ЧИСЛОВІ МЕТОДИ

- основний інструмент для розв’язання складних математичних задач, що дозволяє звести розв’язання задачі до виконання скінченного числа арифметичних дій над числами, при цьому **результати** отримують **у вигляді числових значень**.

І. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОХИБОК. КЛАСИФІКАЦІЯ ПОХИБОК

x - точне значення деякої величини, a - її наближене значення;

$\Delta x = |x-a|$ - ***абсолютна похибка*** числа x;

$\delta x = \dfrac{\Delta x}{|x|}$ - ***відносна похибка*** числа x: .

__**Практично застосовують**__

граничну абсолютну похибку Δa ***наближеного числа*** a: $x \in (a-\Delta a;\, a+\Delta a)$.

граничну відносну похибку наближеного числа a: $\delta a = \dfrac{\Delta a}{|a|}$.

ОБЧИСЛЕННЯ ПОХИБОК

Абсолютна похибка заокруглення Δa *рівна половині одиниці останнього розряду числа.*

<u>Приклад</u>

Для $a = 0.734$ $\Delta a = 0.0005$ і покладаємо $\Delta x \le 0.0005$.

Абсолютна похибка при відкиданні розрядних цифр *у два рази більша за похибку заокруглень**.***

Якщо a, b і c - наближені значення деяких величин, то:

$$\Delta\left(a \pm b\right) = \Delta a + \Delta b, \;\; \delta\left(a \cdot b\right) = \delta a + \delta b, \;\; \delta\left(a/b\right) = \delta a + \delta b,$$

$$\delta\left(a^k\right) = k\delta a, \quad \delta\left(a - b\right) = \frac{\Delta\left(a-b\right)}{\left|a-b\right|} = \frac{\Delta a + \Delta b}{\left|a-b\right|}.$$

Якщо $y = f\left(x\right)$, то $\Delta y\left(a\right) = \left|f'\left(a\right)\right| \cdot \Delta a$, $\delta y = \dfrac{\Delta y\left(a\right)}{\left|f\left(a\right)\right|}$.

Якщо $u = f\left(x, y, z\right)$, то

$$\Delta u(a,b,c) = \left|f_x{}'\left(a\right)\right| \cdot \Delta a + \left|f_y{}'\left(b\right)\right| \cdot \Delta b + \left|f_z{}'\left(c\right)\right| \cdot \Delta c, \quad \delta u = \frac{\Delta u}{\left|f\left(a,b,c\right)\right|}.$$

- ✓ <u>Зауваження</u>: *При* $a \approx b$ $\delta\left(a-b\right)$ може бути як завгодно великою. Наприклад, відносна похибка заокруглення $\delta\left(2520-2518\right) = \dfrac{0.5+0.5}{2} = 0.5 \quad \left(50\%\right)$.
  Тому в обчисленнях слід уникати віднімання двох близьких чисел.

ПРАВИЛА ОБЧИСЛЕНЬ

1) *при додаванні або відніманні двох наближених чисел у результаті слід зберігати стільки десяткових знаків, скільки їх у наближеному числі з найменшою кількістю десяткових знаків*;

2) *при множенні та діленні в результаті потрібно зберігати стільки значущих*[*] *цифр, скільки їх у наближеному числі з найменшою кількістю значущих цифр*;

3) *результати проміжних обчислень повинні мати один – два запасних знаки, які потім повинні бути відкинуті*;

4) при зміні форми запису числа (наприклад, при запису у формі з плаваючою крапкою) кількість значущих цифр не повинна змінюватись, т. б., потрібно зберігати рівносильність перетворень.

[*] ***Значущими*** цифрами вважаються всі цифри даного числа, починаючи з першої ненульової цифри. Наприклад, у числі 0.037 дві значущі цифри 3 і 7; у числі 1.037 чотири значущі цифри 1, 0, 3 і 7.

КЛАСИФІКАЦІЯ ПОХИБОК

похибка математичної моделі;

похибка вхідних даних - **неусувна** похибка, оскільки не може бути зменшена ні до початку розв'язування задачі, ні під час розв'язування. Для мінімізації впливу похибки вхідних даних потрібно прагнути, щоб усі вхідні дані були приблизно однакової точності;

похибка методу. Регульована похибка, може бути зменшена шляхом зміни деякого параметра (наприклад, кроку інтегрування, кількості доданків частинної суми, тощо). Похибку метода намагаються зробити у декілька разів меншою похибки вхідних даних;

похибка обчислень.

Сума чотирьох описаних похибок ***складає повну похибку розв'язку***.

II. АПРОКСИМАЦІЯ ТА ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ФУНКЦІЙ

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай y - функція аргумента x, задана у вигляді таблиці $\{x_i, y_i\}$, $i=\overline{0,n}$. Знайти значення величини y в точках, відмінних від $\{x_i\}$.

Апроксимацією даної функції $f(x)$ називається її наближена заміна деякою функцією $\varphi(x)$ так, щоб відхилення $\varphi(x)$ від $f(x)$ у заданій області було мінімальним:

$$\|f(x)-\varphi(x)\| \to \min .$$

Функція $\varphi(x)$ при цьому називається ***апроксимуючою***.

- ✓ Зауваження. Апроксимацію досить часто застосовують і до функції, заданої явно виразом $y=f(x)$. Необхідність такого застосування може бути викликана, наприклад, тим, що вигляд функції значно ускладнює, або унеможливлює подальші розрахунки. У такому випадку функцію $f(x)$ апроксимують функцією $\varphi(x)$, яка має простіший вигляд.

Апроксимація точкова, якщо наближення будується на заданій дискретній множині точок $\{x_i\}$.

Апроксимація неперервна або інтегральна, *якщо* наближення будується на неперервній множині точок .

ІНТЕРПОЛЯЦІЯ

Інтерполяцією *даної функції* $\{x_i, y_i\}$, $i=\overline{0,n}$ *називається її апроксимація многочленом*

$$\varphi(x)=c_0+c_1x+c_1x^2+\ldots+c_mx^m, \qquad (1)$$

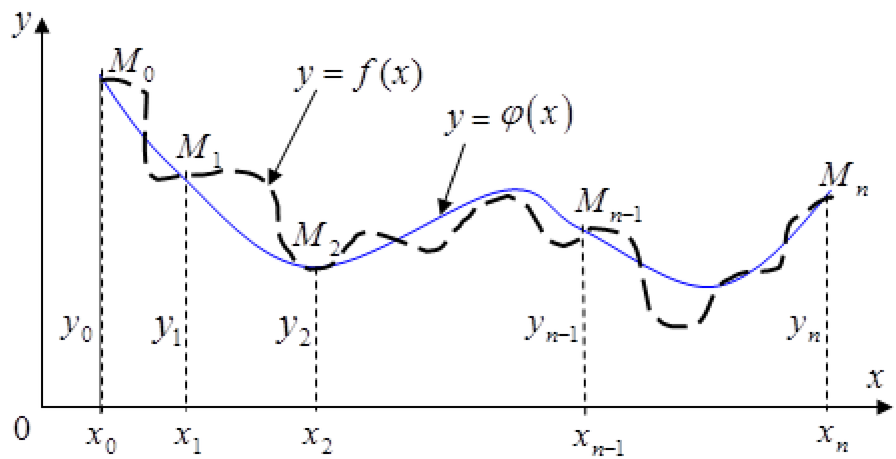
який у заданих точках x_i *набуває значення* y_i*, т. б.*

$$\varphi(x_i)=y_i,\ i=\overline{0,n}, \qquad (2)$$

де $x_i \neq x_k$ *при* $i \neq k$*. При цьому точки* x_i *називаються* ***вузлами інтерполяції,*** *а многочлен* $\varphi(x)$ *-* ***інтерполяційним многочленом****.*

✓ *<u>Зауваження</u>. Близькість інтерполяційного многочлена до заданої функції полягає в тому, що їх значення співпадають на заданій дискретній множині точок $\{x_i, y_i\}$, $i=\overline{0,n}$.*

Геометрична інтерпретація



✓ *<u>Зауваження</u>.* **Для будь – якої функції існує тільки один інтерполяційний многочлен.**

►*Нехай $\varphi(x)$, $\psi(x)$ - інтерполяційні многочлени степеня n функції $y=f(x)$ на множині вузлів $\{x_i\}$, $i=\overline{0,n}$, причому $\varphi(x)\neq\psi(x)$ взагалі кажучи. Тоді $R(x)=\varphi(x)-\psi(x)$ - многочлен степеню меншого або рівного за n. З властивості (2) інтерполяційного* *полінома випливає, що $\varphi(x_i)=\psi(x_i)=y_i$, що, у свою чергу, приводить до рівності* $R(x_i)=\varphi(x_i)-\psi(x_i)=0$ для довільного $i=\overline{0,n}$. Це означає, що многочлен степеня меншого або рівного за n має $n+1$ корінь. Але, як відомо, такий многочлен з дійсними коефіцієнтами може мати не більше, ніж n, дійсних коренів (наслідок з основної теореми алгебри). Отже, припущення про існування двох різних інтерполяційних поліномів невірне. ◄

***Інтерполяція глобальна**, якщо для інтерполяції функції $f(x)$ на всьому інтервалі зміни x використовується один многочлен.*

***Інтерполяція кускова (локальна)**, якщо для різних частин інтервалу зміни x будуються окремі многочлени.*

<u>Лінійна інтерполяція</u>. На кожному з відрізків $[x_i, x_{i+1}]$ $\left(i=\overline{0,n-1}\right)$ точки (x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1}) з’єднуються прямолінійним відрізком, т. б., вся функція наближається ламаною

$\dfrac{y-y_i}{y_{i+1}-y_i}=\dfrac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}$ $\left(i=\overline{0,n-1}\right)$, або

$$y = a_i x + b_i,\ x_i \le x \le x_{i+1},\ \text{де}\ a_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i},\ b_i = y_i - a_i x_i\ \left(i = \overline{0, n-1}\right).$$

Отже, щоб знайти значення функції у довільній точці x, потрібно визначити, в який з відрізків $\left[x_i, x_{i+1}\right]$ потрапляє значення x, і підставити його у формули (4). Таким чином, знайдемо наближене значення функції y шляхом лінійної інтерполяції.

Квадратична (параболічна) інтерполяція. У якості інтерполяційної функції на відрізку $\left[x_{i-1}, x_{i+1}\right]$ приймається квадратний тричлен. Рівняння квадратного тричлена

$$y = a_i x^2 + b_i x + c_i,\ x_{i-1} \le x \le x_{i+1}.$$

містить три невідомих коефіцієнта a_i, b_i, c_i, для визначення яких необхідні три рівняння. Ними виступають умови проходження параболи (5) через три точки $\left(x_{i-1}, y_{i-1}\right)$, $\left(x_i, y_i\right)$, $\left(x_{i+1}, y_{i+1}\right)$.

$$\begin{cases} a_i x_{i-1}^2 + b_i x_{i-1} + c_i = y_{i-1} \\ a_i x_i^2 + b_i x_i + c_i = y_i \\ a_i x_{i+1}^2 + b_i x_{i+1} + c_i = y_{i+1} \end{cases}$$

Отже, у будь – якій точці x: $x_{i-1} \le x \le x_{i+1}$ $\left(i = \overline{1, n-1}\right)$ можна знайти наближене значення функції, побудувавши квадратний тричлен.

Аналогічно можна побудувати інтерполяційний многочлен 3-го степеня (*кубічна інтерполяція*).

- ✓ <u>Зауваження</u>. Лінійна інтерполяція для довільної точки $x \in \left[x_0, x_n\right]$ здійснюється по двом *найближчим до неї* інтерполяційним вузлам. Квадратична та кубічна інтерполяції здійснюються відповідно по трьом та чотирьом *найближчим* вузлам.

ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИЙ МНОГОЧЛЕН ЛАГРАНЖА.

Шукаємо інтерполяційний многочлен у вигляді лінійної комбінації деяких многочленів $l_i\left(x\right)$ $\left(i = \overline{0, n}\right)$ степеню n, коефіцієнтами якої є значення функції у вузлових точках:

$$\varphi\left(x\right) = \sum_{i=0}^{n} y_i\, l_i\left(x\right). \tag{3}$$

Для того, щоб побудований у такий спосіб поліном задовольняв умовам $\varphi\left(x_i\right) = y_i$, будемо вимагати, щоб поліноми $l_i\left(x\right)$ у вузлах інтерполяції набували значень будемо вимагати, щоб поліноми $l_i(x)$ у вузлах інтерполяції набували значень

$$l_i(x_k)=\begin{cases}1\ \text{при}\ i=k\\0\ \text{при}\ i\neq k\end{cases}. \tag{4}$$

Переконуємось, що цим умовам задовольняють многочлени виду

$$l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)},$$

$$l_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)}, \tag{5}$$

. . . .

$$l_i(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)},$$

. . . .

Отже,

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} \text{ -} \qquad (6)$$

інтерполяційний многочлен Лагранжа.

✓ **Зауваження**.

1) З формули (6) можна отримати вирази для лінійної, квадратичної та кубічної інтерполяцій:

многочлен Лагранжа першого степеню:

$$L_1(x) = \sum_{i=0}^{1} y_i\, l_i(x) = y_0\, l_0(x) + y_1\, l_1(x) = y_0 \frac{x-x_1}{x_0-x_1} + y_1 \frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

Поклавши $y_0 = y_i,\ y_1 = y_{i+1}\ \left(i = \overline{0, n-1}\right)$, отримаємо необхідні вирази.

многочлен Лагранжа другого степеню:

$$L_2(x)=\sum_{i=0}^{2} y_i\, l_i(x)=$$

$$=y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}.$$

Поклавши $y_0=y_{i-1},\ y_1=y_i,\ y_2=y_{i+1}\ \left(i=\overline{1,n-1}\right)$, приходимо до виразу для інтерполяційного полінома для кожного з відрізків $\left[x_{i-1},x_{i+1}\right]\left(i=\overline{1,n-1}\right)$.

У такий самий спосіб за формулами (6) можна побудувати многочлен Лагранжа третього степеню.

2) При великій кількості вузлів у випадку глобальної інтерполяції отримуємо многочлен великого степеню, розрахунки за яким можуть накопичувати велику похибку. Враховуючи ще й те, що і вхідні дані уже можуть містити похибку, на практиці намагаються будувати інтерполяційний многочлен якнайменшого степеню (1-го, 2-го, 3-го).

(1-го, 2-го, 3-го).

3) Як правило, інтерполяційний многочлен використовують для апроксимації функції в проміжних точках між крайніми вузлами, т. б., при $x_0 < x < x_n$. Але іноді він використовується і для наближеного обчислення функції поза відрізком $\left[x_0, x_n\right]$. Тоді така апроксимація називається *екстраполяцією.*

Приклади.

1. Побудувати інтерполяційний поліном Лагранжа за наступними даними

n	0	1	2	3
x_i	0	2	3	5
y_i	1	3	2	5

Розв'язання. ►Як видно із таблиці, маємо чотири вузли інтерполяції. Отже, будуємо многочлен Лагранжа третього степеня. Використавши формули (10), отримаємо

$$L_3\left(x\right)=1\cdot\frac{\left(x-2\right)\left(x-3\right)\left(x-5\right)}{\left(0-2\right)\left(0-3\right)\left(0-5\right)}+3\cdot\frac{\left(x-0\right)\left(x-3\right)\left(x-5\right)}{\left(2-0\right)\left(2-3\right)\left(2-5\right)}+$$

$$+2\cdot\frac{\left(x-0\right)\left(x-2\right)\left(x-5\right)}{\left(3-0\right)\left(3-2\right)\left(3-5\right)}+5\cdot\frac{\left(x-0\right)\left(x-2\right)\left(x-3\right)}{\left(5-0\right)\left(5-2\right)\left(5-5\right)}=1+\frac{62}{15}x-\frac{13}{6}x^2+\frac{3}{10}x^3.$$

2. Знайти наближене значення функції $y = f(x)$, заданої таблицею у прикладі 1, в точках $x = 1$ та $x = 4$, використовуючи лінійну інтерполяцію. ◀

Розв'язання. ▶Знаходимо з таблиці найближчі до значення $x = 1$ вузли інтерполяції. Такими є $x_0 = 0$ та $x_1 = 2$. Використавши формули (11), отримаємо

$$L_1(x) = 1 \cdot \frac{x-2}{0-2} + 3 \cdot \frac{x-0}{2-0} = x + 1.$$

Отже, $f(1) \approx L_1(1) = 2$.

Далі, найближчими вузлами інтерполяції до значення $x = 4$ є $x_2 = 3$ та $x_3 = 5$. Використавши формули (11) так, як сказано у відповідному зауваженні, матимемо

$$\mathrm{L}_1(x) = y_2 \cdot \frac{x - x_3}{x_2 - x_3} + y_3 \cdot \frac{x - x_2}{x_3 - x_2} = 2 \cdot \frac{x-5}{3-5} + 5 \cdot \frac{x-3}{5-3} = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2} \text{ і } f(4) \approx \mathrm{L}_1(4) = \frac{7}{2}. ◀$$

- ✓ Зауваження. На практиці при використанні многочлена Лагранжа для обчислення наближеного значення функції його *не потрібно зводити до канонічного вигляду*. У прикладах таке зведення було зроблене для спрощення сприйняття. 😊

СПЛАЙНИ

Сплайном *називається функція, яка разом з декількома своїми похідним неперервна на всьому заданому відрізку* $\left[x_0, x_n\right]$, *а на кожному відрізку* $\left[x_i, x_{i+1}\right]$ $\left(i=\overline{0, n-1}\right)$ *окремо є деяким алгебраїчним многочленом.*

Максимальний по всім частинним відрізкам степінь многочлена називається ***степенем сплайна****.*

<u>Побудова кубічного сплайну</u>. Нехай його форма описується функцією $y=S(x)$. Визначимо $S(x)$ як об'єднання многочленів третього степеня $S_i(x)$ на кожному з відрізків $\left[x_i, x_{i+1}\right]$: $S(x)=\bigcup_{i=0}^{n-1} S_i(x)$. Запишемо $S_i(x)$ у канонічному вигляді з поки що невідомими коефіцієнтами $S_i(x)=c_{0i}+c_{1i}x+c_{2i}x^2+c_{3i}x^3$, де індекс i вказує на належність многочлена до відрізка $\left[x_i, x_{i+1}\right]$ $\left(i=\overline{0, n-1}\right)$. Отже, на кожному з n відрізків інтерполяції маємо поліном з чотирма невідомими коефіцієнтами c_{0i}, c_{1i}, c_{2i} та c_{3i}. Для відшукання коефіцієнтів усіх n многочленів $S_i(x)$ нам потрібно, очевидно, $4n$ рівнянь. Їх отримаємо, задовольнивши наступні умови:

1) умови проходження графіка функції $S(x)$ через задані точки

$$S_i(x_i) = y_i,\ i = \overline{0, n-1};\quad S_{n-1}(x_n) = y_n,$$

які утворюють $n+1$ рівняння;

2) умови неперервності $S(x)$, т .б., рівність у внутрішніх вузлах інтерполяції двох сусідніх многочленів

$$S_i(x_i) = S_{i+1}(x_i),\ i = \overline{1, n-1}.$$

Ця система містить $n-1$ рівняння;

3) умови неперервності перших і других похідних у внутрішніх вузлах інтерполяції

$$S_i'(x_i) = S_{i+1}'(x_i),\ S_i''(x_i) = S_{i+1}''(x_i),\ i = \overline{1, n-1},$$

які дають нам ще $2n-2$ рівняння;

4) умови закріплення кінців сплайна. Зокрема, при вільному закріпленні кінців можна прирівняти до нуля кривину лінії у цих точках. Така функція, що називається *вільним кубічним сплайном*, є найбільш гладкою серед усіх інтерполяційних функцій даного класу. З умов нульової кривини на кінцях випливає рівність нулю других похідних у цих точках:

$$S_0''(x_0)=0,\ S_n''(x_n)=0.$$

Рівняння (12) – (15) складають систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення $4n$ коефіцієнтів c_{0i}, c_{1i}, c_{2i} та c_{3i} $\left(i=\overline{0,n-1}\right)$.

ПОХИБКА ІНТЕРПОЛЯЦІЇ

$$R(x)=f(x)-\varphi(x)\neq 0$$

- ***похибка інтерполяції***, називається ***залишковим членом інтерполяційної формули***.

Залишковий член інтерполяційного полінома Лагранжа:

$$R_L(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi),$$

де $f^{(n+1)}(\xi)$ - похідна $(n+1)$ - го порядку функції $f(x)$ в деякій точці $\xi\in[x_0,x_n]$.

Якщо максимальне значення цієї похідної дорівнює

$$\max_{[x_0, x_n]} \left| f^{(n+1)}(x) \right| = M_{n+1},$$

то

$$\left| R_L(x) \right| \le \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)}{(n+1)!} M_{n+1}.$$

Оцінка похибки апроксимації кубічним сплайном:

$$\left| R_S(x) \right| = \left| f(x) - S(x) \right| \le c h^{n+1} M_{n+1},$$

де $h = \max_i \left\| [x_i, x_{i+1}] \right\|$, c - стала, що не залежить від h, f та i.

- ✓ Зауваження. *Вибір способу інтерполяції визначається різними міркуваннями: точністю, часом обчислень, похибками заокруглень, тощо. З оцінок похибок випливає, що зменшення (якщо це можливо) довжини відрізків* $[x_i, x_{i+1}]$*, т. б., збільшення їх кількості* n*, підвищує точність інтерполяції, але, разом з цим, не завжди зрозуміло, як поведе себе похідна* $f^{(n+1)}(x)$ *при збільшенні* n*. Тому на практиці намагаються використовувати многочлени малого степеня (лінійну і квадратичну інтерполяції, сплайни)*.