



Équations aux dérivées partielles

Rapport du projet



Département Informatique et Mathématiques Appliquées - 2ème Année

Réalisé par:
Ilyass Kettioui

Encadré par:
SimonEHOUARN

November 22, 2020

Table des matières

1	Partie A : Équations aux dérivées partielles elliptiques	2
1.1	Position du problème	2
1.2	Partie théorique	2
1.3	Partie pratique et analyse	6
2	Partie B : Équations aux dérivées partielles paraboliques	9
2.1	Position du problème	9
2.2	Partie théorique	9
2.3	Mise en œuvre pratique	10
3	Conclusion	11

1 Partie A : Équations aux dérivées partielles elliptiques

1.1 Position du problème

L'objectif de cette première partie est obtenir par la méthode des éléments finis une approximation de la solution du problème de Laplace en dimension 2 muni de conditions aux limites mixtes : Dirichlet et Neumann).

Soit $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[\subset \mathbb{R}^2$ et $\partial\Omega$ sa frontière partitionnée en deux sous-ensembles $\partial\Omega_d \cup \partial\Omega_n = \partial\Omega$. On considère aussi $f \in L^2(\Omega)$, $u_d \in H^1(\Omega)$, $g \in L^2(\partial\Omega_n)$, le problème de Laplace revient à trouver u solution de:

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y) &= f(x, y) & \text{sur } \Omega \\ u(x, y) &= u_d(x, y) & \text{sur } \partial\Omega_d \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial n} &= g(x, y) & \text{sur } \partial\Omega_n \end{cases} \quad (1)$$

1.2 Partie théorique

- On a $f \in L^2(\Omega)$ donc pour que la première ligne de l'EDP ait un sens il faut au moins que $u \in H^2(\Omega)$. On considère en plus l'espace $H_0^1(\Omega) = \{w \in H^1(\Omega) \text{ tq } w = 0 \text{ sur } \partial\Omega_d\}$ et on considère que $v = u - u_d \in H_0^1(\Omega)$ (bien définie car $(u - u_d) \in H^1$ et $(u - u_d) = 0$ sur $\partial\Omega_d$). Donc $\forall w \in L^2(\Omega)$ on peut écrire :

$$\int_{\Omega} -\Delta u w \, dx = \int_{\Omega} f w \, dx \quad (2 \text{ intégrales finis grâce à Cauchy Schwarz dans } L^2(\Omega))$$

Or d'après la formule de Green on obtient $\forall w \in H^1(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} \nabla(u) \cdot \nabla w \, dx + \int_{\Omega} \Delta u w \, dx = \int_{\partial\Omega} \gamma_1(u) \gamma_0(w) \, dx$$

Alors en remplaçant dans cette formule on aura:

$$\int_{\Omega} \nabla(v + u_d) \cdot \nabla w \, dx - \int_{\Omega} f w \, dx = \int_{\partial\Omega_d} \gamma_1(u) \gamma_0(w) \, dx + \int_{\partial\Omega_n} \gamma_1(u) \gamma_0(w) \, dx$$

et puisque l'opérateur ∇ est linéaire, et pour $w \in H_0^1(\omega)$ on a $\gamma_0(w) = w = 0$ sur $\partial\Omega_d$, et $\gamma_1(u) = \frac{\partial u}{\partial n} = g$ sur $\partial\Omega_d$, on peut conclure que la formulation variationnelle du problème s'écrit:

Trouver $u \in H_0^1, \forall w \in H_0^1$ tq :

$$\int_{\Omega} \nabla(v) \cdot \nabla w \, dx = \int_{\Omega} f w \, dx + \int_{\partial\Omega_n} g w \, dx - \int_{\Omega} \nabla(u_d) \cdot \nabla w \, dx.$$

- Puisque Ω est borné, on peut utiliser l'inégalité de Poincaré, alors la semi-norme $|\cdot|_{0,1}$ devient une norme et elle est équivalente à la norme $\|\cdot\|_{H^1}$, et en suivant les mêmes étapes vues en cours on démontre facilement que $(H_0^1(\Omega), <, >_{0,1})$ est un hilbert où $< v, w >_{0,1} = \int_{\Omega} \nabla(v) \cdot \nabla w \, dx$. (car le H_0^1 qu'on représentait les fonctions de H^1 qui s'annulent dans toutes la frontière de Ω au lieu de juste une partie de la frontière, Mais l'idée de la preuve est la même: montrer que $H_0^1(\Omega)$ est un sous espace vectoriel fermé du complet $H^1(\Omega)$ et donc lui même un complet.)

On définit alors:

$$\begin{aligned} a : (H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v, w) &\mapsto \int_{\Omega} \nabla(v) \cdot \nabla w \, dx = < v, w >_{0,1} \\ l : H_0^1(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ w &\mapsto \int_{\Omega} f w \, dx + \int_{\partial\Omega_n} g w \, dx - \int_{\Omega} \nabla(u_d) \cdot \nabla w \, dx \end{aligned}$$

– l est une forme linéaire.

En effet, pour $f \in L^2(\Omega)$, $u_d \in H^1(\Omega)$, $g \in L^2(\partial\Omega_n)$ et $w \in H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ toutes les intégrales sont finies et donc l est à valeur dans \mathbb{R} .

En plus, en utilisant la linéarité des opérateurs \int_{Ω} sur $L^1(\Omega)$, $\int_{\partial\Omega_n}$ sur $L^1(\partial\Omega_n)$ et ∇ on conclut que l est linéaire.

– l est continue.

En effet, pour $w \in H_0^1(\Omega)$ on a :

$$\begin{aligned} |l(w)| &= \left| \int_{\Omega} f w \, dx + \int_{\partial\Omega_n} g w \, dx - \int_{\Omega} \nabla(u_d) \cdot \nabla w \, dx \right| \\ &\leq \left| \int_{\Omega} f w \, dx \right| + \left| \int_{\partial\Omega_n} g w \, dx \right| + \left| \int_{\Omega} \nabla(u_d) \cdot \nabla w \, dx \right| \end{aligned}$$

Et d'après l'inégalité de C.S sur $L^2(\Omega)$ et $L^2(\partial\Omega_n)$ on a :

$$\begin{aligned} |l(w)| &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega_n)} \|w\|_{L^2(\partial\Omega_n)} - |u_d|_{0,1} |w|_{0,1} \\ &\leq (\|f\|_{L^2(\Omega)} C + \|g\|_{L^2(\partial\Omega_n)} C - |u_d|_{0,1}) |w|_{0,1} \text{ (d'après l'inégalité de Poincaré)} \\ &\leq K_l |w|_{0,1} \end{aligned}$$

– a est une forme bilinéaire.

En effet, pour $v \in H_0^1(\Omega)$ et $w \in H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ toutes les intégrales sont finies et donc a est à valeur dans \mathbb{R} .

En plus, en utilisant la linéarité des opérateurs \int_{Ω} sur $L^1(\Omega)$ et ∇ et le fait que a est symétrique, on conclut que a est bilinéaire.

– a est continue.

En effet, pour $v, w \in H_0^1(\Omega)$ on a :

$$\begin{aligned} |a(v, w)| &= | \langle v, w \rangle_{0,1} | \\ &\leq 1 \times |v|_{0,1} |w|_{0,1} \end{aligned}$$

car $| \langle \cdot, \cdot \rangle_{0,1} |$ vérifie l'inégalité de C.S.

– a est coercive.

Car pour $v \in H_0^1(\Omega)$ on a :

$$|a(v, v)| = | \langle v, v \rangle_{0,1} | = |v|_{0,1}^2$$

D'où, les conditions du théorème de Lax Milgram sont toutes vérifiées, il existe donc une unique solution pour ce problème tq :

$$\exists! v \in H_0^1(\Omega), \forall w \in H_0^1(\Omega) : a(v, w) = l(w). \quad (F.V)$$

- On introduit ici la discrétisation en définissant $(\eta_k)_{1..n}$ comme base des éléments finis où n désigne le nombre de degrés de liberté.

On suppose de plus que la condition limite se décompose dans cette base sous la forme $u_d = \sum_{i=1}^n U_i \eta_i$, tq $U_k = 0$ si $(x_k, y_k) \notin \partial\Omega_d$ et sinon $U_k = u_d(x_k, y_k)$.

Alors si on cherche une solution dans cet espace, il suffit de trouver les composantes de la solution dans la base, alors pour u une solution on écrit sa décomposition $v = \sum_{i=1}^n v_i \eta_i$. Soit $j:1..n$, on remplace v et u_d dans (F.V) par leurs décompositions et on remplace w par η_j , on a :

$$\int_{\Omega} \nabla(\sum_{i=1}^n v_i \eta_i) \cdot \nabla \eta_j \, dx = \int_{\Omega} f \eta_j \, dx + \int_{\partial\Omega_n} g \eta_j \, dx - \int_{\Omega} \nabla(\sum_{i=1}^n U_i \eta_i) \cdot \nabla \eta_j \, dx$$

donc par linéarité de ∇ on trouve:

$$\sum_{i=1}^n v_i \times (\int_{\Omega} \nabla \eta_i \cdot \nabla \eta_j \, dx) = \int_{\Omega} f \eta_j \, dx + \int_{\partial\Omega_n} g \eta_j \, dx - \sum_{i=1}^n U_i \int_{\Omega} \nabla \eta_i \cdot \nabla \eta_j \, dx.$$

Ceci est vrai $\forall j \in 1..n$, c'est un système de n équations et n inconnus qu'on peut reformuler sous la forme : $Ax = b$ tq $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $x, b \in \mathbb{R}^n$ où:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \int_{\Omega} \nabla \eta_i^T \nabla \eta_j \, dx \\ b_i &= \int_{\Omega} f \eta_i \, dx + \int_{\partial\Omega_n} g \eta_i \, dx - \sum_{k=1}^n U_k \int_{\Omega} \nabla \eta_k^T \nabla \eta_i \, dx \end{aligned}$$

Pour montrer que ce système admet une unique solution, il suffit de montrer que la matrice A est inversible. Et puisque on a une dimension finie l'inversibilité de A est équivalente à son injectivité.

Supposons alors $Ax = 0$ tq on une décomposition de x sous la forme : $\sum_{i=1}^n \eta_i x_i$.

On a

$$\forall i \in 1..n : Ax = \sum_{j=1}^n a(\eta_i, \eta_j) x_j$$

Par linéarité de a par rapport à la deuxième variable:

$$\forall i \in 1..n : a(\eta_i, \underbrace{\sum_{j=1}^n \eta_j x_j}_x) = 0 \quad \text{donc} \quad \forall i \in 1..n : a(\eta_i, x) = 0$$

On somme selon les lignes en multipliant par x_i et en utilisant la linéarité de a par rapport à sa première variable :

$$\forall i \in 1..n : a(\underbrace{\sum_{i=1}^n \eta_i x_i}_x, x) = 0 \text{ d'où } a(x, x) = 0 = \langle x, x \rangle_{0,1}$$

et donc $\|x\|_{0,1}^2 = 0$ d'où puisque c'est une norme $x = 0$.

D'où A est injective et par conséquent A est inversible, d'où l'existence et l'unicité de la solution.

- Dans Cette partie, on doit calculer les composantes de la matrice de raideur M_Q^A associée à un élément de type quadrangle.

Puisque la composante (i, j) de cette matrice s'écrit sous la forme :

$$[M_Q^A]_{ij} = \int_Q \nabla \eta_i(x, y)^T \nabla \eta_j(x, y) \, dx$$

pour calculer cet intégrale, il faut utiliser la fonction affine Φ_Q définie dans le sujet pour pouvoir écrire $\eta_j(x, y) = \phi_j(\Phi_Q^{-1}(x, y))$, où les $(\phi_i)_{1..n}$ sont les fonctions de base sur le carré unité u définies par:

$$\begin{aligned}\phi_1(\xi, \zeta) &= (1 - \xi)(1 - \zeta) \\ \phi_2(\xi, \zeta) &= \xi(1 - \zeta) \\ \phi_3(\xi, \zeta) &= \xi\zeta \\ \phi_4(\xi, \zeta) &= (1 - \xi)\zeta\end{aligned}$$

donc on peut écrire :

$$[M_Q^A]_{ij} = \int_Q \nabla \phi_i(\Phi_Q^{-1}(x, y))^T \nabla \phi_j(\Phi_Q^{-1}(x, y)) dx$$

Et en utilisant la formule de changement de variables donnée dans le sujet on obtient la formule suivante:

$$[M_Q^A]_{ij} = \int_u \nabla \phi_i(\xi, \zeta)^T (J_{\Phi}^T J_{\Phi})^{-1} \nabla \phi_j(\xi, \zeta) |J_{\Phi}| d\xi d\zeta$$

Ainsi on voit qu'il faut calculer les gradients de Φ_i qui sont donnés par :

$$\begin{aligned}\nabla \phi_1(\xi, \zeta) &= \begin{pmatrix} \zeta - 1 \\ \xi - 1 \end{pmatrix} \\ \nabla \phi_2(\xi, \zeta) &= \begin{pmatrix} 1 - \zeta \\ -\xi \end{pmatrix} \\ \nabla \phi_3(\xi, \zeta) &= \begin{pmatrix} \zeta \\ \xi \end{pmatrix} \\ \nabla \phi_4(\xi, \zeta) &= \begin{pmatrix} -\zeta \\ 1 - \xi \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Et il faut calculer aussi la jacobienne de Φ_Q et son déterminant:

alors puisque la fonction Φ_Q s'écrit

$$\Phi_Q \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_4 - y_1 \end{pmatrix}}_{J_{\Phi_Q}} \times \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

sa jacobienne vaut donc :

$$\begin{aligned}J_{\Phi_Q} &= \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_4 - y_1 \end{pmatrix} \\ |J_{\Phi_Q}| &= (x_2 - x_1) \times (y_4 - y_1) - (y_2 - y_1) \times (x_4 - x_1)\end{aligned}$$

On remarque que $(J_{\Phi}^T J_{\Phi})^{-1}$ est symétrique alors on peut poser:

$$(J_{\Phi}^T J_{\Phi})^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

$$[M_Q^A]_{ij} = |J_{\Phi}| \int_u \nabla \phi_i(\xi, \zeta)^T \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \nabla \phi_j(\xi, \zeta) d\xi d\zeta$$

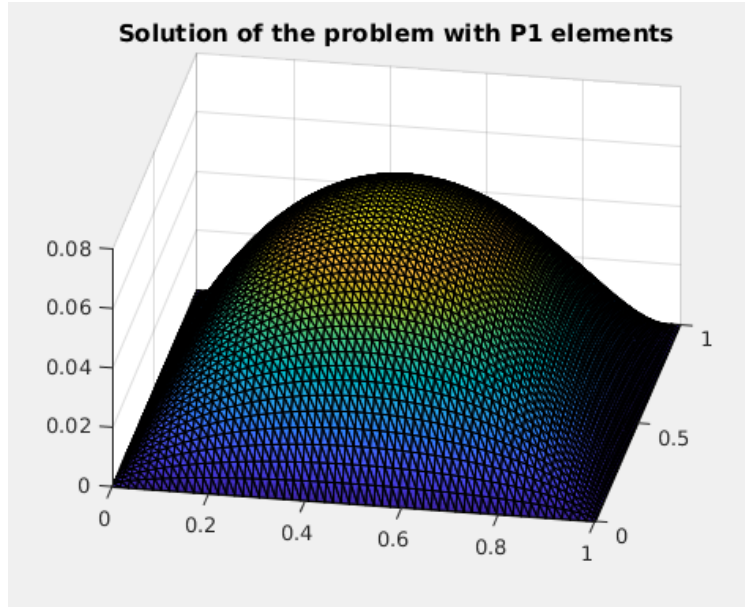
Donc établir les formules revient alors à calculer tous les coefficients de la matrice et donc calculer au moins 10 intégrales car la matrice est symétrique.

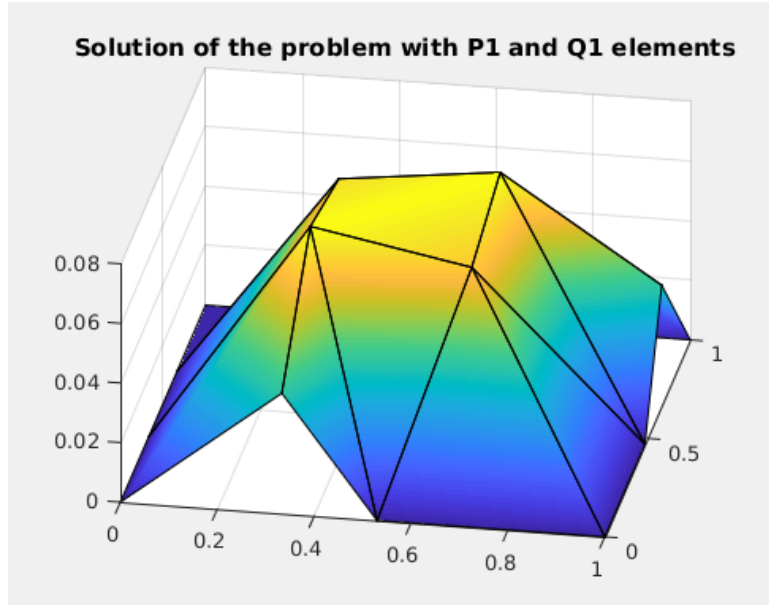
Après les calculs on trouve :

$$[M_Q^A] = \begin{bmatrix} 2*a + 3*b + 2*c & -2*a + c & -a - 3*b - c & a - 2*c \\ -2*a + c & 2*a + 3*b + 2*c & a - 2*c & -a - 3*b - c \\ -a - 3*b - c & a - 2*c & 2*a + 3*b + 2*c & -2*a + c \\ -2*a + c & -a - 3*b - c & -2*a + c & 2*a + 3*b + 2*c \end{bmatrix}$$

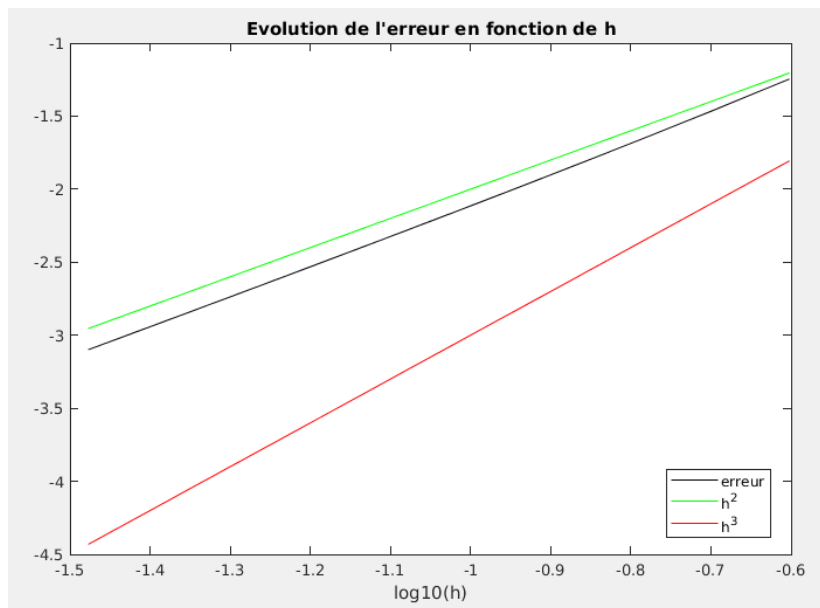
1.3 Partie pratique et analyse

On résout le problème numériquement dans le fichier "elliptic.m" et on obtient la figure suivante:





- Dans cette partie on ne travaille que avec des éléments triangle, avec seulement des conditions limites de type Dirichlet homogène. On s'intéresse à l'ordre de discrétisation de cette méthode. Pour cela, on trace l'évolution de $\log \|u_h^{ex} - u_h\|$ en fonction de h .
On remarque donc que h^2 est le plus proche de l'erreur d'où 2 est l'ordre de discrétisation.



On peut aussi vérifier que c'était le bon résultat attendu en étudiant l'ordre de la convergence de la méthode.

En effet, en reprenant la même démarche vue en cours pour les éléments P_1 on obtient:

$$\|\nabla u_{ex}^h - \nabla u_h\|_2 \leq \frac{3}{2} M_2 h(\tau) \frac{h(\tau)}{\rho(\tau)}$$

Avec :

h diamètre du triangle τ

$\rho(\tau)$ le rayon du cercle inscrit au triangle τ

M_2 une constante qui vérifie $\forall \psi \in \Omega: \nabla u(\psi) \leq M_2$

Dans notre cas tous les triangle τ sont isométriques, Alors on a :

$$h(\tau) = h = \max_{\tau \in T} [\text{diam } \tau_i] \text{ et } \rho(\tau) = \rho \text{ sont constantes.}$$

Or d'après le lemme de Cea dans le hilbert V_h muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{0,1}$ on sait que :

$$|u_h^{ex} - u_h|_{0,1} \leq \frac{K}{\lambda} \inf_{v_h \in V_h} |u_h^{ex} - v_h|_{0,1}$$

Cela conduit en suivant les étapes vues en cours à :

$$|u_{ex}^h - u_h|_{0,1} \leq \left(\frac{3M_2 K c}{2\lambda} \sqrt{A(\Omega)} \right) h$$

ou $\frac{h}{\rho} \leq c$ Alors on a $|u_h^{ex} - u_h|_{0,1} \leq Mh$ où $M = \frac{3M_2 K c \sqrt{A(\Omega)}}{2\lambda}$ est une constante.

Donc d'après l'inégalité de Poincaré (Ω est borné) on trouve que:

$$\|u_h^{ex} - u_h\|_2 \leq C(\Omega) |u_h^{ex} - u_h|_{0,1} \leq C(\Omega) Mh$$

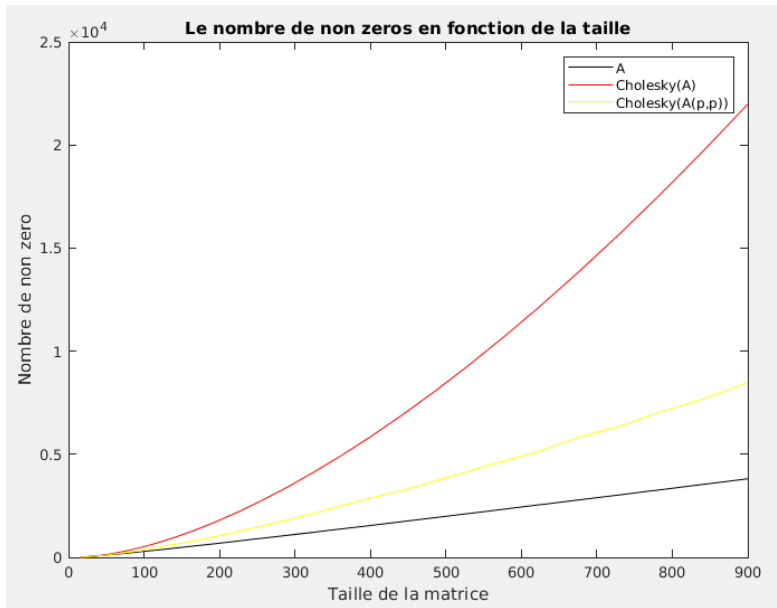
car on est dans un cas discret : $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ et c'est ce qu'on a utilisé pour calculer toute les normes $L^2(\Omega)$ en dans ce projet.

et finalement en multipliant par h en obtient la norme L^2 discrète définie dans le sujet :

$$\|u_h^{ex} - u_h\|_{2h} = h \times \|u_h^{ex} - u_h\|_2 \leq C(\Omega) |u_h^{ex} - u_h|_{0,1} \leq C(\Omega) Mh^2$$

On conclut donc que la méthode converge à l'ordre 2, ce qui prouve que l'ordre de discrétisation est le même qu'on a obtenue par l'analyse numérique.

- Ici on veut étudier l'efficacité de notre algorithme en terme de stockage. Alors, il est intéressant de tracer les données nécessaires pour un type de résolution (en utilisant l'opérateur "\", ou bien la méthode de Cholesky) en fonction du nombre d'éléments non nuls dans ces données.



On voit que le nombre d'éléments non nul dans la matrice résultante de la factorisation de Cholesky de A est significativement élevé par rapport à celui de la matrice A .

Le comportement mis en évidence montre que utiliser la factorisation de Cholesky pour résoudre le système nécessite un coût très élevé en terme de mémoire. En effet, quand on a voulu initialiser la matrice A on a utilisé la fonction "**sparse**" de matlab car A était une matrice creuse et donc la factorisation de Cholesky donne une matrice triangulaire dense et par conséquent si on augmente la dimension de la matrice on obtient un grand nombre d'éléments non nuls.

Alors, on ne peut pas bénéficier de la rapidité qu'offre la méthode de Cholesky avec une matrice assez creuse. Sur matlab on a la fonction "**symamd**" qui retourne un vecteur de permutation p tel que $A(p,p)$ tend d'avoir une factorisation de Cholesky plus creuse que la factorisation de A . Donc, on suggère d'utiliser la matrice A permutée $A(p,p)$ au lieu de A . C'est ce qui est représenté par la courbe jaune, avec un coût de mémoire très optimisé par rapport à celui qu'on aurait obtenu en faisant directement Cholesky de A .

2 Partie B : Équations aux dérivées partielles paraboliques

2.1 Position du problème

L'objectif de cette partie est de résoudre le problème de la chaleur défini par l'équation :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t} = \epsilon \Delta u(x,y,t) + f(x,y,t) & \text{sur } \Omega \times [0, T], \\ u(x,y,t)|_{\partial\Omega_d} = u_d(x,y,t) & \forall t \in [0, T], \\ \frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t}|_{\partial\Omega_n} = g & \forall t \in [0, T], \\ u(x,y,0) = u_0(x,y) & \end{array} \right. \quad (2)$$

avec $\epsilon, T > 0$. On doit mettre en œuvre un schéma de résolution implicite où l'intervalle $[0, T]$ est décomposé en n_t intervalles réguliers de longueur $\Delta t = T/n_t$.

2.2 Partie théorique

- En appliquant la même démarche que dans le cas elliptique on aboutit à la forme variationnelle suivante:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} w \, dx + \epsilon \int_{\Omega} \nabla(u) \cdot \nabla w \, dx = \int_{\Omega} f w \, dx + \int_{\partial\Omega_n} g w \, dx.$$

On introduit ici la discrétisation en espace en définissant $(\eta_k)_{1..n}$ comme base des éléments finis où n désigne le nombre de degrés de liberté.

Alors si on cherche une solution dans cet espace, il suffit de trouver les composantes de la solution dans la base, alors pour u_h une solution on écrit sa décomposition $u_h = \sum_{i=1}^N u_i \eta_i$. Soit $j:1..N$, on remplace u_h dans (F.V) par sa décomposition et on remplace w par η_j , on a :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial(\sum_{i=1}^N u_i \eta_i)}{\partial t} \eta_j \, dx + \epsilon \int_{\Omega} \nabla(\sum_{i=1}^N u_i \eta_i) \cdot \nabla \eta_j \, dx = \int_{\Omega} f \eta_j \, dx + \int_{\partial\Omega_n} g \eta_j \, dx.$$

donc puisque les η_i ne dépendent pas du temps t on trouve:

$$\sum_{k=1}^N (\frac{\partial u_k}{\partial t} \times \int_{\Omega} \eta_k \eta_i dx) + \epsilon \sum_{k=1}^N (u_k \times \int_{\Omega} \nabla \eta_k \cdot \nabla \eta_i dx) = \int_{\Omega} f \eta_i dx + \int_{\partial \Omega_n} g \eta_i dx.$$

Ceci est vrai $\forall j \in 1..N$, c'est un système de N équations et N inconnus qu'on peut reformuler

sous la forme : $B \frac{dU_h(t)}{dt} + AU_h(t) = b_h(t)$

tq $U_h(t) \in \mathbb{R}^N$, $A \in \mathbb{R}^{N,N}$, $B \in \mathbb{R}^{N,N}$, $b_h(t) \in \mathbb{R}^N$ pour $t \in [0, T]$ où:

$[U_h(t)]_i = u_i(x, y, t)$, la i-ème composante de la solution

$A_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \eta_i^T \nabla \eta_j dx$, la même que celle dans la partie précédente

$B_{ij} = \int_{\Omega} \eta_i^T \eta_j dx$, dite matrice de masse

$[b_h(t)]_i = \int_{\Omega} f(x, y, t) \eta_i dx + \int_{\partial \Omega_n} g(x, y, t) \eta_i dx - \sum_{k=1}^n U_k \int_{\Omega} \nabla \eta_i^T \nabla \eta_k dx$

D'autre part: $u(x, y, t)|_{\partial \Omega_d} = u_d(x, y, t) \forall t \in [0, T]$ et $u(x, y, 0) = u_0(x, y)$

impliquent que:

$[U_h(t)]_i = u_d(x_i, y_i, t) \forall (x_i, y_i) \in \partial \Omega_d$ et $U_h(t=0) = U_h^0 = [u_d(x_1, y_1, 0) \dots u_d(x_N, y_N, 0)]^T$

d'où le système discret final :

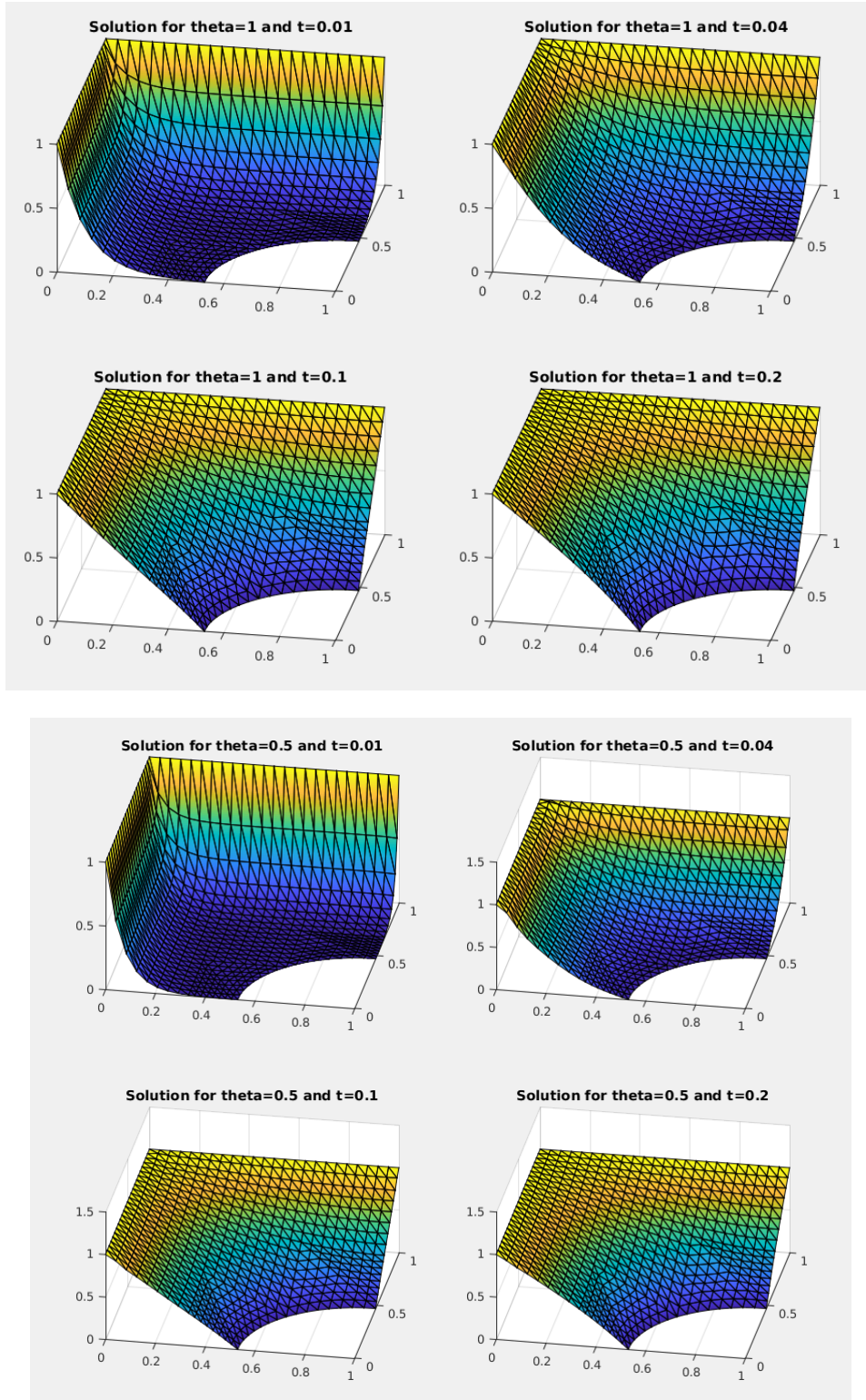
$$\begin{cases} B \frac{dU_h(t)}{dt} + AU_h(t) = b_h(t), \\ [U_h(t)]_i = u_d(x_i, y_i, t) \quad \forall (x_i, y_i) \in \partial \Omega_d \\ U_h(t=0) = U_h^0 \end{cases} \quad (3)$$

- Je n'ai pas réussi à traiter ce point de l'ordre de discrétisation temporel en fonction de θ , mais je pense qu'il faut faire la même démarche de l'étude de la consistance du schéma implicite qu'on a vu en cours, et cela en majorant le résidu de la consistance en faisant des développements limités, par un terme qui dépend du pas Δt et son exposant détermine l'ordre de discrétisation temporel.

2.3 Mise en œuvre pratique

- Pour résoudre le problème parabolique numériquement, on reprend le code du problème elliptique dans le cas des éléments triangulaires, et on ajoute les modifications suivantes :
 - Dans la partie d'assemblage, il faut assembler aussi la matrice de masse B et d'ajouter sa contribution dans l'ancien système et il faut multiplier les contributions de A par ϵ .
 - Ajouter les contribution de f et g les conditions de Neumann.
 - Ajouter une itération pour la discrétisation de temps
 - La nouvelle matrice du système devient $\epsilon \theta \Delta_t A + B$.
 - Retrancher la contribution des points sur la frontière de Dirichlet après la résolution du système dans une étape et mettre à jour le second membre à la fin de cette itération de temps.

En prenant les valeurs des paramètres indiquées dans le sujet on implémente la résolution dans le fichier **parabolic.m**, on obtient les résultats suivants :



3 Conclusion

En travaillant sur ce projet, j'ai eu des idées plus claires sur la méthodes des éléments finis contrairement au cours où on ne voit que sa partie théorique et sur des exemples spécifiques.

D'autre part le fait de découvrir d'autres types d'équations différentielles comme dans la partie B avec le problème de la chaleur qui est de type parabolique, nous permet d'avoir une idée générale sur les étapes qu'il faut modifier pour adapter toute les démonstrations vues en cours à d'autre

cas.

Mais le point qui reste un peu difficile, c'est qu'on ne peut pas vraiment interpréter les résultats sauf par exemple voir si la solution vérifie les conditions aux limites ou non, du coup il serait difficile de savoir si on aboutit à des solutions acceptables ou non.