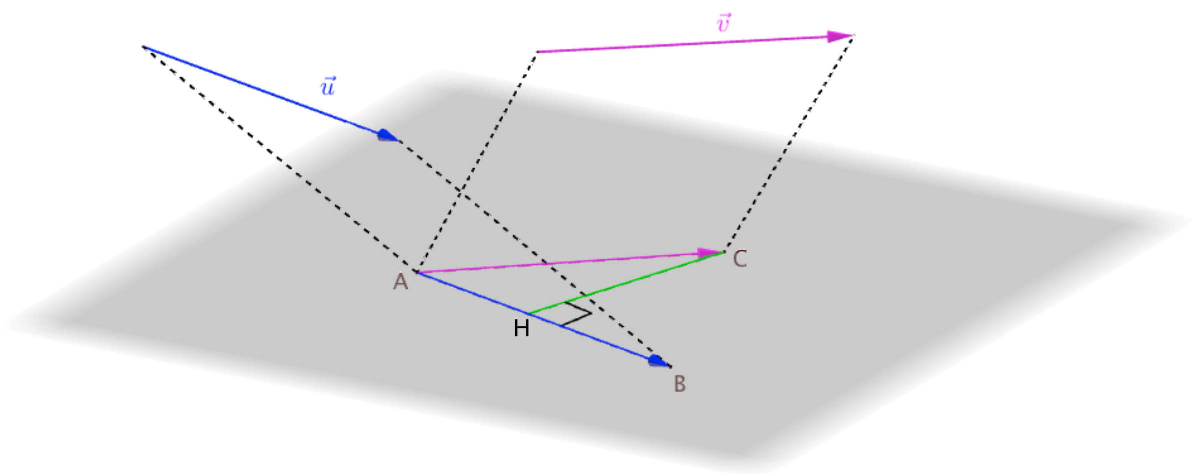
PRODUIT SCALAIRE DANS L'ESPACE

I. Produit scalaire de deux vecteurs

1) Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. A, B et C trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
Il existe un plan *P* contenant les points A, B et C.

Définition :
On appelle produit scalaire de l'espace de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le produit $\vec{u}.\vec{v}$ égal au produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ dans le plan *P*.

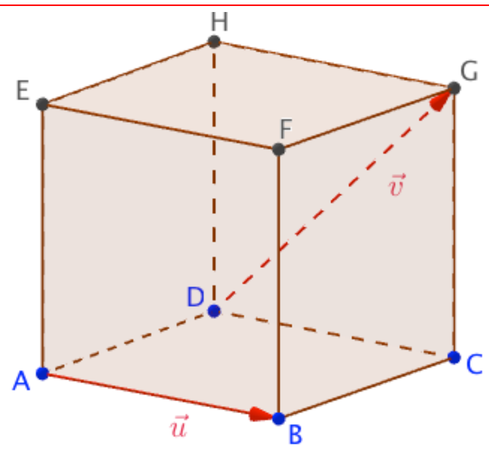


On a ainsi :
- $\vec{u}.\vec{v} = 0$ si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est un vecteur nul,
- $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\vec{u};\vec{v}\right)$

Exemple :
Vidéo https://youtu.be/vp3ICG3rRQk

ABCDEFGH est un cube d'arête a.

$\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DG}$
$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AF}$
$= AB \times AB$
$= a^2$



2) Propriétés

Les propriétés dans le plan sont conservées dans l'espace.

Propriétés : Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.
- $\vec{u}.\vec{u} = \left\|\vec{u}\right\|^2$
- $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
- $\vec{u}.\left(\vec{v}+\vec{w}\right) = \vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$
- $\left(k\vec{u}\right).\vec{v} = \vec{u}.\left(k\vec{v}\right) = k\left(\vec{u}.\vec{v}\right)$, $k \in \mathbb{R}$.
- $\vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Démonstration :
Il existe un plan *P* tel que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ admettent des représentants dans *P*.
Dans le plan, les règles de géométrie plane sur les produits scalaires s'appliquent.

3) Expression analytique du produit scalaire

Propriété : Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs de l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Alors $\vec{u}.\vec{v} = xx'+yy'+zz'$.
Et en particulier : $\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Démonstration :

$\vec{u}.\vec{v} = \left(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right).\left(x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}\right)$

$= xx'\vec{i}.\vec{i}+xy'\vec{i}.\vec{j}+xz'\vec{i}.\vec{k}+yx'\vec{j}.\vec{i}+yy'\vec{j}.\vec{j}+yz'\vec{j}.\vec{k}+zx'\vec{k}.\vec{i}+zy'\vec{k}.\vec{j}+zz'\vec{k}.\vec{k}$

$= xx'+yy'+zz'$

En effet, on a par exemple dans le plan définit par le couple $\left(\vec{i};\vec{j}\right)$:

$\vec{i}.\vec{i} = \left\|\vec{i}\right\|^2 = 1$, $\vec{j}.\vec{j} = \left\|\vec{j}\right\|^2 = 1$ et $\vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{i} = 0$.

On a en particulier : $\left\|\vec{u}\right\|^2 = \vec{u}.\vec{u} = xx+yy+zz = x^2+y^2+z^2$.

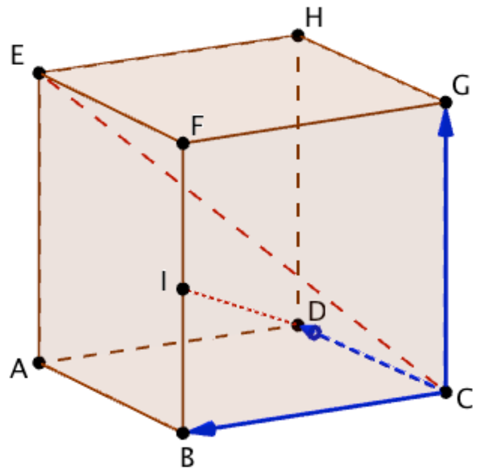
Exemple :
Vidéo https://youtu.be/N1IA15sKH-E

On considère le repère de l'espace $\left(C;\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CG}\right)$.

Alors : $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DI}\begin{pmatrix}1-0\\0-1\\0,5-0\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{DI}\begin{pmatrix}1\\-1\\0,5\end{pmatrix}$.

Alors $\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{DI}=1\times1+1\times(-1)+1\times0,5=0,5$.

Les vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{DI}$ ne sont pas orthogonaux.



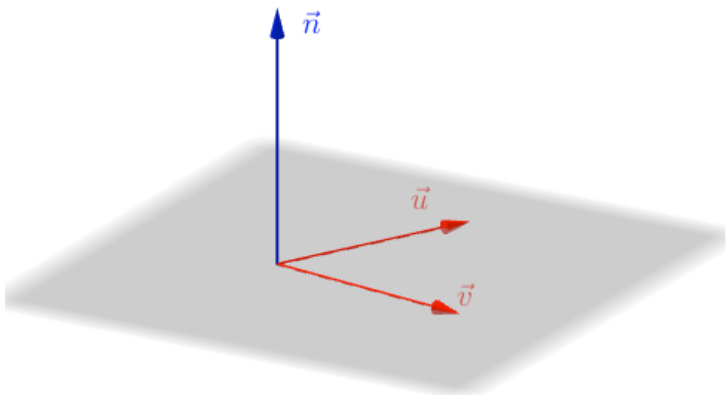
II. Vecteur normal à un plan

1) Définition et propriétés

Définition : Un vecteur non nul $\vec{n}$ de l'espace est normal à un plan *P* lorsqu'il est orthogonal à tout vecteur admettant un représentant dans *P*.

Théorème : Un vecteur non nul $\vec{n}$ de l'espace est normal à un plan *P* s'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de *P*.

Démonstration :
Elle est incluse dans la démonstration du corollaire qui suit.



Au XIXe siècle, le vecteur normal $\vec{n}$, appelé produit vectoriel, est noté $\vec{u}\wedge\vec{v}$.
Le produit vectoriel a été inventé par un mathématicien allemand, *Hermann Günther Grassmann* (1809 ; 1877).

Corollaire : Une droite est orthogonale à toute droite d'un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

Démonstration (exigible BAC) :

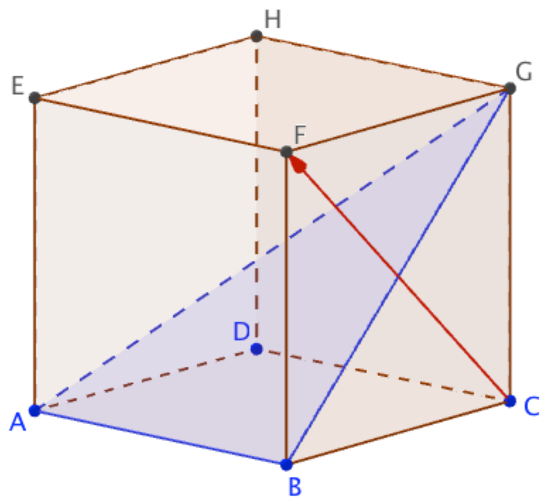
- Si une droite est orthogonale à toute droite d'un plan *P* alors elle est en particulier orthogonale à deux droites sécantes de *P*.

- Démontrons la réciproque :

Soit une droite (d) de vecteur directeur $\vec{n}$ orthogonale à deux droites (d_1) et (d_2) de *P* sécantes et de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires et orthogonaux au vecteur $\vec{n}$.
Soit une droite quelconque (Δ) de *P* de vecteur directeur $\vec{w}$.
Démontrons que (Δ) est orthogonale à (d).
$\vec{w}$ peut se décomposer en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ qui constituent une base de *P* (car non colinéaires).
Il existe donc deux réels x et y tels que $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.
Donc $\vec{w}.\vec{n} = x\vec{u}.\vec{n} + y\vec{v}.\vec{n} = 0$, car $\vec{n}$ est orthogonal avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Donc $\vec{n}$ est orthogonal au vecteur $\vec{w}$.
Et donc (d) est orthogonale à (Δ).

Méthode : Déterminer si un vecteur est normal à un plan

Vidéo https://youtu.be/aAnz_cP72Q4



ABCDEFGH est un cube.
Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{CF}$ est normal au plan (ABG).

On considère le repère $\left(B;\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BF}\right)$.

Dans ce repère : $A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, B\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, C\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, F\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, G\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

On a ainsi :
$\overrightarrow{CF}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$, donc :

$\overrightarrow{CF}.\overrightarrow{BG} = 0\times 0 - 1\times 1 + 1\times 1 = 0$

$\overrightarrow{CF}.\overrightarrow{AB} = 0\times(-1) - 1\times 0 + 1\times 0 = 0$

Donc $\overrightarrow{CF}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de (ABG), il est donc normal à (ABG).

Méthode : Déterminer un vecteur normal à un plan

Vidéo https://youtu.be/IDBEI6thBPU

Dans un repère orthonormé, soit $A\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}, B\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}$.

Déterminer un vecteur normal au plan (ABC).

On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$.

Soit un vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ orthogonal au plan (ABC). Il est tel que :

$\begin{cases}\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0\\\vec{n}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$ soit $\begin{cases}-2a+b+3c=0\\a-2b=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-2\times 2b+b+3c=0\\a=2b\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-3b+3c=0\\a=2b\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}c=b\\a=2b\end{cases}$

Prenons par exemple, $b=1$ alors $c=1$ et $a=2$.

Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ est donc normal au plan (ABC).

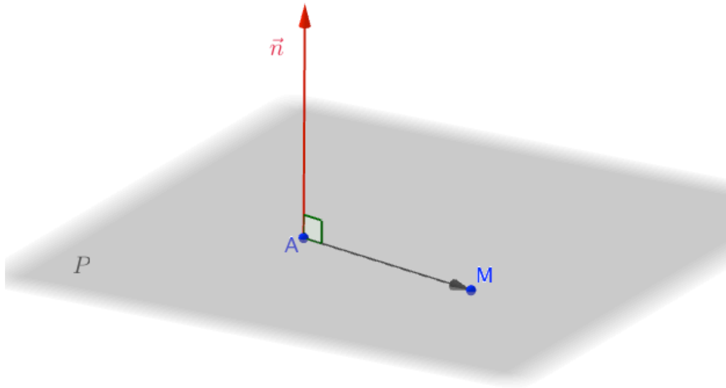
2) Equation cartésienne d'un plan

Théorème : L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Un plan *P* de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ non nul admet une équation cartésienne de la forme $ax+by+cz+d=0$, avec $d\in\mathbb{R}$.

Réciproquement, si a, b et c sont non tous nuls, l'ensemble des points $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ tels que $ax+by+cz+d=0$, avec $d\in\mathbb{R}$, est un plan.

Démonstration (exigible BAC) :



- Soit un point $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ de *P*.

$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$
$\Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$
$\Leftrightarrow ax + by + cz - ax_A - by_A - cz_A = 0$
$\Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0$ avec $d = -ax_A - by_A - cz_A$.

- Réciproquement, supposons par exemple que $a \neq 0$ (a, b et c sont non tous nuls).

On note *E* l'ensemble des points $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ vérifiant l'équation $ax + by + cz + d = 0$

Alors le point $A\left(-\frac{d}{a};0;0\right)$ vérifie l'équation $ax + by + cz + d = 0$.

Et donc $A \in$ *E*.

Soit un vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Pour tout point $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on a :

$$\overrightarrow{AM}.\vec{n} = a\left(x + \frac{d}{a}\right) + b(y - 0) + c(z - 0) = ax + by + cz + d = 0.$$

E est donc l'ensemble des points $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$.

Donc l'ensemble *E* est le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Exemple :

Le plan d'équation cartésienne $x - y + 5z + 1 = 0$ a pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Méthode : Déterminer une équation cartésienne de plan

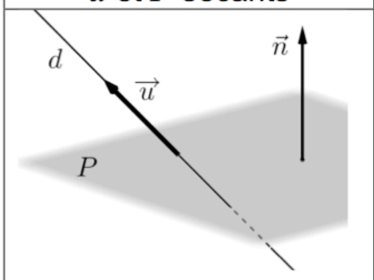
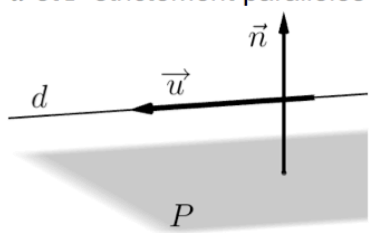
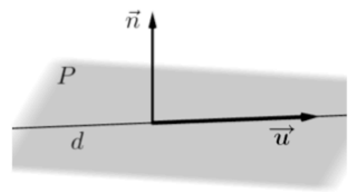
Vidéo https://youtu.be/s4xql6IPQBY

Dans un repère orthonormé, déterminer une équation cartésienne du plan *P* passant par le point $A\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\-3\\1\end{pmatrix}$.

Une équation cartésienne de *P* est de la forme $3x-3y+z+d=0$.
Le point A appartient à *P* donc ses coordonnées vérifient l'équation :
$3\times(-1)-3\times2+1+d=0$ donc $d=8$.
Une équation cartésienne de *P* est donc $3x-3y+z+8=0$.

3) Positions relatives d'une droite et d'un plan

<table>
<tr><td rowspan="2">Positions relatives

- Droite d de vecteur directeur $\vec{u}$
- Plan P de vecteur normal $\vec{n}$</td><td>d et P sécants</td><td colspan="2">d et P parallèles</td></tr>
<tr><td></td><td>d et P strictement parallèles
</td><td>d incluse dans P
</td></tr>
<tr><td>Vecteurs</td><td>$\vec{u}$ et $\vec{n}$ non orthogonaux</td><td colspan="2">$\vec{u}$ et $\vec{n}$ orthogonaux</td></tr>
<tr><td>Produit scalaire</td><td>$\vec{u}.\vec{n}\neq0$</td><td colspan="2">$\vec{u}.\vec{n}=0$</td></tr>
</table>

Méthode : Déterminer l'intersection d'une droite et d'un plan

Vidéo https://youtu.be/BYBMauyizhE

Dans un repère orthonormé, le plan *P* a pour équation $2x-y+3z-2=0$.

Soit $A\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$.

1) Démontrer que la droite (AB) et le plan *P* sont sécants.
2) Déterminer leur point d'intersection.

1) Un vecteur normal de *P* est $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$.

(AB) et *P* sont sécants si $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas orthogonaux.

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix}$

Comme $\overrightarrow{AB}.\vec{n}=-2\times 2+3\times 3=5\neq 0$, on conclut que (AB) et le plan P ne sont pas parallèles et donc sécants.

2) Une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

$\begin{cases}x=1-2t\\y=2\\z=-3+3t\end{cases}$ avec t réel.

Le point $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ intersection de (AB) et de *P* vérifie donc le système suivant :

$$\begin{cases}x=1-2t\\y=2\\z=-3+3t\\2x-y+3z-2=0\end{cases}$$

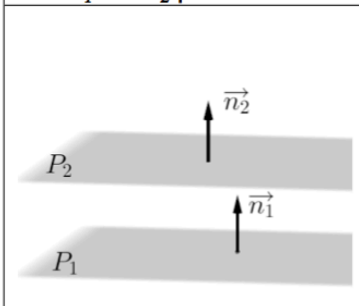
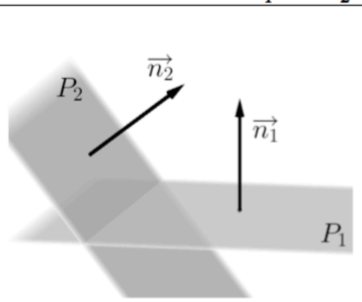
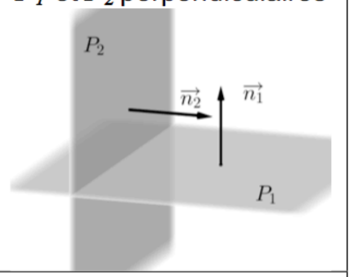
On a donc $2(1-2t)-2+3(-3+3t)-2=0$

$5t-11=0$ soit $t=\frac{11}{5}$.

D'où $\begin{cases}x=1-2\times\frac{11}{5}=-\frac{17}{5}\\y=2\\z=-3+3\times\frac{11}{5}=\frac{18}{5}\end{cases}$

Ainsi la droite (AB) et le plan P sont sécants en $M\left(-\frac{17}{5};2;\frac{18}{5}\right)$.

4) Positions relatives de deux plans

Positions relatives - Plan P_1 de vecteur normal $\vec{n_1}$ - Plan P_2 de vecteur normal $\vec{n_2}$	P_1 et P_2 parallèles	P_1 et P_2 sécants	
			P_1 et P_2 perpendiculaires 
Vecteurs	$\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ colinéaires	$\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ non colinéaires	$\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ orthogonaux $\vec{n_1}.\vec{n_2}=0$

Méthode : Déterminer l'intersection de deux plans

Vidéo https://youtu.be/4dkZ0OQQwaQ

Dans un repère orthonormé, les plans *P* et *P'* ont pour équations respectives $-x+2y+z-5=0$ et $2x-y+3z-1=0$.
1) Démontrer que les plans *P* et *P'* sont sécants.
2) Déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection *d*.

1) *P* et *P'* sont sécants si leurs vecteurs normaux ne sont pas colinéaires.

Un vecteur normal de *P* est $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ et un vecteur normal de *P'* est $\vec{n}'\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$.

Les coordonnées des deux vecteurs ne sont pas proportionnelles donc leurs vecteurs ne sont pas colinéaires.

2) Le point $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ de *d*, intersection de *P* et de *P'*, vérifie donc le système suivant :

$$\begin{cases}-x+2y+z-5=0\\2x-y+3z-1=0\end{cases}$$

On choisit par exemple x comme paramètre et on pose $x=t$. On a alors :

$$\begin{cases}x=t\\-t+2y+z-5=0\\2t-y+3z-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=t\\z=-2y+t+5\\-y+3z=1-2t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=t\\z=-2y+t+5\\-y+3(-2y+t+5)=1-2t\end{cases}$$

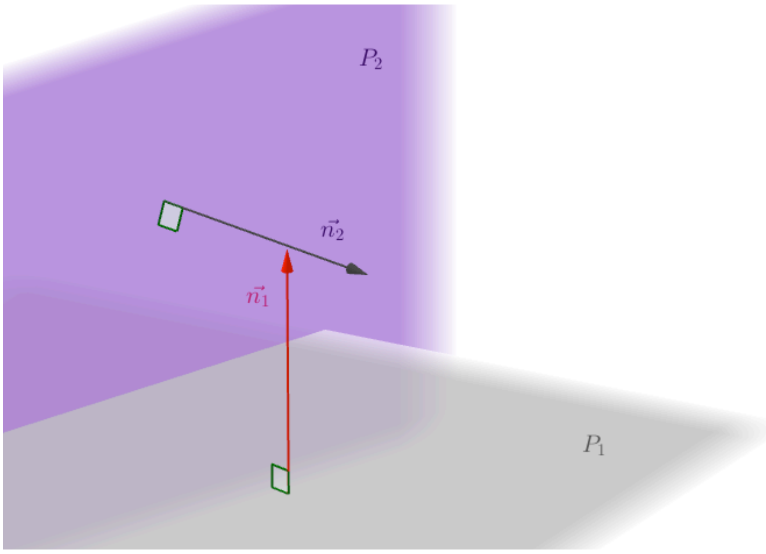
$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=t\\z=-2y+t+5\\-y-6y+3t+15=1-2t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=t\\z=-2y+t+5\\-7y=-14-5t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=t\\y=2+\frac{5}{7}t\\z=-2\left(2+\frac{5}{7}t\right)+t+5\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=t\\y=2+\frac{5}{7}t\\z=1-\frac{3}{7}t\end{cases}$$

Ce dernier système est une représentation paramétrique de *d*, avec $t\in\mathbb{R}$.

Propriété : Deux plans sont perpendiculaires lorsqu'un vecteur normal de l'un est orthogonal à un vecteur normal de l'autre.

- Admis -



Méthode : Démontrer que deux plans sont perpendiculaires

Vidéo https://youtu.be/okvo1SUtHUc

Dans un repère orthonormé, les plans *P* et *P'* ont pour équations respectives $2x+4y+4z-3=0$ et $2x-5y+4z-1=0$.

Démontrer que les plans *P* et *P'* sont perpendiculaires.

Les plans *P* et *P'* sont perpendiculaires si et seulement si un vecteur normal de l'un est orthogonal à un vecteur normal de l'autre.

Un vecteur normal de *P* est $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix}$ et un vecteur normal de *P'* est $\vec{n}'\begin{pmatrix}2\\-5\\4\end{pmatrix}$.

$\vec{n}.\vec{n}'=2\times2+4\times(-5)+4\times4=0$

Les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont orthogonaux donc les plans *P* et *P'* sont perpendiculaires.