Interpolación de Lagrange

Método y Ejemplos

Diego Valencia

Universidad Mariana

September 9, 2025

¿Qué es la Interpolación de Lagrange?

Definición

La interpolación de Lagrange es un método para encontrar un polinomio $P(x)$ de grado $n-1$ que pasa exactamente por n puntos dados $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_{n-1}, y_{n-1})$.

Fórmula General

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n-1} y_i \cdot L_i(x)$$

donde los polinomios de Lagrange $L_i(x)$ son:

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n-1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Propiedades de los Polinomios de Lagrange

- Cada $L_i(x)$ es un polinomio de grado $n-1$
- Satisfacen la propiedad de ortogonalidad:

$$L_i(x_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{si } i \neq k \end{cases}$$

- El polinomio interpolador pasa exactamente por todos los puntos:

$$P(x_i) = y_i \quad \text{para } i = 0, 1, \ldots, n-1$$

Polinomio de Interpolación de Lagrange: Términos Extendidos

Forma general

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n-1} y_i \cdot L_i(x)$$

Términos expandidos

$$P(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) + \cdots + y_{n-1} L_{n-1}(x)$$

Polinomio de Interpolación de Lagrange: Términos Extendidos

Forma general y ejemplo con $n = 3$

Polinomios de Lagrange

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n-1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_{n-1})}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_{n-1})}$$

Ejemplo para $n = 3$

$$P(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

Ejemplo 1: Tres Puntos

Dados los puntos: $(1,1)$, $(2,4)$, $(3,9)$

Polinomios de Lagrange

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} \\
&= \frac{(x-2)(x-3)}{2} \\
L_1(x) &= \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} \\
&= -(x-1)(x-3) \\
L_2(x) &= \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} \\
&= \frac{(x-1)(x-2)}{2}
\end{aligned}$$

Polinomio Interpolador

$$\begin{aligned}
P(x) &= 1 \cdot L_0(x) + 4 \cdot L_1(x) + 9 \cdot L_2(x) \\
&= \frac{(x-2)(x-3)}{2} - 4(x-1)(x-3) \\
&\quad + \frac{9(x-1)(x-2)}{2}
\end{aligned}$$

Resultado

Al simplificar se obtiene:

$$P(x) = x^2$$

Ejemplo 2: Cuatro Puntos

Dados los puntos: $(0,2)$, $(1,3)$, $(2,6)$, $(4,18)$

Polinomios de Lagrange

$$L_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(0-1)(0-2)(0-4)}$$
$$L_1(x) = \frac{(x-0)(x-2)(x-4)}{(1-0)(1-2)(1-4)}$$
$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-4)}{(2-0)(2-1)(2-4)}$$
$$L_3(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(4-0)(4-1)(4-2)}$$

Evaluación en $x = 3$

$$\begin{aligned} P(3) &= 2L_0(3) + 3L_1(3) + 6L_2(3) + 18L_3(3) \\ &= 2\left(\frac{2\cdot 1\cdot(-1)}{-8}\right) + 3\left(\frac{3\cdot 1\cdot(-1)}{3}\right) \\ &\quad + 6\left(\frac{3\cdot 2\cdot(-1)}{-4}\right) + 18\left(\frac{3\cdot 2\cdot 1}{24}\right) \\ &= 15.5 \end{aligned}$$

Ventajas y Desventajas

Ventajas

- No requiere resolver sistemas de ecuaciones
- Fácil de implementar
- Conceptualmente simple
- Útil para demostraciones teóricas

Desventajas

- Computacionalmente costoso ($O(n^2)$)
- Numéricamente inestable
- Difícil agregar nuevos puntos
- Polinomios de grado alto oscilan

Aplicaciones

Usos comunes

- Interpolación de datos experimentales
- Análisis numérico
- Gráficos por computadora
- Solución de ecuaciones diferenciales
- Ingeniería y física

Ejercicios de Interpolación Polinómica

Objetivo

Practicar la interpolación polinómica usando diferentes métodos (Lagrange, y matriz de Vandermonde) con variados números de puntos.

Ejercicios propuestos

1. **2 puntos:** Encontrar el polinomio lineal que interpola $(1, 3)$ y $(4, 9)$
2. **2 puntos:** Determinar la recta que pasa por $(-2, 5)$ y $(3, -1)$
3. **3 puntos:** Hallar el polinomio cuadrático para $(0, 1)$, $(2, 5)$, $(4, 17)$
4. **3 puntos:** Interpolar los puntos $(1, 2)$, $(3, 10)$, $(5, 26)$
5. **4 puntos:** Encontrar el polinomio cúbico para $(-1, 4)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(2, 7)$
6. **4 puntos:** Interpolar $(0, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 6)$, $(4, 18)$
7. **5 puntos:** Determinar el polinomio de grado 4 para $(0, 1)$, $(1, 3)$, $(2, 7)$, $(3, 13)$, $(4, 21)$
8. **5 puntos:** Hallar el interpolador para $(-2, -8)$, $(-1, -1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 8)$
9. **3 puntos + evaluación:** Dados $(1, 1)$, $(2, 8)$, $(3, 27)$, estimar $f(2.5)$
10. **4 puntos + evaluación:** Con $(0, \cos(0))$, $(\pi/6, \cos(\pi/6))$, $(\pi/3, \cos(\pi/3))$, $(\pi/2, \cos(\pi/2))$, aproximar $\cos(\pi/4)$