ЧИСЛОВЕ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

АПРОКСИМАЦІЯ ПОХІДНИХ ТА ЇЇ ПОХИБКА

Похідна у математичному аналізі

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (1)$$

Похідна у обчислювальній математиці

$$y' \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (2)$$

*Співвідношення (2) називається **апроксимацією** (наближенням) **похідної** за допомогою відношення **скінченних різниць**.*

Нехай функцію $f(x)$ апроксимовано деякою функцією $\varphi(x)$, т. б.

$$f(x) = \varphi(x) + R(x),$$

де $R(x)$ - похибка апроксимації.

Тоді

$$f^{(k)}(x) \approx \varphi^{(k)}(x).$$

Величина

$$R^{(k)}(x) = f^{(k)}(x) - \varphi^{(k)}(x),$$

що характеризує відхилення наближеного значення похідної від її істинного значення, називається ***похибкою апроксимації похідної****.*

ФОРМУЛИ ЧИСЛОВОГО ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

<u>Формула Тейлора</u>

$$f(x+\Delta x)=f(x)+f'(x)\Delta x+\frac{f''(x)}{2!}\Delta x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}\Delta x^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\Delta x^{n+1}, \qquad (3)$$

де $\xi\in(x-\Delta x;x+\Delta x)$.

<u>Нехай</u>

- функція $y=f(x)$ задана у вигляді таблиці $\{x_i,y_i\}$, $i=\overline{0,n}$;
- вузли x_i *рівновіддалені*, т. б., $x_{i+1}=x_i+h$ $\left(i=\overline{0,n-1}\right)$, де крок h - постійний.

<u>Позначимо</u>

- $y_i=f(x_i)$, $y_i'=f'(x_i)$, і т. д.

<u>Зауважимо</u>, що $|\Delta x|=h$.

Тоді за формулою (3)

$$y_{i+1} = y_i + y_i'h + \frac{f''(\xi)}{2}h^2,\ \xi \in (x_i, x_{i+1}), \tag{4}$$

$$y_{i-1} = y_i - y_i'h + \frac{f''(\xi)}{2}h^2,\ \xi \in (x_{i-1}, x_i). \tag{5}$$

(4) → $y_i' = \dfrac{y_{i+1} - y_i}{h} - \dfrac{f''(\xi)}{2}h,$

(5) → $y_i' = \dfrac{y_i - y_{i-1}}{h} + \dfrac{f''(\xi)}{2}h.$

<u>Отже</u>,

$$y_i' \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h}\ \left(i = \overline{0,n}\right), \tag{6}$$

$$y_i' \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{h}\ \left(i = \overline{0,n}\right). \tag{7}$$

Формули (6) і (7) називаються ***формулами правої різницевої похідної*** *та* ***лівої різницевої похідної*** *відповідно.*

Похибки *цих наближень мають вигляд*

$$R_r^{(1)} = R^{(1)}\left(x_i\right) = -\frac{f''\left(\xi\right)}{2}h \text{ , } \xi \in \left(x_i, x_{i+1}\right) \text{ - для формули (6)}$$

та

$$R_l^{(1)} = R^{(1)}\left(x_i\right) = \frac{f''\left(\xi\right)}{2}h, \ \xi \in \left(x_{i-1}, x_i\right) \text{ - для формули (7).}$$

Розклад за формулою Тейлора до членів з h^2:

$$y_{i+1} = y_i + y_i'h + \frac{y_i''}{2!}h^2 + \frac{f'''\left(\xi_1\right)}{3!}h^3, \ \xi_1 \in \left(x_i, x_{i+1}\right), \tag{8}$$

$$y_{i-1} = y_i - y_i'h + \frac{y_i''}{2!}h^2 - \frac{f'''\left(\xi_2\right)}{3!}h^3, \ \xi_2 \in \left(x_{i-1}, x_i\right). \tag{9}$$

(8) – (9) →

$$y_{i+1} - y_{i-1} = 2hy_i' + \frac{h^3}{6}\left(f'''\left(\xi_1\right) + f'''\left(\xi_2\right)\right) .$$

<u>Лема</u>: ►*нехай* $f(x) \in C[a,b]$, ξ_i $(i = \overline{1,n})$ *- довільні точки з відрізку* $[a,b]$*. Тоді на відрізку* $[a,b]$ *існує точка* ξ *така, що* $\dfrac{f(\xi_1)+f(\xi_2)+\ldots+f(\xi_n)}{n} = f(\xi)$*.*◄

Отже*, для неперервної на відрізку* $[x_0, x_n]$ *функції* $f(x)$

$$y_i' = \frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h} - \frac{h^2}{6} f'''(\xi),\ \xi \in [x_{i-1}, x_{i+1}]\ (i = \overline{1, n-1}).$$

Формула

$$y_i' \approx \frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h} \tag{10}$$

називається ***формулою центральної різницевої похідної*** *з похибкою*

$$R^{(1)} = R^{(1)}(x_i) = -\frac{h^2}{6} f'''(\xi),\ \xi \in [x_{i-1}, x_{i+1}].$$

Аналогічно, для ***другої похідної функції*** $y = f(x)$ в точці x_i $\left(i=\overline{1,n-1}\right)$:

$$y_i'' = \frac{y_{i+1} + y_{i-1} - 2y_i}{h^2} + R^{(2)}, \qquad (11)$$

де $R^{(2)} = R^{(2)}(x_i) = -\dfrac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi)$, $\xi \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$.

Показник степеня k *у виразі похибки формул числового диференціювання називається* ***порядком похибки апроксимації похідної відносно кроку*** h *(або просто порядком апроксимації похідної).*

- При цьому припускається: $|h| < 1$

Отже, ***формули (6) і (7) мають перший порядок*** *похибки апроксимації, а* ***формули (10) і (11) – другий***.

✓ Зауваження. Для обчислення наближеного значення похідної у внутрішніх точках відрізка, на якому задана функція, перевага надається формулі центральної різницевої похідної, оскільки вона має вищий порядок точності, ніж формули правої та лівої похідних. Щоб наближено обчислити похідну функції у крайніх точках відрізка $\left[x_0, x_n\right]$, використовують формули правої та лівої похідної. Для таких точок використання формули центральної похідної неможливе через відсутність значень функції зліва або справа від них.

Приклад. Для функції, заданої у вигляді таблиці, знайти наближені значення похідної у точках відрізка $\left[0;2\right]$ з кроком $h = 0.5$.

n	0	1	2	3
x_i	0	2	3	5
y_i	1	3	2	5

Розв'язання. ►Для наближеного обчислення похідної заданої функції у точках 0.5, 1, 1.5 та 2 використаємо формули центральної різницевої похідної (10). Значення функції, які необхідні для обчислень, але відсутні у таблиці, можна наближено знайти, застосувавши апроксимацію. Використаємо уже побудований нами раніше (див. приклад в лекції про інтерполяцію) інтерполяційний многочлен третього степеня для заданої функції $L_3(x) = 1 + \frac{62}{15}x - \frac{13}{6}x^2 + \frac{3}{10}x^3$. Отже, маємо:

$$y'(0.5) \approx \frac{y(1) - y(0)}{2 \cdot 0.5} \approx L_3(1) - y(0) \approx 3.3 - 1 = 2.3;$$

$$y'(1) \approx \frac{y(1.5) - y(0.5)}{2 \cdot 0.5} \approx L_3(1.5) - L_3(0.5) \approx 3.3 - 2.6 = 0.7;$$

$$y'(1.5) \approx \frac{y(2) - y(1)}{2 \cdot 0.5} \approx y(2) - L_3(1) \approx 3 - 3.3 = -0.3;$$

$$y'(2.0) \approx \frac{y(2.5) - y(1.5)}{2 \cdot 0.5} \approx L_3(2.5) - L_3(1.5) \approx 2.7 - 3.3 = -0.6.$$

Наближене значення похідної в точці 0 знайдемо за формулою правої різницевої похідної (6): $y'(0) \approx \frac{y(1.5) - y(0)}{2 \cdot 0.5} \approx L_3(1.5) - y(0) \approx 3.3 - 1 = 2.3.$◄