Formeln WTH

Allgemeines

$f^X(x) = (F^X(x))`$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, ...Dichtefunktion (PMF Probability Mass Function)

$F(x)$ ....Verteilungsfunktion (CDF Cumulative Distribution Function)

Mengenlehre.tif

Diskrete Verteilungen

$F^X(x) = \sum p_k$

Hypergeometrisch

Ziehe n mal ohne Zurücklegen mit N_1 weißen und N gesamt Kugeln

$P(|\text{weiß}| = k) = \frac{\binom{N_1}{k}\binom{N-N_1}{n-k}}{\binom{N}{n}}, k \in \{0, \ldots, n\}$

Binomial

Ziehe n mal mit Zurücklegen mit N_1 weißen und N gesamt Kugeln und $p = \frac{N_1}{N}$

$P(|\text{weiß}| = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, k \in \{0, \ldots, n\}$

$\binom{N}{k} = \frac{N!}{k! \cdot (N-k)!}$

Poisson

Mit Zurücklegen, Anzahl der Ziehungen $n \to \infty$, relative Häufigkeit der weißen $p \to 0$, $np \to \lambda > 0$

$P(|\text{weiss}| = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$

Geometrisch

Mit zurücklegen, Anzahl der Ziehungen bis eine weiße Kugel gezogen wird

$P(|\text{Versuche}| = k) = p(1-p)^{k-1}$

Stetige Verteilungen

Gleichverteilt

$X \sim \text{Unif}(a, b)$

$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{falls } a \le x \le b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{falls } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{falls } x > b \end{cases}$$

Exponentialverteilt

$X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot \exp(-\lambda x), & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-\lambda x), & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Normalverteilt

$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$

$f(x) = \phi_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}$

$F(x) = \Phi_{\mu,\sigma^2}(x) = \int_{-\infty}^{t} \phi_{\mu,\sigma^2}(t)dt$

$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$, $P(Z \leq z) = P(Z > -z) = 1 - P(Z \leq -z)$

Zufallsvektoren

Für PMF: $P(X = x, Y = y) = f(x,y), x_{min} \leq x \leq x_{max}, y_{min} \leq y \leq y_{max}$

Diskret

$\sum_{x_{min}}^{x_{max}} \sum_{y_{min}}^{y_{max}} f(x,y) = 1$

$P(X = x) = f(x) = \sum_{y_{min}}^{y_{max}} f(x,y)$

$P(X \leq x_1, Y \leq y_1) = F^{XY}(x,y) = \sum_{x_{min}}^{x_1} \sum_{y_{min}}^{y_1} f(x,y)$

Stetig

$\int_{x_{min}}^{x_{max}} \int_{y_{min}}^{y_{max}} f(x,y)dydx = 1$

$f^Y(y) = \int_{x_{min}}^{x_{max}} f(x,y)dx$

$P(X \leq x_1, Y \leq y_1) = F^{XY}(x_1,y_1) = \int_{x_{min}}^{x_1} \int_{y_{min}}^{y_1} f(x,y)dydx$

$P(Y \leq y_1) = F^Y(y) = F(x_{max}, y_1) = P(X \leq x_{max}, Y \leq y_1)$

$P(X \leq x_1 \text{oder } Y \leq y_1) = P(X \leq x_1) + P(Y \leq y_1) - P(X \leq x_1, Y \leq y_1)$

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

$P(A|B) = \frac{P(B) \cdot P(B|A)}{P(B)}$

$P(A \cap B) = P(A|B_i) \cdot P(B_i)$

$P(B_k|A) = \frac{P(B_k)P(A|B_k)}{\sum P(B_i)P(A|B_i)}$

Momente

Erwartungswert

Diskret allgemein:

$\mu = E(X) = \sum x_i P(X = x_i)$,

$E(g(x)) = \sum g(x_i) P(X = x_i)$

$E(X, Y) = \sum_k \sum_l x_k y_l P(X = x_k, Y = y_l)$

Binomial: $E(X) = np$

Poisson: $E(x) = \lambda$

Geometrisch: $E(x) = \frac{1}{p}$

Stetig:

$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f^X(x) dx$

$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f^X(x) dx$

$E(X, Y)) = \int \int xy f(x, y) dx dy$

Exponential: $E(X) = \frac{1}{\lambda}$

Normal: $E(X) = \mu, E(X^2) = \mu^2 + \sigma^2$

Varianz

$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X)) = E((x - \mu)^2) = E(X^2) - E(X)^2$

Gleich: $\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$

Exponential: $\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$

Normal(0,1): $\sigma^2 = 1$

Kovarianz

$\mathrm{Cov}(X, Y) = E((X - \mu_x)(Y - \mu_y)) = E(X, Y) - E(X)E(Y)$

Korrelation: $-1 \leq \mathrm{Corr}(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov(X,Y)}}{\sqrt{\mathrm{Var}(x)} \cdot \sqrt{\mathrm{Var}(y)}} \leq 1$

Konvergenz

$\sqrt{n} \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma} \to N(0, 1)$