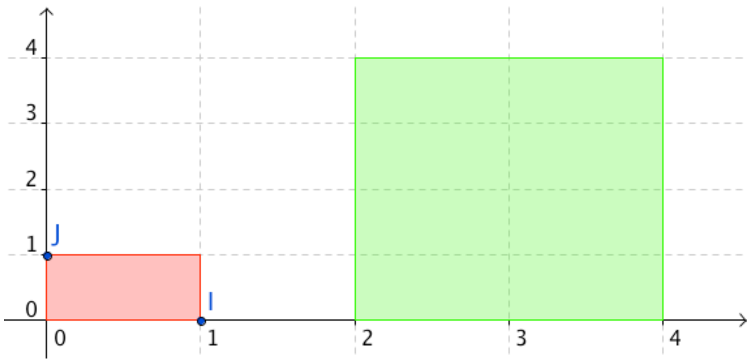
INTEGRATION (Partie 1)

En 1696, Jacques Bernoulli reprend le mot latin « integer », déjà utilisé au XIVe siècle, pour désigner le calcul intégral. A cette époque, on partait de l'équation de la courbe pour calculer l'aire sous la courbe, c'est à dire du « bord » de la surface à la surface entière (intégrale).
Au milieu du XIXe siècle, les sciences sociales reprennent le mot pour exprimer l'idée qu'une personne s'intègre à un groupe.

I. Intégrale et aire

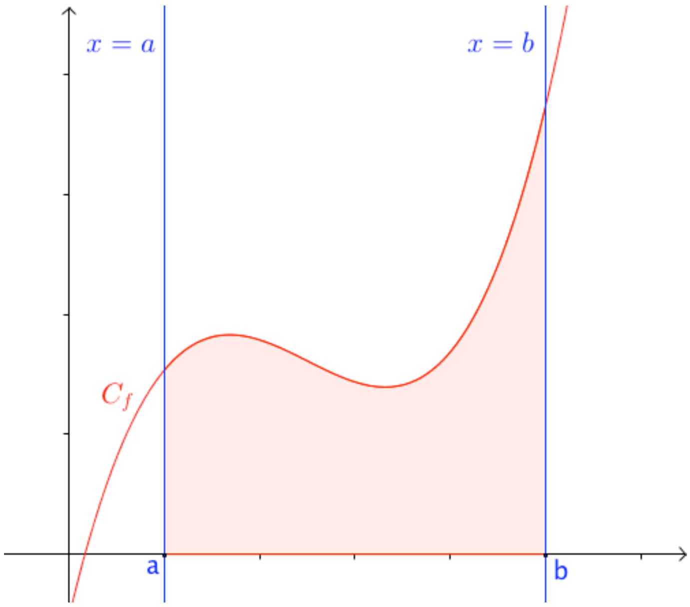
1) Unité d'aire



Dans le repère (O, I, J), le rectangle rouge a comme dimension 1 sur 1. Il s'agit du rectangle "unité" qui a pour aire 1 unité d'aire. On écrit 1 u.a.
L'aire du rectangle vert est égale à 8 fois l'aire du rectangle rouge.
L'aire du rectangle vert est donc égale à 8 u.a.
Lorsque les longueurs unitaires sont connues, il est possible de convertir les unités d'aire en unités de mesure (le cm^2 par exemple).

2) Définition

Définition : Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a ; b]$.
On appelle intégrale de f sur $[a ; b]$ l'aire, exprimée en u.a., de la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



3) Notation

L'intégrale de la fonction f sur [a ; b] se note : $\int_a^b f(x)\,dx$

Et on lit "intégrale de a à b de $f(x)dx$".

Cette notation est due au mathématicien allemand *Gottfried Wilhelm von Leibniz* (1646 ; 1716). Ce symbole fait penser à un "S" allongé et s'explique par le fait que l'intégral est égal à une aire calculée comme somme infinie d'autres aires.
Plus tard, un second mathématicien allemand, *Bernhard Riemann* (1826 ; 1866) établit une théorie aboutie du calcul intégral.

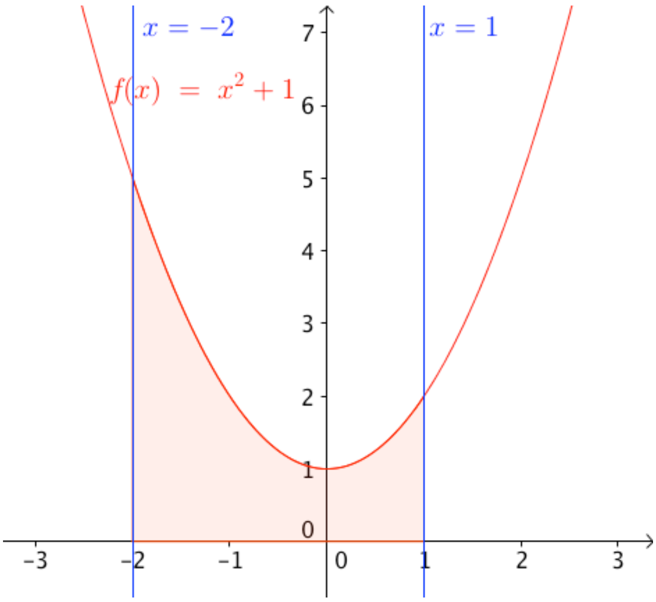
Remarques :
- a et b sont appelés les bornes d'intégration.
- x est la variable. Elle peut être remplacée par toute autre lettre qui n'intervient pas par ailleurs.

Ainsi on peut écrire : $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$.

"dx" ou "dt" nous permet de reconnaître la variable d'intégration.

Exemple :

L'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction $f(x) = x^2 + 1$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 1$ est l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle [-2 ; 1] et se note $\int_{-2}^{1}\left(x^2+1\right)dx$.



Un logiciel de calcul formel peut permettre d'obtenir l'aire cherchée.

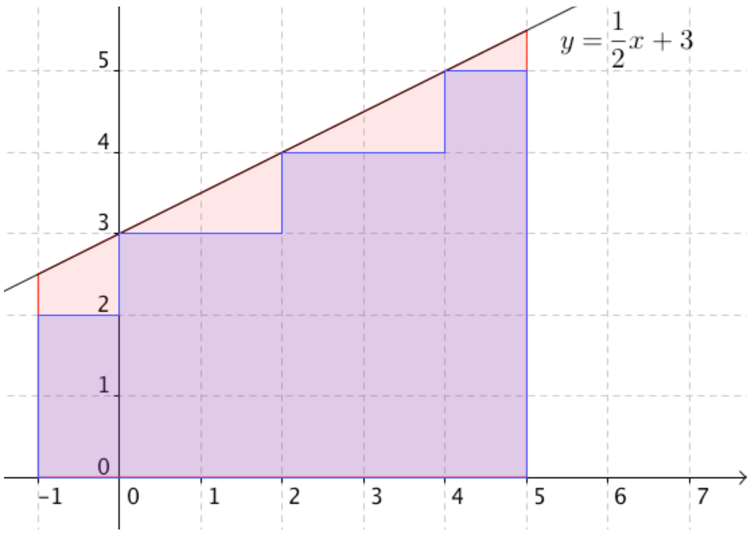
Méthode : Déterminer une intégrale par calculs d'aire

Vidéo https://youtu.be/jkxNKkmEXZA

a) Tracer la représentation graphique de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$ dans un repère orthonormé.

b) Calculer $\int_{-1}^{5} f(x)\,dx$.

a)



b) Calculer $\int_{-1}^{5} f(x)\,dx$ revient à calculer l'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction *f*, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=-1$ et $x=5$.

Donc par dénombrement, on obtient : $\int_{-1}^{5} f(x)\,dx = 21\,u.a. + 3\,u.a. = 24\,u.a.$

4) Encadrement de l'intégrale d'une fonction monotone et positive

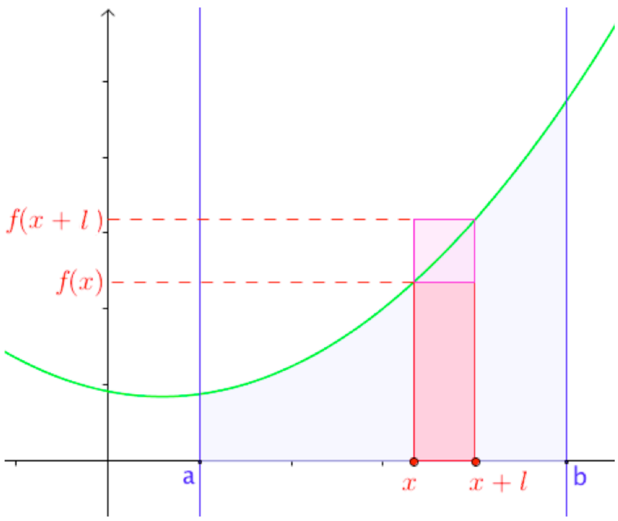
Soit une fonction *f* continue, positive et monotone sur un intervalle [a ; b].

On partage l'intervalle [a ; b] en n sous-intervalles de même amplitude $l = \dfrac{b-a}{n}$.

Sur un sous-intervalle $\left[x\,;x+l\right]$, l'aire sous la courbe est comprise entre l'aire de deux rectangles :

- l'un de dimension l et $f(x)$ qui a pour aire l x $f(x)$;
- l'autre de dimension l et $f(x+l)$ qui a pour aire l x $f(x+l)$.

Sur l'intervalle [a ; b], l'aire sous la courbe est comprise entre la somme des n rectangles "inférieurs" et la somme des n rectangles "supérieurs".



Voici un algorithme écrit en langage naturel permettant d'obtenir un tel encadrement.

Langage naturel

Entrée
Saisir les réels a et b
Saisir l'entier n
 	
Initialisation
Affecter à L la valeur (b-a)/n
Affecter à *x* la valeur a
Affecter à m la valeur 0
Affecter à p la valeur 0
 	
Traitement des données
Pour i allant de 0 à n-1
    Faire
        Affecter à m la valeur m+Lxf(*x*)
        Affecter à *x* la valeur *x*+L
        Affecter à p la valeur p+Lxf(*x*)
 	
Sortie
Afficher m et p

```
a=input("a=")
b=input("b=")
n=input("n=")
L=(b-a)/n
x=a
m=0
p=0
for i=0:(n-1)
    m=m+L*x^2
    x=x+L
    p=p+L*x^2
end
afficher(m)
afficher(p)
```

Exemple :

Avec le logiciel Scilab, on programme l'algorithme pour la fonction $f(x)=x^2$.

On exécute plusieurs fois le programme pour obtenir un encadrement de l'intégrale de la fonction carré sur [1 ; 2].

En augmentant le nombre de sous-intervalles, la précision du calcul s'améliore car l'encadrement formé de rectangles inférieurs et supérieurs se resserre autour de la courbe.

```
-->exec('/Users/ymonka
a=1
b=2
n=10

    2.185

    2.485

-->exec('/Users/ymonka
a=1
b=2
n=50

    2.3034

    2.3634

-->exec('/Users/ymonka
a=1
b=2
n=100

    2.31835

    2.34835
```

On vérifie avec un logiciel de calcul formel :

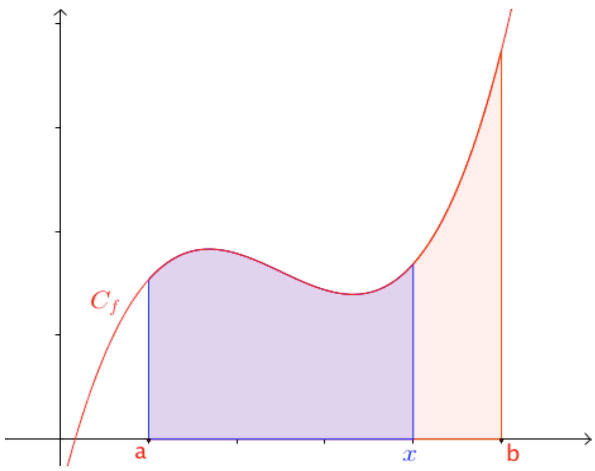
$\int_1^2 x^2 \, dx$	$\frac{7}{3}$
$\int_1^2 x^2 \, dx$	2.33333

Calculer une intégrale avec la calculatrice :

Vidéo TI https://youtu.be/0Y3VT73yvVY
Vidéo Casio https://youtu.be/hHxmizmbY_k
Vidéo HP https://youtu.be/4Uu5tQGjbwo

5) Fonction définie par une intégrale

Théorème : Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a ; b]$.
La fonction F définie sur $[a ; b]$ par $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ est dérivable sur $[a ; b]$ et sa dérivée est la fonction f.



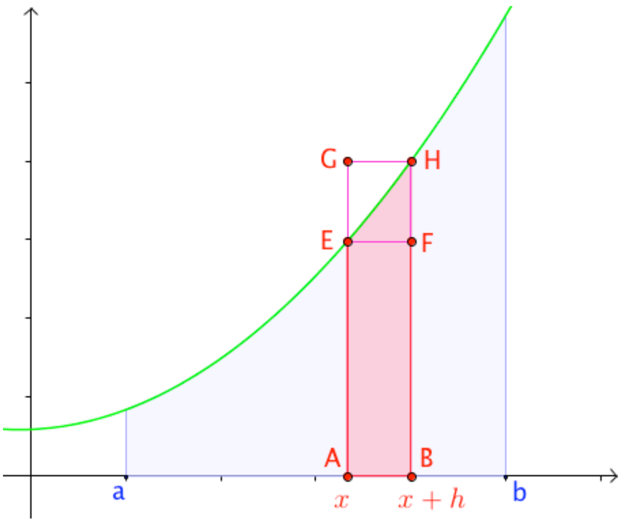
Démonstration dans le cas où f est strictement croissante :

- On considère deux réels x et $x+h$ de l'intervalle $[a\ ;\ b]$ avec $h>0$.

On veut démontrer que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x)$.

$$F(x+h)-F(x)=\int_a^{x+h}f(x)\,dx-\int_a^x f(x)\,dx=\int_x^{x+h}f(x)\,dx.$$

On a représenté ci-contre, la courbe de la fonction f (en vert). Cette différence est égale à l'aire de la surface colorée en rouge.



Elle est comprise entre les aires des rectangles ABFE et ABHG.

Or, $Aire\left(ABFE\right)=h\times f(x)$ et

$Aire\left(ABHG\right)=h\times f(x+h)$.

Comme f est croissante sur $[a\ ;\ b]$, on a :

$h\times f(x)<F(x+h)-F(x)<h\times f(x+h)$

Puisque $h>0$, on a :

$f(x)<\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}<f(x+h)$.

Comme f est continue sur $[a\ ;\ b]$, $\lim\limits_{h\to 0}f(x+h)=f(x)$.

D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x)$.

- Dans le cas où $h<0$, la démonstration est analogue (les encadrements sont inversés).

On en déduit que $F'(x)=f(x)$.

Méthode : Etudier une fonction définie par une intégrale

Vidéo TI https://youtu.be/6DHXw5TRzN4

Soit F la fonction définie sur [0 ; 10] par $F(x)=\int_0^x \dfrac{t}{2}\,dt$.

a) Etudier les variations de F.

b) Tracer sa courbe représentative.

a) $t\mapsto\dfrac{t}{2}$ est continue et positive sur [0 ; 10] donc F est dérivable sur [0 ; 10] et

$F'(x)=\dfrac{x}{2}>0$.

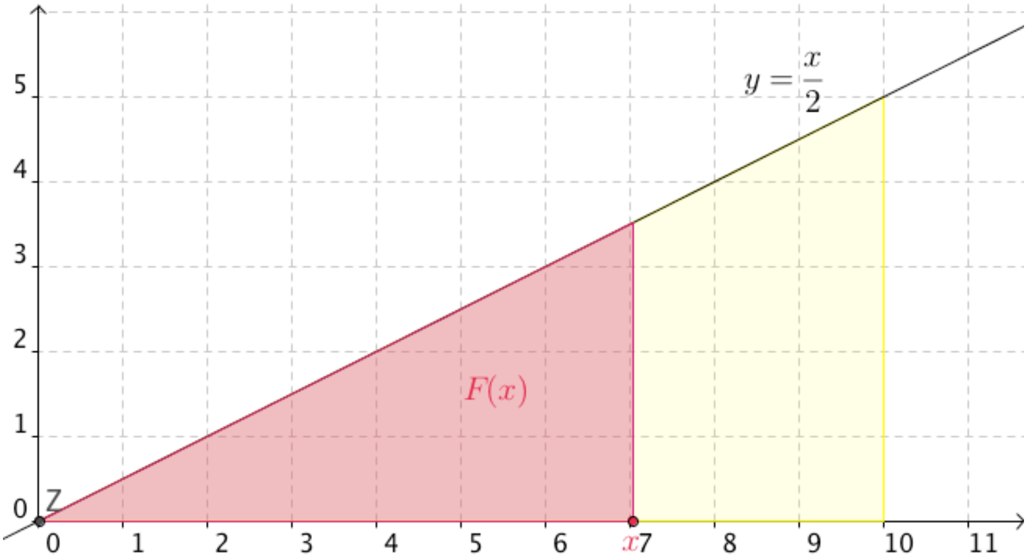
Donc F est croissante sur [0 ; 10].

On dresse le tableau de variations :

x	0	10
$F'(x)$	+	
$F(x)$	0 ↗	25

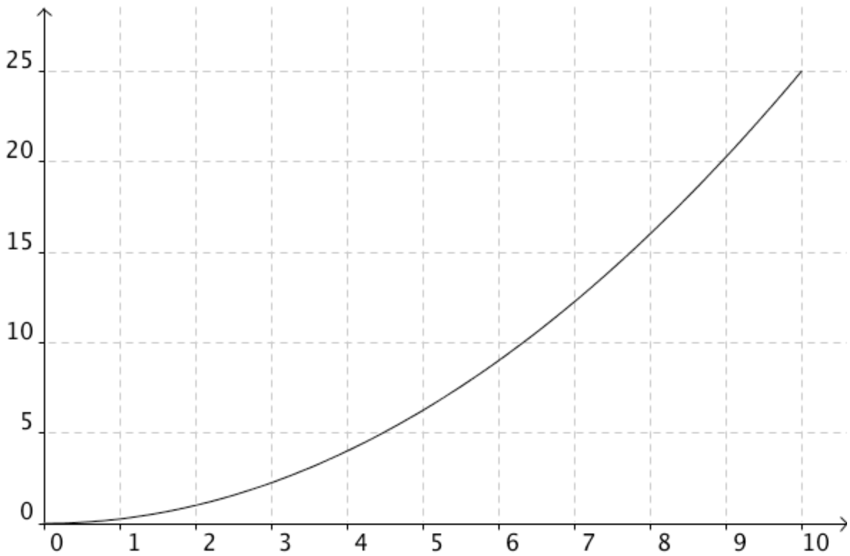
$F(x)$ est égal à l'aire du triangle rouge.

Ainsi $F(10)=\dfrac{10\times 5}{2}=25\,u.a.$



b) Pour tout x de [0 ; 10], on a $F(x)=\dfrac{x\times\dfrac{x}{2}}{2}=\dfrac{x^2}{4}\,u.a.$

On a ainsi la représentation graphique de F :



II. Primitive d'une fonction continue

1) Définition

Exemple :
On considère les fonctions suivantes :

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x+3$ et $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2+3x-1$

On constate que $F'(x) = 2x+3 = f(x)$.
On dit dans ce cas que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Définition : f est une fonction continue sur un intervalle I.
On appelle primitive de f sur I, une fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$

Remarque :
Dans ces conditions, on a l'équivalence :
"F a pour dérivée f" et "f a pour primitive F".

Exemple :

$F(x) = \frac{x^2}{2}$ est une primitive de $f(x) = x$ car $F'(x) = f(x)$ pour tout réel x.

2) Primitives des fonctions usuelles

Fonction	Une primitive	Intervalle
$f(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$	$F(x) = ax$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ $n \geq 0$ entier	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ $n > 1$ entier	$F(x) = -\frac{1}{n-1} \times \frac{1}{x^{n-1}}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	$]0;+\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x$	$]0;+\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x$	$\mathbb{R}$

3) Linéarité des primitives

Propriété : f et g sont deux fonctions continues sur $[a ; b]$.
Si F est une primitive de f et G est une primitive de g sur $[a ; b]$ alors :
- $F+G$ est une primitive de $f+g$,
- kF est une primitive de kf avec k réel.

Démonstration :
- $(F+G)'=F'+G'=f+g$
- $(kF)'=kF'=kf$

4) Opérations et fonctions composées

u est une fonction dérivable sur un intervalle I

Fonction	Une primitive	Conditions
$u'u^n$ $n\neq -1$ entier	$\dfrac{1}{n+1}u^{n+1}$	Si $n<0, u(x)\neq 0$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u(x)>0$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln u$	$u(x)>0$
$u'e^u$	e^u	
$u'\cos u$	$\sin u$	
$u'\sin u$	$-\cos u$	

Méthode : Recherche de primitives

Vidéo https://youtu.be/GA6jMgLd_Cw
Vidéo https://youtu.be/82HYI4xuClw
Vidéo https://youtu.be/gxRpmHWnoGQ
Vidéo https://youtu.be/iiq6eUQee9g
Vidéo https://youtu.be/V_Il9zvvtAk

Dans chaque cas, déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle I.

a) $f(x)=x^3-2x$ sur $I=\mathbb{R}$

b) $f(x)=3x^2-\dfrac{3}{x^3}$ sur $I=\left]0;+\infty\right[$

c) $f(x)=(2x-5)(x^2-5x+4)^2$ sur $I=\mathbb{R}$

d) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ sur $I=\mathbb{R}$

e) $f(x)=\dfrac{3x}{x^2+2}$ sur $I=\mathbb{R}$

f) $f(x)=xe^{x^2}$ sur $I=\mathbb{R}$

g) $f(x)=\cos(2x)-3\sin(3x-1)$ sur $I=\mathbb{R}$ f)

a) $F(x)=\dfrac{1}{4}x^4-x^2$

b) $f(x)=3x^2-\dfrac{3}{x^3}=3x^2-3x^{-3}$ donc $F(x)=x^3-3\times\dfrac{1}{-2}x^{-2}=x^3+\dfrac{3}{2x^2}$

c) $f(x)=(2x-5)(x^2-5x+4)^2$ du type $u'u^n$ avec $u(x)=x^2-5x+4$

donc $F(x)=\frac{1}{3}\left(x^2-5x+4\right)^3$

d) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ du type $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u(x)=x^2+1$

donc $F(x)=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{x^2+1}=\sqrt{x^2+1}$

e) $f(x)=\frac{3}{2}\times\frac{2x}{x^2+2}$ du type $\frac{u'}{u}$ avec $u(x)=x^2+2$

donc $F(x)=\frac{3}{2}\ln\left(x^2+2\right)$

f) $f(x)=xe^{x^2}=\frac{1}{2}\times 2xe^{x^2}$ du type $u'e^u$ avec $u(x)=x^2$

donc $F(x)=\frac{1}{2}e^{x^2}$

g) $f(x)=\frac{1}{2}\times 2\cos\left(2x\right)-3\sin\left(3x-1\right)$ donc $F(x)=\frac{1}{2}\sin\left(2x\right)+\cos\left(3x-1\right)$

Propriété : f est une fonction continue sur un intervalle I.
Si F est une primitive de f sur I alors pour tout réel C, la fonction $x\mapsto F(x)+C$ est une primitive de f sur I.

Démonstration :
F est une primitive de f.
On pose $G(x)=F(x)+C$.
$G'(x)=F'(x)+0=F'(x)=f(x)$.
Donc G est une primitive de f.

Exemple :

En reprenant l'exemple précédent, toute fonction de la forme $G_C(x)=\frac{x^2}{2}+C$, avec $C\in\mathbb{R}$, est une primitive de f.

Propriété : Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

- Admis -

Remarque : Bien que l'existence étant assurée, la forme explicite d'une primitive n'est pas toujours connue. Par exemple, la fonction $x\mapsto e^{-x^2}$ ne possède pas de primitive sous forme explicite.

Méthode : Recherche d'une primitive particulière

Vidéo https://youtu.be/-q9M7oJ9gkI

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\dfrac{e^{2x}\left(2x-1\right)}{x^2}$.

1) Démontrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}^*$ par $F(x)=\dfrac{e^{2x}}{x}$ est une primitive de f.

2) Déterminer la primitive de la fonction f qui s'annule en x = 1.

1) La fonction F est une primitive de f si $F' = f$.

$F'(x)=\dfrac{2e^{2x}x-e^{2x}}{x^2}=\dfrac{e^{2x}\left(2x-1\right)}{x^2}=f(x)$.

2) Toutes les primitives de f sont de la forme : $G(x)=F\left(x\right)+C$ où C est un nombre réel.

On cherche la primitive de la fonction f qui s'annule en x = 1, soit : $G(1)=0$.

Donc $F\left(1\right)+C=0$

$\dfrac{e^{2\times 1}}{1}+C=0$

$C=-e^2$

La primitive de la fonction f qui s'annule en x = 1 est G telle que :

$$G(x)=F(x)-e^2=\frac{e^{2x}}{x}-e^2$$