Einführung in die Geometrie und Topologie

Dozent
Daniel Kasprowski

Assistentin
Arunima Ray

Mitschrift
Maximilian Kessler

Version
2. Juni 2021 12:13

Zusammenfassung

Bei folgenden Vorlesungsnotizen handelt es sich um (inoffizielle) Mitschriften zur 'Einführung in die Geometrie und Topologie', die im Sommersemester 2021 an der Universität Bonn gehalten wird. Ich garantiere weder für Korrektheit noch Vollständigkeit dieser Notizen, und bin dankbar für jegliche Art von Korrektur, sowohl inhaltlich, als auch Tippfehler. Schreibt hierzu eine Mail, oder nutzt das 'Issues' Feature auf GitHub.

Für Details zur Nummerierung dieses Skript siehe Anhang B. Weitere Informationen zu diesem Skriptum finden sich bei GitHub oder auf der Vorlesungshomepage.

Inhaltsverzeichnis

Übersicht der Vorlesungen

Vorlesung 1
Di 13 Apr 2021 12:16

Organisatorisches.
- Die Vorlesung wird aufgezeichnet.
- Wir duzen uns.
- Für die Übungen muss man sich auf eCampus anmelden, ob Do, 20:00 Uhr (Do 15 Apr 2021 20:00 Uhr)
- Die Übungsblätter werden Donnerstag zur Verfügung gestellt und werden nach 10 Tagen am Montag, 10 Uhr abgegeben.
- Es wird eine Fragestunde um Donnerstag, 16 Uhr geben.
- Es wird kein Skript geben, allerdings werden die geschriebenen Notizen auf eCampus zur Verfügung gestellt.
- Die Vorlesung orientiert sich an der vom letzten Jahr.
- Für Literatur sind empfohlen: [Wal], [Hat02] sowie [Bre93] (auch auf der Vorlesungshomepage zu finden).

0 Motivation und Überblick

In der Topologie studieren wir topologische Räume. Diese verallgemeinern metrische Räume. Wir wollen zwei metrische Räume X, Y als 'gleich' ansehen, wenn es stetige, zueinander inverse Abbildungen $X \to Y, Y \to X$ gibt.

Beispiel. Betrachte ein Quadrat und einen Kreis, wir können sie durch Streckung aufeinander abbilden. Gleiches gilt für eine Tasse und einen Donut.

Abbildung 1: Beispiele 'gleicher' metrischer Räume (homöomorph)

Idee. Räume sind gewissermaßen aus 'Knete'.
Ziel. Wann sind zwei Räume gleich?
Dazu werden wir algebraische Invarianten verwenden.

Beispiel. $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ sind nicht 'gleich' für $n \neq m$.

Der Aufbau ist wie folgt:
1. Teil Grundlagen
2. Teil erste Invarianten: Fundamentalgruppe (dazu Überlagerungen)

Teil I
Mengentheoretische Topologie

1 Metrische Räume

Definition 1.1 (Metrik)**.** Eine **Metrik** auf einer Menge X ist eine Funktion $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
(ii) $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x,y \in X$
(iii) (Dreiecksungleichung) $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$.

Ein **Metrischer Raum** ist ein Paar (X,d) aus einer Menge X und einer Metrik d auf X.

Definition 1.2 (Stetigkeit)**.** Seien (X,d) und (X',d') zwei metrische Räume. Dann ist eine Funktion $f : X \to Y$ **stetig in** $x \in X$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x' \colon d(x,x') < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

Eine Funktion f heißt **stetig**, wenn sie in jedem Punkt $x \in X$ stetig ist.

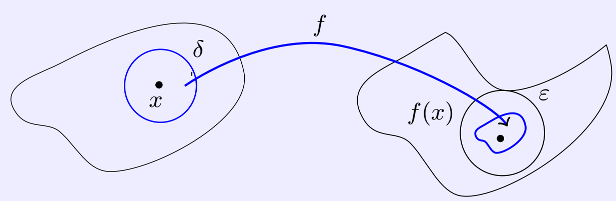

Abbildung 2: Definition von Stetigkeit in metrischen Räumen

Beispiel.

- Sei V ein reeller Vektorraum mit Norm $\|\cdot\|$. Dann definiert
$$d(v,w) := \|v - w\|.$$
eine Metrik auf V. Insbesondere ist $\mathbb{R}^n$ mit euklidischer Norm
$$\|(x_1, \ldots, x_n)\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}.$$
dadurch ein metrischer Raum.
- Ist (X,d) ein metrischer Raum und $Y \subseteq X$ eine Teilmenge, dann ist $(Y, d|_{Y \times Y})$ ein metrischer Raum.

- Sei X eine Menge. Dann ist
$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}.$$
eine Metrik auf X, genannt die **diskrete Metrik**.

Notation. Sei X ein metrischer Raum. Für $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ setzen wir
$$U(x,\varepsilon) := \{y \in X \mid d(x,y) < \varepsilon\}.$$
und nennen dies den **offenen ε-Ball um x**

Beobachte. Sei $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ eine Funktion, $x \in X$ sowie $\varepsilon, \delta > 0$. Dann sind äquivalent:
1) $\forall x' \in X$ mit $d_X(x', x) < \delta$ gilt $d_Y(f(x'), f(x)) < \varepsilon$
2) Es ist $f(U(x,\delta)) \subseteq U(f(x), \varepsilon)$

Definition 1.3 (Umgebung)**.** Sei X ein metrischer Raum, $U \subseteq X$ und $x \in X$. Dann heißt U **Umgebung von x**, falls ein $\varepsilon > 0$ existiert, sodass $U(x,\varepsilon) \subseteq U$.

Satz 1.4 (Urbilder von Umgebungen)**.** Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung zwischen metrischen Räumen und sei $x \in X$. Dann ist f stetig in x genau dann, wenn für alle Umgebungen V um $f(x)$ in Y das Urbild $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x ist.

Beweis. '$\Rightarrow$' Sei V eine Umgebung von $f(x)$. Dann $\exists\ \varepsilon > 0$ mit $U(f(x), \varepsilon) \subseteq V\}$. Da f stetig ist, $\exists\ \delta > 0$, sodass $f(X(x,\delta)) \subseteq U(f(x),\varepsilon) \subseteq V$. Also ist $U(x,\delta) \subseteq f^{-1}(V)$ und somit ist $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x.

'$\Leftarrow$'. Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $U(f(x),\varepsilon)$ eine Umgebung von $f(x)$. Also ist $f^{-1}(U(f(x),\varepsilon))$ eine Umgebung von x, also $\exists\ \delta > 0$ mit $U(x,\delta) \subseteq f^{-1}(U(f(x),\varepsilon))$. Also wie gewünscht $f(U(x,\delta)) \subseteq U(f(x),\varepsilon))$. ☐

Definition 1.5 (Offene Mengen)**.** Sei X ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt **offen**, falls sie Umgebung all ihrer Punkte ist, d.h. $\forall x \in U\ \exists \varepsilon > 0$ mit $U(x,\varepsilon) \subseteq U$.

Bemerkung. $U(x,\varepsilon)$ ist offen.

Beweis. Für alle $y \in U(x,\varepsilon)$ ist
$$U(y, \underbrace{\varepsilon - d(x,y)}_{>0}) \subseteq U(x,\varepsilon).$$

nach der Dreiecksungleichung. $\square$

Satz 1.6 (Urbilder offener Mengen sind offen)**.** Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen metrischen Räumen ist stetig genau dann, wenn $\forall U \subseteq Y$ offen auch das Urbild $f^{-1}(U)$ offen in X ist.

Beweis. '$\Rightarrow$'. Sei $U \subseteq Y$ eine offene Teilmenge und $x \in f^{-1}(U)$ beliebig. Dann ist $f(x) \in U$ und somit ist U eine Umgebung von $f(x)$. Da f stetig ist, ist $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von x nach Satz 1.4. Also ist $f^{-1}(U)$ offen, da x beliebig war.

'$\Leftarrow$' Sei $x \in X$, V eine Umgebung von $f(x)$. Dann $\exists \varepsilon > 0$ mit $U(f(x), \varepsilon) \subseteq V$. Nach Annahme ist $f^{-1}(U(f(x), \varepsilon))$ offen. Also gibt es ein $\delta > 0$ mit $U(x, \delta) \subseteq f^{-1}(U(f(x), \varepsilon)) \subseteq f^{-1}(V)$. Also ist $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x.

Damit ist f stetig nach Satz 1.4 $\square$

Satz 1.7 (Offene Mengen in metrischen Räumen)**.** Sei X ein metrischer Raum. Dann gilt:

1) Die leere Menge $\varnothing$ und X sind offen
2) $\forall U_1, \ldots, U_n \subseteq X$ offen ist auch $\bigcap_{i=1}^n U_i$ offen.
3) Für jede Familie $\{U_i\}_{i \in I}$ von offenen Mengen ist auch $\bigcup_{i \in I} U_i$ offen.

Warnung. Eigenschaft 2) gilt nicht für unendliche Schnitte. Es ist $\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \subseteq \mathbb{R}$ offen für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$, allerdings ist dann

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}_{>0}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}.$$

nicht offen.

Beweis von Satz 1.7.
1) klar
2) Sei $x \in \bigcap_{i=1}^n U_i$. $\forall i = 1, \ldots, n$ gibt es nun ε_i mit $U(x, \varepsilon_i) \subseteq U_i$. Setze $\varepsilon := \min\{\varepsilon_i \mid i = 1, \ldots, n\}$. Dann ist
$$U(x, \varepsilon) \subseteq U(x, \varepsilon_i) \subseteq U_i.$$
für alle $i = 1, \ldots, n$ und somit wie gewünscht $U(x, \varepsilon) \subseteq \bigcap_{i=1}^n U_i$
3) Sei $x \in \bigcup_{\in I} U_i$ beliebig. Dann $\exists i \in I$ mit $x \in U_i$. Da U_i offen ist, $\exists \varepsilon > 0$ mit $U(x, \varepsilon) \subseteq U_i$. Also ist $U(x, \varepsilon) \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ und somit ist die Vereinigung offen.

$\square$

2 Topologische Räume

Definition 2.1 (Topologie)**.** Eine **Topologie** auf einer Menge X ist eine Menge $\mathcal{O}$ von Teilmengen von X, so dass gilt:

1) $\emptyset, X \in \mathcal{O}$
2) Für $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{O}$ ist auch $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{O}$
3) Für jede Familie $\{U_i\}_{i\in I}$ mit $U_i \in \mathcal{O}$ ist auch $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{O}$

Die Mengen in $\mathcal{O}$ heißen **offene Mengen**.
Ein **topologischer Raum** ist ein Paar $(X, \mathcal{O})$ aus einer Menge X und einer Topologie $\mathcal{O}$ auf X.

Definition 2.2 (Stetigkeit)**.** Seien X, Y topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt **stetig**, falls für jede offene Teilmenge $U \subseteq Y$ das Urbild $f^{-1}(U) \subseteq X$ offen ist.

Beispiel. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann ist

$$(X, \mathcal{O}) := \{U \subseteq X \mid U \text{ ist offen bezüglich } d\}.$$

ein topologischer Raum. $\mathcal{O}$ ist die von der Metrik d **induzierte Topologie**.

Definition 2.3 (Metrisierbarkeit)**.** Ein topologischer Raum heißt **metrisierbar**, falls die Topologie von einer Metrik induziert ist.

Beispiel. Sei X eine Menge. Die **diskrete Topologie** auf X ist die Menge aller Teilmengen, d.h. $\mathcal{O} := \mathcal{P}(X)$. Diese ist von der diskreten Metrik

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}.$$

induziert.

Beweis. Ist $x \in X$, dann ist

$$\{x\} = U\left(x, \frac{1}{2}\right).$$

offen. Ist $U \subseteq X$ eine Teilmenge, dann ist

$$U = \bigcup_{x \in U} \{x\}.$$

offen als Vereinigung offener Mengen. □

Satz 2.4. Sei X ein endlicher (endlich als Menge), metrisierbarer topologischer Raum. Dann ist X diskret (d.h. X trägt die diskrete Topologie).

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass $\{x\}$ offen ist $\forall x \in X$. Sei d eine Metrik, die die Topologie induziert, dann wähle

$$\varepsilon := \min \{d(x,y) \mid x, y \in X, x \neq y\} > 0.$$

Beachte, dass dies existiert, da $d(x,y) > 0$ für $x \neq y$ und die Menge nach Voraussetzung endlich ist. Nun ist:

$$\{x\} = U(x, \varepsilon).$$

offen und wir sind fertig. □

Beispiel. 1) Wähle $X = \{a, b\}$ und setze

$$\mathcal{O} = \{\varnothing, X, \{a\}\}.$$

Dies ist ein topologischer Raum (leicht prüfen), er ist jedoch nicht metrisierbar, da endlich und nicht diskret. Dieser Raum heißt **Sierpinski-Raum**.

2) Sei X eine Menge. Die **indiskrete Topologie** auf X enthält nur $\varnothing, X$. Man prüft leicht, dass dies eine Topologie ist.
- Hat X mindestens 2 Elemente, so ist X nicht metrisierbar.
  Beweis. Nimm $|X| > 2$ an und wähle $x, y \in X$ mit $x \neq y$. Sei d eine Metrik, die die Topologie auf X induziert und setze $\varepsilon := d(x,y)$. Dann ist
  $$x \in U(x,\varepsilon) \quad y \notin U(x,\varepsilon).$$
  also ist $U(x,\varepsilon) \neq \varnothing, X$, Widerspruch. □
- Sei Y ein topologischer Raum. Dann ist $f : Y \to X$ stetig für beliebige Abbildungen f.
  Beweis. Es sind $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$ sowie $f^{-1}(X) = Y$ beide offen. □

Bemerkung. Ist Y diskret und X beliebig, so ist jede Abbildung $f : Y \to X$ stetig.

Teil II
Anhang

A Übungsblätter

1. Übungsblatt

Aufgabe 1.1. Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $x \in X$ ein Punkt. Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} d_x \colon X &\to \mathbb{R} \\ y &\mapsto d(x,y) \end{aligned}$$

stetig.

Aufgabe 1.2. Wir betrachten die Menge $\mathbb{N}_{>0}$ mit der euklidischen Metrik d_1, d.h. $d_1(n,m) := |n-m|$, der diskreten Metrik d_2 und der Metrik d_3 gegeben durch $d_3(n,m) := |\frac{1}{n} - \frac{1}{m}|$.

i) Die Metriken d_1, d_2 und d_3 sind paarweise nicht äquivalent.
ii) Die Metriken d_1, d_2 und d_3 induzieren dieselbe Topologie auf $\mathbb{N}_{>0}$.

Aufgabe 1.3. Auf $\mathbb{N}$ betrachten wir die Menge von Teilmengen $\mathcal{O}_{ko-endl}$ für die gilt: $U \in \mathcal{O}_{ko-endl}$ genau dann wenn U leer oder $\mathbb{N} \backslash U$ endlich ist.

i) $\mathcal{O}_{ko-endl}$ ist eine Topologie auf $\mathbb{N}$ (die ko-endliche Topologie).
ii) Es seien $U_1, U_2 \in \mathcal{O}_{ko-endl}$ nicht leer. Dann ist auch $U_1 \cap U_2$ nicht leer.
iii) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann ist jede stetige Abbildung $f \colon (\mathbb{N}, \mathcal{O}_{ko-endl}) \to (X, d)$ konstant.
iv) $(\mathbb{N}, \mathcal{O}_{ko-endl})$ ist nicht metrisierbar.

Aufgabe 1.4. Es sei $Y = \{a, b\}$, mit der Topologie $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, Y\}$. Zudem sei X ein topologischer Raum.

i) Eine Abbildung $f \colon X \to Y$ ist stetig genau dann, wenn $f^{-1}(a) \subseteq X$ offen ist.
ii) Die Zuordnung

$$\begin{aligned} \{\text{stetige Abbildungen } X \to Y\} &\to \{\text{offene Teilmengen in } X\} \\ f &\mapsto f^{-1}(a) \end{aligned}$$

ist bijektiv.

2. Übungsblatt

Aufgabe 2.1. Sei $p\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung. Ein *Schnitt* von p ist eine stetige Abbildung $s\colon Y \to X$ mit $p \circ s = \mathrm{id}_Y$.

i) Besitzt p einen Schnitt, so ist p surjektiv ist und die Topologie auf Y ist die Quotiententopologie bezüglich der Abbildung p.
ii) Gib zwei verschiedene Schnitte für die Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x + y$ an.

Aufgabe 2.2. Es sei X ein topologischer Raum und $\{X_i\}_{i\in I}$ eine Familie von Teilmengen von X mit $X = \bigcup_{i\in I} X_i$. Sei

i) X_i offen für alle $i \in I$ oder
ii) X_i abgeschlossen für alle $i \in I$ und I endlich.

Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Dann sind folgenden Aussagen äquivalent:

a) Die Abbildung f ist stetig.
b) Jede der eingeschränkten Abbildungen $f|_{X_i}\colon X_i \to Y$ mit $i \in I$ ist stetig.

Aufgabe 2.3. Jeder metrisierbare topologische Raum ist normal.

Aufgabe 2.4. Es sei X ein topologischer Raum und $A, B \subseteq X$ kompakte Unterräume (d.h. kompakt als topologische Räume mit der Unterraumtopologie).

i) Die Vereinigung $A \cup B \subseteq X$ ist ein kompakter Unterraum.
ii) Wenn X Hausdorffsch ist, dann ist auch $A \cap B$ kompakt.
iii) Die Teilraumtopologie auf $\mathbb{R}$ als Teilraum der Gerade mit zwei Ursprüngen ist die euklidische Topologie. Also ist das Intervall $[-1, 1]$ als Teilmenge der Geraden mit zwei Ursprüngen kompakt.
iv) Geben Sie ein Beispiel für X, A und B an, sodass A und B kompakt sind, aber $A \cap B$ nicht.

3. Übungsblatt

Aufgabe 3.1. Es sei X ein normaler topologischer Raum und $A \subseteq X$ ein Unterraum.

i) Ist A abgeschlossen, so ist A normal.
ii) Gib ein Beispiel für X und A, so dass A nicht normal ist.
Hinweis: Für diese Teilaufgabe heißt normal nur folgendes: Für disjunkte abgeschlossene Teilmengen B_1, B_2 gibt es disjunkte offene Umgebungen. D.h. es genügt ein Beispiel in dem X nicht notwendig Hausdorffsch ist. Beispiele mit X Hausdorffsch gibt

es auch, sind aber deutlich schwieriger zu finden.

iii) Es sei $f\colon X \to Y$ eine stetige, surjektive und abgeschlossene Abbildung. Dann ist auch Y normal.

Hinweis: Schritte im Beweis von iii), die genau analog sind zu solchen im Beweis von Satz 5.11, müssen nicht neu bewiesen werden. Ein Verweis genügt.

Aufgabe 3.2. i) Es sei X eine Menge und $\mathcal{S}$ eine Menge von Teilmengen von X. Sei

$$\mathcal{T}(\mathcal{S}) := \left\{ \bigcup_{i \in I} \bigcap_{k=1}^{n_i} S_{i,k} \mid S_{i,k} \in \mathcal{S}, n_i \geqslant 0 \right\}.$$

Hinweis: X ist als leerer Schnitt (d.h. $n_i = 0$ für ein $i \in I$) in $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ enthalten.

a) $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ ist eine Topologie auf X.

b) Ist $\mathcal{O}$ eine Topologie auf X mit $S \in \mathcal{O}$ für alle $S \in \mathcal{S}$, so gilt $\mathcal{T}(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{O}$.

ii) Es sei X ein metrischer Raum, $t > 0$. Welche der folgenden Mengen von Teilmengen von X bilden eine Basis der induzierten Topologie auf X?

a) $\mathcal{U}_t := \{U(x, \varepsilon) \mid x \in X, \varepsilon < t\}$.

b) $\mathcal{U}'_t := \{U(x, \varepsilon) \mid x \in X, \varepsilon > t\}$.

c) $\mathcal{U}'' := \{U(x, \frac{1}{n}) \mid x \in X, n \in \mathbb{N}_{>0}\}$.

Aufgabe 3.3. Zeige, dass $\mathcal{S} := \{(-\infty, a) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{(a, \infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$ eine Subbasis der euklidischen Topologie auf $\mathbb{R}$ ist. Benutze diese um nochmal zu zeigen, dass das Einheitsintervall $[0, 1]$ kompakt ist.

Aufgabe 3.4. Für eine Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen topologischen Räumen bezeichne

$$\Gamma(f) = \{\ (x, f(x)) \mid x \in X\} \ \subseteq\ X \times Y$$

den *Graph* von f, versehen mit der Unterraumtopologie der Produkttopologie auf $X \times Y$.

i) Die Abbildung

$$p_X|_{\Gamma(f)}\colon \Gamma(f) \to X\ ; \quad (x, y) \mapsto x$$

ist eine stetige Bijektion.

ii) $p_X|_{\Gamma(f)}$ ist genau dann offen (also ein Homöomorphismus), wenn f stetig ist.

4. Übungsblatt

Aufgabe 4.1. Es sei $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen und $U \subseteq X$ ein Unterraum.

i) Es gilt $f(\overline{U}) \subseteq \overline{f(U)}$.
ii) Sei U dicht in X, Y Hausdorffsch und $g\colon X \to Y$ eine weitere stetige Abbildung mit $g|_U = f|_U$, d.h. $g(u) = f(u)$ für alle $u \in U$. Dann gilt bereits $g = f$.

Aufgabe 4.2 (15 Punkte)**.** Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$C_n := \bigcup_{i=0}^{\frac{3^n-1}{2}} [\tfrac{2i}{3^n}, \tfrac{2i+1}{3^n}] \subseteq \mathbb{R}.$$

Dann ist C_n mit der Teilraumtopologie abgeschlossen. Sei $C := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$. Als Schnitt abgeschlossener Mengen ist $C \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen. Da C auch beschränkt ist, ist C kompakt. C heißt *Cantor Menge*. Weiterhin lässt sich jedes $x \in [0,1]$ in triadischer Darstellung schreiben, d.h. als $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}$ mit $a_i \in \{0,1,2\}$.

i) C besteht gerade aus den Punkten von $[0,1]$ für die eine triadische Darstellung mit $a_i \in \{0,2\}$ existiert.
ii) Für alle Punkte in C ist die triadische Darstellung mit $a_i \in \{0,2\}$ eindeutig.
iii) C ist homöomorph zu $\prod_{i=1}^{\infty}\{0,2\}$.
iv) C ist homöomorph zu $C \times C$.

Aufgabe 4.3 (Ein-Punkt-Kompaktifizierung, (15 Punkte))**.** Wir zeigen in dieser Aufgabe, dass man jeden lokal-kompakten Hausdorff-Raum durch Hinzufügen eines Punktes in einen kompakten Raum einbetten kann.
Es sei X ein topologischer Raum. X heißt *lokal-kompakt*, wenn es für jeden Punkt $x \in X$ und jede Umgebung U von x eine kompakte Umgebung $K \subseteq U$ von x gibt, die in U enthalten ist.

Es sei nun X ein lokal-kompakter Hausdorffraum. Dann definieren wir die *Ein-Punkt-Kompaktifizierung* von X als $X^+ = X \cup \{\infty\}$, und nennen eine Teilmenge $U \subseteq X^+$ offen genau dann, wenn entweder $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge von X ist oder wenn $\infty \in U$ ist und $X^+ \backslash U \subseteq X$ kompakt ist mit der Unterraumtopologie von X.

i) Dies definiert eine Topologie auf X^+, mit der die Inklusion $X \to X^+$ stetig und offen ist.
ii) X^+ ist kompakt und Hausdorffsch.
iii) Für die Menge $\mathbb{N}_{>0}$ der natürlichen Zahlen (ohne 0) mit der diskreten Topologie ist die Ein-Punkt-Kompaktifizierung $\mathbb{N}_{>0}^+$ homöomorph zu $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\} \cup \{0\} \subseteq \mathbb{R}$ ist.
iv) Sei $s\colon Y \to X$ ein Schnitt einer beliebigen stetigen Abbildung

$f\colon X \to Y$, dann ist $s(Y)$ abgeschlossen.

v) X ist offen in $\beta(X)$.

5. Übungsblatt

Aufgabe 5.1 (Zusammenhängend $\neq$ Wegzusammenhängend)**.** Es gilt laut Vorlesung, dass jeder wegzusammenhängende topologische Raum auch zusammenhängend ist. In dieser Aufgabe zeigen wir, dass die Umkehrung nicht gilt.

Der Raum S sei definiert als folgender Unterraum des $\mathbb{R}^2$:

$$S = \left\{ \left(x, \sin\frac{1}{x} \right) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \right\} \ \cup \ \{0\} \times [-1, 1].$$

(Mit anderen Worten: S ist der Abschluss, in $\mathbb{R}^2$, des Graphen der Funktion $x \mapsto \sin\frac{1}{x}$ für $x > 0$.)

Zeige:

i) Der Raum S ist zusammenhängend.

ii) Der Raum S ist nicht wegzusammenhängend.

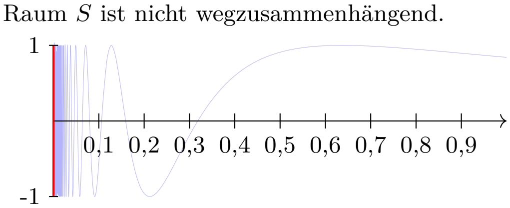

Abbildung 3: Sinuskurve des Topologen

Aufgabe 5.2. Es seien X und Y zusammenhängende Räume. Zeige:

i) Dann ist auch $X \times Y$ zusammenhängend.

ii) Wenn X und Y beide mehr als ein Element besitzen, dann ist auch $X \times Y \backslash \{(x, y)\}$ für ein festes $(x, y) \in X \times Y$ zusammenhängend.

iii) Es gibt keinen topologischen Raum X, sodass $\mathbb{R}$ homöomorph zu $X \times X$ ist.

Aufgabe 5.3. Es sei X ein topologischer Raum. Eine Folge $(x_i)_{i \geqslant 1}$, $x_i \in X$ *konvergiert gegen* $x \in X$, wenn für jede Umgebung U von x alle bis auf endlich viele x_i in U enthalten sind. Dann heißt x *Limes* oder *Grenzwert* der Folge.

i) Sei X Haussdorffsch. Dann ist x eindeutig.

ii) Gib ein Beispiel einer Folge in einem topologischen Raum mit zwei unterschiedlichen Grenzwerte.

iii) Sei $f\colon X \to Y$, and $(x_i)_{i \geqslant 1}$ eine konvergente Folge in X. Beweise oder widerlege: $(f(x_i))_{i \geqslant 1}$ konvergiert gegen $f(y)$.

iv) Sei $(s_i)_{i\geqslant 1}$ eine Folge stetiger Funktionen $s_i\colon X \to Y$ und Y ein metrischer Raum. $(s_i)_{i\geqslant 1}$ konvergiere *gleichmäßig* gegen eine Funktion $s\colon X \to Y$, d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine $N \in \mathbb{N}$ so dass für alle $x \in X$, $n \geqslant \mathbb{N}$ gilt $d(s_i(x), s(x)) < \varepsilon$. Zeige, dass s stetig ist.

Aufgabe 5.4. Es sei X ein topologischer Raum. Wir sagen, dass X *folgenkompakt* ist, wenn jede Folge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in X eine konvergente Teilfolge hat.

i) Zeige, dass ein kompakter metrischer Raum X folgenkompakt ist.
ii) Beweise das Lebesgue-Lemma:
Es sei X ein folgenkompakter metrischer Raum und $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ sodass für jede Teilmenge A mit Durchmesser $D < \varepsilon$ ein $i \in I$ existiert, sodass $A \subseteq U_i$ gilt.
(Der Durchmesser eines metrischen Raumes A ist $\sup\{d(x,y) \mid x, y \in A\}$.)
iii) Zeige, dass ein folgenkompakter metrischer Raum X kompakt ist.

6. Übungsblatt

Aufgabe 6.1 (Der Erweitreungssatz von Tietze v.2)**.** Sei X ein normaler Raum, $A \subseteq X$ abgeschlossen.

(i) Jede stetige Funktion $f\colon A \to [a,b]$ mit $a < b$ lässt sich fortsetzen zu einer stetigen Funktion $\overline{f}\colon X \to [a,b]$.
(ii) Nach (i) lässt sich jede stetige Funktion $f\colon A \to (-1,1)$ fortsetzen zu einer stetigen Funktion $s\colon X \to [-1,1]$. Setze $D := s^{-1}(-1) \cup s^{-1}(1)$. Zeige, dass es eine stetige Funktion $\phi\colon X \to [0,1]$ gibt mit $\phi(D) = \{0\}$ und $\phi(A) = \{1\}$.
(iii) Sei $h\colon X \to (-1,1)$ die Abbildung $h(x) = \phi(x) \cdot s(x)$. Zeige, dass h tatsächlich Bild in $(-1,1)$ hat und dass h f fortsetzt.
(iv) Jede stetige Funktion $f\colon A \to \mathbb{R}$ lässt sich fortsetzen zu einer stetigen Funktion $\overline{f}\colon X \to \mathbb{R}$.
Hinweis: $\mathbb{R} \cong (-1,1)$.

Aufgabe 6.2. (i) Sei $X := \prod_{i=0}^{\infty}[0,1]$. Definiere $D\colon X \times X \to \mathbb{R}$ durch

$$D((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) := \sup\left\{ \frac{|x_n, y_n|}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

D ist eine Metrik auf X und induziert die Produkttopologie auf X.

(ii) Ein kompakter Hausdorff-Raum ist metrisierbar genau dann, wenn er eine abzählbare Basis besitzt.
(*Erinnerung:* Kompakte Hausdorff-Räume sind normal.)

Aufgabe 6.3. (i) Sei $X := \prod_{[0,1]}\{0,1\}$. Zeige, dass X kompakt, aber nicht folgenkompakt ist.
Hinweis: Betrachte die Folge $(a_i)_{i\geqslant 1}$ so dass $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i(x)}{2^i}$.

(ii) Gegeben sei eine total geordnete Menge $(X, \leqslant)$. Für Punkte $a, b \in X \cup \{\pm\infty\}$ definiere das *Intervall* $(a,b) := \{x \in X \mid a < x < b\}$. Solche Intervalle bilden eine Basis einer Topologie auf X, die *Ordnungstopologie*. Für zwei total geordnete Mengen $(X, \leqslant)$ und $(Y, \leqslant)$ ist die *lexikographische Ordnung* auf $X \times Y$ definiert als: $(y_1, z_1) < (y_2, z_2)$ genau dann, wenn $y_1 < y_2$, oder $y_1 = y_2$ und $z_1 < z_2$.
Sei ω_1 die kleinste überabzählbare Ordinalzahl. Der *abgeschlossene lange Strahl* L wird definiert als das kartesische Produkt $\omega_1 \times [0,1)$, ausgestattet mit der Ordnungstopologie von der lexikographischen Ordnung. (Zum Beispiel ist $\mathbb{R} \cong \mathbb{N} \times [0,1)$.)
Beweise:
(a) Jede monoton steigende Folge in L konvergiert.
(b) Jede Folge in L hat eine monotone Teilfolge.
(c) L ist folgenkompakt.
(d) L ist nicht kompakt.
(*Hinweis*: Benutze ohne Beweis, dass jede steigende Folge von Ordinalzahlen konvergiert und dass ω_1 nicht der Limes einer Folge von abzählbaren Ordinalzahlen ist.)

Aufgabe 6.4. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $X \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$. Die Kategorie $\mathcal{C}/X$ der Objekte über X ist die Kategorie mit Objekten $\mathrm{ob}(\mathcal{C}/X) := \{(Y,f) \mid Y \in \mathrm{ob}(\mathcal{C}), f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Y,X)\}$ und $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}/X}((Y,f),(Z,g)) = \{h \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Y,Z) \mid f = g \circ h\}$, d.h. solche Abbildungen, die mit f und g kommutieren. Analog ist die Kategorie $X/\mathcal{C}$ der Objekte unter X die Kategorie mit Objekten $\mathrm{ob}(X/\mathcal{C}) := \{(Y,f) \mid Y \in \mathrm{ob}(\mathcal{C}), f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Y)\}$ und $\mathrm{Mor}_{X/\mathcal{C}}((Y,f),(Z,g)) = \{h \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Y,Z) \mid h \circ f = g\}$, d.h. wieder solche Abbildungen, die mit f und g kommutieren.
(i) Zeige, dass $\mathcal{C}/X$ und $X/\mathcal{C}$ mit der offensichtlichen Verknüpfung von Morphismen tatsächlich Kategorien sind.
(ii) Sei $* \in \mathbf{Top}$ ein Einpunktraum. Zeige $\mathbf{Top}/*$ is isomorph zu $\mathbf{Top}$ und $*/\mathbf{Top}$ ist isomorph zu $\mathbf{Top}_*$, wobei $\mathbf{Top}_*$ die Kategorie der punktierten topologischen Räume ist.

Bemerkung: Im Englischen heißen $\mathcal{C}/X$ und $X/\mathcal{C}$ overcategory bzw. undercategory. Im Deutschen ist aber zumindest Unterkategorie missverständlich.

B Erklärung der Umgebungen

Nummerierung

Die Nummerierung in dieser Mitschrift folgt derjenigen der Vorlesung. Das hat den Vorteil, dass die Nummern in dieser Mitschrift auch zum Referenzieren genutzt werden können (z.B. bei Übungsaufgaben).

Andererseits bedeutet dies, dass es einige Sätze (o.Ä.) gibt, die nicht nummeriert sind.

Abweichende Handhabung von Umgebungen

An manchen Stellen wurde die Umgebung einer Aussage verändert, das ist dann mit einem † markiert:

> **Lemma† (Einfaches Lemma).** Diese Aussage wurde in der Vorlesung erwähnt, allerdings nicht als Lemma, sondern nur im Fließtext oder einem Nebensatz. Da ich der Meinung war, dass sie einen eigenen Platz verdient, ist sie nun ein Lemma.

Der Inhalt solcher Aussagen ist also Teil der Vorlesung, trotzdem sind solche Stellen sicherlich fehleranfälliger, da ich teilweise umformuliere.

Kommentare

Diese Mitschrift enthält Kommentare, die von mir selbst hinzugefügt wurden, diese sind dann mit einem * gekennzeichnet:

> **Bemerkung*.** An dieser Stelle hätten wir noch überprüfen müssen, dass X. Das ist klar, weil Y.

Wenn ihr sie lesenswert findet, so tut das, wenn nicht, ignoriert sie einfach. Insbesondere kann es auch hier vermehrt zu Fehlern kommen, seid besonders vorsichtig!

Es gibt (selten) auch Sätze, Beweise, etc, die mit einem * versehen sind, das hat dieselbe Bedeutung. Das passiert z.B. wenn in der Vorlesung auf einen Satz verwiesen wird, der nicht behandelt wird, den ich aber an dieser Stelle eingefügt habe. Ihr könnt sie ebenfalls ignorieren. Diese Mitschrift enthältmündliche Kommentare, d.h. Kommentare, die in der Vorlesung nicht schriftlich festgehalten, aber gesagt wurden. Ich versuche, relevante davon ebenfalls als

> **Mündliche Anmerkung.** festzuhalten.

Manchmal sind diese auch mit einem † markiert, wenn ich das Gefühl hatte, arg abzuschweifen.

Dass ich mündliche Kommentare so markiere, ist neu, insbesondere ist das am Anfang des Skript wohl noch nicht so.

C Stichwortverzeichnis

D Literaturverzeichnis

Literatur

[Bre93] Glen E. Bredon. *Topology and Geometry*. Springer-Verlag, 1993. ISBN: 0-387-97926-3. URL: https://djvu.online/file/dgLxX8VtKmfIT.

[Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. 2002. URL: http://pi.math.cornell.edu/~hatcher/AT/AT.pdf.

[Wal] Friedhelm Waldhausen. *Topologie*. Vorlesungsnotizen. URL: https://www.math.uni-bielefeld.de/~fw/ein.pdf.