# Lista 3

Adrian Mucha 236526

25 listopada 2018

# 1 Zadanie 1

## 1.1 Problem

Napisać funkcję rozwiązującą równanie $f(x) = 0$ metodą bisekcji.

## 1.2 Rozwiązanie

Główną ideę metody znajdującej miejsca zerowe funkcji $f(x)$ przedstawia Algorytm 1. Warto jednak zwrócić uwagę na sposób w jaki wyznaczany jest środek przedziału. Jest to mianowicie instrukcja $c \leftarrow a+e$ (lub inaczej $c \leftarrow a+(b-a)/2$). W obliczeniach naukowych na komputerach z ograniczoną prezycją, lepiej jest obliczać nową wielkośc poprzez dodanie do poprzedniej małej poprawki, niż obliczać bezpośrednio wyrażenie $c \leftarrow (a + b)/2$, które mogłoby doprowadzić do wypadnięcia poza przedział $[a, b]$. Kolejną sprawą jest sposób sprawdzania znaków wartości funkcji na końcach przedziałów. Wyrażenie $f(a) \cdot f(b) < 0$ mogłoby spowodować niedomiar lub nadmiar. Aby rozwiązać ten problem zastosowane funkcję sprawdzającą znak wyrażenia, dzięki której sprawdzamy czy na końcach przedziałów znaki różnią się, tzn. $sign(f(a)) \neq sign(f(b))$.

# 2 Zadanie 2

## 2.1 Problem

Napisać funkcję rozwiązującą równanie $f(x) = 0$ metodą Newtona (Stycznych).

## 2.2 Rozwiązanie

Główną ideę metody znajdującej miejsca zerowe funkcji $f(x)$ przedstawia Algorytm 2. *Metoda Newtona* jest ogólną procedurą, którą można zastosować w wielu różnych sytuacjach. Jej szczególny wariant, który tutaj przedstawiamy nazywany jest *metodą Newtona-Raphsona* służący do lokazlizacji zer funkcji rzeczywistych. Największym atutem tej metody jest jest szybkość, gdyż jej zbieżność jest kwadratowa, a nie liniowa. Jest zatem szybsza od metod *Bisekcji* oraz *Stycznych.* Natomiast ta metoda nie gwarantuje nam zbieżności, dlatego stosuje się

**Algorithm 1** Algorytm bisekcji szukający miejsca zerowe funkcji

```
function MBISEKCJI(f, a, b, δ, ε)
    it ← 0
    u ← f(a)
    v ← f(b)
    e ← b − a
    if sgn(u) = sgn(v) then
        return (0, 0, 0, 1)
    end if
    while true do
        it ← it + 1
        e ← e/2
        c ← a + e
        w ← f(c)
        if |e| < δ or |w| < ε then
            return k, c, w
        end if
        if sgn(w) ≠ sgn(u) then
            b ← c
            v ← w
        else
            a ← c
            u ← w
        end if
    end while
end function
```

ją hybrydowo - z jakąś globalnie zbieżną metodą. Sercem algorytmu jest rekurencyjna zależność, która z każdym krokiem przybliża miejsce zerowe:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (n \geq 0).$$

Ponadto, algorytm wymaga od nas liczenia pochodnej funkcji której pierwiastki szukamy, gdyż zakładamy, że ową pochodną podamy na wejściu algorytmu.

**Algorithm 2** Algorytm Newtona, znany również jako *metoda Newtona-Raphsona* do lokalizacji zer funkcji rzeczywistych. Metoda stycznych.

**function** MSTYCZNYCH($f, f', x_0, \delta, \epsilon, maxit$)
    $v \leftarrow f(x_0)$
    **if** $|v| < \epsilon$ **then**
        **return** $(x_0, v, 0, 1)$
    **end if**
    $x1 = 0$
    $k = 0$
    **for** $k = 1$ to $maxit$ **do**
        $x_1 \leftarrow x_0 - v/f'(x_0)$
        $v \leftarrow f(x_1)$
        **if** $|x_1 - x_0| < \delta$ or $|v| < \epsilon$ **then**
            **return** $(x_1, v, k, 0)$
        **end if**
        $x_0 \leftarrow x_1$
    **end for**
    **return** $(x_0, v, maxit, 1)$
**end function**

# 3 Zadanie 3

## 3.1 Problem

Napisać funkcję rozwiązującą równanie $f(x) = 0$ metodą Siecznych.

## 3.2 Rozwiązanie

Implementację funkcji przedstawia Algorytm 3. Warto zauważyć, że *metoda siecznych* jest zmodyfikowaną *metodą Newtona*. Przypomnijmy zależnośc rekurencyjną:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

W *metodzie Siecznych* eliminujemy wymóg obliczania pochodnej, poprzez zastąpienia jej *ilorazem różnicowym*:

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

Otrzymujemy w ten sposób *metodę Siecznych*:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \qquad (n \geq 1)$$

Ponieważ $x_{n+1}$ wyraża się przez $x_n$ i $x_{n-1}$, więc potrzebne są dwa punkty początkowe. Zauważmy, że ten program przestawia końce $a$ i $b$ przedziału (symbol $\leftrightarrow$), gdy wymaga tego utrzymanie nierówności $|f_a| \leq |f_b|$. Dzięki temu, moduły wartości funkcji w punktach $x_n$ nie rosną.

**Algorithm 3** Algorytm metody siecznych

**function** MSIECZNYCH$(f, x_0, x_1, \delta, \epsilon, maxit)$
    $f_a = f(a)$
    $f_b = f(b)$
    **for** $k = 1$ to $maxit$ **do**
        **if** $|f_a| > |f_b|$ **then**
            $a \leftrightarrow b$
            $f_a \leftrightarrow f_b$
        **end if**
        $s = \frac{b-a}{f_b - f_a}$
        $b = a$
        $f_b = f_a$
        $a = a - f_a \cdot s$
        $f_a = f(a)$
        **if** $|b - a| < \delta$ or $|f_a| < \epsilon$ **then**
            **return** $(a, f_a, k, 0)$
        **end if**
    **end for**
    **return** $(a, f_a, k, 1)$
**end function**

# 4 Zadanie 4

## 4.1 Problem

Wyznaczyć pierwiastki równania $sin(x) - (\frac{1}{2}x)^2 = 0$, używając następujących metod i parametrów:

1. Bisekcja z przedziałem początkowym $[1.5, 2]$ i $\delta = \frac{1}{2}10^{-5}, \epsilon = \frac{1}{2}10^{-5}$
2. Newton z przybliżeniem początkowym $x_0 = 1.5$ i $\delta = \frac{1}{2}10^{-5}, \epsilon = \frac{1}{2}10^{-5}$

3. Sieczne z przybliżeniami początkowymi $x_0 = 1, x_1 = 2$ i $\delta = \frac{1}{2}10^{-5}, \epsilon = \frac{1}{2}10^{-5}$

### 4.2 Rozwiązanie

Użyto metod zaimplementowanych w zadaniach 1-3 dla obliczenia zer funkcji $sin(x) - (\frac{1}{2}x)^2 = 0$. Obliczono pochodną: $cos(x) - \frac{1}{2}x$, której użyto w *metodzie Newtona.*

### 4.3 Wyniki

Wyniki przedstawia Tabela 1.

| Metoda | $x_0$ | $f(x_0)$ | Iteracje |
|---|---|---|---|
| Bisekcja | 1.9337539672851562 | $-2.7027680138402843e-7$ | 16 |
| Newton | 1.933753779789742 | $-2.2423316314856834e-8$ | 4 |
| Sieczne | 1.933753644474301 | $1.564525129449379e-7$ | 4 |

Tabela 1: Wyniki poszczególnych metod szukających pierwiastków funkcji $sin(x) - (\frac{1}{2}x)^2 = 0$

### 4.4 Wnioski

Trzy rozważone już metody (`bisekcji, Newtona i siecznych`) ilustrują ogólne zjawisko w analizie numerycznej, a mianowicie konflikt mięszy szybkością i wiarygodnością.

Najszybszą pod względem zbieżności jest *metoda Newtona*, która zbiega kwadratowo ($\alpha = 2$), natomiast wymaga znajomości analitycznej $f'(x)$. Jest zbieżna lokalnie i nie radzi sobie z niektórymi rodzajami funkcji (gdy jest rozbieżna). Najlepiej stosować gdy punkt początkowy leży blisko rozwiązania.

Kolejną pod względem szybkości zbieżności jest *metoda siecznych*, ze zbieżnością nadliniową ($\alpha = 1.618...$). Jest również zbieżna lokalnie, lecz nie wymaga od nas znajomości pochodnej funkcji, której miejsca zerowe szukamy.

Ostatnią, ze zbieżnością liniową ($\alpha = 1$) jest *metoda bisekcji.* Jej największym atutem jest zbieżność globalna. Można więc stwierdzić, że jest najbardziej stabilna lub najbardziej bezpieczna. W związku z tym, zazwyczaj stosuje się ją hybrydowo, w połączeniu z szybszymi metodami takimi jak *metoda Newtona* lub *metoda siecznych.*

## 5 Zadanie 5

### 5.1 Problem

*Metodą bisekcji* znaleźć wartości zmiennej $x$, dla której przecinają się wykresy funkcji $y = 3x$ i $y = e^x$. Wymagana dokładność obliczeń: $\delta = 10^{-4}, \epsilon = 10^{-4}$.


Rysunek 1: $f(x) = 3x$ oraz $g(x) = e^x$

## 5.2 Rozwiązanie

Tak jak wymagano w zadaniu, do znalezienia miejsc przecięć została użyta *metoda bisekcji*. Tą metodą zbadamy miejsca zerowe funkcji $h(x) = 3x - e^x$. Analizując rysunek 1, możemy wywnioskować, że miejsca przecięć tych dwóch wykresów znajdziemy w przedziałach $[0.0, 1.0]$ oraz $[1.0, 2.0]$.

## 5.3 Wyniki

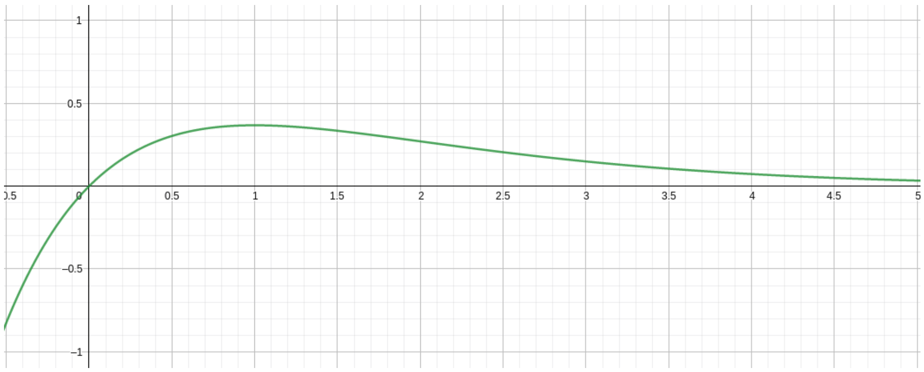
Otrzymano następujące wyniki (tabela 2).

| Zakres | $x$ | Iteracje |
|---|---|---|
| $[0.0, 1.0]$ | 0.619140625 | 9 |
| $[1.0, 2.0]$ | 1.5120849609375 | 13 |

Tabela 2: Miejsca przecięć wykresów $f(x)$ oraz $g(x)$, czyli miejsca zerowe funkcji $h(x) = 3x - e^x$

## 5.4 Wnioski

Najważniejszą decyzją w rozwiązaniu tego zadania jest odpowiedni dobór przedziałów, w których mają być szukane miejsca zerowe. *Metoda bisekcji* wymaga aby na końcach przedziałów znaki funkcji $h(x) = 3x - e^x$ były różne. Tutaj w znalezieniu odpowiednich przedziałów posłużyliśmy się rysunkiem, natomiast można również badać tę funkcję analitycznie.




Rysunek 2: $f_1(x) = e^{1-x} - 1$

# 6 Zadanie 6

## 6.1 Problem

Znaleźć miejsce zerowe funkcji $f_1(x) = e^{1-x} - 1$ oraz $f_2(x) = xe^{-x}$ za pomocą metod bisekcji, Newtona i siecznych. Dobrać odpowiednio przedział i przybliżenia początkowe. Sprawdzić co stanie, gdy w metodzie Newtona dla $f_1$ wybierzemy $x_0 \in (1, \infty]$ a dla $f_2$ wybierzemy $x_0 > 1$, czy mogę wybrać $x_0 = 1$ dla $f_2$?

## 6.2 Rozwiązanie

Wykorzystano zaimplementowane wcześniej metody bisekcji, Newtona oraz siecznych oraz przeanalizowano wykresy funkcji znajdujące się na rysunkach 2 i 3 w celu dobrania najefektywniejszych parametrów oraz takich, które wygenerują ciekawe rezultaty.

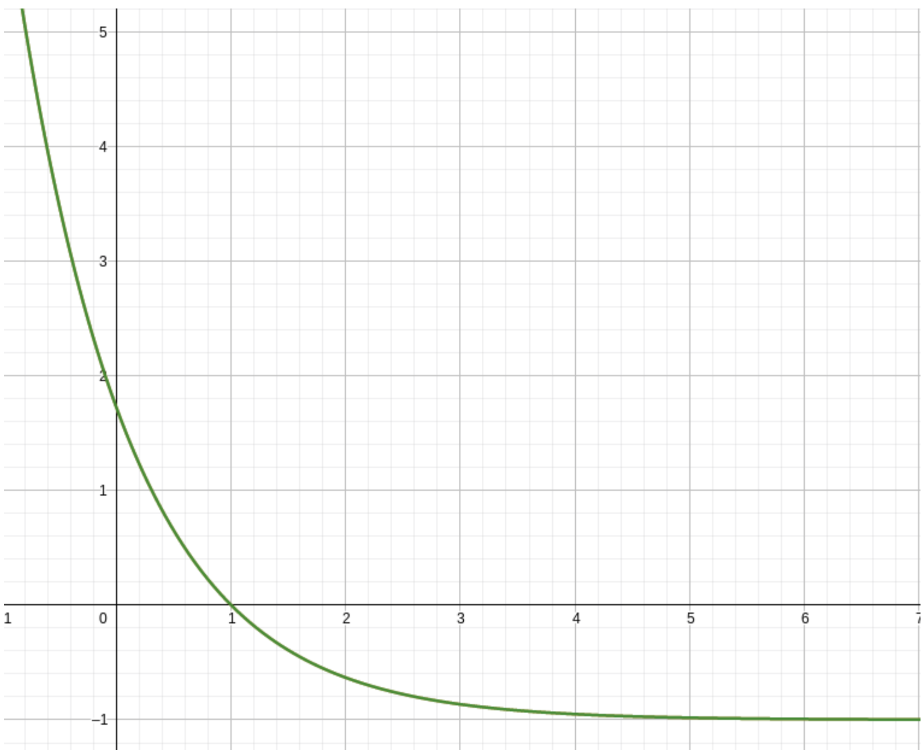
## 6.3 Wyniki

Wyniki przedstawiają tabele 3 oraz 4.

## 6.4 Wnioski

Analizując wyniki w tabelach 3 oraz 4 wyciągamy kilka wniosków. *Metoda bisekcji* jest zbieżna globalnie - radzi sobie z każdym przedziałem i konsekwetnie znajduje pierwiastki funkcji w tempie zależnym od zadanego przedziału. Należy jednak uważać na dobór przedziałów przy funkcji $g(x)$, gdyż tam, dla bardzo dużych $x$, wartośc funkcji przyjmuje wartości bliskie zeru co może prowadzić do przerwania wykonywania metody i zwróceniu błędnego pierwiastka.

*Metoda Newtona* działa szybko i dokładnie w przypadkach gdy podany punkt początkowy znajduje się blisko rzeczywistego pierwiastka. Gdy za bardzo odda-




Rysunek 3: $f_2(x) = xe^{-x}$

| Metoda | Zakres / Parametry | $x$ | $f(x)$ | Iteracje |
|---|---|---|---|---|
| Bisekcja | [-1.0, 1.0] | 0.9999923706054688 | 7.629423635080457e-6 | 18 |
| Bisekcja | [-2.0, 3.5] | 1.0000076293945312 | -7.6293654275305656e-6 | 16 |
| Bisekcja | [-0.05, 1.05] | 0.9999984741210939 | 1.5258800702966369e-6 | 16 |
| Bisekcja | [0.55, 1.55] | 0.9999969482421875 | 3.0517624691750456e-6 | 16 |
| Bisekcja | [-50.0, 60.0] | 1.0000038146972656 | -3.814689989667386e-6 | 19 |
| Bisekcja | [-5.0, 6.0] | 0.9999942779541016 | 5.722062269342132e-6 | 19 |
| Bisekcja | [-100.0, 50.0] | 0.999993085861206 | 6.9141626966029435e-6 | 23 |
| Newton | $x_0 = -500.0$ | 0.9999999998780821 | 1.2191803122618694e-10 | 505 |
| Newton | $x_0 = -100.0$ | 0.9999999998780821 | 1.2191803122618694e-10 | 105 |
| Newton | $x_0 = -10.0$ | 0.9999999998781014 | 1.2189849130095354e-10 | 15 |
| Newton | $x_0 = -1.0$ | 0.9999922654776594 | 7.734552252003368e-6 | 5 |
| Newton | $x_0 = 0.5$ | 0.9999999998878352 | 1.1216494399945987e-10 | 4 |
| Newton | $x_0 = 7.0$ | 0.9999999484165362 | 5.15834650549607e-8 | 401 |
| Newton | $x_0 = 8.0$ | NaN | NaN | 1024 |
| Sieczne | $x_0 = -2.0, x_1 = -1.0$ | 0.999999927401123 | 7.259887957467015e-8 | 8 |
| Newton | $x_0 = 50.0$ | NaN | NaN | 1024 |
| Newton | $x_0 = 10.0$ | NaN | NaN | 1024 |
| Newton | $x_0 = 0.5$ | 0.9999999998878352 | 1.1216494399945987e-10 | 4 |

Tabela 3: $f(x) = e^{1-x} - 1$

| Metoda | Zakres / Parametry | $x$ | $g(x)$ | Iteracje |
|---|---|---|---|---|
| Bisekcja | [-1.0, 1.0] | 0.0 | 0.0 | 1 |
| Bisekcja | [-2.0, 3.5] | -1.9073486328125e-6 | -1.9073522707947765e-6 | 18 |
| Bisekcja | [-0.05, 1.05] | 1.5258789062512617e-6 | 1.5258765779466016e-6 | 16 |
| Bisekcja | [0.55, 1.55] | 0 | 0 | 0 |
| Bisekcja | [-50.0, 60.0] | 4.76837158203125e-6 | 4.768348844717916e-6 | 21 |
| Bisekcja | [-5.0, 6.0] | 5.7220458984375e-6 | 5.722013156721911e-6 | 19 |
| Bisekcja | [-100.0, 50.0] | -5.9604644775390625e-6 | -5.96050000478173e-6 | 23 |
| Newton | $x_0 = -500.0$ | -8.976476631721454e-8 | -8.976477437492816e-8 | 510 |
| Newton | $x_0 = -100.0$ | -4.356806237879908e-6 | -4.356825219681853e-6 | 108 |
| Newton | $x_0 = -10.0$ | -3.784424932490619e-7 | -3.784426364678097e-7 | 16 |
| Newton | $x_0 = -1.0$ | -3.0642493416461764e-7 | -3.0642502806087233e-7 | 5 |
| Newton | $x_0 = 0.5$ | -3.0642493416461764e-7 | -3.0642502806087233e-7 | 5 |
| Newton | $x_0 = 7.0$ | 14.792276940955892 | 5.569686859646652e-6 | 7 |
| Newton | $x_0 = 8.0$ | 14.636807965014 | 6.438155219843286e-6 | 6 |
| Sieczne | $x_0 = -2.0, x_1 = -1.0$ | -6.982568902521766e-6 | -6.982617658960467e-6 | 7 |
| Newton | $x_0 = 10.0$ | 14.380524159896261 | 8.173205649825554e-6 | 4 |
| Newton | $x_0 = 5.0$ | 15.194283983439147 | 3.827247505782993e-6 | 9 |
| Newton | $x_0 = 1.0$ | NaN | NaN | 1024 |
| Newton | $x_0 = 0.5$ | -3.0642493416461764e-7 | -3.0642502806087233e-7 | 5 |

Tabela 4: $g(x) = xe^{-x}$

limy się od miejsca zerowego, wtedy funkcja staje się niemal stała, a pochodna jest bliska zeru co prowadzi do przekraczenia ilości dopuszcalnych iteracji i zwróceniu wyniku z błędem. W tabelach możemy zaobserwować wiersze, w których wynikami jest $NaN$ - te wpisy zostały wygenerowane z sygnałem błędu.

*Metoda Siecznych* podobnie jak metoda Newtona, dla dużych wartości $x$, gdy $g(x)$ jest bliskie zeru zbyt szybko kończyła swoją pracę ze względu na osiągnięcie podanej precyzji, zwracając błędny pierwiastek.