Chapitre I
Éléments de logique

Calcul des propositions

Exercice 1

Construire les tables de vérité pour les formules suivantes :

1. $(p \to q) \vee (q \to p)$
2. $p \wedge (p \to \neg q) \wedge q$
3. $\big(p \to (q \wedge r)\big) \leftrightarrow (p \to q) \wedge (p \to r)$
4. $\big(p \to (q \to r)\big) \to \big((p \wedge q) \to r\big)$

Exercice 2

1. Montrer que $\neg(\phi \to \psi) \equiv \phi \wedge \neg\psi$.
2. **a.** Montrer que le modus ponens $\big(\phi \wedge (\phi \to \psi)\big) \to \psi$ est une tautologie.
   Autrement dit, si on affirme a et $a \to b$, alors on affirme b.

   b. Montrer que le modus tollens $\big((\phi \to \psi) \wedge \neg\psi\big) \to \neg\phi)$ est une tautologie.
   Autrement dit, si une proposition est vraie, alors il en est de même pour sa proposition contraposée.

Exercice 3

Écrire la négation de la formule $\big(\mathrm{P} \wedge (\mathrm{Q} \vee \mathrm{R})\big)$.

Exercice 4

On juge un homme accusé d'avoir trempé dans un cambriolage.
Le procureur et l'avocat disent tour à tour :

- Le procureur : « Si l'accusé est coupable, alors il a un complice. »
- L'avocat : « C'est faux ! »

Pourquoi est-ce la pire des choses que puisse dire l'avocat ?

Exercice 5

Un cambriolage a eu lieu dans une bijouterie.Il y a trois suspects : A, B et C.
Modéliser de manière indépendante chacune des règles suivantes :

1. Il y a au moins un coupable.
2. Il existe au plus deux coupables.
3. Si A est coupable, alors il a un seul complice.
4. Si B est innocent, alors C l'est aussi.
5. S'il y a exactement deux coupables, alors A est l'un d'entre eux.
6. Si C est innocent, alors B l'est aussi.

Calcul des prédicats

Exercice 6

1. Écrire, à l'aide des quantificateurs, la phrase suivante « Pour tout nombre réel, son carré est positif ».
2. Écrire la négation de cette phrase

Exercice 7

1. Écrire, à l'aide des quantificateurs, la phrase suivante « Pour chaque réel, je peux trouver un entier relatif tel que leur produit soit strictement plus grand que 1 ».
2. Écrire la négation de cette phrase

Exercice 8

1. Écrire, à l'aide des quantificateurs, la phrase suivante « Pour tout entier n, il existe un unique réel x tel que $\exp(x)$ égale n ».
2. Écrire la négation de cette phrase

Techniques de raisonnement

Exercice 9

Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$.
Montrer, par raisonnement direct, que si $a \leqslant b$ alors $a \leqslant \dfrac{a+b}{2} \leqslant b$ et $a \leqslant \sqrt{ab} \leqslant b$.

Exercice 10

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)$ est divisible par 2.
Indication : Distinguer les n pairs des n impairs.

Exercice 11

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$.
Montrer que si $b \neq 0$ alors $a + b\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
Indication :On utilisera que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 12

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrer, par l'absurde, que $\sqrt{n^2+1}$ n'est pas un entier.

Exercice 13

Est-ce que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x < 2 \Longrightarrow x^2 < 4$?