Chapitre I
Éléments de logique

Le but de ce chapitre est d'introduire les bases de la branche des mathématiques appelée **logique**.
On distingue deux types de logique : la logique des propositions, qui définit les lois formelles du raisonnement, et la logique des prédicats, qui formalise le langage des mathématiques en s'autorisant l'usage de quantificateurs.
Pour définir formellement et proprement ce langage, nous devons distinguer la syntaxe de la sémantique.
La **syntaxe** décrit comment on écrit les formules.
La **sémantique** décrit leur sens, en attribuant aux variables une valeur (vrai ou faux) et en déduisant, à l'aide de règles de calcul, la valeur des formules.
On terminera le chapitre par l'étude de quelques techniques fondamentales de preuves mathématiques.

I- Calcul des propositions

A- Syntaxe

Définition 1 : Variables propositionnelles

Une **variable propositionnelle** est un énoncé indécomposable, dont on peut affirmer sans ambiguïté qu'il est vrai ou faux.

Exemples :

- « 4 est un nombre impair ».
- « $3 \times 2 = 6$ ».

Remarque :

Cette définition exclut l'énoncé « cette phrase est fausse », connu sous le nom de **paradoxe du menteur**.
En effet si cette phrase est vraie cela signifie que l'énoncé est faux, mais si elle fausse cela signifie que l'énoncé est vrai. Il y a donc ambiguïté.

Définition 2 : Alphabet

L'**alphabet** de la logique propositionnelle est constitué :

- de constantes Faux (noté $\perp$) et Vrai (noté $\top$) ;
- de variables propositionnelles nombre dénombrable, représentées par les lettres minuscules a, b, c . . . ;
- d'un connecteur logique unaire $\neg$ (connecteur de négation) ;
- de quatre connecteurs logiques binaires :
  - $\wedge$ (connecteur de conjonction ET) ;
  - $\vee$ (connecteur de disjonction OU) ;
  - $\rightarrow$ (connecteur d'implication) ;
  - $\leftrightarrow$ (connecteur d'équivalence).
- de séparateurs (et).

Remarque :

La conjonction de coordination OU mérite quelques mots d'explication en plus.
On distingue le :

- OU inclusif ($\vee$) : au moins l'une des propositions doit être vraie.
  Par exemple, « une résidence accueille des personnes malades ou âgées ».
- OU exclusif ($\oplus$) : l'une des proposition est vraie mais pas les deux en même temps.
  Par exemple, « j'irai travailler en train ou en voiture ».

Définition 3: Formules propositionnelles

Une **formule propositionnelle** se définit à l'aide des règles suivantes :

- Toute constante est une formule propositionnelle ;
- Toute variable propositionnelle est une formule propositionnelle ;

  } Formules atomiques
- Si F est une formule propositionnelle, alors ($\neg$F) est une formule propositionnelle ;
- Si F_1 et F_2 sont des formules propositionnelles, alors :
  - $(F_1 \wedge F_2)$ est une formule propositionnelle ;
  - $(F_1 \vee F_2)$ est une formule propositionnelle ;
  - $(F_1 \rightarrow F_2)$ est une formule propositionnelle.

Exemple :

« Le soleil brille et il y a du vent » est une formule propositionnelle constituée de 2 variables propositionnelles : « le soleil brille » et « il y a du vent »

.

Remarque :

Les connecteurs $\top$et $\leftrightarrow$ sont superfétatoires puisque $\top$abrévie $\neg\bot$et $\leftrightarrow$ abrévie $(a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)$.

L'expression infixe des formules logiques nécessite bien évidemment l'usage de parenthèses pour lever toute ambiguïté sémantique, mais les règles de priorité usuelles entre opérateurs permettent d'éviter d'en écrire un trop grand nombre.

Dans la suite de ce cours, on conviendra que :

- L'ordre de priorité des connecteurs est le suivant :
  - l'opérateur de négation $\neg$ a priorité sur les autres.
  - la conjonction $\wedge$ a priorité sur la disjonction $\vee$.
  - la disjonction $\vee$ a priorité sur l'implication $\rightarrow$.
  - l'implication $\rightarrow$ a priorité sur l'équivalence $\leftrightarrow$.
- Les opérateurs de conjonction $\wedge$ et de disjonction $\vee$ sont associatifs à gauche :
  - $a \wedge b \wedge c$ est interprété comme $(a \wedge b) \wedge c$
  - $a \vee b \vee c$ est interprété comme $(a \vee b) \vee c$.

Remarque :

Les parenthèses permettent de contrecarrer ces règles, si elles ne conviennent pas.
Elles permettent aussi de rendre une formule plus lisible ou de ne pas devoir retenir les règles de priorité.

Exercice 1

Simplifier les formules propositionnelles suivantes :

1 $\Big(\big((\neg a) \wedge b\big) \vee c\Big) \rightarrow (a \wedge c)$.

2 $\big((\neg a) \rightarrow b\big) \vee \big(a \leftrightarrow (b \wedge c)\big)$.

Correction :

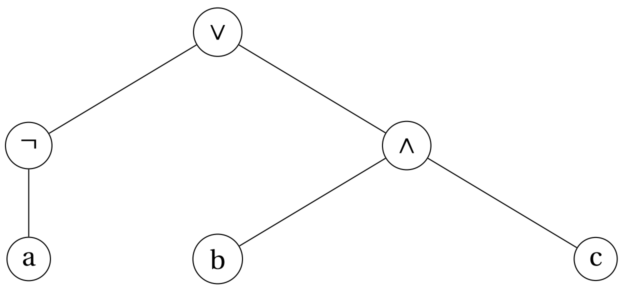
1 $\neg a \vee b \wedge c \rightarrow (a \wedge c)$.

2 $(\neg a \rightarrow b) \vee (a \leftrightarrow b \wedge c)$.

Notons que de la définition d'une formule propositionnelle découle naturellement son **arbre d'expression**.

Exemple :

La formule $neg(a) \vee \big((b) \wedge (c)\big)$, qui s'écrit $\neg a \vee b \wedge c)$ a pour arbre d'expression :



B- Sémantique

Définition 4: Valeurs de vérité

Une **valeur de vérité** est la propriété d'une formule propositionnelle d'être vraie (valeur 1) ou fausse (valeur 0).
L'ensemble des valeurs de vérité est noté $\mathbb{B} = \{0, 1\}$

ATTENTION :

Ne pas confondre les symboles $\top$ et $\perp$ qui appartiennent au langage propositionnel et les valeurs de vérité 1 (valeur vrai) et 0 (valeur faux) qui sont des objets mathématiques associés et appartiennent à la sémantique.

À chaque connecteur logique est associé une **fonction d'interprétation**, définie par sa table de vérité.

Connecteur unaire

Définition 5: Négation

La **négation** d'une variable propositionnelle a est la variable propositionnelle, notée $\neg a$, qui a des valeurs logiques opposées à celles de a.

La fonction d'interprétation du connecteur $\neg$ est $f_\neg : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}$, dont la table de vérité est :

a	$f_\neg(a)$
0	1
1	0

Connecteurs binaires

Définition 6: Connecteur logique binaire

Un **connecteur logique binaire** permet de relier deux variables propositionnelles pour en former une nouvelle.

Il existe $2^4 = 16$ connecteurs logique binaires différents mais nous en privilégierons 4 principaux et 3 spécifiques à l'informatique.

Définition 7: Conjonction

On appelle **conjonction** des variables propositionnelles a et b, la variable propositionnelle, notée $a \wedge b$, qui est vraie si a est vraie et b est vraie et, est fausse sinon.

Exemple :

Si a est la variable propositionnelle « Cette carte est un as » et b la variable propositionnelle « Cette carte est un cœur » alors la variable propositionnelle $a \wedge b$ est vraie si la carte est l'as de cœur et est fausse pour toute autre carte.

La fonction d'interprétation du connecteur $\wedge$ est $f_\wedge : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}$, dont la table de vérité est :

a	b	$f_\wedge(a,b)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Exercice 2

Montrer le principe de non-contradiction : $a \wedge \neg a$ est faux.

Correction :

a	$\neg a$	$f_\wedge(a, \neg a)$
0	1	0
1	0	0

Définition 8: Disjonction

On appelle **disjonction** des variables propositionnelles a et b, la variable propositionnelle, notée $a \vee b$, qui est fausse si a est fausse et b est fausse et, est vraie sinon.
Autrement dit, $a \vee b$ est vraie si l'une, au moins, des deux variables propositionnelles a ou b est vraie.

Exemple :

Si a est la variable propositionnelle « Cette carte est un as » et b la variable propositionnelle « Cette carte est un cœur » alors la variable propositionnelle $\vee b$ est vraie si la carte est un as ou bien un cœur (en particulier elle est vraie pour l'as de cœur).

La fonction d'interprétation du connecteur $\vee$ est $f_\vee : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}$, dont la table de vérité est :

a	b	$f_\vee(a,b)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Remarque :

Cette disjonction est qualifiée d'inclusive car elle est vraie aussi dans le cas où les deux propositions concernées sont vraies.
Elle est à opposer à la disjonction exclusive qui n'est vraie que si une seule des deux propositions concernée est vraie (cf. plus bas XOR).

Exercice 3

Montrer le principe du tiers exclu : $a \vee \neg a$ est vrai.

Correction :

a	$\neg a$	$f_\vee(a, \neg a)$
0	1	1
1	0	1

Définition 9: Implication

On appelle **implication** de la variable propositionnelle a par la variable propositionnelle b, la variable propositionnelle, notée $a \rightarrow b$, qui est fausse si a est vraie et b est fausse et, est vraie sinon.

Exemple :

Si a est la variable propositionnelle « le quadrilatère ABCD est un losange » et b la variable propositionnelle « AB = BC » alors :

- ➢ la proposition $a \rightarrow b$ est la variable propositionnelle vraie « si le quadrilatère ABCD est un losange, alors AB = BC ».
- ➢ la proposition $a \rightarrow b$ est la variable propositionnelle fausse « si AB = BC alors le quadrilatère ABCD est un losange ».

Remarque :

En langage courant, l'implication correspond au raisonnement SI ... ALORS.

La fonction d'interprétation du connecteur $\rightarrow$ est $f_{\rightarrow} : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}$, dont la table de vérité est :

a	b	$f_{\rightarrow}(a,b)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

ATTENTION :

« $2+2=5 \rightarrow \sqrt{2}=2$ » **est vraie car si la variable propositionnelle** a **est fausse alors** $a \rightarrow b$ **est toujours vraie.**

Exercice 4

1. Construire la table de vérité de $\neg a \vee b$ et conclure.
2. La formule propositionnelle $a \wedge b \rightarrow \neg a \vee b$ est-elle vraie ?

Correction :

1. *$\neg a \vee b$ peut remplacer $a \rightarrow b$ puisque leurs tables de vérité sont identiques.*

a	$\neg a$	b	$f_{\vee}(\neg a, b)$
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1

2. *La formule propositionnelle $a \wedge b \rightarrow \neg a \vee b$ est vraie, puisque :*

a	b	$f_{\wedge}(a,b)$	$f_{\vee}(\neg a, b)$	$f_{\rightarrow}(a \wedge b, \neg a \vee b)$
0	0	0	1	1
0	1	0	1	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

Définition 10: Équivalence

On appelle **équivalence** des variables propositionnelles a et b, la variable propositionnelle, notée $a \leftrightarrow b$, qui est vraie si a et b ont la même valeur logique et, est fausse sinon.

Exemple :

Si a est la variable propositionnelle « le quadrilatère ABCD est un losange » et b la variable propositionnelle « AB = BC = CD = DA » alors la proposition $a \leftrightarrow b$ est la variable propositionnelle vraie « Le quadrilatère ABCD est un losange si et seulement si AB = BC = CD = DA ».

Remarque :

En langage courant, l'implication correspond au raisonnement SI ET SEULEMENT SI.

La fonction d'interprétation du connecteur $\leftrightarrow$ est $f_{\leftrightarrow} : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}$, dont la table de vérité est :

a	b	$f_{\leftrightarrow}(a,b)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Exercice 5

Montrer que $a \leftrightarrow \neg a$ est fausse.

Correction :

a	$\neg a$	$f_{\leftrightarrow}(a,\neg a)$
0	1	0
1	0	0

Remarque :

On s'intéresse davantage aux propositions vraies qu'aux fausses.
Dans la pratique, on écrira $a \leftrightarrow b$ uniquement lorsque la variable propositionnelle est vraie. Toutefois, rien ne dit que a et b soient vraies, cela signifie uniquement que a et b sont vraies en même temps ou fausses en même temps.

À ces quatre opérateurs binaires, on rajoutera le XOR ($\oplus$ou exclusif), le NAND ($\barwedge$ non et) et le NOR ($\veebar$ non ou), peu usités en mathématique mais beaucoup plus en informatique, et définis par l'intermédiaire des tables de vérité suivantes :

a	b	$f_{\oplus}(a,b)$	$f_{\barwedge}(a,b)$	$f_{\veebar}(a,b)$
0	0	0	1	1
0	1	1	1	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0

Définition 11 : Valuation

Une **valuation** v définit la valeur de vérité des variables propositionnelles :

$$v : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{B}$$

Toute valuation v se prolonge de façon unique en une interprétation sur les formules propositionnelles ϕ :

$$[\![\phi]\!] : (\mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{B}) \longleftrightarrow \mathbb{B}$$

Soit v une valuation.

- $[\![\bot]\!]_v = 0$
- Si a une variable propositionnelle, alors $[\![a]\!]_v = v(a)$.

Théorème 1: Interprétation

Soit v une valuation. Soient ϕ et ψ deux formules propositionnelles.
Alors :

- $[\![\neg\phi]\!]_v = f_\neg([\![\phi]\!]_v) = 1 - [\![\phi]\!]_v$
- $[\![\phi \wedge \psi]\!]_v = f_\wedge([\![\phi]\!]_v, [\![\psi]\!]_v) = \min\big([\![\phi]\!]_v, [\![\psi]\!]_v\big)$
- $[\![\phi \vee \psi]\!]_v = f_\vee([\![\phi]\!]_v, [\![\psi]\!]_v) = \max\big([\![\phi]\!]_v, [\![\psi]\!]_v\big)$
- $[\![\phi \to \psi]\!]_v = f_\to([\![\phi]\!]_v, [\![\psi]\!]_v)$
- $[\![\phi \leftrightarrow \psi]\!] = 1$ si et seulement si $[\![\phi]\!] = [\![\psi]\!]$

Exemple :

Pour l'interprétation $v(a) = 1$ et $v(b) = 0$, on a :

$$\begin{aligned}
[\![(a \wedge b) \vee \neg b \to \neg a]\!]_v &= f_\to\Big(f_\vee\big(f_\wedge(v(a), v(b)), f_\neg(v(b))\big), f_\neg(v(a))\Big) \\
&= f_\to\big(f_\vee(f_\wedge(1,0), f_\neg(0)), f_\neg(1)\big) \\
&= f_\to(f_\vee(0,1), 0) \\
&= f_\to(1,0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Exemple :

Pour l'interprétation $v(a) = 0$ et $v(b) = 1$, on a $[\![\neg(a \vee b) \leftrightarrow (\neg a \wedge \neg b)]\!]_v = 1$ puisque :

$$[\![\neg(a \vee b) \leftrightarrow (\neg a \wedge \neg b)]\!]_v = 1 \text{ si et seulement si } [\![\neg(a \vee b)]\!]_v = [\![\neg a \wedge \neg b]\!]_v$$

$$\begin{aligned}
[\![\neg(a \vee b)]\!]_v &= 1 - [\![a \vee b]\!]_v \\
&= 1 - \max\big([\![a]\!]_v, [\![b]\!]_v\big) \\
&= 1 - \max\big(v(a), v(b)\big) \\
&= 1 - \max(0,1) \\
&= 1 - 1 \\
&= 0
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
[\![\neg a \wedge \neg b]\!]_v &= \min([\![\neg a]\!]_v, [\![\neg b]\!]_v) \\
&= \min\big(1 - [\![a]\!]_v, 1 - [\![b]\!]_v\big) \\
&= \min\big(1 - v(a), 1 - v(b)\big) \\
&= \min(1-0, 1-1) \\
&= \min(1,0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Remarques :

- Une formule composée de n variables propositionnelles admet 2^n interprétations.
- La valeur de vérité associée, par une interprétation, à une formule ϕ dépend uniquement des valeurs de vérité assignées par l'interprétation à chacune des variables de ϕ.

Exemple :

La formules $\neg a \to \neg b$ admet les 4 interprétations suivantes :

$v(a)$	$v(b)$	$[\![\neg a \to \neg b]\!]_v$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Exercice 6

Construire la table de vérité des formules propositionnelles suivantes :

1. $a \wedge \neg b \vee c$
2. $\neg(\neg a \vee b) \wedge c$

C- Théorie des modèles

Définition 12: Satisfait ou falsifie

Une interprétation $[\![.]\!]_v$ **satisfait** (respectivement **falsifie**) une formule ϕ lorsque $[\![\phi]\!] = 1$ (respectivement $[\![\phi]\!] = 0$).

Définition 13: Modèle ou contre-modèle d'une formule

On appelle un **modèle** (respectivement **contre-modèle**) d'une formule ϕ, toute interprétation qui satisfait (respectivement falsifie)ϕ

Définition 14: Cohérence

Toute formule ayant au moins un modèle est dite **cohérente** (ou satisfaisable).
Toute formule n'ayant aucun modèle est dite **incohérente** (ou insatisfaisable).

Définition 15: Validité

Toute formule n'ayant aucun contre-modèle est dite **valide**.
Toute formule ayant au moins un contre-modèle est dite **invalide**.

Formules valides	Formules cohérentes mais non valides	Formules incohérentes
$a \to a$ Tautologie (vraie pour toute interprétation)	$a \to \neg a$ Formule contingente (vraie pour certaines interprétations et fausse pour d'autres)	$a \wedge \neg a$ Anti-tautologie (fausse pour toute interprétation)

Remarque :

Si ϕ est une formule propositionnelle, alors :

- ϕ valide entraîne ϕ cohérente,
- ϕ incohérente entraîne ϕ invalide,

Théorème 2

Soit ϕ une formule propositionnelle.
Alors ϕ est valide si et seulement si $\neg\phi$ est incohérente.

Démonstration :
Si $\neg\phi$ est cohérente, alors ϕ admet au moins un contre-modèle, donc est invalide.
Si $\neg\phi$ est incohérente, alors ϕ n'admet aucun contre-modèle, donc est valide. □

Remarque :

Déterminer si une formule est valide est « aussi difficile » que de déterminer si elle est cohérente (problèmes NP-complet).

Première méthode pour déterminer si une formule est valide, cohérente

Tester toutes les interprétations

Soit la formule $(a \to b) \to (\neg a \to \neg b)$
Alors :

$v(a)$	$v(b)$	$[\![a \to b]\!]_v$	$[\![\neg a \to \neg b]\!]_v$	$[\![(a \to b) \to (\neg a \to \neg b)]\!]_v$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

La formule est cohérente, mais pas valide.

Remarque :

Une seconde méthode sera précisée dans la section **III- Techniques de raisonnement**.

Définition 16: Conséquence logique

La formule ψ est **la conséquence valide** de la formule ϕ, notée $\phi \models \psi$, si et seulement si tout modèle de ϕ est un modèle de ψ.

Exemple :

$a \wedge b \models a \to b$

Remarque :

Si v est une valuation et ϕ une formule propositionnelle, alors $v \models \phi$ si et seulement si $[\![\phi]\!]_v = 1$ (i.e. v satisfait ϕ).

Théorème 3

Soient ϕ et ψ deux formules propositionnelles.
Alors

$$\phi \models \psi \text{ si et seulement si } \phi \to \psi \text{ est une formule valide.}$$

Définition 17: Équivalence sémantique

Deux formules ϕ et ψ sont **sémantiquement équivalentes**, noté $\phi \equiv \psi$, si et seulement si $\phi \models \psi$ et $\psi \models \phi$.

Remarque :

Deux formules sont équivalentes quand elles ont même valeur pour toute interprétation ($[\![\phi]\!]_v = [\![\psi]\!]_v$ pour tout valuation v).

ATTENTION :

Les symboles $\models$ et $\equiv$ ne font pas partie de la logique : ce sont tous des symboles métalogiques qui permettent d'exprimer des propriétés qu'on a démontrées en dehors de la syntaxe du calcul des propositions (par exemple en lisant les tables de vérité).
On fera surtout attention à ne pas confondre $p \to q$ et $p \leftrightarrow q$, qui sont des variables propositionnelles du calcul des propositions, avec $p \models q$ et $p \equiv q$.

Soient ϕ, ψ et θ trois formules propositionnelles.
Alors :

Théorème 4

La relation $\equiv$ est une relation d'équivalence :

- Réflexivité : $\phi \equiv \phi$.
- Symétrie : Si $\phi \equiv \psi$ alors $\psi \equiv \phi$.
- Transitivité : Si $\phi \equiv \psi$ et $\psi \equiv \theta$ alors $\phi \equiv \theta$.

Démonstration :

- $\phi \equiv \phi$ puisque $[\![\phi]\!] = [\![\phi]\!]$.
- Si $\phi \equiv \psi$ alors $\psi \equiv \phi$ puisque si $[\![\phi]\!] = [\![\psi]\!]$, alors $[\![\psi]\!] = [\![\phi]\!]$.
- Si $\phi \equiv \psi$ et $\psi \equiv \theta$ alors $\phi \equiv \theta$ puisque si $[\![\phi]\!] = [\![\psi]\!]$ et $[\![\psi]\!] = [\![\theta]\!]$, alors $[\![\phi]\!] = [\![\theta]\!]$.

□

Théorème 5: Involution

$$\neg\neg\phi \equiv \phi$$

Théorème 6: Éléments neutres

$$\phi \wedge \top \equiv \phi$$
$$\phi \vee \bot \equiv \phi$$

Théorème 7: Éléments absorbants

$$\phi \wedge \bot \equiv \bot$$
$$\phi \vee \top \equiv \top$$

Théorème 8: Idempotence

$$\phi \wedge \phi \equiv \phi$$
$$\phi \vee \phi \equiv \phi$$

Théorème 9: Complémentarité

$$\phi \wedge \neg\phi \equiv \bot$$
$$\phi \vee \neg\phi \equiv \top$$

Théorème 10: Commutativité

$$\phi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \phi$$
$$\phi \vee \psi \equiv \psi \vee \phi$$
$$\phi \leftrightarrow \psi \equiv \psi \leftrightarrow \phi$$

Théorème 11: Associativité

$$\phi \wedge (\psi \wedge \theta) \equiv (\phi \wedge \psi) \wedge \theta$$
$$\phi \vee (\psi \vee \theta) \equiv (\phi \vee \psi) \vee \theta$$
$$\phi \leftrightarrow (\psi \leftrightarrow \theta) \equiv (\phi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow \theta$$

ATTENTION :

L'implication n'est ni commutative ni associative.

Théorème 12: Distributivité

$$\phi \wedge (\psi \vee \theta) \equiv (\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \theta)$$
$$\phi \vee (\psi \wedge \theta) \equiv (\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \theta)$$

Exercice 7

Démontrer le théorème de la distributivité des opérateurs $\wedge$ et $\vee$.

Théorème 13: Lois de Morgan

$$\neg(\phi \wedge \psi) \equiv \neg\phi \vee \neg\psi$$
$$\neg(\phi \vee \psi) \equiv \neg\phi \wedge \neg\psi$$

Exercice 8

Démontrer les lois de Morgan.

Théorème 14: Transposition

$$\phi \to \psi \equiv \neg\psi \to \neg\phi$$

Définition 18: Contraposée d'une implication

La **contraposée d'une implication** $\phi \to \psi$ est l'implication $\neg\psi \to \neg\phi$.

Remarque :

Considérons les formules propositionnelles $\phi =$« c'est un rectangle » et $\psi =$« il a quatre angles droits ».
L'implication $\phi \to \psi$ se lit alors « si c'est un rectangle alors il quatre angles trois ».
L'implication contraposée se lit « s'il n'a pas quatre angles droits, alors ce n'est pas un rectangle ».
Comme $\phi \to \psi$ et $\neg\psi \to \neg\phi$ sont sémantiquement équivalentes, nous pouvons, pour démontrer une implication, à la place démontrer sa contraposée.

Définition 19: Réciproque d'une implication

La **réciproque d'une implication** $\phi \to \psi$ est l'implication $\psi \to \phi$.

Remarque :

Considérons les formules propositionnelles $\phi =$« n est un nombre entier » et $\psi =$« n est un nombre réel ».
L'implication $\phi \to \psi$ est vraie, puisque tout nombre entier est aussi un nombre réel.
On peut maintenant se demander si la réciproque $\psi \to \phi$ est vraie. Cette implication est fausse, puisque $\frac{1}{2}$ est un nombre réel, mais pas un nombre entier.

Théorème 15: Exportation

$$\phi \wedge \psi \to \theta \equiv \psi \to (\psi \to \theta)$$

D- Éléments de modélisation

Considérons la proposition à modéliser :

« S'il pleut alors il y a des nuages. »

Déterminons les conventions d'interprétation :

- Identification des variables propositionnelles :
  - p : « il pleut »
  - n : « il y a des nuages »
- Sémantique des variables propositionnelles :

	oui	non
Il pleut	$[\![p]\!]_v = 1$	$[\![p]\!]_v = 0$
Il y a des nuages	$[\![n]\!]_v = 1$	$[\![n]\!]_v = 0$

Il s'agit de trouver une formule propositionnelle Σ telle que $[\![\Sigma]\!]_v = 0$ si et seulement si l'interprétation est en contradiction avec la proposition à modéliser.

La formule modélisant la proposition est $\Sigma\ :\ p \to n$.

II- Calculs des prédicats

Le calcul des prédicats est considéré comme une extension du calcul propositionnel qui donne la possibilité d'introduire en même temps que les variables propositionnelles d'autres variables appartenant à un domaine arbitraire (ensemble d'objets quelconques). Cette extension est obtenue grâce à l'introduction des deux quantificateurs $\forall$ et $\exists$.

Prenons le problème suivant :

Tout homme est mortel.
Socrate est un homme.
Donc, Socrate est mortel.

Nous sommes capables de traduire cet énoncé, en logique des propositions.
Notons :

- a = « Tout homme est mortel »
- b = « Socrate est un homme »
- c = « Socrate est mortel »

Le problème s'écrit alors, en logique des propositions, $a \wedge b \to c$.

Remarque :

Cette traduction est correcte., mais elle est de piètre qualité.
En effet, il n'échappera à personne que le raisonnement de départ était valide mais que sa traduction ne l'est pas (bien qu'elle soit satisfiable).

A- Syntaxe

Définition 20: Prédicat

Un **prédicat** est une propriété (ou relation) qui porte sur un ou plusieurs éléments d'un domaine $\mathbb{D}$.
C'est une fonction de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{B} = \{0, 1\}$.

Le problème précédent peut être traduit de manière adéquate en logique des prédicats :

- Hypothèse 1 : Quelque soit x appartenant au domaine $\mathbb{D}$, si x est un homme, alors x est mortel (noté $\forall x(\mathrm{H}(x) \rightarrow \mathrm{M}(x))$) ;
- Hypothèse 2 : Socrate à la propriété d'être un homme (noté H(Socrate)) ;
- Conclusion : Socrate à la propriété d'être mortel (noté M(Socrate)).

Dans cet exemple, nous avons utilisé deux prédicats (H et M), une constante (Socrate), une variable (x) et le quantificateur universel ($\forall$).
Comme nous le verrons, plus tard, ce raisonnement, ainsi formalisé en logique des prédicats, sera valide.

Définition 21: Signature

Une **signature** Σ contient :

- Un ensemble dénombrable de symboles de fonctions $\Sigma_F = \{f, g, h, \ldots\}$, ayant chacune un nombre d'arguments (**une arité**) non nul fixé ;
- Un ensemble dénombrable de symboles de prédicats $\Sigma_P = \{p, q, r, \ldots\}$,ayant chacun une arité non nulle fixée.

Définition 22: Alphabet

L'**alphabet** du langage du calcul des prédicats est constitué :

- de constantes ;
- de variables, qui appartiennent à l'ensemble $\mathbb{D}$ des individus de l'interprétation (**le domaine**) ;
- d'une signature ;
- de connecteurs logiques $\neg$; $\wedge$; $\vee$; $\rightarrow$ et $\leftrightarrow$;
- de quantificateurs logiques universels $\forall$ et existentiels $\exists$;
- de séparateurs (;) et |.

Remarque :

On pourra être amené à utiliser le quantificateur $\exists!$ lorsqu'il existe un unique élément, c'est-à-dire pour exprimer l'unicité en plus de l'existence.

Définition 23: Termes du calcul des prédicats

Les **termes du calcul des prédicats** sont définis comme suit :

- Les variables et les constantes sont des termes.
- Si f est un prédicat d'arité $n \in \mathbb{N}$ et si $t_1, t_2, \dots t_n$ sont n termes, alors $f_i(t_1, t_2, \dots, t_n)$ est un terme du calcul des prédicats.

Exemple :

Soit $f(x, y) = 2x + y = 5$ un prédicat d'arité 2.

- Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ deux variables.
  Alors $f(a, b)$ est un terme du calcul des prédicats.
- Soit $a_0 = 1$ et $b_0 = 2$ deux constantes et $a_1 = 2$ et $b_1 = 1$ deux autres constantes.
  Alors $f(a_0, b_0)$ et $f(a_1, b_1)$ sont des termes du calcul des prédicats.

  De plus, $f(a_0, b_0)$ est une proposition fausse et $f(a_1, b_1)$ est une proposition vraie.

Définition 24: Formule atomique du calcul des prédicats

Une **formule atomique du calcul des prédicats**. est définie par :

- Soit f un prédicat d'arité 0.
  Alors f une formule atomique : c'est une variable propositionnelle.
- Soit f un prédicat d'arité $n > 0$.
  Soient n termes $t_1, t_2, \dots, t_n$.
  Alors $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ est une formule atomique.

Définition 25: Formules du calcul des prédicats

Les **formules du calcul des prédicats** (bien formées) sont obtenues à partir des formules atomiques comme suit :

- Une formule atomique est une formule.
- Si F est une formule alors $(\neg F)$ est une formule.
- Si F_1 et F_2 sont deux formules alors :
  - $(F_1 \wedge F_2)$ est une formule ;
  - $(F_1 \vee F_2)$ est une formule ;
  - $(F_1 \rightarrow F_2)$ est une formule.
- Si F est une formule et si x est une variable, alors :
  - $(\forall x F)$ est une formule ;
  - $(\exists x F)$ est une formule ;

Occurrences libres et liées d'une variable On définit inductivement par construction d'une formule les occurrences de **variables libres** et de **variables liées** dans une formule, et pour celles qui sont liées le quantificateur qui les lie.

Définition 26: Portée d'un quantificateur

➢ Soit la formule $(\forall x \quad \mathrm{F})$ (respectivement $(\exists x \quad \mathrm{F})$).
La formule F est dite **formule du champ du quantificateur** $\forall$ (respectivement $\exists$).
La variable x est dite **variable quantifiée par le quantificateur** $\forall$ (respctivement $\exists$).

Définition 27: Variable libre ou liée

Une occurrence d'une variable est **libre** si elle n'est dans la champ d'aucun quantificateur, sinon elle est **liée**.

Exemple :

Dans la formule $\forall y \left(\left(p(x) \vee \exists x\ p(x)\right) \wedge q(y)\right)$, la première occurrence de x est libre, tandis que la deuxième occurrence est liée. L'occurrence de y est liée.

Remarque :

Lorsque la formule est $(\forall x\mathrm{F})$ (respectivement $(\exists x\mathrm{F})$), les occurrences de variables liées situées dans F sont toujours liées et le sont par le quantificateur universel (respectivement existentiel).
Les occurrences libres de variables dans F autres que x restent libres, et les occurrences libres de x sont liées dans $(\forall x\mathrm{F})$ (respectivement $(\exists x\mathrm{F})$) et le sont par le quantificateur en tête de la formule.

Théorème 16

➢ Dans une formule atomique, toutes les occurrences des variables sont libres.

➢ Lorsque la formule est $(\neg\mathrm{F})$, les occurrences de variables situées dans F sont libres ou liées suivant qu'elles le sont dans la formule F et lorsqu'elles sont liées, elles le sont par le quantificateur situé dans F.

➢ Lorsque la formule est $(\mathrm{F}_1 \wedge \mathrm{F}_2)$ (ou $(\mathrm{F}_1 \vee \mathrm{F}_2)$ ou $(\mathrm{F}_1 \rightarrow \mathrm{F}_2)$), les occurrences de variables situées dans F_1 (respectivement F_2) sont libres ou liées suivant qu'elles le sont dans la formule F_1 (respectivement F_2) et lorsqu'elles sont liées, elles le sont par le quantificateur situé dans F_1 (respectivement F_2).

Exemple :

Soit la formule :

$$\left(\forall x \left(\mathrm{F}\big(g(x)\big) \to \left(\mathrm{H}\big(f(y,x),x\big) \vee \left(\exists x\ \mathrm{K}\big(g(x)\big)\right)\right)\right)\right) \wedge \left(\exists y \left(\mathrm{G}\big(f(x),y\big) \vee \mathrm{F}\big(g(y)\big)\right)\right)$$

Numérotons chaque quantificateur par un entier et attribuons cet entier en indice aux occurrences de variables qu'il lie.
Les variables libres seront alors celles sans indice.
Suivons la construction de la formule :

- $\mathrm{K}\big(g(x)\big)$ est une formule atomique donc toutes les occurrences de variables sont libres.
- $\left(\exists x_1\ \mathrm{K}\big(g(x_1)\big)\right)$: les occurrences libres de x dans $\mathrm{K}\big(g(x)\big)$ sont liées par $\exists x$ ajouté en tête.
- $\mathrm{H}\big(f(y,x),x\big)$ est une formule atomique donc toutes les occurrences de variables sont libres.
- $\left(\mathrm{H}\big(f(y,x),x\big)\right) \vee \left(\exists x_1\ \mathrm{K}\big(g(x_1)\big)\right)$: un connecteur logique ne change pas la nature des occurrences de variables, et les quantificateurs liant les occurrences liées restent les mêmes.
- $\mathrm{F}\big(g(x)\big)$ est une formule atomique donc toutes les occurrences de variables sont libres.
- $\left(\mathrm{F}\big(g(x)\big) \to \left(\mathrm{H}\big(f(y,x),x\big) \vee \left(\exists x_1\ \mathrm{K}\big(g(x_1)\big)\right)\right)\right)$: un connecteur logique ne change pas la nature des occurrences de variables, et les quantificateurs liant les occurrences liées restent les mêmes.
- $\left(\forall x_2 \left(\mathrm{F}\big(g(x_2)\big) \to \left(\mathrm{H}\big(f(y,x_2),x_2\big) \vee \left(\exists x_1\ \mathrm{K}\big(g(x_1)\big)\right)\right)\right)\right)$: les occurrences libres de x dans $\left(\mathrm{F}\big(g(x)\big) \to \left(\mathrm{H}\big(f(y,x),x\big) \vee \left(\exists x_1\ \mathrm{K}\big(g(x_1)\big)\right)\right)\right)$ sont liées par $\forall x$ ajouté en tête.
- $\mathrm{F}\big(g(y)\big)$ est une formule atomique donc toutes les occurrences de variables sont libres.
- $\mathrm{G}\big(f(x),y\big)$ est une formule atomique donc toutes les occurrences de variables sont libres.
- $\left(\mathrm{G}\big(f(x),y\big) \vee \mathrm{F}\big(g(y)\big)\right)$: un connecteur logique ne change pas la nature des occurrences de variables, et les quantificateurs liant les occurrences liées restent les mêmes.
- $\left(\exists y_3 \left(\mathrm{G}\big(f(x),y_3\big) \vee \mathrm{F}\big(g(y_3)\big)\right)\right)$: les occurrences libres de y dans $\left(\mathrm{G}\big(f(x),y\big) \vee \mathrm{F}\big(g(y)\big)\right)$ sont liées par $\exists y$ ajouté en tête.
- Le dernier ajout d'un connecteur logique $\wedge$ entre $\left(\forall x_2 \left(\mathrm{F}\big(g(x_2)\big) \to \left(\mathrm{H}\big(f(y,x_2),x_2\big) \vee \left(\exists x_1\ \mathrm{K}\big(g(x_1)\big)\right)\right)\right)\right)$ et $\left(\exists y_3 \left(\mathrm{G}\big(f(x),y_3\big) \vee \mathrm{F}\big(g(y_3)\big)\right)\right)$ ne change pas la nature des occurrences de variables, et les quantificateurs liant les occurrences liées restent les mêmes.

On peut réécrire la formule en une formule qui porte moins à confusion :

$$\left(\forall u \left(\mathrm{F}\big(g(u)\big) \to \left(\mathrm{H}\big(f(y,u),u\big) \vee \left(\exists v\ \mathrm{K}\big(g(v)\big)\right)\right)\right)\right) \wedge \left(\exists w \left(\mathrm{G}\big(f(x),w\big) \vee \mathrm{F}\big(g(w)\big)\right)\right)$$

B- Sémantique

Définition des quantificateurs

Définition 28: Quantificateur universel

Le **quantificateur universel**, noté $\forall$ et lu « pour tout » (ou « quelque soit », signifie que tous les éléments d'un ensemble possèdent une certaine propriété.

Exemple :

$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geqslant 0$ signifie que « Tous les nombres réels ont un carré supérieur ou égal zéro ».

Remarque :

La virgule signifie « tel que ».

Définition 29: Quantificateur existentiel

Le **quantificateur existentiel**, noté $\exists$ et lu « il existe au moins un », signifie qu'un élément au moins d'un ensemble possède une certaine propriété.

Exemple :

$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 \leqslant 0$ signifie que « Il existe au moins un nombre réel dont le carré est inférieur ou égal à zéro ».

Association de plusieurs quantificateurs

On peut faire succéder plusieurs quantificateurs dans un même énoncé mathématique, mais le sens de la formule dépendra de l'ordre dans lequel figurent ces quantificateurs.
Exemples :

- $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x < y$ est une formule fausse puisqu'elle signifie qu'il existe au moins un réel strictement plus petit que tous les autres réels.
- $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, x < y$ est une formule vraie puisqu'elle signifie que pour tout réel y, il existe au moins un réel x qui lui est strictement inférieur (prendre par exemple $x = y - 1$).

Théorème 17

Les quantificateurs de **même nature** peuvent être permutés tout en conservant le sens de la proposition.

Exemple :

Soit x un mouton du troupeau de moutons E et y une couleur parmi les couleurs F blanche et noire. Soit $p(x, y)$ la formule « le mouton x est de la couleur y ».

➢ Quantificateur universel en tête :

- ★ $\forall x \in E, \forall y \in F, p(x, y)$: Quel que soit le mouton x du troupeau E, alors quelle que soit la couleur y parmi toutes les couleurs de F, on peut affirmer que le mouton x est de couleur y. Autrement dit, tous les moutons sont noirs et blancs.
- ★ $\forall y \in F, \forall x \in E, p(x, y)$: Quelle que soit la couleur y parmi toutes les couleurs de F, alors quel que soit le mouton x du troupeau E, on peut affirmer que le mouton x est de couleur y. Autrement dit, toutes les couleurs sont portées par tous les moutons.

Les deux propositions ont le même sens.

- ★ $\forall x \in E, \exists y \in F, p(x, y)$: Quel que soit le mouton x du troupeau E, alors il existe une couleur y parmi toutes les couleurs de F, telle que l'on peut affirmer que le mouton x est de couleur y. Autrement dit, chaque mouton est d'une des deux couleurs.
- ★ $\forall y \in F, \exists x \in E, p(x, y)$: Quelle que soit la couleur y parmi toutes les couleurs de F, il existe un mouton x du troupeau E, tel que l'on peut affirmer que le mouton x est de couleur y. Autrement dit, chaque couleur se trouve au moins sur un mouton.

Les deux propositions ont un sens différent.

➢ Quantificateur existentiel en tête :

- ★ $\exists x \in E, \forall y \in F, p(x, y)$: Il existe un mouton x du troupeau E, tel que quelle que soit la couleur y parmi toutes les couleurs de F, on peut affirmer que le mouton x est de couleur y. Autrement dit, au moins un des moutons est des deux couleurs.
- ★ $\exists y \in F, \forall x \in E, p(x, y)$: Il existe une couleur y parmi toutes les couleurs de F, telle que quel que soit le mouton x, on peut affirmer que le mouton x est de couleur y. Autrement dit, une couleur au moins est portée par chacun des moutons.

Les deux propositions ont un sens différent.

- ★ $\exists x \in E, \exists y \in F, p(x, y)$: Il existe un mouton x du troupeau E, tel qu'il existe une couleur y parmi toutes les couleurs de F, telle que l'on peut affirmer que le mouton x est de couleur y. Autrement dit, il existe un mouton qui a au moins l'une des couleurs
- ★ $\exists y \in F, \exists x \in E, p(x, y)$: Il existe une couleur y parmi toutes les couleurs de F, telle qu'il existe un mouton x du troupeau E, tel que l'on peut affirmer que le mouton x est de couleur y. Autrement dit, il existe une couleur qui est porté par au moins un des moutons.

Les deux propositions ont le même sens.

Négation d'une formule contenant un quantificateur

Théorème 18

- Négation d'une formule contenant le quantificateur universel :

$$\neg(\forall x, \mathrm{P}(x)) \text{ si et seulement si } \exists x, \neg \mathrm{P}(x)$$

- Négation d'une formule contenant le quantificateur existentiel :

$$\neg(\exists x, \mathrm{P}(x)) \text{ si et seulement si } \forall x, \neg \mathrm{P}(x)$$

Remarque :

Il s'agit d'un résultat de pur bon sens : la négation de "tous les étudiants travaillent" est "il existe au moins un étudiant qui ne travaille pas".

Comme pour le calcul des propositions, on va définir l'interprétation d'une formule en fonction de l'interprétation des formules atomiques.

Pour qu'une formule devienne vraie ou fausse, il faut non seulement dire comment s'interprètent les prédicats (ce qui est l'analogue d'interpréter les variables propositionnelles pour le calcul propositionnel) mais aussi ce que valent les variables.
En effet, les formules peuvent contenir des variables libres, et on a besoin de connaître leur valeur pour que la formule devienne vraie ou fausse.
Bien sûr la valeur des variables liées n'intervient en rien dans le calcul de la valeur d'une formule.

Définition 30: Interprétation d'une signature

Une **interprétation d'une signature** Σ est donnée par un triplet $(\mathbb{D}, \mathscr{I}_\mathrm{F}, \mathscr{I}_\mathrm{P})$ où :

- $\mathbb{D}$ est un domaine (ensemble) ;
- $\mathscr{I}_\mathrm{F}$ est une fonction qui envoie chaque fonction $f \in \Sigma_\mathrm{F}$ d'arité n vers

$$\mathscr{I}_\mathrm{F}(f) \ : \ \mathbb{D}^n \longrightarrow \mathbb{D}$$

- $\mathscr{I}_\mathrm{P}$ est une fonction qui envoie chaque prédicat $p \in \Sigma_\mathrm{P}$ d'arité n vers

$$\mathscr{I}_\mathrm{P}(p) \ : \ \mathbb{D}^n \longrightarrow \mathbb{B} = \{0, 1\}$$

Remarque :

Dans la suite, on notera simplement $\mathscr{I}$ une interprétation et $\mathbb{D}$ le domaine de l'interprétation $\mathscr{I}$.

Définition 31: Assignation de variables

Soit $\mathscr{I}$ une interprétation pour Σ ayant $\mathbb{D}$ comme domaine.
Soit χ un ensemble de variables.
Une **assignation** (ou valuation) dans $\mathscr{I}$ est une fonction $v \ : \ \chi \longrightarrow \mathbb{D}$.

Notation :

Si v est une assignation, alors on écrit $v[x := d]$ pour l'assignation qui vérifie :

$$v[x := d](y) = v(y) \text{ si } y \neq x$$
$$v[x := d](x) = d \text{ sinon}$$

Définition 32: Interprétation d'un terme

L'**interprétation d'un terme** t dans une interprétation $\mathcal{I}$ pour une assignation v, notée $[\![t]\!]_{\mathcal{I},v}$, est définie par récurrence comme suit :

- $[\![x]\!]_{\mathcal{I},v} = v(x)$
- $[\![f(t_1,\ldots,t_n)]\!]_{\mathcal{I},v} = \mathcal{I}(f)([\![t_1]\!]_{\mathcal{I},v},\ldots,[\![t_n]\!]_{\mathcal{I},v})$

Remarque :

Lorsque la fonction f est d'arité 0, alors $\mathcal{I}(f)$ est une fonction constante.

Définition 33: Interprétation d'une formule

L'**interprétation d'une formule** ϕ dans une interprétation $\mathcal{I}$ pour une assignation v, notée $[\![\phi]\!]_{\mathcal{I},v}$, est définie par récurrence comme suit :

- $[\![p(t_1,\ldots,t_n)]\!]_{\mathcal{I},v} = \mathcal{I}(p)([\![t_1]\!]_{\mathcal{I},v},\ldots,[\![t_n]\!]_{\mathcal{I},v})$
- Si F est une formule, alors $[\![\neg \mathrm{F}]\!]_{\mathcal{I},v} = f_\neg\left([\![\mathrm{F}]\!]_{\mathcal{I},v}\right)$
- Si F_1 et F_2 sont deux formules, alors :
  - ★ $[\![\mathrm{F}_1 \wedge \mathrm{F}_2]\!]_{\mathcal{I},v} = f_\wedge\left([\![\mathrm{F}_1]\!]_{\mathcal{I},v}\,,\ [\![\mathrm{F}_2]\!]_{\mathcal{I},v}\right)$
  - ★ $[\![\mathrm{F}_1 \vee \mathrm{F}_2]\!]_{\mathcal{I},v} = f_\vee\left([\![\mathrm{F}_1]\!]_{\mathcal{I},v}\,,\ [\![\mathrm{F}_2]\!]_{\mathcal{I},v}\right)$
  - ★ $[\![\mathrm{F}_1 \to \mathrm{F}_2]\!]_{\mathcal{I},v} = f_\to\left([\![\mathrm{F}_1]\!]_{\mathcal{I},v}\,,\ [\![\mathrm{F}_2]\!]_{\mathcal{I},v}\right)$
- Pour le quantificateur universel :

$$\begin{aligned}[\![\forall x, \mathrm{P}(x)]\!]_{\mathcal{I},v} &= 1 \text{ si pour tout } d \in \mathbb{D} \text{ tel que } [\![\mathrm{P}(x)]\!]_{\mathcal{I},v[x:=d]} = 1\\ &= 0 \text{ sinon.}\end{aligned}$$

- Pour le quantificateur existentiel :

$$\begin{aligned}[\![\exists x, \mathrm{P}(x)]\!]_{\mathcal{I},v} &= 1 \text{ si pour tout } d \in \mathbb{D} \text{ tel que } [\![\mathrm{P}(x)]\!]_{\mathcal{I},v[x:=d]} = 1\\ &= 0 \text{ sinon.}\end{aligned}$$

Remarque :

Lorsque le prédicat p est d'arité 0, alors $\mathcal{I}(p) \in \mathbb{B}$ c'est-à-dire est vrai ou faux.

Exemple :

Soit la formule :

$$\phi = \Big(\forall x\Big(\exists y\Big(p\big(x, f(y)\big)\Big) \vee p\big(y, f(x)\big)\Big)\Big)$$

.

Soit le domaine $D = \{a, b, c\}$

Soit la fonction f définie par $f(a) = a$, $f(b) = b$ et $f(c) = a$.

Soit l'interprétation v suivante :

x \ y	a	b	c
a	0	1	0
b	0	0	1
c	1	0	0

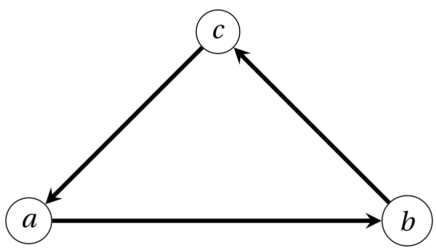
La relation p est vraie pour les couples (a,b) ; (b,c) et (c,a) et est fausse pour les autres.

Pour trouver $[\![\phi]\!]_v$, il faut considérer toutes les assignations de x et de y, soient 9 assignations :

- Pour $v_{aa} = v(a, a)$ on a $[\![\phi]\!]_{v_{aa}} = p(a, a) \vee p(a, a) = 0$
- Pour $v_{ab} = v(a, b)$ on a $[\![\phi]\!]_{v_{ab}} = p(a, b) \vee p(b, a) = 1$
- Pour $v_{ac} = v(a, c)$ on a $[\![\phi]\!]_{v_{ac}} = p(a, a) \vee p(c, a) = 1$
- Pour $v_{ba} = v(b, a)$ on a $[\![\phi]\!]_{v_{ba}} = p(b, a) \vee p(a, b) = 1$
- Pour $v_{bb} = v(b, b)$ on a $[\![\phi]\!]_{v_{bb}} = p(b, b) \vee p(b, b) = 0$
- Pour $v_{bc} = v(b, c)$ on a $[\![\phi]\!]_{v_{bc}} = p(b, a) \vee p(c, b) = 0$
- Pour $v_{ca} = v(c, a)$ on a $[\![\phi]\!]_{v_{ca}} = p(c, a) \vee p(a, a) = 0$
- Pour $v_{cb} = v(c, b)$ on a $[\![\phi]\!]_{v_{cb}} = p(a, b) \vee p(b, a) = 1$
- Pour $v_{cc} = v(c, c)$ on a $[\![\phi]\!]_{v_{cc}} = p(c, a) \vee p(c, a) = 1$

Remarque :

Le prédicat d'arité 2 $p(x, y)$ peut être interprété comme une traduction de l'expression « x précède immédiatement y » associé au schéma suivant :



C- Théorie des modèles

Définition 34: Satisfait ou falsifie

Une interprétation $\mathscr{I}$ **satisfait** une formule ϕ, si pour toute valuation $v \in \mathscr{I}$, $[\![\phi]\!]_{\mathscr{I},v} = 1$.
Une interprétation $\mathscr{I}$ **falsifie** une formule ϕ, s'il existe une valuation $v \in \mathscr{I}$, $[\![\phi]\!]_{\mathscr{I},v} = 0$.

Définition 35: Validité

Une formule ϕ est **valide** si toute interprétation $\mathscr{I}$ satisfait ϕ.

Définition 36: Conséquence logique d'un ensemble de formules

Une formule ϕ est **conséquence logique** d'un ensemble de formule $\mathscr{F}$, notée $\mathscr{F} \models \phi$, si toute interprétation qui satisfait $\mathscr{F}$, satisfait aussi ϕ.

Définition 37: Équivalence sémantique

Deux formules ϕ et ψ sont **sémantiquement équivalentes**, noté $\phi \equiv \psi$, si et seulement si $\{\phi\} \models \psi$ et $\{\psi\} \models \phi$.

Théorème 19: Conséquences logiques

Soit p un prédicat d'arité 2. Soient F_1 et F_2 deux formules du calcul des prédicats.

- $\exists y, \forall x, p(y,x) \quad \models \quad \forall x, \exists y, p(y,x)$
- $\exists x, (F_1 \wedge F_2) \quad \models \quad \exists x, F_1 \wedge \exists x, F_2$
- $\forall x, F_1 \vee \forall x, F_2 \quad \models \quad \forall x, (F_1 lor F_2)$

Théorème 20: Équivalences sémantiques

Soient F_1 et F_2 deux formules du calcul des prédicats.

- $\forall x, F_1 \quad \equiv \quad \neg\exists x, \neg F_1$
- $\neg\forall x, F_1 \quad \equiv \quad \exists x, \neg F_1$
- $\exists x, F_1 \quad \equiv \quad \neg\forall x, \neg F_1$
- $\neg\exists x, F_1 \quad \equiv \quad \forall x, \neg F_1$
- $\forall x, (F_1 \wedge F_2) \quad \equiv \quad \forall x, F_1 \wedge \forall x, F_2$
- $\exists x, (F_1 \vee F_2) \quad \equiv \quad \exists x, F_1 \vee \exists x, F_2$
- $\exists x, (F_1 \rightarrow F_2) \quad \equiv \quad \forall x, F_1 \rightarrow \exists x, F_2$
- $\forall x, \forall y, F_1 \quad \equiv \quad \forall y, \forall x, F_1$
- $\exists x, \exists y, F_1 \quad \equiv \quad \exists y, \exists x, F_1$

Théorème 21 : Équivalences sémantiques avec des variables libres

Soient F_1 et F_2 deux formules du calcul des prédicats. Soit x une variables libre de la formules F_1.

- $\forall x, F_1 \quad \equiv \quad \exists x, F_1 \quad \equiv \quad F_1$
- $\forall x, (F_1 \wedge F_2) \quad \equiv \quad F_1 \wedge \forall x, F_2$
- $\exists x, (F_1 \wedge F_2) \quad \equiv \quad F_1 \wedge \exists x, F_2$
- $\forall x, (F_1 \vee F_2) \quad \equiv \quad F_1 \vee \forall x, F_2$
- $\exists x, (F_1 \vee F_2) \quad \equiv \quad F_1 \vee \exists x, F_2$
- $\forall x, (F_1 \to F_2) \quad \equiv \quad F_1 \to \forall x, F_2$
- $\exists x, (F_1 \to F_2) \quad \equiv \quad F_1 \to \exists x, F_2$
- $\forall x, (F_2 \to F_1) \quad \equiv \quad \exists x, F_2 \to F_1$
- $\exists x, (F_2 \to F_1) \quad \equiv \quad \forall x, F_2 \to F_1$

Le calcul propositionnel dans le calcul des prédicats

Théorème 22

Si $\mathscr{F}$ est un ensemble de formules du calcul propositionnel et ϕ est une formule du calcul propositionnel, alors :

$$\mathscr{F} \models_{\text{Proposition}} \phi \text{ si et seulement si } \mathscr{F} \models_{\text{Prédicat}} \phi$$

On dit aussi que le calcul des prédicats est une **extension conservative** du calcul propositionnel.

D- Éléments de modélisation

- Tous les hommes sont méchants :
$$\forall x \left(H(x) \to M(x)\right)$$
- Seulement les hommes sont méchants :
$$\forall x \left(M(x) \to H(x)\right)$$
- Il existe un homme méchant :
$$\exists x \left(H(x) \wedge M(x)\right)$$
- Il n'existe pas d'homme méchant :
$$\neg\exists x \left(H(x) \wedge M(x)\right)$$
- Il existe un homme qui aime tous les chiens :
$$\exists x \left(H(x) \wedge \forall y \big(C(y) \to a(x,y)\big)\right)$$

III- Techniques de raisonnement

A- Rédaction d'un raisonnement

Il convient de bien analyser le problème, c'est-à-dire savoir distinguer ce qui est connu ou admis (les hypothèses ou propositions vraies) de ce qui est à montrer (la conclusion ou proposition à démontrer).

Une fois reconnues toutes les hypothèses, il faut les expliciter :

- introduire des notations (nommer les objets pour pouvoir en parler) ;
- préciser les propriétés qu'elles peuvent entraîner.

Remarque :

Il faut trouver le bon endroit où utiliser les hypothèses : elles interviennent généralement au cours du raisonnement et en sont rarement le point de départ.

On s'intéresse ensuite au problème à montrer :

- essayer de le rapprocher d'un problème déjà résolu ;
- faire une figure peut être une aide mais jamais une démonstration ;
- regarder des cas particuliers pour se faire une idée ;
- ne pas oublier d'hypothèses et ne pas les affaiblir.

On rédige, enfin, la démonstration :

➢ Structurer la démonstration : il s'agit d'annoncer ce qui va être fait en donnant les conclusions ;

➢ Fixer les notations : c'est définir clairement les notations introduites (par exemple, soit x un réel positif) ;

➢ Justifier les étapes de la démonstration en citant les théorèmes et en vérifiant leurs hypothèses (par exemple, multiplication d'une inégalité par un terme positif) ;

➢ Relire la démonstration pour voir si elle est claire et vérifier qu'aucun cas n'a été oublié.

ATTENTION :

Quelques erreurs à éviter

➢ **Faire attention aux négations de propositions.**

➢ **Quelques exemples ne font pas une démonstration.**

➢ **Ne pas donner le même nom à deux objets différents et ne pas supposer que deux objets ayant deux noms distincts sont distincts.**

B- Raisonnement par disjonction de cas

Le raisonnement par disjonction de cas consiste à démontrer la véracité d'une proposition P en introduisant une autre proposition Q, et en prouvant qu'à la fois $P \wedge Q$ et $P \wedge \neg Q$ sont vraies.

Théorème 23: Raisonnement par disjonction de cas

Pour démontrer qu'une proposition P est vraie, on montre que pour une autre proposition Q, on a $P \wedge Q$ et $P \wedge \neg Q$ vraies.

Remarque :

On a disjoint les cas entre ceux où la proposition Q est vraie et ceux où elle est fausse.

ATTENTION :

Il faut choisir judicieusement la proposition Q.

Démonstration :
Démonstration de la validité du raisonnement par disjonction de cas :

D'après la formule de distributivité de la conjonction par rapport à la disjonction, on a :

$$(P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \equiv P \wedge (Q \vee \neg Q)$$

. Or le principe du tiers exclu stipule que $Q \vee \neg Q$ est vraie.
On a donc $P \wedge (Q \vee \neg Q) \equiv P$. On en déduit que :

$$(P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \equiv P$$

□

Exemple :

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel.
Démontrons, par disjonction de cas, la véracité de la proposition P : $n \times (n+1)$ est divisible par 2.

Introduisons la proposition Q : n est pair.
Étudions alors les deux cas possibles :

- Si n est pair, il est divisible par 2 et donc $n \times (n+1)$ aussi.
  Cela signifie que $P \wedge Q$ est vraie.
- Si n est impair, $n+1$ est divisible par 2 et donc $n \times (n+1)$ aussi.
  Cela signifie que $P \wedge \neg Q$ est vraie.

On a à la fois $P \wedge Q$ et $P \wedge \neg Q$ de vraies donc P est vraie.

Remarque :

On retrouvera en particulier ce genre de raisonnement en arithmétique et cryptographie.

C- Raisonnement par contraposée

Le raisonnement par contraposée, ou contraposition, est un raisonnement logique où pour démontrer que P implique Q, on montre que la négation du **conséquent**, $\neg Q$, implique la négation de l'**antécédent**, $\neg P$.
Autrement dit, puisque la **cause** P d'une implication engendre la **conséquence** Q, alors l'absence de la conséquence $\neg Q$ implique automatiquement l'absence de la cause $\neg P$.

Théorème 24: Raisonnement par contraposée

Pour démontrer une implication $P \to Q$, il est équivalent de démontrer que $\neg Q \to \neg P$.

Remarque :

L'intérêt de recourir à cette méthode réside dans le fait que dans de nombreux cas, la contraposée est plus facile à démontrer que l'implication initiale.

Démonstration :
Démonstration de la validité du raisonnement par contraposée :

- On peut justifier cette méthode en utilisant des tables de vérité.

P	Q	P → Q
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

P	Q	¬P	¬Q	¬Q → ¬P
0	0	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	1	0	0	1

  On constate alors que les deux tables sont les mêmes, donc $\mathrm{P} \to \mathrm{Q} \equiv \neg\mathrm{Q} \to \neg\mathrm{P}$.

- On peut également justifier cette méthode en utilisant la réécriture de l'implication.
  On a en effet $\mathrm{P} \to \mathrm{Q} \equiv \neg\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}$.
  En utilisant cette formule avec $\neg\mathrm{Q}$ et $\neg\mathrm{P}$, à la place de P et Q, on a $\neg\mathrm{Q} \to \neg\mathrm{P} \equiv \neg(\neg\mathrm{Q}) \vee \neg\mathrm{P}$.
  D'où $\neg\mathrm{Q} \to \neg\mathrm{P} \equiv \mathrm{Q} \vee \neg\mathrm{P}$.
  On conclut, grâce à la commutativité de le disjonction, que $\mathrm{P} \to \mathrm{Q} \equiv \neg\mathrm{Q} \to \neg\mathrm{P}$.

□

Exemple :

Démontrons, par contraposition, que pour des réels x et y, $xy \neq 0 \to (x \neq 0) \wedge (y \neq 0)$.

Il suffit de démontrer que la contraposée de cette implication est vraie.
Pour établir celle-ci, on utilise la première des lois de De Morgan, qui se traduit par :

$$(x = 0) \vee (y = 0) \to xy = 0$$

. Or ceci est évident, car si un réel est nul, son produit par n'importe quel autre réel est nécessairement nul également.

La contraposée est donc vraie, ce qui prouve que l'implication initiale l'est également.

ATTENTION :

Il ne faut pas confondre contraposée et réciproque.
La contraposée d'une implication $\mathrm{P} \Longrightarrow \mathrm{Q}$ **est l'implication** $\neg\mathrm{Q} \Longrightarrow \neg\mathrm{P}$ **.**
La réciproque d'une implication $\mathrm{P} \Longrightarrow \mathrm{Q}$ **est l'implication** $\mathrm{Q} \Longrightarrow \mathrm{P}$**.**

D'ailleurs, une implication et sa réciproque n'ont pas nécessairement les mêmes valeurs de vérité.
Par exemple pour un réel x**, l'implication** $(x \in [0;2]) \Longrightarrow (x^2 \in [0;4])$ **est vraie mais sa réciproque** $(x^2 \in [0;4]) \Longrightarrow (x \in [0;2])$ **est fausse.**

Quand une implication et sa réciproque ont les mêmes valeurs de vérité, il y a équivalence.

D- Raisonnement par contre-exemple

Le raisonnement par contre-exemple consiste à démontrer qu'une généralité portant sur les éléments d'un ensemble est fausse en prouvant qu'au moins un élément de l'ensemble ne la vérifie pas.

Théorème 25: Raisonnement par contre exemple

Soit E un ensemble quelconque et $P(x)$ une proposition portant sur les éléments x de E.
Pour démontrer la fausseté de l'énoncé $\forall x \in E, P(x)$, il suffit de démontrer que $\exists x \in E, \neg P(x)$.

Démonstration :
Démonstration de la validité du raisonnement par contre-exemple :

D'après la propriété de la négation d'une proposition avec un quantificateur, on a :

$$\neg(\forall x \in E, P(x)) \equiv \exists x \in E, \neg P(x)$$

On applique alors le principe de non contradiction, si $\neg(\forall x \in E, P(x))$ est vraie alors $\forall x \in E, P(x)$ est faux. □

Exemple :

Démontrons, par contre-exemple, la fausseté de l'énoncé $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$.

La négation de l'énoncé est $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 \leqslant 0$, et il est facile de voir qu'elle est vraie en considérant $x = 0$.

E- Raisonnement par l'absurde

Le raisonnement par l'absurde consiste à démontrer la véracité d'une proposition P en supposant qu'elle est fausse, et par une suite de déductions logiques à aboutir à une absurdité. Ainsi P ne peut être fausse et est donc vraie.

Théorème 26: Raisonnement par l'absurde

Pour démontrer qu'une proposition P est vraie, il suffit de démontrer que $\neg P$ est fausse.
Pour démontrer que $\neg P$ est fausse, on suppose que $\neg P$ est vraie et on prouve que cela est absurde.

Démonstration :
Démonstration de la validité du raisonnement par l'absurde :

Il s'agit d'une simple application du principe du tiers exclu.
Si $\neg P$ est fausse alors nécessairement P est vraie. □

Exemple :

Démontrons, par l'absurde, que $\forall x \in \mathbb{R}, (x \neq 0)$
$to(\frac{1}{x} \neq 0)$.

Supposons que cette proposition est fausse c'est-à-dire que sa négation est vraie :

$$\exists x \in \mathbb{R}, (x \neq 0) \wedge (\frac{1}{x} = 0)$$

. Or, si l'on multiplie cette dernière égalité par x, puisque x est non nul, on obtient $1 = 0$. Ce qui est absurde.
La négation de la proposition initiale est donc fausse.