke zeigt man völlig analog. ■

**Behauptung 2.** Die Folge  $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert gleichmäßig gegen  $s$ .

*Unterbeweis.* Für  $k > n$  ist

$$\begin{aligned}
 |s_k(x) - s_n(x)| &= \left| \sum_{i=n+1}^k g_i(x) \right| \\
 &\leq \sum_{i=n+1}^{n+1} \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{2}{3} \right)^{i-1} \\
 &= \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{2}{3} \right)^{i-1} \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{\left( \frac{2}{3} \right)^n}{1 - \frac{2}{3}} \\
 &= \left( \frac{2}{3} \right)^n
 \end{aligned}$$

- (i) Für jedes  $x \in X$  ist  $\{s_n(x)\}_{n \geq 1}$  eine Cauchy-Folge, also konvergiert sie zu einem Punkt  $s(x) \in [-1, 1]$ .
- (ii) Intuitiv reicht es für gleichmäßige Stetigkeit schon zu sehen, dass in obiger Abschätzung kein  $x$  vorkommt. Genauer:  
Sei  $\varepsilon > 0$ , so  $\exists N \in \mathbb{N}$  mit  $\forall n > N \Rightarrow \left( \frac{2}{3} \right)^n < \varepsilon$ . Dann ist

$$\begin{aligned}
 |s(x) - s_n(x)| &= \left| \lim_{k \rightarrow \infty} s_k(x) - s_n(x) \right| \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} |s_k(x) - s_n(x)| \\
 &\leq \left( \frac{2}{3} \right)^n \\
 &< \varepsilon
 \end{aligned}$$

also ist die Konvergenz gleichmäßig, und  $s$  ist stetig. ■

Setze nun  $\bar{f} := s$ , dann überprüfen wir

**Behauptung 3.**  $\bar{f}$  ist eine Fortsetzung von  $f$ , d.h.  $\bar{f}|_A = f$ .

*Unterbeweis.* Es ist

$$|f(a) - s_n(a)| = \left| f(a) - \sum_{i=1}^n g_i(a) \right| \leq \left( \frac{2}{3} \right)^n$$

also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f(a) - s_n(a)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{3} \right)^n = 0$$

Also ist

$$s(a) := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(a) = f(a).$$

für jedes  $a \in A$ . ■

Wir haben also eine Fortsetzung gefunden, und sind damit fertig. □

**Korollar 11.3** (Version des Satzes von Tietze). Sei  $X$  ein normaler Raum und  $A \subseteq X$  abgeschlossen. Dann gilt folgendes:

1. Jede stetige Funktion  $f : A \rightarrow [a, b]$  lässt sich zu einer Funktion  $\bar{f} : X \rightarrow [a, b]$  fortsetzen.
2. Jede stetige Funktion  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  lässt sich fortsetzen zu einer Funktion  $\bar{f} : X \rightarrow \mathbb{R}$ .

*Beweis.* Übung. □

## 12 Der Metrisierungssatz von Urysohn

**Satz 12.1** (Metrisierungssatz von Urysohn). Jeder normale Raum mit abzählbarer Basis der Topologie ist metrisierbar.

*Beweis.*

**Beweisstrategie.** Schritt 1: Betrachte  $\prod_{\mathbb{N}} [0, 1]$  in der Produkttopologie und zeige, dass der Raum metrisierbar ist. Dieser Raum heißt **Hilbert-Würfel**.

Schritt 2: Sei  $X$  normal mit abzählbarer Basis, wir zeigen, dass wir eine Einbettung  $F : X \rightarrow \prod_{\mathbb{N}} [0, 1]$  finden. Dann sind wir fertig, da

$$X \cong F(X) \subseteq \prod_{\mathbb{N}} [0, 1].$$

ein Unterraum eines metrischen Raumes ist. □

Vorlesung 11  
Do 20 Mai 2021 10:07

**Lemma 12.2** (Hilbert-Raum ist metrisierbar). Der Raum  $\prod_{i=1}^{\infty} [0, 1]$  ist metrisierbar (in der Produkttopologie).

*Beweis.* Übung. Die Metrik ist hierbei gegeben durch:

$$D((x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sup \left\{ \frac{|x_n - y_n|}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

□

**Lemma 12.3.** Sei  $X$  ein normaler Raum mit abzählbarer Basis

$$\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \dots\}.$$

Dann gibt es eine abzählbare Familie

$$\{f_i : X \rightarrow [0, 1] \mid f_i \text{ stetig}\}.$$

sodass für jedes  $x \in X$  und jede offene Umgebung  $U$  ein  $i \in \mathbb{N}$

existiert, sodass  $f_i(x) = 1$  und  $f_i(y) = 0$  für  $y \notin U$ .

**Bemerkung.** Wir wissen schon, dass  $X$  normal  $\Rightarrow X$  vollständig regulär, dass wir also solche Funktionen finden, ist bereits klar. Das wichtige am Beweis ist, dass wir abzählbar viele Funktionen finden können, die das schon für alle (!) Punkte tun.

*Beweis von Lemma 12.3.* Für jedes  $n, m$  mit  $|B_n| \subseteq B_m$  wenden wir das Lemma von Urysohn. an, also gibt es Funktionen

$$\begin{aligned} g_{n,m}: X &\rightarrow [0, 1] \\ g_{n,m}(\overline{B_n}) &= \{1\} \\ g_{n,m}(X \setminus B_m) &= \{0\} \end{aligned}$$

Wir stellen zudem fest, dass diese Familie von Funktionen abzählbar ist, wegen  $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \cong \mathbb{N}$ .

**Behauptung 1.** Die  $(g_{n,m})_{n,m \in \mathbb{N}}$  erfüllen bereits die gewünschte Bedingung.

*Unterbeweis.* Sei  $x \in X$  mit einer Umgebung  $x \in U$  gegeben. Da  $\mathcal{B}$  eine Basis ist, finden wir  $m \in \mathbb{N}$  mit  $x \in B_m \subseteq U$ , da  $U$  offen ist. Da  $X$  normal ist, finden wir zudem eine offene Menge  $V$  mit  $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq B_m$  (Lemma 10.3, wir erinnern uns, dass Punkte in normalen Räumen abgeschlossen sind nach Satz 4.3). Analog finden wir nun  $B_n \in \mathcal{B}$  mit  $x \in B_n \subseteq V$ , erneut, weil  $\mathcal{B}$  eine Basis ist.

Dann ist  $\overline{B_n} \subseteq \overline{V} \subseteq B_m$ , und  $g_{n,m}(x) = 1$  wegen  $x \in B_n \subseteq \overline{B_n}$  und  $g_{n,m}(y) = 0$  für  $y \notin U$ , da dann  $y \notin B_m$ . ■

□

**Mündliche Anmerkung<sup>†</sup>.** Für den Beweis von Satz 12.1 brauchen wir nicht wirklich, dass wir eine abzählbare Basis finden, sondern es genügt die Eigenschaft ebigen Lemmas. Die abzählbare ist jedoch die einfachste Eigenschaft das zu garantieren.

*Beweis des Metrisierungssatz von Urysohn.* Seien  $(f_i: X \rightarrow [0, 1])_{i \in \mathbb{N}}$  wie in Lemma 12.3. Definiere

$$F: \begin{cases} X & \longrightarrow \prod_{i=1}^{\infty} [0, 1] \\ x & \longmapsto (f_i(x))_{i \in \mathbb{N}} \end{cases}$$

Nach der universellen Eigenschaft der Produkttopologie ist  $f$  stetig.

**Behauptung 1.**  $F$  ist eine Einbettung (d.h. ein Homöomorphismus mit dem Bild, siehe Definition 7.15).

*Unterbeweis.* Wir zeigen, dass  $F$  injektiv und  $F: X \rightarrow F(X)$  offen ist, dann ist  $F$  eine Einbettung.

- Seien  $x \neq y \in X$ . Da  $X$  normal ist, finden wir eine offene Menge  $x \in U$ ,  $y \notin U$  (erneut, indem wir uns erinnern, dass normale Räume Hausdorff sind, und dann Satz 4.3 anwenden). Wegen Lemma 12.3 gibt es also  $n \in \mathbb{N}$  mit  $f_n(x) = 1$  und  $f_n(y) = 0$ , also

$$f_n(x) = 1 \neq f_n(y) \Rightarrow F(x) \neq F(y).$$

Also ist  $F$  injektiv.

- Sei  $U \subseteq X$  offen. Wir zeigen:  $F(U) \subseteq \prod_{\mathbb{N}}$  ist offen. Sei  $z \in F(U)$  mit (eindeutigem) Urbild  $x \in U$ . Wir konstruieren eine Menge  $V \subseteq \prod_{\mathbb{N}}[0, 1]$  offen, sodass  $z \in V \cap F(X) \subseteq F(U)$ , dann ist  $F(U)$  offen in  $F(X)$ .  
Erneut nach **Lemma 12.3** erhalten wir ein  $n$  mit  $f_n(x) = 1$  und  $f_n(X \setminus U) = 0$ . Setze nun

$$V = [0, 1] \times \dots \times (0, 1] \times [0, 1] \times \dots$$

als offene Teilmenge von  $\prod_{\mathbb{N}}[0, 1]$ , wobei  $(0, 1]$  im  $n$ -ten Faktor stehe.

**Behauptung 2.**  $z \in V \cap F(X) \subseteq F(U)$  ist eine offene Umgebung (in  $F(X)$ ) von  $z$ .

*Unterbeweis.* Sei  $z' = F(x') \in V \cap F(X)$ . Es ist  $z' \in V$ , also  $z'_n := f_n(x') \neq 0$ , allerdings wissen wir auch  $f_n(X \setminus U) = 0$ , d.h.  $x' \notin X \setminus U$ , also folgt  $x' \in U$  und somit  $z' = F(x') \in F(U)$ . Zudem ist wegen  $z_n = f_n(x) = 1 \neq 0$  auch  $z \in V \cap F(X)$ , also handelt es sich um eine offene Umgebung von  $z$ . ■

Also ist  $F(U)$  offen in  $F(X)$  und somit  $F: X \rightarrow F(X)$  offen.

Also ist  $F: X \rightarrow F(X)$  offen und injektiv, und somit eine Einbettung. ■

Nun stellen wir also fest, dass  $X \cong F(X)$  (wegen der Einbettung), aber  $F(X) \subseteq \prod_{\mathbb{N}}[0, 1]$  ist metrisierbar als Teilraum eines metrisierbaren Raums, also ist  $X$  metrisierbar und das wollten wir zeigen. □

**Mündliche Anmerkung.** Wo haben wir jetzt wirklich benutzt, dass das Produkt abzählbar war? Man überlegt sich, dass wir den exakt gleichen Beweis für jede Kardinalität einer Basis hätten durchführen können, um nach  $\prod_{\aleph} [0, 1]$  einzubetten. Das wirkliche Problem ergibt sich dann erst, wenn wir zeigen (in der Übung), dass  $\prod_{\mathbb{N}} [0, 1]$  metrisierbar ist. Es stellt sich heraus, dass das nur für  $\aleph \leq \omega$ , dh. für abzählbare Indexmengen der Fall ist.

## Teil II

## Algebraische Topologie

## Motivation

Bisher haben wir Topologische Räume und ihre Eigenschaften wie Hausdorff, normal, Kompakt oder zusammenhängend gesehen, um diese zu unterscheiden. Im 2. Teil der Vorlesung kümmern wir uns nun um weitere Topologische Invarianten.

**Beispiel.** Setze  $\pi_0(X) :=$  als die Menge der Wegkomponenten von  $X$ , d.h.  $\pi_0(X) \subseteq \mathcal{P}(X)$  und  $U \in \pi_0(X)$  genau dann, wenn  $U$  wegzusammenhängend und inklusionsmaximal, d.h.  $\nexists V$  wegzusammenhängend mit  $U \subsetneq V$ . Dann ist  $\pi_0(X)$  eine topologischen Invariante.

**Bemerkung\*.** Mit 'topologischen Invariante' meinen wir natürlich immer eine Eigenschaft eines topologischen Raumes, die von Homöomorphismen erhalten wird, also nicht von der konkreten Wahl des Raumes abhängt.

**Beispiel.**

- $\pi_0(\mathbb{R}) = \{\mathbb{R}\}$ , da  $\mathbb{R}$  wegzusammenhängend
- $\pi_0(\mathbb{N}) = \{\{n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$ , weil die einzigen wegzusammenhängenden Teilmengen von  $\mathbb{N}$  die einpunktigen Mengen sind
- Betrachte die Sinuskurve des Topologen (vgl. [Abbildung 14](#)). Diese ist definiert als der Abschluss des Graphen  $G$  von  $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$  für  $x > 0$ . Dann sind die Wegzusammenhangskomponenten genau  $G$  selbst (blau) sowie  $\overline{G} \setminus G$  (rot).

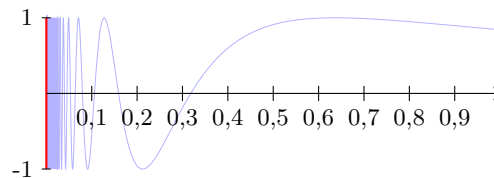


Abbildung 13: Sinuskurve des Topologen

**Beispiel.** Eine Invariante, die wir noch nicht kennen, ist  $\pi_1$ . Hierzu definiere für  $x_0 \in X$ :

$$\pi_1(X, x_0) = \{ \text{Abbildungen } f: S^1 \rightarrow X, 1 \mapsto x_0 \} / \text{'Verschieben'}.$$

**Mündliche Anmerkung.** 'Verschieben' ist an dieser Stelle (bewusst) noch nicht präzisiert. Wir werden sehen, dass wir damit 'Homotopie' meinen, dazu aber später mehr, wenn wir das ganze detailliert behandeln.



**Fakt.** Ist  $f : X \rightarrow Y$  stetig, so induziert  $f$  Abbildungen

$$\begin{aligned} f_* : \pi_0(X) &\rightarrow \pi_0(Y) \\ f_* : p_1(X, x_0) &\rightarrow \pi_1(Y, f(x_0)) \end{aligned}$$

Formal sind  $\pi_0, \pi_1$  sogenannte **Funktoren**, deswegen wollen wir uns im Folgenden etwas genauer die sogenannte **Kategorientheorie** ansehen, die solche Konzepte behandelt.

## 13 Kategorien

### 13.1 Einschub: Mengentheorie

**Bemerkung\***. Das folgende Kapitel ist sehr formal und holt weit aus, was wir nicht (wirklich) verwenden. Es dient nur dazu, unserem folgenden Handeln eine formale Grundlage zu verleihen, hat aber keinen (wirklichen) weiteren Einfluss auf die Vorlesung.

Eine Einführung in die Logik und Mengenlehre, die auf die Topologie hinarbeitet, findet sich in [Mun18, Kapitel 1].

Für Formaleres zu Kardinalitäten sei auf das Vorlesungsskript [Koe18] verwiesen, dort wird allerdings auch vieles behandelt, das hier nicht relevant ist.

Wir fordern neben den üblichen Axiomen von **ZFC** (hierbei steht **C** für das sogenannte **Auswahlaxiom**), noch die Existenz mehrerer unerreichbarer Kardinalzahlen (d.h. welche außer  $\aleph_0 := \text{card}(\mathbb{N})$ , die wir  $\aleph_0 < \kappa < \kappa'$  nennen)

**Definition**<sup>†</sup> (unerreichbare Kardinalzahl).  $\kappa$  ist eine **unerreichbare Kardinalzahl**, falls

- $\text{card}(\bigcup_{i \in I} X_i) < \kappa$  für alle  $I, X_i$  mit  $\text{card}(I), \text{card}(X_i) < \kappa$ .
- $\text{card}\{f : X \rightarrow Y \mid f \text{ Abbildung}\} < \kappa$  für alle Mengen  $X, Y$  mit  $\text{card}(X), \text{card}(Y) < \kappa$ .

**Bemerkung\*** (Logik-Spam). Eine überabzählbare unerreichbare Kardinalzahl liefert uns zugleich ein Modell von **ZFC**, wir können deren Existenz also nicht innerhalb von **ZFC** zeigen (vgl. Gödelscher Unvollständigkeitssatz), deren Existenz ist jedoch konsistent genau dann, wenn **ZFC** selbst Widerspruchsfrei ist (wovon wir ausgehen). Insbesondere sollte man über  $\kappa$  so nachdenken, dass alles, das man definieren kann / betrachtet, bzw. alle 'interessanten' Mengen  $< \kappa$  sind. So sollte man auch über  $\kappa$  nachdenken: Durch keine Begriffsbildungen, die Dinge  $< \kappa$  verwenden, können wir  $\kappa$  erreichen, also bildet  $\kappa$  etwas wie den Horizont des Universums (der Mengen).

**Definition 13.1** (Menge, Klasse). • Der Begriff **Mengen** heißt für uns ab nun *alle Mengen mit Kardinalität  $< \kappa$* .  
• Der Begriff **Klasse** steht für alle Mengen mit Kardinalität  $< \kappa'$ .

**Bemerkung\*.** Diese Begrifflichkeiten dienen nur dazu, dass wir über die Klasse aller Mengen  $V$  reden können, die keine Menge ist. (auch nicht im herkömmlichen Sinne). Es gibt auch andere Ansätze, um das zu ermöglichen, wie etwa das Beschreiben von Klassen mittels Formeln, für uns ist obiger Ansatz jedoch am einfachsten. Merken sollte man sich vor allem

- Jede Menge ist eine Klasse, aber nicht zwingend umgekehrt.  $V = \{M \mid M \text{ ist Menge}\}$  ist die Klasse aller Mengen, oder auch das Universum aller Mengen.
- Wir können Mengen beliebig zu einer Klasse zusammenfassen, d.h. ist  $\varphi(M)$  eine Formel (Eigenschaft) einer Menge  $M$ , so ist

$$\{M \mid \varphi(M)\} := \{M \mid \varphi(M), M \text{ ist Menge}\}.$$

eine Klasse.

- Für Klassen gilt das nicht mehr, d.h.

$$\{K \mid K \text{ ist Klasse}\}.$$

ist keine Klasse (und damit [für uns]) kein definierter Ausdruck. Sonst könnten wir das [Russel'sche Paradoxon](#) herleiten.

## 13.2 Kategorien

**Bemerkung\*.** Für eine ausführlichere Einführung zur Kategorientheorie siehe z.B. [\[Lei14\]](#).

**Definition 13.2** (Kategorie). Eine **Kategorie**  $\mathcal{C}$  besteht aus

- Einer Klasse von **Objekten**, notiert  $\text{Ob}(\mathcal{C})$ .
- $\forall X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  eine Menge  $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  von **Morphismen**
- Für  $X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  Verknüpfungsabbildungen

$$\circ : \begin{array}{ccc} \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \text{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, Z) & \longrightarrow & \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Z) \\ (f, g) & \longmapsto & g \circ f \end{array}$$

mit  $(f, g) \mapsto g \circ f$ , sodass  $\circ$  assoziativ ist.

- Jede Menge  $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, X)$  enthält eine Identität  $\text{id}_X$ , sodass

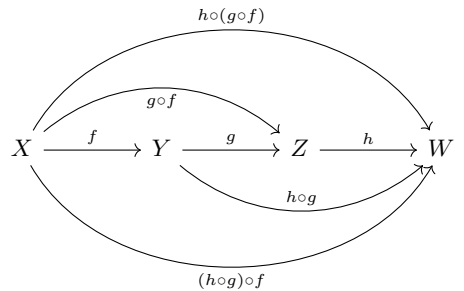
$$f \circ \text{id}_X = f \quad \text{id}_Y \circ g = g.$$

für  $Y \in \text{Ob}(\mathcal{C}), f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  und  $g \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, X)$  beliebig.

**Notationsmissbrauch\*.** Wir schreiben  $X \in \mathcal{C}$  für  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ .

**Notation\*.** Aus naheliegenden Gründen notieren wir  $f : X \rightarrow Y$  für  $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$

**Bemerkung\*** (Assoziativität und kommutative Diagramme). Mit Assoziativität meinen wir das folgende: Sind  $X, Y, Z, W \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  und  $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ ,  $g \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ ,  $h \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(Z, W)$ , so ist  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ . Wir veranschaulichen dies in einem **kommutativen Diagramm** (das ist typisch für die Kategorientheorie, wir malen Objekte als Punkte und Elemente von  $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  als Pfeile von  $X \rightarrow Y$ , so sollte man sich das vorstellen):



Wir fordern also, dass beide Möglichkeiten, sich eine Abbildung  $X \rightarrow Z$  zusammenzubauen, die gleichen sind.

**Bemerkung.** • Ist  $\text{Ob}(\mathcal{C})$  eine Menge, so heißt  $\mathcal{C}$  klein.

- Da  $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  Mengen sind, heißt  $\mathcal{C}$  in der Literatur manchmal lokal klein, manche Autoren lassen für  $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  auch Klassen zu, wir jedoch nicht.

**Beispiel.** • **Set** ist die Kategorie der Mengen und all ihrer Abbildungen dazwischen.

- **Top** ist die Kategorie der topologischen Räume und ihren stetigen Abbildungen.
- **Grp** ist die Kategorie der Gruppen und ihren Gruppenhomomorphismen
- **Vect<sub>ℝ</sub>** ist die Kategorie der  $\mathbb{R}$ -Vektorräume und den linearen Abbildungen dazwischen.
- **Top<sub>\*</sub>** ist die Kategorie der punktierten topologischen Räume. Wir setzen  $\text{Ob}(\text{Top}_*)$  als Klasse aller Topologischen Räume, schränken uns aber bei den Morphismen ein, d.h.

$$\text{Mor}_{\text{Top}_*}((X, x_0), (Y, y_0)) := \{f: X \rightarrow Y \text{ stetig} \mid f(x_0) = y_0\}.$$

**Bemerkung<sup>†</sup>.** Die Kategorientheorie bildet zunächst eine Sprache, mit der wir sehr vieles präziser ausdrücken können. Wir sollten auch so über sie nachdenken, d.h. die Kategorientheorie hilft uns, Dinge aus vielen verschiedenen Teildisziplinen (siehe Liste der Beispiele oben) elegant und knapp zusammenzufassen und Beweise, die gleich geführt werden, zu vereinheitlichen.

**Definition 13.3** (Unterategorie). •  $\mathcal{U}$  ist eine **Unterategorie** von  $\mathcal{C}$ , falls  $\mathcal{U}$  eine Kategorie ist mit  $\text{Ob}(\mathcal{U}) \subseteq \text{Ob}(\mathcal{C})$ , und  $\forall X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{U})$  ist

$$\text{Mor}_{\mathcal{U}}(X, Y) \subseteq \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y).$$

- Ist zudem für  $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{U})$  obige Inklusion sogar eine Gleichheit, d.h.  $\text{Mor}_{\mathcal{U}}(X, Y) = \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ , so heißt  $\mathcal{U}$  **volle** Unterategorie.

**Beispiel.** • **Fin**  $\subseteq$  **Set** ist die Unterategorie der endlichen Mengen (jede endliche Menge ist eine Menge)

- **CHaus**  $\subseteq$  **Top** ist die Unterategorie der kompakten Hausdorffräume (jeder kompakte Hausdorff-Raum ist ein topologischer Raum)
- **Ab**  $\subseteq$  **Grp** ist die Unterategorie der abelschen Gruppen (jede abelsche Gruppe ist eine Gruppe)

Alle 3 Beispiele sind volle Unterategorien.

**Definition 13.4** (Isomorphismus).  $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  ist ein **Isomorphismus**, wenn es ein  $g \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, X)$  gibt mit  $f \circ g = \text{id}_Y$  und  $g \circ f = \text{id}_X$  (d.h. eine Umkehrabbildung).

Ist  $f: X \rightarrow Y$  ein Isomorphismus, d.h. es gibt ein Inverses  $g$ , so ist  $g$  bereits eindeutig. Seien hierzu  $g, g'$  beides Inverse zu  $f$ , dann ergibt sich

$$g = g \circ \text{id}_Y = g \circ (f \circ g') = (g \circ f) \circ g' = \text{id}_X \circ g' = g'.$$

**Beispiel.**  $f \in \text{Top}$  ist ein Isomorphismus, wenn  $f$  ein Homöomorphismus ist.

**Definition 13.5** (Funktork). Seien  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  Kategorien. Ein (kovarianter) **Funktork**  $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  besteht aus:

- einer Abbildung  $\mathcal{F}: \text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{D})$ .
- Abbildungen  $\mathcal{F}: \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y))$  für alle Objekte  $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ .

sodass

- $\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g)$
- $\mathcal{F}(\text{id}_X) = \text{id}_{\mathcal{F}(X)}$

**Definition 13.6** (Isomorphismus von Kategorien). Ein Funktork  $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ist ein **Isomorphismus**, falls es einen Funktork  $\mathcal{G}: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  gibt, sodass  $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$  und  $\mathcal{F} \circ \mathcal{G}$  die Identitäten sind.

**Mündliche Anmerkung.** Ein Funktor  $\mathcal{F}$  ist hierbei die Identität ('der Identitätsfunktor'), wenn er sowohl Objekte als auch Abbildungen auf sich selbst schickt.

**Mündliche Anmerkung<sup>†</sup>.** Im Gegensatz zu den Begrifflichkeiten ist ein Isomorphismus von Kategorien nicht die gängigste Version von 'Gleichheit'. Nur in Seltenen Fällen sind Kategorien tatsächlich isomorph (nach ebiger Definition), allerdings oft *äquivalent*. Mehr dazu später.

**Beispiel.** • Es gibt einen Funktor  $\mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$ , der jeden topologischen Raum auf seine Trägermenge sendet, und (stetige) Abbildungen zwischen den topologischen Räumen auf die zugehörigen Abbildungen zwischen den Trägermengen. Dieser Funktor heißt oft **vergesslicher Funktor**, auch wenn das kein Fachbegriff ist, sondern eher ein gängiges Schema. Wir können im wesentlichen alle möglichen Strukturen vergessen.

- $\mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{Grp}$  als Inklusion ist ein Funktor, da jede abelsche Gruppe auch Gruppe ist, und Gruppenhomomorphismen von abelschen Gruppen natürlich auch Gruppenhomomorphismen.
- Betrachte den Funktor

$$\mathcal{F} : \begin{array}{ccc} \mathbf{Set} & \longrightarrow & \mathbf{Ab} \\ X & \longmapsto & \mathbb{Z}[X] \\ f : X \rightarrow Y & \longmapsto & \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[X] & \longrightarrow & \mathbb{Z}[Y] \\ \sum_{i=1}^k n_i x_i & \longmapsto & \sum_{i=1}^k n_i f(x_i) \end{array} \end{array}$$

Wir senden hierbei eine Menge  $X$  auf die **freie abelsche Gruppe**, die von  $X$  generiert wird. Dabei ist  $\mathbb{Z}[X]$  das (freie)  $\mathbb{Z}$ -Modul, das als Basis von  $X$  erzeugt wird.

Vorlesung 12  
Di 01 Jun 2021 12:15

**Definition 13.7** (kontravarianter Funktor). Ein **kontravarianter** Funktor  $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  besteht aus

- einer Abbildung  $\mathcal{F} : \mathbf{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{Ob}(\mathcal{D})$
- Abbildungen  $\mathcal{F} : \mathbf{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \mathbf{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(Y), \mathcal{F}(X))$  für  $X, Y \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$

sodass

$$\mathcal{F}(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(X)}, \quad \mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f).$$

**Beispiel** (Dualraum). Das Bilden des Dualraums eines Vektorraums

bildet einen Funktor

$$(\cdot)^* : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}} \\ V & \longmapsto & V^* = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R}) \\ f: V \rightarrow W & \longmapsto & f^* : W \xrightarrow{g} \mathbb{R} \longmapsto V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} \mathbb{R} \\ & & g \longmapsto g \circ f \end{array} \right.$$

**Bemerkung\*.** Natürlich ist hier an  $\mathbb{R}$  nichts besonders, das geht mit jedem Körper  $K$ .

**Definition 13.8** (Dualkategorie). Ist  $\mathcal{C}$  eine Kategorie, so ist  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  die Kategorie mit  $\text{Ob}(\mathcal{C}^{\text{op}}) = \text{Ob}(\mathcal{C})$ , sowie  $\text{Mor}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(X, Y) := \text{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ , und 'denselben' Verknüpfungen.

**Bemerkung\*.** 'Dieselben' Verknüpfungen, d.h für  $X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C}^{\text{op}}) = \text{Ob}(\mathcal{C})$  definieren wir:

$$\circ_{\mathcal{C}^{\text{op}}} : \left\{ \begin{array}{ccc} \text{Mor}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(X, Y) \times \text{Mor}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(Y, Z) & \longrightarrow & \text{Mor}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(X, Z) \\ (f, g) & \longmapsto & f \circ_{\mathcal{C}} g \end{array} \right.$$

indem wir uns erinnern, dass  $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, X)$  und  $g \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(Z, Y)$

**Lemma 13.9.** Ein kontravarianter Funktor  $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ist ein (kovarianter) Funktor  $\mathcal{F}: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}$ .

*Beweis\*.* Nur Definitionen ausschreiben, wirklich nichts spannendes, sollte man aber einmal machen als Übung.  $\square$

**Beispiel.**  $\mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}^{\text{op}} \xrightarrow{(\cdot)^*} \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}$  als kovarianter Funktor, analog zu vorherigem Beispiel.

**Beispiel.** **Cat** ist die Kategorie der kleinen Kategorie und Funktoren.

**Mündliche Anmerkung.** Wir betrachten hier nur die kleinen Kategorien (also die, deren Objekte eine Menge bilden), damit wir nicht im Probleme wieder 'Klasse aller Klassen' laufen, solche Probleme könnte man aber auch wieder umgehen, wenn man weitere unerreichbare Kardinalzahlen fordert.

**Definition 13.10** (natürliche Transformation und Äquivalenz). Sei-

en  $\mathcal{F}, \mathcal{G}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  zwei Funktoren.

- i) Eine **natürliche Transformation**  $t: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  ist eine Familie von Morphismen (in  $\mathcal{D}$ )

$$\{t_X \in \text{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X), \mathcal{G}(X))\}_{X \in \text{Ob}(\mathcal{C})}.$$

sodass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(X) & \xrightarrow{\mathcal{F}(f)} & \mathcal{F}(Y) \\ t_X \downarrow & & \downarrow t_Y \\ \mathcal{G}(X) & \xrightarrow{\mathcal{G}(f)} & \mathcal{G}(Y) \end{array}$$

kommutiert.

- ii)  $t$  ist eine **natürliche Äquivalenz** (auch natürlicher Isomorphismus genannt), falls jedes  $t_X$  ein Isomorphismus ist.  
 iii)  $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ist eine **Äquivalenz** (von Kategorien), falls es einen Funktor  $\mathcal{G}: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  gibt, sodass  $\mathcal{F} \circ \mathcal{G}$  und  $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$  jeweils natürlich äquivalent zum Identitätsfunktoren sind.

**Bemerkung\*.** Die Idee an obigem kommutativen Diagramm ist einfach, dass wir nun per se zwei Wege haben, von  $\mathcal{F}(X)$  nach  $\mathcal{G}(Y)$  zu gelangen, und wir wollen, dass diese gleich sind.

**Mündliche Anmerkung.** Die Idee daran, natürliche Äquivalenz von Kategorien zuzulassen ist, dass wir uns nicht mehr um die Anzahl von (in einer Kategorie) zueinander isomorphen Objekten kümmern müssen, und davon ebenfalls wegabstrahieren.

**Beispiel.** Es gibt eine natürliche Transformation  $t: \text{id}_{\text{Vect}_{\mathbb{R}}} \rightarrow ()^{**}$ , gegeben durch Komponenten für jeden  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V$ :

$$t_V : \left\{ \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & V^{**} = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V^*, \mathbb{R}) \\ v & \longmapsto & \text{ev}_v : \left\{ \begin{array}{ccc} V^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(v) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Wir müssen prüfen, dass folgendes Diagramm für jede lineare Abbildung  $f: V \rightarrow W$  kommutiert.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ t_V \downarrow & & \downarrow t_W \\ V^{**} & \xrightarrow{f^{**}} & W^{**} \end{array}$$

Sei hierzu  $v$  beliebig, dann erhalten wir

$$\begin{array}{ccc} v & \xrightarrow{\quad} & f(v) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{ev}_v & \xrightarrow{\quad} & \text{ev}_v^{**} = \text{ev}_{f(v)} \end{array}$$

Um zu sehen, dass die beiden Abbildungen, die wir rechts unten erhalten, gleich sind, sollte man sich kurz klarmachen, dass es sich dabei um Elemente aus  $W^{**} = \text{Hom } W^*, \mathbb{R}$  handelt, also können wir zeigen, dass die Abbildungen gleich sind, indem wir ein Element  $g \in W^* = \text{Hom}(W, \mathbb{R})$  einsetzen, und die gleiche reelle Zahl erhalten. Dazu ist erstmal:

$$\text{ev}_{f(v)}(g) \stackrel{\text{Def. von ev}}{=} g(f(v)) = (g \circ f)(v).$$

sofort nach Definition. Die andere Rechnung ist etwas langwieriger, aber nur direktes Definitionen-Einsetzen:

$$\begin{aligned} \text{ev}_v^{**}(g) &= ((f^*)^*(\text{ev}_v))(g) \\ &\stackrel{a^*(b)=b \circ a}{=} (\text{ev}_v \circ f^*)(g) \\ &= \text{ev}_v(f^*(g)) \\ &\stackrel{a^o(b)=b \circ a}{=} \text{ev}_v(g \circ f) \\ &\stackrel{\text{Def. von ev}}{=} (g \circ f)(v) \end{aligned}$$

und damit erhalten wir die gleiche reelle Zahl, also schlussendlich  $(\text{ev}_v^*)^* = \text{ev}_{f(v)}$  wie gewünscht, das Diagramm kommutiert und in der Tat handelt es sich bei  $t$  um eine natürliche Transformation  $\text{id}_{\text{Vect}_{\mathbb{R}}} \rightarrow ()^{**}$

**Beispiel.** Betrachte die Kategorie der endlich-dimensionalen Untervektorräume von  $\mathbb{R}^\infty$  mit ihren linearen Abbildungen und diese mittels eines Inklusionsfunktors in  $\mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}^{f.d.}$  (endlich-dimensionale  $\mathbb{R}$ -Vektorräume)

**Mündliche Anmerkung** (In der Pause). Es ist  $\mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}^{f.d.}$  keine kleine Kategorie, denn wir können z.B. für jede beliebige Menge  $X$  die Menge  $\mathbb{R}^n \times \{X\}$  bilden und diese kanonisch wieder als  $\mathbb{R}^n$  auffassen, damit erhalten wir also für jede Menge (mindestens) ein Objekt in  $\mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}^{f.d.}$ , und damit können wir auch die Menge aller Mengen basteln.

Umgekehrt ist aber die Kategorie der endlich-dimensionalen Untervektorräume von  $\mathbb{R}^\infty$  eine kleine Kategorie, weil jedes Objekt ja insbesondere eine Teilmenge von  $\mathbb{R}^\infty$  (zumindest die Trägermenge) ist, und wir damit wieder eine Menge erhalten.

**Mündliche Anmerkung.** Man kann zeigen, dass ein Funktor  $\mathcal{F}$



genau dann eine natürliche Äquivalenz ist, wenn er essentiell surjektiv und eine Bijektion auf den Morphismen ist.

Essentiell surjektiv bedeutet, dass für jedes Objekt  $Y \in \mathcal{D}$  ein zu  $Y$  isomorphes Objekt  $Z$  existiert, das im Bild von  $\mathcal{F}$  liegt.

Bijektion auf Morphismen heißt, dass  $\mathcal{F}$  einen Isomorphismus  $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y) \cong \text{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y))$  mittels  $f \mapsto \mathcal{F}(f)$  induziert.

**Mündliche Anmerkung.** Das tolle an obigem Beispiel ist, dass wir nun eine Äquivalenz zwischen  $\mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}^{f.d.}$  und einer kleinen Kategorie gefunden habe. Das ist toll, wenn wir z.B. mit **Cat** arbeiten wollen, weil wir dann hier zwar  $\mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}^{f.d.}$  nicht als Objekt wiederfinden, allerdings eine dazu natürlich äquivalente Kategorie.

**Beispiel.** Betrachte die natürliche Transformation  $t: \text{id}_{\mathbf{Grp}} \rightarrow ()^{ab}$ , gegeben durch Komponenten für jede Gruppe  $G$ :

$$t_G : \begin{array}{ccc} G & \twoheadrightarrow & G/[G, G] \\ g & \mapsto & [g] \end{array}$$

Ist  $G$  eine Gruppe und  $a, b \in G$ , so ist  $[a, b] := aba^{-1}b^{-1}$  der **Kommutator** der beiden Elemente (der Name kommt daher, dass  $[a, b] = e$  genau dann, wenn  $a, b$  kommutieren), und  $[G, G]$  ist die Untergruppe von  $G$ , die von den Kommutatoren in  $G$  erzeugt wird, d.h. alle endlichen Verknüpfungen von solchen Kommutatoren. Man kann nun zeigen, dass  $[G, G] \trianglelefteq G$  eine normale Untergruppe ist, und  $G/[G, G]$  ist abelsch und die **Abelisierung** von  $G$ . Wir erhalten ebenfalls die kanonische Projektion  $G \twoheadrightarrow G/[G, G]$ .

Wir können Gruppen auch als  $\langle E \mid R \rangle$  darstellen, wobei  $E$  eine Menge an Symbolen und  $R$  eine Menge an Relationen ist. Die beschriebene Gruppe besteht dann aus allen Wörtern, die die Buchstaben der Menge  $E$  und deren Inversen bilden, modulo der erzeugten Untergruppe der Relationen.

- $\langle a, b \mid \emptyset \rangle = \langle a, b \rangle \cong F_2$  ist die freie Gruppe mit 2 Elementen. Sie besteht aus Wörtern wie  $aba^{-1}b^{-2}a^3$ , bei der keine Relationen gelten (außer  $aa^{-1} = a^{-1}a = e, bb^{-1} = b^{-1}b = e$ , was immer gefordert wird).
- $\langle a, b \mid [a, b] \rangle \cong \mathbb{Z}^2$ , denn jetzt kommutieren beliebige zwei Elemente, und wir können jedes Wort aus  $a, b, a^{-1}, b^{-1}$  als  $a^n b^m$  mit  $n, m \in \mathbb{Z}$  umschreiben, und der Isomorphismus zu  $\mathbb{Z}^2$  ist kanonisch.
- $\langle a, b \mid [a, b], a^3, b^3 \rangle \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$ , denn jetzt ist ja zusätzlich noch  $a^3 = b^3 = e$  das neutrale Element.

**Mündliche Anmerkung.**  $\triangle$  Es sei noch darauf hingewiesen, dass nicht alle Relationen, die gelten, aufgeführt sein müssen. Im dritten Beispiel ist ja z.B. auch  $a^6 = e$ , weil  $a^6 = a^3 a^3 = ee = e$ .

**Bemerkung\*.** Es sei gesagt, dass wir jede Gruppe in obiger Form darstellen können, indem wir  $E$  als die Trägermenge von  $G$  wählen, und nun einfach für jede Gleichung  $g_1 g_2 = g_3$ , die in  $G$  gilt, die entsprechende Relation  $g_1 g_2 g_3^{-1}$  in  $R$  fordern. (Das wird aber schnell hässlich, don't do it!)

**Bemerkung\*.**  $\triangle$  Auch, wenn diese Darstellung von Gruppen sehr schön sein *kann*, ist sie sicherlich nicht immer die Beste. Es ist z.B. ein NP-vollständiges Problem, für eine Darstellung  $\langle E \mid R \rangle$  zu entscheiden, ob die dadurch definierte Gruppe trivial ist, d.h. nur aus einem Element besteht.

Als nächstes kann man sich überlegen, dass wir morphismen von  $G = \langle E \mid R \rangle$  in eine Gruppe  $H$  genau angeben können durch  $f(g)$  für jedes Element  $g \in E$ , sodass  $f(r) = e$  für jede Relation  $r \in R$ . (Dabei meinen wir mit  $f(r)$  für  $r = g_1 g_2, \dots, g_n$  einfach  $f(g_1) \circ f(g_2) \circ \dots \circ f(g_n)$ ).  
Damit kann man dann auch die Abbildung  $G \rightarrow G/[G, G]$  leicht angeben, denn haben wir  $G$  dargestellt als  $\langle E \mid R \rangle$ , so ist  $G/[G, G]$  gegeben durch  $\langle E \mid R, \{[a, b]\}_{a, b \in G^2} \rangle$ , und den Morphismus geben wir durch  $f(g) = g$  an.

### 13.3 Limiten und Kolimiten

Um Limiten und Kolimiten zu betrachten, brauchen wir sogenannte **Diagramme**:

Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie und  $\mathcal{J}$  eine kleine Kategorie. Wir stellen uns dann  $\mathcal{J}$  als Diagramm vor, z.B. eines der folgenden drei Beispiele:

$$\begin{array}{c} \star \longrightarrow \star \\ \downarrow \\ \star \end{array} \quad \dots \longrightarrow \star \longrightarrow \star \longrightarrow \dots \quad \star \rightrightarrows \star \quad (3)$$

**Definition 13.11** (Terminales Objekt). Ein **terminales** Objekt in  $\mathcal{C}$  ist ein Objekt  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ , sodass es für alle  $Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  einen eindeutigen Morphismus  $Y \rightarrow X$  gibt, d.h.

$$\forall Y \in \text{Ob}(\mathcal{C}): \quad \text{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, X) = \{\star\}.$$

**Mündliche Anmerkung.** Es gibt zwar nicht die Definition *des* terminalen Objekts, allerdings überlegt man sich leicht, dass terminale Objekte bis auf eindeutigen Isomorphismus eindeutig sind, deswegen ist eine Unterscheidung nicht notwendig bzw. erfolgt normalerweise nicht.

**Beispiel.** In **Top** und **Set** sind die Einpunktmengen die terminalen Objekte.

**Bemerkung\*.** In der Vorlesung wurde der Begriff 'Kegelkategorie' auf einmal definiert, ich splitte das ganze jedoch auf, weil auch Kegel einzeln danach noch Verwendung finden, und ich das so lieber mag, der Inhalt ist aber derselbe:

**Notationsmissbrauch<sup>†</sup>.** Sei  $\mathcal{J}$  eine kleine Kategorie,  $\mathcal{C}$  eine beliebige Kategorie und  $X: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$  ein Funktor. Für  $i \in \text{Ob}(\mathcal{J})$  schreiben wir auch kurz  $X_i := X(i)$ , um die entsprechenden Bildobjekte des Funktors in  $\mathcal{C}$  zu bezeichnen.

**Bemerkung\*.** So sollte man auch wirklich über diese Diagramme nachdenken,  $\mathcal{J}$  ist einfach eine elegante Möglichkeit, eine Menge von Objekten in  $\mathcal{C}$  mittels  $\mathcal{J}$  zu indizieren (= Indizes zu verteilen), und gleichzeitig einige Morphismen zwischen diesen Objekten mit zu beschreiben.

**Definition\* (Kegel).** Sei  $\mathcal{J}$  eine kleine Kategorie und  $X: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$  ein Funktor. Ein **Kegel** über  $X$  ist ein Objekt  $N \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  mit einer Familie von Morphismen  $\{f_i\}_{i \in \mathcal{J}}$ , wobei  $f_i \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(N, X_i)$ , sodass für jeden Morphismus  $h \in \text{Mor}_{\mathcal{J}}(i, j)$  das folgende Diagramm kommutiert:

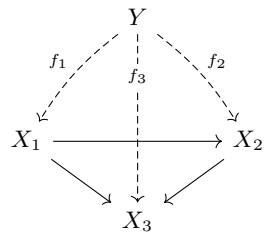
$$\begin{array}{ccc} & N & \\ f_i \swarrow & & \searrow f_j \\ X_i & \xrightarrow{X(h)} & X_j \end{array} .$$

**Bemerkung<sup>†</sup>.** Der name Kegel kommt daher, dass  $N$  gewissermaßen mit den Morphismen  $f_i$  einen Kegel über den  $X_i$  erzeugt. Ist z.B.

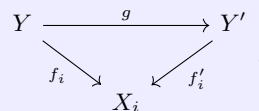
$$\mathcal{J} = \begin{array}{ccc} \star & \xrightarrow{\quad} & \star \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \star & \end{array}$$

so ergibt sich als Ausschnitt der Kategorie  $\mathcal{C}$  ein *kommutatives* Diagramm (kommutativ wegen der Kommutativitätsbedingung in der

Definition):



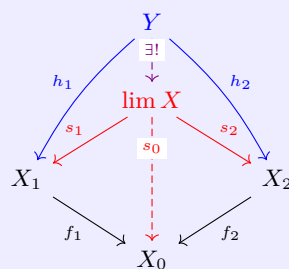
**Definition 13.12** (Kegelkategorie). Sei  $X : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$  ein Funktor. Die **Kegelkategorie**  $\mathcal{C}/X$  hat als Objekte genau die Kegel über  $X$ . Die Morphismen zwischen Kegeln  $(Y, \{f_i\}) \rightarrow (Y', \{f'_i\})$  sind gegebene durch  $g \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, Y')$  (also durch übliche Morphismen zwischen  $Y, Y'$  als Objekten von  $\mathcal{C}$ ), sodass für alle  $i \in \text{Ob}(\mathcal{J})$  folgendes kommutiert:



**Mündliche Anmerkung.** Ist  $\mathcal{J}$  einelementig, so erhalten wir die Kategorie über  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ , vergleiche hierzu [Aufgabe 6.4](#).

**Bemerkung\*.** Morphismen zwischen Kegeln lassen im Wesentlichen einfach 'alles' kommutieren, d.h. zeichnen wir die beiden Kegel und den entsprechenden Morphismus zwischen ihnen ein, so erhalten wir ein kommutatives Diagramm.

**Definition 13.13** (Limes). Ein Limes für  $X : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$  ist ein terminales Objekt in  $\mathcal{C}/X$ .



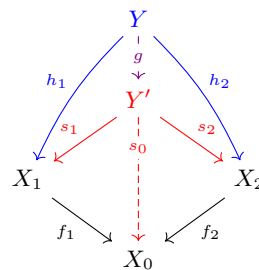
Zur Erklärung des Diagramms: In rot und blau die beiden Kegel  $\lim X$  und  $Y$  über dem Diagramm  $X$  (in schwarz). In violett der induzierte Morphismus  $Y \rightarrow \lim X$  (der sogar ein Morphismus in  $\mathcal{C}/X$  ist!), der eindeutig existiert, weil  $\lim X$  ein Terminalobjekt in  $\mathcal{C}/X$  ist.

**Notation<sup>†</sup>.** Existiert 'der' (eigentlich ein) Limes von  $X: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ , so notieren wir ihn mit  $\lim X$ .

**Warnung.** Es muss nicht immer ein Limes existieren (d.h. es gibt nicht immer ein terminales Objekt in jeder Kategorie)

**Mündliche Anmerkung.** Limiten sind eindeutig, wenn sie existieren (bis auf eindeutigen Isomorphismus)

*Beweis\*.* Das ganze ist ein 'Standard'-Beweis für Objekte mit universeller Eigenschaft. Seien  $Y, Y'$  beides Limiten über  $X: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ , wir werden zeigen, dass diese isomorph mit eindeutigem Isomorphismus sind. Nach universeller Eigenschaft existiert zunächst eine (eindeutige) Abbildung  $g: Y \rightarrow Y'$  in der Kegelkategorie, sodass das Diagramm



kommutiert. Analog finden wir jedoch  $f: Y' \rightarrow Y$  als Morphismus in der Kegelkategorie, denn  $Y$  ist ja ebenfalls ein Limes und  $Y'$  ist ein Kegel. Nun ist  $f \circ g: Y \rightarrow Y$  eine Abbildung von  $Y$  (ein Kegel) nach  $Y$  (der Limes) in der Kegelkategorie. Allerdings ist solch eine Abbildung eindeutig bestimmt (Definition des Terminalobjekts), und wir wissen auch, dass offensichtlich die Identitätsabbildung  $\text{id}: Y \rightarrow Y$  ein Morphismus ist, der ebenfalls zur Kegelkategorie gehört. Also muss bereits  $f \circ g = \text{id}_Y$  gelten. Völlig analog zeigt man  $g \circ f = \text{id}_{Y'}$ , und damit sind  $g$  bzw.  $f$  die geforderten Isomorphismen.

Für die Eindeutigkeit von  $f, g$  reicht es zu bemerken, dass ja bereits die Abbildung  $g: Y \rightarrow Y'$  eindeutig bestimmt war, also kann es erst recht keine weiteren Isomorphismen geben.  $\square$

- Beispiel.** 1) Sei  $\mathcal{J} = \emptyset$  die leere Kategorie, dann ist  $\mathcal{C}/X \cong \mathcal{C}$ . Also ist  $\lim X$  ein terminales Objekt.  
 2) Sei  $\mathcal{J} = \{1, 2\}$  (mit nur den Identitätsabbildungen). Sei  $X: \mathcal{I}t \rightarrow \mathcal{C}$  gegeben durch  $X_1, X_2 \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ , dann ist  $\lim X$  das Produkt von  $X_1$  und  $X_2$ .  
 In **Top** und **Set** ist dieses das klassische / bekannte Produkt  $X_1 \times X_2$  (mit Projektionen!)  
 3) Sei

$$\mathcal{J} = \begin{array}{ccc} & \star & \\ & \downarrow & \\ \star & \longrightarrow & \star \end{array} \quad X = \begin{array}{ccc} & X_2 & \\ & \downarrow f_2 & \\ X_1 & \xrightarrow{f_1} & X_0 \end{array}$$

dann ist  $\lim X$  das **Faserprodukt** (Pullback). In **Top** bzw.

**Set** ist

$$\lim X = \{(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 \mid f_1(x_1) = f_2(x_2)\}.$$

mit der Teilraumtopologie des Produktes und inklusive der entsprechenden Projektionen.

**Mündliche Anmerkung.** Zu einem Limes gehören immer auch die entsprechenden Abbildungen, oft unterdrücken wir diese jedoch implizit.

**Definition 13.14** (Initiales Objekt). Ein initiales Objekt in  $\mathcal{C}$  ist ein Objekt  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ , sodass für alle  $Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  eine eindeutige Abbildung von  $X$  nach  $Y$  existiert, d.h.

$$\forall Y \in \text{Ob}(\mathcal{C}): \quad \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y) = \{\star\}.$$

**Beispiel.** In **Top** bzw. **Set** ist  $\emptyset$  das initiale Objekt.

**Definition 13.15** (Kokegelkategorie). Die Definition ist völlig analog zu der des Kegels, nur dass wir die Richtungen der Morphismen umdrehen:

Ein **Kokegel** über  $X: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$  ist ein Paar  $(Y, \{f_i\}_{i \in \mathcal{J}})$ , sodass  $f_i \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X_i, Y)$  (die Morphismen gehen jetzt in die andere Richtung) und für jeden Morphismus  $h \in \text{Mor}_{\mathcal{J}}(i, j)$  das entsprechende Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X_i & \xrightarrow{X(h)} & X_j \\ & \searrow f_i \quad \swarrow f_j & \\ & Y & \end{array}.$$

kommutiert. Die Kokegelkategorie besteht  $X/\mathcal{C}$  (sprich: ' $\mathcal{C}$  unter  $X$ ') besteht nun aus allen Kokegeln, wobei ein Morphismus  $(Y, \{f_i\}) \rightarrow (Y', \{f'_i\})$  gegeben ist durch  $g \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, Y')$ , sodass für alle  $i \in \text{Ob}(\mathcal{J})$  folgendes kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} & X_i & \\ f_i \swarrow & & \searrow f_j \\ Y & \xrightarrow{g} & Y' \end{array}.$$

**Definition 13.16** (Kolimes). Ein **Kolimes** ist ein Initialobjekt in der Kokegelkategorie  $X/\mathcal{C}$ .

**Warnung.** Auch hier gilt wieder: Initialobjekte und damit Kolimiten müssen nicht immer existieren.

**Mündliche Anmerkung.** Auch das Konzept des Kolimes kann man wieder auf das des Limes zurückführen, indem wir die duale Kategorie einführen.

**Lemma\*** (Kolimes als Limes in der Dualkategorie). TODO

**Beispiel.** 1) Ist  $\mathcal{I} = \emptyset$ , so erhalten wir ein initiales Objekt.  
 2) Ist  $\mathcal{I} = \{1, 2\}$  und  $X = X_1, X_2$ , dann ist  $\text{colim } X$  das **Koprodukt**. In **Top** bzw. **Set** ist dieses  $X_1 \coprod X_2$  (mit den entsprechenden Inklusionen).  
 3) Betrachte

$$\mathcal{I} = \begin{array}{ccc} \star & \longrightarrow & \star \\ \downarrow & & \\ \star & & \end{array} \quad X = \begin{array}{ccc} & X_0 & \xrightarrow{f_2} X_2 \\ f_1 \downarrow & & \\ & X_1 & \end{array} .$$

Dann ist  $\text{colim } X$  das **Pushout** (Kofaserprodukt). In **Top** bzw. **Set** ist das  $X_1 \bigcup_{X_0} X_2$

Vorlesung 13  
 Mo 07 Jun 2021 18:28

## Teil III

## Anhang

## A Übungsblätter

## 1. Übungsblatt

**Aufgabe 1.1.** Es sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $x \in X$  ein Punkt. Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} d_x: X &\rightarrow \mathbb{R} \\ y &\mapsto d(x, y) \end{aligned}$$

stetig.

**Aufgabe 1.2.** Wir betrachten die Menge  $\mathbb{N}_{>0}$  mit der euklidischen Metrik  $d_1$ , d.h.  $d_1(n, m) := |n - m|$ , der diskreten Metrik  $d_2$  und der Metrik  $d_3$  gegeben durch  $d_3(n, m) := |\frac{1}{n} - \frac{1}{m}|$ .

- i) Die Metriken  $d_1, d_2$  und  $d_3$  sind paarweise nicht äquivalent.
- ii) Die Metriken  $d_1, d_2$  und  $d_3$  induzieren dieselbe Topologie auf  $\mathbb{N}_{>0}$ .

**Aufgabe 1.3.** Auf  $\mathbb{N}$  betrachten wir die Menge von Teilmengen  $\mathcal{O}_{ko-endl}$  für die gilt:  $U \in \mathcal{O}_{ko-endl}$  genau dann wenn  $U$  leer oder  $\mathbb{N} \setminus U$  endlich ist.

- i)  $\mathcal{O}_{ko-endl}$  ist eine Topologie auf  $\mathbb{N}$  (die ko-endliche Topologie).
- ii) Es seien  $U_1, U_2 \in \mathcal{O}_{ko-endl}$  nicht leer. Dann ist auch  $U_1 \cap U_2$  nicht leer.
- iii) Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Dann ist jede stetige Abbildung  $f: (\mathbb{N}, \mathcal{O}_{ko-endl}) \rightarrow (X, d)$  konstant.
- iv)  $(\mathbb{N}, \mathcal{O}_{ko-endl})$  ist nicht metrisierbar.

**Aufgabe 1.4.** Es sei  $Y = \{a, b\}$ , mit der Topologie  $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, Y\}$ . Zudem sei  $X$  ein topologischer Raum.

- i) Eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  ist stetig genau dann, wenn  $f^{-1}(a) \subseteq X$  offen ist.
- ii) Die Zuordnung

$$\begin{aligned} \{\text{stetige Abbildungen } X \rightarrow Y\} &\rightarrow \{\text{offene Teilmengen in } X\} \\ f &\mapsto f^{-1}(a) \end{aligned}$$

ist bijektiv.

## 2. Übungsblatt



**Aufgabe 2.1.** Sei  $p: X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung. Ein *Schnitt* von  $p$  ist eine stetige Abbildung  $s: Y \rightarrow X$  mit  $p \circ s = \text{id}_Y$ .

- i) Besitzt  $p$  einen Schnitt, so ist  $p$  surjektiv und die Topologie auf  $Y$  ist die Quotiententopologie bezüglich der Abbildung  $p$ .
- ii) Gib zwei verschiedene Schnitte für die Abbildung  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x + y$  an.

**Aufgabe 2.2.** Es sei  $X$  ein topologischer Raum und  $\{X_i\}_{i \in I}$  eine Familie von Teilmengen von  $X$  mit  $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ . Sei

- i)  $X_i$  offen für alle  $i \in I$  oder
- ii)  $X_i$  abgeschlossen für alle  $i \in I$  und  $I$  endlich.

Sei  $f: X \rightarrow Y$  eine Abbildung. Dann sind folgenden Aussagen äquivalent:

- a) Die Abbildung  $f$  ist stetig.
- b) Jede der eingeschränkten Abbildungen  $f|_{X_i}: X_i \rightarrow Y$  mit  $i \in I$  ist stetig.

**Aufgabe 2.3.** Jeder metrisierbare topologische Raum ist normal.

**Aufgabe 2.4.** Es sei  $X$  ein topologischer Raum und  $A, B \subseteq X$  kompakte Unterräume (d.h. kompakt als topologische Räume mit der Unterraumtopologie).

- i) Die Vereinigung  $A \cup B \subseteq X$  ist ein kompakter Unterraum.
- ii) Wenn  $X$  Hausdorffsch ist, dann ist auch  $A \cap B$  kompakt.
- iii) Die Teilraumtopologie auf  $\mathbb{R}$  als Teilraum der Geraden mit zwei Ursprüngen ist die euklidische Topologie. Also ist das Intervall  $[-1, 1]$  als Teilmenge der Geraden mit zwei Ursprüngen kompakt.
- iv) Geben Sie ein Beispiel für  $X$ ,  $A$  und  $B$  an, sodass  $A$  und  $B$  kompakt sind, aber  $A \cap B$  nicht.

### 3. Übungsblatt

**Aufgabe 3.1.** Es sei  $X$  ein normaler topologischer Raum und  $A \subseteq X$  ein Unterraum.

- i) Ist  $A$  abgeschlossen, so ist  $A$  normal.
- ii) Gib ein Beispiel für  $X$  und  $A$ , so dass  $A$  nicht normal ist.  
**Hinweis:** Für diese Teilaufgabe heißt normal nur folgendes: Für disjunkte abgeschlossene Teilmengen  $B_1, B_2$  gibt es disjunkte offene Umgebungen. D.h. es genügt ein Beispiel in dem  $X$  nicht notwendig Hausdorffsch ist. Beispiele mit  $X$  Hausdorffsch gibt es auch, sind aber deutlich schwieriger zu finden.
- iii) Es sei  $f: X \rightarrow Y$  eine stetige, surjektive und abgeschlossene Abbildung. Dann ist auch  $Y$  normal.

*Hinweis:* Schritte im Beweis von iii), die genau analog sind zu solchen im Beweis von Satz 5.11, müssen nicht neu bewiesen werden. Ein Verweis genügt.

**Aufgabe 3.2.** i) Es sei  $X$  eine Menge und  $\mathcal{S}$  eine Menge von Teilmengen von  $X$ . Sei

$$\mathcal{T}(\mathcal{S}) := \left\{ \bigcup_{i \in I} \bigcap_{k=1}^{n_i} S_{i,k} \mid S_{i,k} \in \mathcal{S}, n_i \geq 0 \right\}.$$

*Hinweis:  $X$  ist als leerer Schnitt (d.h.  $n_i = 0$  für ein  $i \in I$ ) in  $\mathcal{T}(\mathcal{S})$  enthalten.*

- a)  $\mathcal{T}(\mathcal{S})$  ist eine Topologie auf  $X$ .
- b) Ist  $\mathcal{O}$  eine Topologie auf  $X$  mit  $S \in \mathcal{O}$  für alle  $S \in \mathcal{S}$ , so gilt  $\mathcal{T}(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{O}$ .
- ii) Es sei  $X$  ein metrischer Raum,  $t > 0$ . Welche der folgenden Mengen von Teilmengen von  $X$  bilden eine Basis der induzierten Topologie auf  $X$ ?
  - a)  $\mathcal{U}_t := \{U(x, \varepsilon) \mid x \in X, \varepsilon < t\}$ .
  - b)  $\mathcal{U}'_t := \{U(x, \varepsilon) \mid x \in X, \varepsilon > t\}$ .
  - c)  $\mathcal{U}'' := \{U(x, \frac{1}{n}) \mid x \in X, n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ .

**Aufgabe 3.3.** Zeige, dass  $\mathcal{S} := \{(-\infty, a) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{(a, \infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$  eine Subbasis der euklidischen Topologie auf  $\mathbb{R}$  ist. Benutze diese um nochmal zu zeigen, dass das Einheitsintervall  $[0, 1]$  kompakt ist.

**Aufgabe 3.4.** Für eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  zwischen topologischen Räumen bezeichne

$$\Gamma(f) = \{ (x, f(x)) \mid x \in X \} \subseteq X \times Y$$

den Graph von  $f$ , versehen mit der Unterraumtopologie der Produkttopologie auf  $X \times Y$ .

- i) Die Abbildung

$$p_X|_{\Gamma(f)}: \Gamma(f) \rightarrow X; \quad (x, y) \mapsto x$$

ist eine stetige Bijektion.

- ii)  $p_X|_{\Gamma(f)}$  ist genau dann offen (also ein Homöomorphismus), wenn  $f$  stetig ist.

## 4. Übungsblatt

**Aufgabe 4.1.** Es sei  $f: X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen und  $U \subseteq X$  ein Unterraum.

- i) Es gilt  $f(\overline{U}) \subseteq \overline{f(U)}$ .
- ii) Sei  $U$  dicht in  $X$ ,  $Y$  Hausdorffsch und  $g: X \rightarrow Y$  eine weitere stetige Abbildung mit  $g|_U = f|_U$ , d.h.  $g(u) = f(u)$  für alle  $u \in U$ . Dann gilt bereits  $g = f$ .

**Aufgabe 4.2** (15 Punkte). Für  $n \in \mathbb{N}$  sei

$$C_n := \bigcup_{i=0}^{\frac{3^n-1}{2}} \left[ \frac{2i}{3^n}, \frac{2i+1}{3^n} \right] \subseteq \mathbb{R}.$$

Dann ist  $C_n$  mit der Teilraumtopologie abgeschlossen. Sei  $C := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$ . Als Schnitt abgeschlossener Mengen ist  $C \subseteq \mathbb{R}$  abgeschlossen. Da  $C$  auch beschränkt ist, ist  $C$  kompakt.  $C$  heißt *Cantor Menge*. Weiterhin lässt sich jedes  $x \in [0, 1]$  in triadischer Darstellung schreiben, d.h. als  $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}$  mit  $a_i \in \{0, 1, 2\}$ .

- i)  $C$  besteht gerade aus den Punkten von  $[0, 1]$  für die eine triadische Darstellung mit  $a_i \in \{0, 2\}$  existiert.
- ii) Für alle Punkte in  $C$  ist die triadische Darstellung mit  $a_i \in \{0, 2\}$  eindeutig.
- iii)  $C$  ist homöomorph zu  $\prod_{i=1}^{\infty} \{0, 2\}$ .
- iv)  $C$  ist homöomorph zu  $C \times C$ .

**Aufgabe 4.3** (Ein-Punkt-Kompaktifizierung, (15 Punkte)). Wir zeigen in dieser Aufgabe, dass man jeden lokal-kompakten Hausdorff-Raum durch Hinzufügen eines Punktes in einen kompakten Raum einbetten kann.

Es sei  $X$  ein topologischer Raum.  $X$  heißt *lokal-kompakt*, wenn es für jeden Punkt  $x \in X$  und jede Umgebung  $U$  von  $x$  eine kompakte Umgebung  $K \subseteq U$  von  $x$  gibt, die in  $U$  enthalten ist.

Es sei nun  $X$  ein lokal-kompakter Hausdorffraum. Dann definieren wir die *Ein-Punkt-Kompaktifizierung* von  $X$  als  $X^+ = X \cup \{\infty\}$ , und nennen eine Teilmenge  $U \subseteq X^+$  offen genau dann, wenn entweder  $U \subseteq X$  eine offene Teilmenge von  $X$  ist oder wenn  $\infty \in U$  ist und  $X^+ \setminus U \subseteq X$  kompakt ist mit der Unterraumtopologie von  $X$ .

- i) Dies definiert eine Topologie auf  $X^+$ , mit der die Inklusion  $X \rightarrow X^+$  stetig und offen ist.
- ii)  $X^+$  ist kompakt und Hausdorffsch.
- iii) Für die Menge  $\mathbb{N}_{>0}$  der natürlichen Zahlen (ohne 0) mit der diskreten Topologie ist die Ein-Punkt-Kompaktifizierung  $\mathbb{N}_{>0}^+$  homöomorph zu  $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\} \cup \{0\} \subseteq \mathbb{R}$  ist.
- iv) Sei  $s: Y \rightarrow X$  ein Schnitt einer beliebigen stetigen Abbildung  $f: X \rightarrow Y$ , dann ist  $s(Y)$  abgeschlossen.
- v)  $X$  ist offen in  $\beta(X)$ .

## 5. Übungsblatt

**Aufgabe 5.1** (Zusammenhängend  $\neq$  Wegzusammenhängend). Es gilt laut Vorlesung, dass jeder wegzusammenhängende topologische Raum auch zusammenhängend ist. In dieser Aufgabe zeigen wir, dass die Umkehrung nicht gilt.

Der Raum  $S$  sei definiert als folgender Unterraum des  $\mathbb{R}^2$ :

$$S = \left\{ \left( x, \sin \frac{1}{x} \right) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \right\} \cup \{0\} \times [-1, 1].$$

(Mit anderen Worten:  $S$  ist der Abschluss, in  $\mathbb{R}^2$ , des Graphen der Funktion  $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$  für  $x > 0$ .)

Zeige:

- i) Der Raum  $S$  ist zusammenhängend.
- ii) Der Raum  $S$  ist nicht wegzusammenhängend.

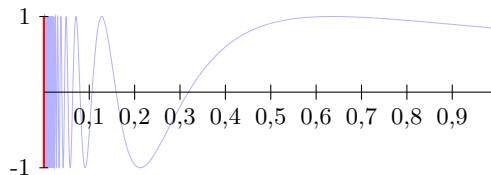


Abbildung 14: Sinuskurve des Topologen

**Aufgabe 5.2.** Es seien  $X$  und  $Y$  zusammenhängende Räume. Zeige:

- i) Dann ist auch  $X \times Y$  zusammenhängend.
- ii) Wenn  $X$  und  $Y$  beide mehr als ein Element besitzen, dann ist auch  $X \times Y \setminus \{(x, y)\}$  für ein festes  $(x, y) \in X \times Y$  zusammenhängend.
- iii) Es gibt keinen topologischen Raum  $X$ , sodass  $\mathbb{R}$  homöomorph zu  $X \times X$  ist.

**Aufgabe 5.3.** Es sei  $X$  ein topologischer Raum. Eine Folge  $(x_i)_{i \geq 1}$ ,  $x_i \in X$  konvergiert gegen  $x \in X$ , wenn für jede Umgebung  $U$  von  $x$  alle bis auf endlich viele  $x_i$  in  $U$  enthalten sind. Dann heißt  $x$  *Limes* oder *Grenzwert* der Folge.

- i) Sei  $X$  Hausdorffsch. Dann ist  $x$  eindeutig.
- ii) Gib ein Beispiel einer Folge in einem topologischen Raum mit zwei unterschiedlichen Grenzwerten.
- iii) Sei  $f: X \rightarrow Y$ , und  $(x_i)_{i \geq 1}$  eine konvergente Folge in  $X$ . Beweise oder widerlege:  $(f(x_i))_{i \geq 1}$  konvergiert gegen  $f(y)$ .
- iv) Sei  $(s_i)_{i \geq 1}$  eine Folge stetiger Funktionen  $s_i: X \rightarrow Y$  und  $Y$  ein metrischer Raum.  $(s_i)_{i \geq 1}$  konvergiere *gleichmäßig* gegen eine Funktion  $s: X \rightarrow Y$ , d.h. für jedes  $\varepsilon > 0$  existiert eine  $N \in \mathbb{N}$  so dass für alle  $x \in X$ ,  $n \geq N$  gilt  $d(s_i(x), s(x)) < \varepsilon$ . Zeige, dass  $s$  stetig ist.

**Aufgabe 5.4.** Es sei  $X$  ein topologischer Raum. Wir sagen, dass  $X$  *folgenkompakt* ist, wenn jede Folge  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  in  $X$  eine konvergente Teilfolge hat.

- i) Zeige, dass ein kompakter metrischer Raum  $X$  folgenkompakt ist.
- ii) Beweise das Lebesgue-Lemma:  
Es sei  $X$  ein folgenkompakter metrischer Raum und  $(U_i)_{i \in I}$  eine offene Überdeckung von  $X$ . Dann gibt es ein  $\varepsilon > 0$  sodass für jede Teilmenge  $A$  mit Durchmesser  $D < \varepsilon$  ein  $i \in I$  existiert, sodass  $A \subseteq U_i$  gilt.  
(Der Durchmesser eines metrischen Raumes  $A$  ist  $\sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\}$ .)

- $x, y \in A\}$ .)
- iii) Zeige, dass ein folgenkompakter metrischer Raum  $X$  kompakt ist.

## 6. Übungsblatt

**Aufgabe 6.1** (Der Erweiterungssatz von Tietze v.2). Sei  $X$  ein normaler Raum,  $A \subseteq X$  abgeschlossen.

- (i) Jede stetige Funktion  $f: A \rightarrow [a, b]$  mit  $a < b$  lässt sich fortsetzen zu einer stetigen Funktion  $\bar{f}: X \rightarrow [a, b]$ .
- (ii) Nach (i) lässt sich jede stetige Funktion  $f: A \rightarrow (-1, 1)$  fortsetzen zu einer stetigen Funktion  $s: X \rightarrow [-1, 1]$ . Setze  $D := s^{-1}(-1) \cup s^{-1}(1)$ . Zeige, dass es eine stetige Funktion  $\phi: X \rightarrow [0, 1]$  gibt mit  $\phi(D) = \{0\}$  und  $\phi(A) = \{1\}$ .
- (iii) Sei  $h: X \rightarrow (-1, 1)$  die Abbildung  $h(x) = \phi(x) \cdot s(x)$ . Zeige, dass  $h$  tatsächlich Bild in  $(-1, 1)$  hat und dass  $h$   $f$  fortsetzt.
- (iv) Jede stetige Funktion  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  lässt sich fortsetzen zu einer stetigen Funktion  $\bar{f}: X \rightarrow \mathbb{R}$ .

*Hinweis:*  $\mathbb{R} \cong (-1, 1)$ .

**Aufgabe 6.2.** (i) Sei  $X := \prod_{i=0}^{\infty} [0, 1]$ . Definiere  $D: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$D((x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}) := \sup \left\{ \frac{|x_n - y_n|}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

$D$  ist eine Metrik auf  $X$  und induziert die Produkttopologie auf  $X$ .

- (ii) Ein kompakter Hausdorff-Raum ist metrisierbar genau dann, wenn er eine abzählbare Basis besitzt.  
(*Erinnerung:* Kompakte Hausdorff-Räume sind normal.)

**Aufgabe 6.3.** (i) Sei  $X := \prod_{[0,1]} \{0, 1\}$ . Zeige, dass  $X$  kompakt, aber nicht folgenkompakt ist.

*Hinweis:* Betrachte die Folge  $(a_i)_{i \geq 1}$  so dass  $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i(x)}{2^i}$ .

- (ii) Gegeben sei eine total geordnete Menge  $(X, \leq)$ . Für Punkte  $a, b \in X \cup \{\pm\infty\}$  definiere das *Intervall*  $(a, b) := \{x \in X \mid a < x < b\}$ . Solche Intervalle bilden eine Basis einer Topologie auf  $X$ , die *Ordnungstopologie*. Für zwei total geordnete Mengen  $(X, \leq)$  und  $(Y, \leq)$  ist die *lexikographische Ordnung* auf  $X \times Y$  definiert als:  $(y_1, z_1) < (y_2, z_2)$  genau dann, wenn  $y_1 < y_2$ , oder  $y_1 = y_2$  und  $z_1 < z_2$ .

Sei  $\omega_1$  die kleinste überabzählbare Ordinalzahl. Der *abgeschlossene lange Strahl*  $L$  wird definiert als das kartesische Produkt  $\omega_1 \times [0, 1)$ , ausgestattet mit der Ordnungstopologie von der lexikographischen Ordnung. (Zum Beispiel ist  $\mathbb{R} \cong \mathbb{N} \times [0, 1)$ .)  
Beweise:

- (a) Jede monoton steigende Folge in  $L$  konvergiert.
- (b) Jede Folge in  $L$  hat eine monotone Teilfolge.
- (c)  $L$  ist folgenkompakt.

(d)  $L$  ist nicht kompakt.

(*Hinweis:* Benutze ohne Beweis, dass jede steigende Folge von Ordinalzahlen konvergiert und dass  $\omega_1$  nicht der Limes einer Folge von abzählbaren Ordinalzahlen ist.)

**Aufgabe 6.4.** Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie und  $X \in \text{ob}(\mathcal{C})$ . Die Kategorie  $\mathcal{C}/X$  der Objekte über  $X$  ist die Kategorie mit Objekten  $\text{ob}(\mathcal{C}/X) := \{(Y, f) \mid Y \in \text{ob}(\mathcal{C}), f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, X)\}$  und  $\text{Mor}_{\mathcal{C}/X}((Y, f), (Z, g)) = \{h \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \mid f = g \circ h\}$ , d.h. solche Abbildungen, die mit  $f$  und  $g$  kommutieren. Analog ist die Kategorie  $X/\mathcal{C}$  der Objekte unter  $X$  die Kategorie mit Objekten  $\text{ob}(X/\mathcal{C}) := \{(Y, f) \mid Y \in \text{ob}(\mathcal{C}), f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)\}$  und  $\text{Mor}_{X/\mathcal{C}}((Y, f), (Z, g)) = \{h \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \mid h \circ f = g\}$ , d.h. wieder solche Abbildungen, die mit  $f$  und  $g$  kommutieren.

(i) Zeige, dass  $\mathcal{C}/X$  und  $X/\mathcal{C}$  mit der offensichtlichen Verknüpfung von Morphismen tatsächlich Kategorien sind.

(ii) Sei  $*$  in  $\mathbf{Top}$  ein Einpunktraum. Zeige  $\mathbf{Top}/*$  ist isomorph zu  $\mathbf{Top}$  und  $*/\mathbf{Top}$  ist isomorph zu  $\mathbf{Top}_*$ , wobei  $\mathbf{Top}_*$  die Kategorie der punktierten topologischen Räume ist.

*Bemerkung:* Im Englischen heißen  $\mathcal{C}/X$  und  $X/\mathcal{C}$  overcategory bzw. undercategory. Im Deutschen ist aber zumindest Unterkategorie missverständlich.

## B Erklärung der Umgebungen

### Nummerierung

Die Nummerierung in dieser Mitschrift folgt derjenigen der Vorlesung. Das hat den Vorteil, dass die Nummern in dieser Mitschrift auch zum Referenzieren genutzt werden können (z.B. bei Übungsaufgaben).

Andererseits bedeutet dies, dass es einige Sätze (o.Ä.) gibt, die nicht nummeriert sind.

### Abweichende Handhabung von Umgebungen

An manchen Stellen wurde die Umgebung einer Aussage verändert, das ist dann mit einem <sup>†</sup> markiert:

**Lemma<sup>†</sup>** (Einfaches Lemma). Diese Aussage wurde in der Vorlesung erwähnt, allerdings nicht als Lemma, sondern nur im Fließtext oder einem Nebensatz. Da ich der Meinung war, dass sie einen eigenen Platz verdient, ist sie nun ein Lemma.

Der Inhalt solcher Aussagen ist also Teil der Vorlesung, trotzdem sind solche Stellen sicherlich fehleranfälliger, da ich teilweise umformuliere.

### Kommentare

Diese Mitschrift enthält Kommentare, die von mir selbst hinzugefügt wurden, diese sind dann mit einem \* gekennzeichnet:

**Bemerkung\***. An dieser Stelle hätten wir noch überprüfen müssen, dass X. Das ist klar, weil Y.

Wenn ihr sie lesenswert findet, so tut das, wenn nicht, ignoriert sie einfach. Insbesondere kann es auch hier vermehrt zu Fehlern kommen, seid besonders vorsichtig!

Es gibt (selten) auch Sätze, Beweise, etc, die mit einem \* versehen sind, das hat dieselbe Bedeutung. Das passiert z.B. wenn in der Vorlesung auf einen Satz verwiesen wird, der nicht behandelt wird, den ich aber an dieser Stelle eingefügt habe. Ihr könnt sie ebenfalls ignorieren. Diese Mitschrift enthält mündliche Kommentare, d.h. Kommentare, die in der Vorlesung nicht schriftlich festgehalten, aber gesagt wurden. Ich versuche, relevante davon ebenfalls als

**Mündliche Anmerkung.** festzuhalten.

Manchmal sind diese auch mit einem <sup>†</sup> markiert, wenn ich das Gefühl hatte, arg abzuschweifen.

Dass ich mündliche Kommentare so markiere, ist neu, insbesondere ist das am Anfang des Skript wohl noch nicht so.

## C Stichwortverzeichnis

- $n$ -Sphäre, 14
- Abelisierung, 89
- Auswahlaxiom, 81
- Basis, 34
- Bouquet von 2 Kreisen, 60
- Diagonale von  $X$ , 43
- Diagramme, 90
- Disjunkte Vereinigung, 53
- Einbettung, 48
- Einheitsintervall, 17
- Einheitskreis, 14
- Einpunktvereinigung, 60
- Faserprodukt, 93
- Freie abelsche Gruppe, 85
- Gelöschte Tychonoff-Planke, 61
- Gerade mit zwei Ursprüngen, 27
- Hilbert-Würfel, 77
- Homöomorphismus, 15
  - homöomorph, 15
- Isomorphismus, 84
- Kardinalzahl
  - unerreichbare, 81
- Kategorie, 82
  - Funktor, 81, 84
  - vergesslicher, 85
  - Isomorphismus, 84
  - Morphismus, 82
  - Objekt, 82
  - Unter-, 84
  - volle, 84
- Kategorientheorie, 81
- Kegel, 91
- Kegelkategorie, 92
- Klasse, 81
- Kleinsche Flasche, 18
- Kokegel, 94
- Kolimes, 94
- Kommutatives Diagramm, 83
- Kommutator, 89
- Kompaktifizierung, 48
- Kontravarianter, 85
- Konvergenz
  - gleichmäßige, 74
- Koprodukt, 95
- Menge, 81
  - abgeschlossen, 12
  - Abschluss, 48
  - dicht, 48
  - offen, 9
  - saturiert, 31
- Metrik, 7
  - diskrete, 8
  - äquivalente, 11
- Metrischer Raum, 7
  - offene Menge, 8
- Natürliche Transformation, 87
- Natürliche Äquivalenz, 87
- Offener  $\varepsilon$ -Ball um  $x$ , 8
- Projektion, 46
  - kanonische, 15
- Pushout, 95
- Raum
  - reell projektiv, 19
- Sierpinski-Raum, 10
- Smash-Produkt, 60
- Stetig, 7, 9
  - in  $x \in X$ , 7
- Stone-Čech-Kompaktifizierung, 49
- Subbasis, 34
- Terminales, 90
- Topologie, 9
  - diskrete, 10
  - indiskrete, 10
  - induzierte, 10
  - Produkt-, 37
  - Quotienten-, 16
  - Teilraum-, 13
  - Unterraum-, 13
  - von  $\mathcal{S}$  erzeugte, 35
- Topologischer Raum, 9
  - Hausdorff, 20
  - Hausdorff'sch, 20
  - kompakt, 25
  - metrisierbar, 10
  - normal, 22
  - regulär, 24
  - vollständig regulär, 48



wegzusammenhängend, 66	von $x$ , 12
zusammenhängend, 64	
Trennungsaxiom, 20	Wedge-Produkt, 60
$T_1$ , 21	Weg, 65, 66
$T_2$ , 20	
$T_3$ , 24	Äquivalenz, 87
$T_4$ , 22	Äquivalenzklasse, 15
Umgebung, 8	Menge der, 15

## D Literaturverzeichnis

### Literatur

- [Bre93] Glen E. Bredon. *Topology and Geometry*. Springer-Verlag, 1993. ISBN: 0-387-97926-3. URL: <https://djvu.online/file/dgLxX8VtKmfIT>.
- [Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. 2002. URL: <http://pi.math.cornell.edu/~hatcher/AT/AT.pdf>.
- [Koe18] Peter Koepke. *Set Theory*. Bonn, 2018. URL: [http://www.math.uni-bonn.de/ag/logik/teaching/2018WS/set\\_theory/current\\_scriptum.pdf](http://www.math.uni-bonn.de/ag/logik/teaching/2018WS/set_theory/current_scriptum.pdf).
- [Lei14] Tom Leinster. *Basic category theory*. Cambridge: Cambridge University Press, 2014. ISBN: 978-1107044241. URL: <https://arxiv.org/abs/1612.09375>.
- [Lyn70] Jr. Lynn Arthur Steen J. Arthur Seebach. *Counterexamples in Topology*. Springer-Verlag, 1970. ISBN: 0-486-68735-X.
- [Mun18] James Munkres. *Topology (Classic Version), 2nd Edition*. Pearson, 20018. ISBN: 978-0131816299.
- [Wal] Friedhelm Waldhausen. *Topologie*. Vorlesungsnotizen. URL: <https://www.math.uni-bielefeld.de/~fw/ein.pdf>.