

APM_4PRB9_TA

Projet d'Ingénierie Financière

Kevin AOUN et Gaya RAAIDY

Mai 2025

Options sur Panier

Contents

1 Calcul de $S(t)$	5
2 Détermination de r_B et σ_B dans une approximation log-normale	6
3 Calcul du prix du Call avec l'approximation log-normale	6
4 Simulation de $W(T)$ et Pricing du Call avec la méthode de Monte Carlo classique	7
4.1 Simulation du mouvement brownien bidimensionnel avec corrélation	7
4.2 Méthode de Monte Carlo Classique	8
4.3 Comparaison avec une autre méthode de simulation : décomposition de Cholesky	10
5 Calcul du prix du Call par MC avec réduction de variance basée sur le conditionnement	11
6 Analyse des variances empiriques des estimateurs Monte Carlo	13
7 Influence de la corrélation ρ	15
7.1 Choix du nombre de trajectoires	15
7.2 Étude de l'influence de ρ	15
7.3 Différence entre les deux estimations	16
8 Étude de la sensibilité au paramètre α	17
8.1 Choix du nombre de trajectoires	17
8.2 Évolution du prix en fonction de α	17
8.3 Différence entre les deux estimations	18
9 Influence du strike K	18
9.1 Paramètres et méthode	18
9.2 Analyse des résultats	19
10 Réduction de variance par variable de contrôle	19
10.1 Calcul analytique et relation de parité	19
10.2 Principe de la méthode de variable de contrôle	20
10.3 Conditions pour une variable de contrôle efficace	21
10.4 Analyse de la variance selon la corrélation ρ	21
10.5 Analyse de la variance selon le coefficient α	22
10.6 Analyse de la variance selon le strike K	23

10.7 Conclusion sur la méthode de contrôle	23
11 Estimation de $\Delta_1 = \frac{\partial P}{\partial S_{1,0}}$	24
11.1 Par Approximation log-normale	24
11.2 Dérivée numérique avec un pricing Monte Carlo par conditionnement	26
11.3 Comparaison entre les deux méthodes d'estimation de Δ_1	27
12 Une nouvelle variable de contrôle	28
Conclusion	31
13 Annexe	33
13.1 Détail des calculs de $S(t)$	33
13.2 Détermination de r_B et σ_B pour la question 2	35
13.2.1 Théorème 1	35
13.2.2 Détermination de r_B	35
13.2.3 Détermination de σ_B	35
13.3 Détails de calcul pour la Question 3	37
13.4 Calcul de $\mathbb{E}[(e^{F(T)} - K)^+]$	38

Introduction

L'évaluation des produits dérivés constitue un enjeu central de la finance quantitative. Parmi ces produits, les **options sur panier** (ou *basket options*) occupent une place importante. Il s'agit d'options dont le sous-jacent n'est pas un actif unique mais une combinaison linéaire de plusieurs actifs, souvent pondérée. Ces produits permettent aux investisseurs de se couvrir contre les variations globales d'un secteur ou de spéculer sur la performance agrégée de plusieurs actifs.

Dans le cas général, le prix d'une option sur panier ne possède pas de **formule fermée** explicite. Toutefois, il existe des *approximations analytiques* – comme celle fondée sur l'approximation log-normale – qui, bien que non exactes, offrent l'avantage d'une rapidité de calcul. Ces formules sont à comparer avec des méthodes numériques plus coûteuses mais potentiellement plus précises, comme la simulation de Monte Carlo.

Ce projet s'inscrit dans ce cadre. Il a pour objectif de comparer l'approximation log-normale à des méthodes Monte Carlo, en particulier en étudiant l'effet de différentes techniques de *réduction de variance*. En parallèle, nous évaluons également la sensibilité du prix de l'option à certains paramètres clés (corrélation, pondération des actifs, strike), ainsi que la performance des estimateurs de type Delta.

Modèle étudié.

Nous considérons un *modèle de Black-Scholes à deux dimensions*, sous mesure risque-neutre, où les deux actifs suivent des dynamiques géométriques browniennes corrélées. Les notations sont les suivantes :

- $S(t) = (S_1(t), S_2(t))$: cours des deux actifs à la date t ;
- $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$: volatilités constantes des actifs ;
- ρ : coefficient de corrélation entre les deux mouvements browniens ;
- r : taux d'intérêt sans risque ;
- $(S_{1,0}, S_{2,0})$: valeurs initiales des actifs.

La dynamique sous-jacente s'écrit :

$$dS_i(t) = S_i(t)(rdt + \sigma_i dW_i(t)), \quad i = 1, 2$$

où $(W_1(t), W_2(t))_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien bidimensionnel sous la probabilité risque neutre, caractérisé par une **matrice de corrélation** Γ définie par :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } -1 < \rho < 1.$$

Choix du produit.

Nous nous concentrons sur l'étude d'une **option de type call européen** de maturité T et de strike K , portant sur le panier $\alpha S_1(T) + \beta S_2(T)$. Le payoff est alors :

$$P = e^{-rT} \mathbb{E}[(\alpha S_1(T) + \beta S_2(T) - K)^+].$$

Ce rapport présente une étude complète de la valorisation d'options sur panier à l'aide de différentes méthodes numériques et analytiques. Nous mettons en évidence les principes théoriques fondamentaux ainsi que les résultats numériques obtenus, tout en examinant les apports et les limites de chaque méthode. Les démonstrations mathématiques détaillées sont regroupées en annexe.

1 Calcul de $S(t)$

Les dynamiques des deux actifs $S_1(t)$ et $S_2(t)$ sont données par les équations différentielles stochastiques suivantes :

$$dS_i(t) = S_i(t)(rdt + \sigma_i dW_i(t)), \quad \text{avec } S_i(0) = S_{i,0} > 0 \quad \text{pour } i = 1, 2,$$

où r est le taux d'intérêt sans risque (constant), et σ_i la volatilité de l'actif S_i (constante).

Résultat

Nous montrons que les solutions à ces équations sont données par :

$$S_i(t) = S_{i,0} \cdot \exp \left(\left(r - \frac{\sigma_i^2}{2} \right) t + \sigma_i W_i(t) \right), \quad \text{pour } i = 1, 2.$$

Par conséquent, les prix des actifs $S_1(t)$ et $S_2(t)$ suivent des lois log-normales. Ces résultats seront utilisés dans la suite pour modéliser le payoff de l'option sur panier.

Les détails des calculs, notamment la résolution par la formule d'Itô et la vérification de l'unicité des solutions, sont reportés en annexe (Annexe 13.1).

2 Détermination de r_B et σ_B dans une approximation log-normale

Nous nous proposons dans un premier temps d'approximer la somme de lois log-normale par une loi log-normale. Étant donné que $S_1(t)$ et $S_2(t)$ suivent des lois log-normales, cela revient à supposer que $S_B(t) = \alpha S_1(t) + \beta S_2(t)$ obéit également à une loi log-normale :

$$dS_B(t) = S_B(t) (r_B dt + \sigma_B dW_B(t)) \quad (1)$$

Cette approximation permet une évaluation analytique du prix d'un call. Il convient de déterminer les paramètres r_B et σ_B en utilisant les relations suivantes :

$$\begin{cases} \mathbb{E}[S_B(t)] = \alpha \mathbb{E}[S_1(t)] + \beta \mathbb{E}[S_2(t)] \\ \mathbb{E}[(S_B(t))^2] = \mathbb{E}[(\alpha S_1(t) + \beta S_2(t))^2] \end{cases} \quad (2)$$

Les calculs détaillés sont fournis en annexe 13.2. Ils permettent d'obtenir :

$$\boxed{r_B = r} \quad (3)$$

et

$$\boxed{\sigma_B^2 = \frac{1}{T} \log \left(\frac{\alpha^2 S_1^2(0)}{S_B^2(0)} e^{\sigma_1^2 T} + \frac{\beta^2 S_2^2(0)}{S_B^2(0)} e^{\sigma_2^2 T} + \frac{2\alpha\beta S_1(0)S_2(0)}{S_B^2(0)} e^{\sigma_1\sigma_2\rho T} \right)} \quad (4)$$

3 Calcul du prix du Call avec l'approximation log-normale

On travaille ici avec la même hypothèse que précédemment : $\alpha S_1(t) + \beta S_2(t) = S_B(t)$ suit une loi log-normale, avec $\alpha, \beta > 0$.

Le prix du call, selon notre modèle, s'écrit :

$$P = e^{-rT} \mathbb{E} [(\alpha S_1(T) + \beta S_2(T) - K)_+]$$

En notant que $S_B(T) = \alpha S_1(T) + \beta S_2(T)$, on a donc :

$$P = e^{-rT} \mathbb{E} [(S_B(T) - K)_+]$$

Les calculs détaillés permettant de reformuler cette expression en fonction de la loi normale sont donnés en annexe 13.3. On obtient la formule suivante :

$$P = S_B(0)\mathcal{N}(d_1) - Ke^{-rT}\mathcal{N}(d_2)$$

avec :

$$d_1 = \sigma_B\sqrt{T} - d, \quad d_2 = -d$$

$$d = \frac{1}{\sqrt{T}\sigma_B} \left[\log \left(\frac{K}{S_B, 0} \right) - \left(r_B - \frac{\sigma_B^2}{2} \right) T \right]$$

En prenant les paramètres suivants :

- $\sigma = (0.35, 0.4)$
- $\alpha S_{1,0} = \beta S_{2,0} = 1$
- $\rho = 0.3$
- $K = 2$
- $r = 0.01$
- $T = 2$ ans

La fonction de répartition $\mathcal{N}(\cdot)$ est approchée via la méthode d'Abrahamowitz & Stegun donnée dans l'annexe de l'énoncé. Cette approximation est codée dans la fonction `aprox(x)`.

Enfin, le calcul numérique avec Python via la fonction `call_price(S_B(0), σ_B, T, r, K)` donne :

$P_{\text{approx}} \approx 0.36051$

4 Simulation de $W(T)$ et Pricing du Call avec la méthode de Monte Carlo classique

4.1 Simulation du mouvement brownien bidimensionnel avec corrélation

Soit $W(t) = (W_1(t), W_2(t))$ un mouvement brownien bidimensionnel dont les composantes W_1 et W_2 sont corrélées. Pour simuler ces processus à un

instant donné T en tenant compte de leur dépendance, on a recours à une transformation de variables aléatoires indépendantes.

Considérons deux variables aléatoires X et Y , indépendantes et suivant une loi normale centrée réduite. On peut les obtenir à l'aide de la méthode de Box-Muller, qui permet de générer des paires de variables gaussiennes indépendantes à partir de variables uniformément distribuées. Si U et V sont deux variables aléatoires indépendantes uniformes sur $[0, 1]$, alors :

$$X = \sqrt{-2 \ln U} \cos(2\pi V), \quad Y = \sqrt{-2 \ln U} \sin(2\pi V)$$

En Python, les variables U et V peuvent être générées avec `npr.random(N)` pour N réalisations.

Une fois X et Y générés, on peut construire deux composantes browniennes corrélées à l'instant T à partir de ces réalisations :

$$\begin{aligned} W_1(T) &= \sqrt{T} \cdot X \\ W_2(T) &= \sqrt{T} \cdot \left(\rho X + \sqrt{1 - \rho^2} Y \right) \end{aligned}$$

où ρ est le coefficient de corrélation entre les composantes W_1 et W_2 .

4.2 Méthode de Monte Carlo Classique

Nous souhaitons à présent estimer le prix du call défini par :

$$\mathbf{P} = e^{-rT} \mathbb{E} \left[(\alpha S_1(T) + \beta S_2(T) - K)_+ \right]$$

Dans la question 3, ce prix a été obtenu à l'aide d'une approximation log-normale. Ici, nous adoptons une approche numérique basée sur la méthode de Monte Carlo, sans recours à des approximations analytiques.

La méthode consiste à estimer l'espérance par une moyenne empirique, conformément à la loi des grands nombres :

$$\mathbf{P} \approx \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{-rT} (\alpha S_{1,n}(T) + \beta S_{2,n}(T) - K)_+ = P_{MC}$$

avec :

$$\begin{aligned} S_{1,n}(T) &= S_{1,0} \exp \left(\left(r - \frac{\sigma_1^2}{2} \right) T + \sigma_1 W_{1,n}(T) \right), \\ S_{2,n}(T) &= S_{2,0} \exp \left(\left(r - \frac{\sigma_2^2}{2} \right) T + \sigma_2 W_{2,n}(T) \right) \end{aligned}$$

où $W_{1,n}(T)$ et $W_{2,n}(T)$ sont générés à l'aide de la simulation du mouvement brownien corrélé à l'instant T .

L'incertitude de l'estimation P_{MC} est quantifiée par l'écart-type σ_N , évalué via l'estimateur empirique non biaisé de la variance :

$$\sigma_N^2 = \frac{N}{N-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \text{payoff}_i^2 - P_{MC}^2 \right)$$

Cela permet de construire un intervalle de confiance à 95% pour P :

$$\text{IC} = \left[P_{MC} - 1.96 \frac{\sigma_N}{\sqrt{N}}, P_{MC} + 1.96 \frac{\sigma_N}{\sqrt{N}} \right]$$

Le prix MC du call est calculé à l'aide de la fonction suivante dans notre script Python :

```
[MC_price, MC_error, IC_sup, IC_inf] = Euro_call(T, S1,0, S2,0, r, sigma1, sigma2, rho, N, K)
```

En prenant les valeurs numériques de la question précédente :

- $\sigma = (0.35, 0.4)$
- $\alpha S_{1,0} = \beta S_{2,0} = 1$
- $\rho = 0.3$
- $K = 2$
- $r = 0.01$
- $T = 2$ ans

Le résultat obtenu est :

```
MC_price = 0.36036
MC_error = 0.0042
IC_inf = 0.3561
IC_sup = 0.3646
```

On remarque que le prix obtenu par approximation log-normale dans la question 3 se situe bien à l'intérieur de cet intervalle de confiance.

4.3 Comparaison avec une autre méthode de simulation : décomposition de Cholesky

Jusqu'à présent, la simulation du mouvement brownien bidimensionnel corrélé reposait sur une transformation explicite utilisant directement le coefficient de corrélation ρ avec deux variables indépendantes standard. Cependant, il existe une approche plus générale et robuste, particulièrement utile lorsque le nombre de dimensions est supérieur à deux : la méthode de décomposition de Cholesky.

Dans cette méthode, on génère d'abord un vecteur $G = (G_1, G_2)$ de variables gaussiennes indépendantes standard via la méthode de Box-Muller. On applique ensuite la transformation linéaire $Z = AG$, où A est une matrice triangulaire inférieure issue de la décomposition de Cholesky de la matrice de corrélation Γ :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = AA^\top.$$

Cela permet d'obtenir un vecteur $Z = (W_1, W_2)$ ayant exactement la bonne structure de covariance :

$$\mathbb{E}[ZZ^\top] = A\mathbb{E}[GG^\top]A^\top = AA^\top = \Gamma.$$

Les trajectoires browniennes simulées sont ensuite utilisées pour calculer le prix du call de la même manière que précédemment. En utilisant la fonction `Euro_call_chole` avec les mêmes paramètres que précédemment, on obtient les résultats suivants :

MC_price = 0.3586
MC_error = 0.0041
IC_inf = 0.3545
IC_sup = 0.3628

Ces résultats confirment la validité de cette méthode, qui fournit une estimation très proche de celle obtenue par corrélation directe. Elle présente l'avantage d'être directement généralisable à des paniers comportant plus de deux actifs.

5 Calcul du prix du Call par MC avec réduction de variance basée sur le conditionnement

Ici, on implémente le calcul de P par une méthode de Monte Carlo utilisant une technique de réduction de variance basée sur le conditionnement. On choisit de conditionner l'espérance par rapport à W_1 :

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= e^{-rT} \mathbb{E} [(\alpha S_1(T) + \beta S_2(T) - K)_+] = e^{-rT} \mathbb{E} [f(W_1(T), W_2(T))] \\ \mathbf{P} &= e^{-rT} \mathbb{E} [\mathbb{E} [f(W_1(T), W_2(T)) \mid W_1]] \end{aligned}$$

En utilisant la représentation suivante établie à la question précédente :

$$W_2(T) = \rho W_1(T) + \sqrt{1 - \rho^2} \sqrt{T} G, \quad \text{où } G \sim \mathcal{N}(0, 1) \text{ et } W_1(T) \perp G$$

on en déduit :

$$P = e^{-rT} \mathbb{E} [\mathbb{E} [\psi(W_1(T), G) \mid W_1]]$$

Puisque $W_1(T)$ est mesurable et indépendant de G , on peut appliquer le freezing lemma :

$$P = e^{-rT} \mathbb{E} [\phi(W_1(T))] \quad \text{où } \phi(x) = \mathbb{E} [\psi(x, G)]$$

Cela nous donne :

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \mathbb{E} \left[\left(\alpha S_{1,0} \exp \left(\left(r - \frac{\sigma_1^2}{2} \right) T + \sigma_1 x \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \beta S_{2,0} \exp \left(\left(r - \frac{\sigma_2^2}{2} \right) T + \rho \sigma_2 x + \sqrt{1 - \rho^2} \sigma_2 \sqrt{T} G \right) - K \right)_+ \right] \end{aligned}$$

On peut regrouper les termes pour simplifier l'expression :

$$\phi(x) = \cdot \mathbb{E} \left[\left(\tilde{S}_0 \exp \left(\left(r - \frac{\tilde{\sigma}_2^2}{2} \right) T + \tilde{\sigma}_2 \sqrt{T} G \right) - \tilde{K} \right)_+ \right]$$

avec les notations suivantes :

$$\begin{cases} \tilde{S}_0 = \beta S_{2,0} \exp \left(-\frac{T \rho^2 \sigma_2^2}{2} + \sigma_2 \rho x \right) \\ \tilde{K} = K - \alpha S_{1,0} \exp \left(\left(r - \frac{1}{2} \sigma_1^2 \right) T + \sigma_1 x \right) \\ \tilde{\sigma}_2 = \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2} \end{cases}$$

Si $\tilde{K} > 0$, le prix est obtenu comme celui d'un call classique avec strike \tilde{K} , valeur initiale \tilde{S}_0 et volatilité $\tilde{\sigma}_2$. Le prix peut donc être évalué par la fonction `call_price` avec les paramètres $(\tilde{S}_0, \tilde{\sigma}_2, T, r, \tilde{K})$.

Si $\tilde{K} \leq 0$, on utilise l'égalité suivante :

$$\left(\tilde{S}_0 \exp \left(\left(r - \frac{\tilde{\sigma}_2^2}{2} \right) T + \tilde{\sigma}_2 \sqrt{T} G \right) - \tilde{K} \right)_+ = \tilde{S}_0 \exp \left(\left(r - \frac{\tilde{\sigma}_2^2}{2} \right) T + \tilde{\sigma}_2 \sqrt{T} G \right) - \tilde{K}$$

et l'espérance se calcule alors simplement :

$$\phi(x) = \mathbb{E} \left[\tilde{S}_0 \exp \left(\left(r - \frac{\tilde{\sigma}_2^2}{2} \right) T + \tilde{\sigma}_2 \sqrt{T} G \right) - \tilde{K} \right] = \tilde{S}_0 e^{rT} - \tilde{K}$$

Comme toujours, l'estimation par Monte Carlo repose sur la loi forte des grands nombres. On choisit donc une taille d'échantillon suffisamment grande ($N = 100000$).

Le résultat obtenu par simulation en prenant les mêmes paramètres est :

```
MC_price = 0.3598
MC_error = 0.0031
IC_inf = 0.3567
IC_sup = 0.3629
```

Comparatif des différentes méthodes de Monte Carlo

Méthode	Prix	Erreur MC	Intervalle 95%
Corrélation directe	0.36036	0.0042	[0.3561, 0.3646]
Cholesky	0.3586	0.0041	[0.3545, 0.3628]
Conditionnement	0.3598	0.0031	[0.3567, 0.3629]

Table 1: Résultats obtenus pour les différentes méthodes de Monte Carlo

Toutes les méthodes donnent des estimations très proches, confirmant la cohérence des approches. La réduction de variance par conditionnement présente la variance la plus faible, donc plus de précision.

6 Analyse des variances empiriques des estimateurs Monte Carlo

Dans cette section, nous répondons à la question 6 en étudiant la convergence des méthodes de Monte Carlo classique et avec réduction de variance. Plus précisément, nous analysons l'évolution des estimateurs de prix et de leur incertitude (intervalles de confiance) en fonction du nombre de trajectoires simulées N .

Méthodologie

Pour un ensemble de valeurs croissantes de N (de 1000 à 100 000 par pas de 5000), nous avons :

- simulé le prix de l'option avec la méthode de Monte Carlo classique (corrélation directe) via la fonction `Euro_call`,
- simulé le prix avec réduction de variance via la fonction `Euro_call_red_var`,
- calculé l'intervalle de confiance à 95% pour chaque méthode.

Les variances empiriques σ_N^2 ont été estimées avec la formule non biaisée :

$$\sigma_N^2 = \frac{N}{N-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \text{payoff}_i^2 - P_{\text{MC}}^2 \right),$$

où P_{MC} est la moyenne empirique des payoffs.

Ces variances permettent ensuite de construire les intervalles de confiance asymptotiques à 95% :

$$\text{IC}_{95\%} = \left[P_{\text{MC}} - 1.96 \cdot \frac{\sigma_N}{\sqrt{N}}, \quad P_{\text{MC}} + 1.96 \cdot \frac{\sigma_N}{\sqrt{N}} \right].$$

Analyse du graphique obtenu

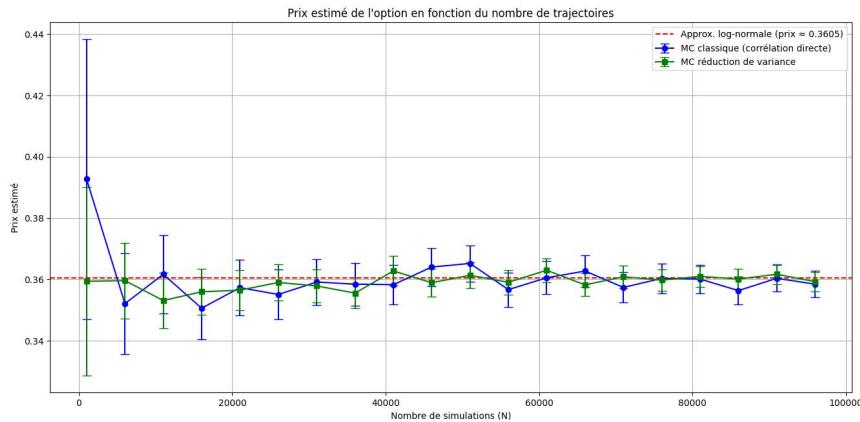


Figure 1: Évolution des estimateurs Monte Carlo selon le nombre de trajectoires N

Le graphique ci-dessus représente l'évolution des estimations de prix obtenues avec les deux méthodes de Monte Carlo (classique en bleu, réduction de variance en vert) ainsi que leurs intervalles de confiance. La ligne rouge pointillée correspond au prix de référence obtenu par l'approximation log-normale (≈ 0.3605).

On observe que :

- les deux méthodes convergent vers la même valeur à mesure que N augmente ;
- la méthode avec réduction de variance présente une variabilité significativement plus faible ;
- les intervalles de confiance se resserrent avec N , confirmant la convergence.

Nous pouvons alors déduire que l'approximation log-normale permet de bien approximer le prix de l'option. Les prix obtenus via les méthodes de Monte Carlo tendent à converger vers ce prix lorsque $N \rightarrow +\infty$. L'hypothèse simplificatrice faite à la question 2 est donc justifiée a posteriori par les simulations.

7 Influence de la corrélation ρ

7.1 Choix du nombre de trajectoires

En utilisant la méthode de Monte Carlo avec réduction de variance, nous avons cherché un nombre de trajectoires à partir duquel l'erreur relative est inférieure à 1%.

À $N = 100000$, l'erreur absolue est :

$$\text{MC_error} = 0.0031, \quad \text{MC_price} = 0.3598 \Rightarrow \varepsilon = \frac{0.0031}{0.3598} \times 100 \approx 0.86\%$$

Ce seuil étant acceptable, nous retenons $N = 100000$ pour la suite, car augmenter davantage N augmenterait fortement le coût de calcul.

7.2 Étude de l'influence de ρ

Nous avons ensuite fait varier le paramètre $\rho \in [-0.99, 0.99]$ pour étudier l'influence de la corrélation entre les deux actifs sur le prix de l'option. Les deux méthodes considérées sont :

- L'approximation log-normale ;
- La méthode de Monte Carlo avec réduction de variance.

Le graphe suivant représente les deux estimations :

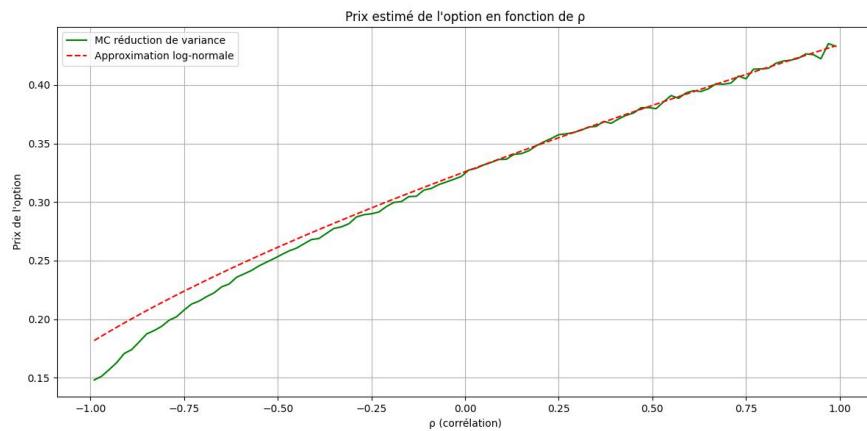


Figure 2: Prix estimé de l'option en fonction de la corrélation ρ

Tout d'abord, nous observons que le prix calculé par les deux méthodes croît avec l'augmentation de la corrélation, à la même allure. Regardons les cas extrêmes :

- Lorsque $\rho = 1$, cela signifie que les deux mouvements browniens sont parfaitement corrélés. Mathématiquement, ils évoluent dans la même direction. Par conséquent, les deux actifs auront des trajectoires semblables, ce qui maximise le payoff du call sur panier, et donc son prix.
- Lorsque $\rho = -1$, les mouvements browniens sont totalement anti-corrélés. L'évolution d'un actif est alors compensée par l'autre, réduisant ainsi la valeur du panier et donc le prix de l'option.

7.3 Différence entre les deux estimations

Nous traçons également la différence entre les deux estimations MC—log-normale :

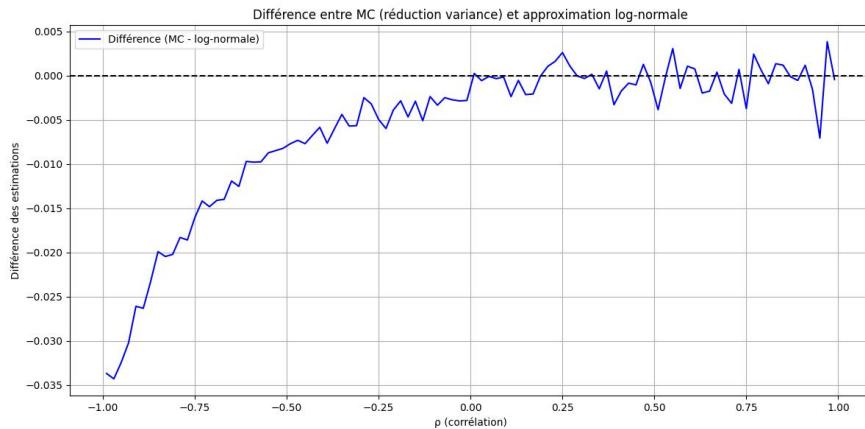


Figure 3: Différence entre MC (réduction variance) et approximation log-normale

Ce graphique montre que :

- L'approximation log-normale tend à surestimer légèrement le prix lorsque $\rho < 0$, en particulier pour des corrélations fortement négatives.
- En revanche, pour $\rho > 0$, les deux estimations sont très proches, voire confondues pour $\rho \in [0.2, 1]$.

Ainsi, l'approximation log-normale reste valide sur tout l'intervalle $\rho \in [-1, 1]$, mais devient moins précise lorsque les actifs évoluent en sens inverse.

8 Étude de la sensibilité au paramètre α

8.1 Choix du nombre de trajectoires

Nous choisissons de fixer le nombre de trajectoires à $N = 100\,000$, comme justifié dans la question précédente, ce qui garantit une erreur relative inférieure à 1% pour la méthode Monte Carlo avec réduction de variance.

8.2 Évolution du prix en fonction de α

Dans cette question, nous faisons varier α (le coefficient de pondération de S_1 dans le panier), tout en maintenant les autres paramètres constants. Pour chaque valeur de α , nous estimons le prix de l'option en utilisant à la fois :

- la méthode de Monte Carlo avec réduction de variance ;
- l'approximation log-normale.

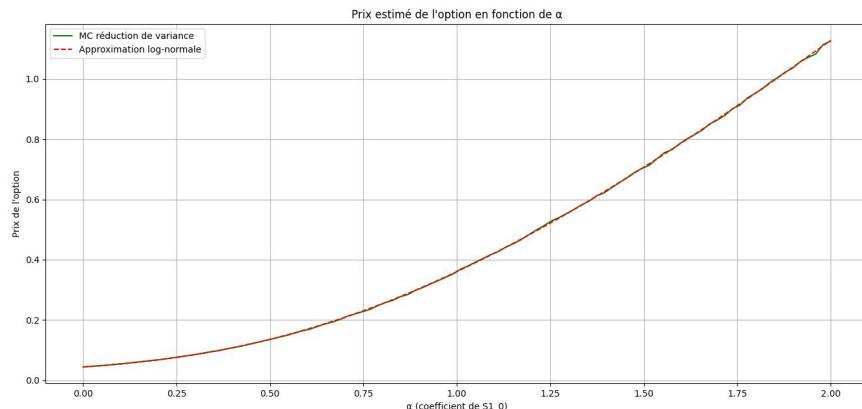


Figure 4: Prix de l'option en fonction de α (MC vs log-normale)

Tout d'abord, on observe que le prix de l'option **augmente avec α** , ce qui est parfaitement logique : plus la pondération du premier actif augmente dans le panier, plus le payoff du call a de chances d'être élevé, ce qui augmente le prix.

Les deux courbes – celle obtenue par Monte Carlo et celle de l'approximation log-normale – se superposent presque parfaitement. Cela confirme que, même lorsque la composition du panier change, l'approximation log-normale reste très précise dans ce cadre.

8.3 Différence entre les deux estimations

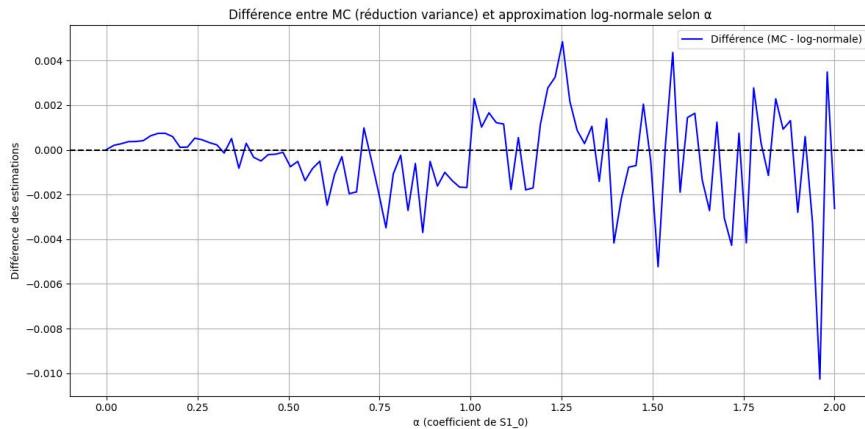


Figure 5: Différence entre MC (réduction variance) et approximation log-normale selon α

La différence entre les deux méthodes reste très faible pour la majorité des valeurs de α , oscillant autour de zéro. On note toutefois que pour les valeurs extrêmes (proches de 2), de légères fluctuations apparaissent. Celles-ci peuvent être attribuées à l'amplification des écarts numériques lorsque la contribution d'un seul actif domine dans le panier. Néanmoins, ces écarts restent négligeables du point de vue pratique.

Nous pouvons donc conclure que l'approximation log-normale reste fiable même en présence de fortes asymétries dans la pondération du panier.

9 Influence du strike K

9.1 Paramètres et méthode

Dans cette question, nous faisons varier le strike $K \in [1, 3]$ tout en gardant les autres paramètres constants. Nous calculons alors :

- Le prix de l'option via Monte Carlo avec réduction de variance ;
- Le prix via l'approximation log-normale ;
- L'intervalle de confiance à 95% associé à chaque estimation Monte Carlo.

9.2 Analyse des résultats

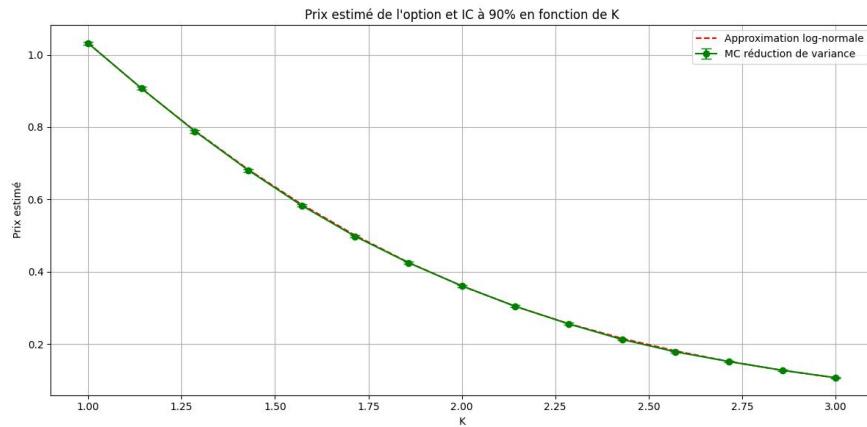


Figure 6: Prix estimé de l'option et IC à 90% en fonction de K

Comme attendu, le prix de l'option **diminue avec l'augmentation du strike K** . En effet, plus le seuil à franchir pour que l'option soit dans la monnaie est élevé, plus la probabilité d'exercer l'option est faible, ce qui diminue sa valeur.

On observe que :

- Les deux méthodes (MC et log-normale) donnent des résultats très proches sur l'ensemble de l'intervalle de variation de K .
- Les intervalles de confiance autour des prix Monte Carlo sont étroits, ce qui confirme la précision des estimations obtenues avec $N = 100000$ trajectoires.

Ainsi, l'approximation log-normale reste fiable et robuste même lorsque le strike varie de manière significative.

10 Réduction de variance par variable de contrôle

10.1 Calcul analytique et relation de parité

La question demande de calculer analytiquement :

$$Z = e^{-rT} \mathbb{E} [(\alpha S_1(T) + \beta S_2(T) - K)_+] - e^{-rT} \mathbb{E} [(K - \alpha S_1(T) - \beta S_2(T))_+]$$

On remarque que cette différence peut être simplifiée. En effet :

$$(\alpha S_1(T) + \beta S_2(T) - K)_+ - (K - \alpha S_1(T) - \beta S_2(T))_+ = \alpha S_1(T) + \beta S_2(T) - K$$

Par conséquent :

$$Z = e^{-rT} \mathbb{E}[\alpha S_1(T) + \beta S_2(T) - K]$$

Puis, en exploitant le fait que les espérances des actifs sous la mesure de risque neutre sont données par :

$$\mathbb{E}[S_i(T)] = S_{i,0} e^{rT} \quad \text{pour } i = 1, 2,$$

on obtient :

$$Z = \alpha S_1(0) + \beta S_2(0) - K e^{-rT}$$

10.2 Principe de la méthode de variable de contrôle

Nous avons utilisé cette relation de parité pour construire une méthode de réduction de variance. L'idée est d'introduire une variable de contrôle :

- $X = (\alpha S_1(T) + \beta S_2(T) - K)_+$: le payoff du call sur panier ;
- $Y = (K - \alpha S_1(T) - \beta S_2(T))_+$: le payoff du put opposé ;
- $Y^c = X - Y \Rightarrow \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y^c] + \mathbb{E}[Y]$

Or $\mathbb{E}[Y^c] = Z$ est calculable analytiquement comme vu précédemment. Ainsi, on peut estimer $\mathbb{E}[Y]$ par Monte Carlo (variance plus faible) puis reconstituer $\mathbb{E}[X]$ avec :

$$\mathbb{E}[X] = Z + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i$$

10.3 Conditions pour une variable de contrôle efficace

Pour que Y^c soit une variable de contrôle valide, il faut :

- que $Y = X - Y^c$ puisse être simulé au même coût que X : ✓
- que $\mathbb{E}[Y^c]$ soit calculable facilement : ✓
- que $\text{Var}(X - Y^c) < \text{Var}(X)$: à vérifier

Le critère discriminant repose donc sur la réduction de variance effective, que nous analysons dans les graphiques suivants.

10.4 Analyse de la variance selon la corrélation ρ

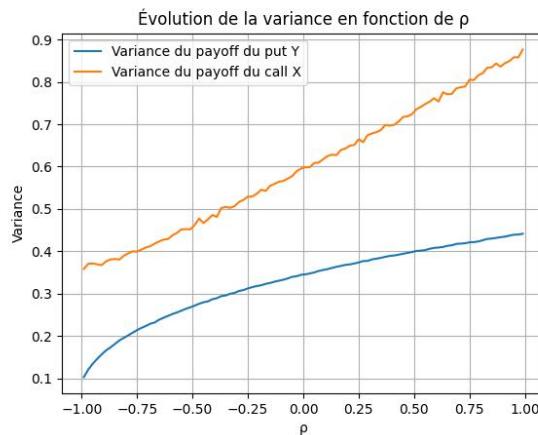


Figure 7: Évolution de la variance en fonction de la corrélation ρ

On observe que pour $\rho < 0$, la variance du put (en bleu) est bien inférieure à celle du call (en orange), ce qui rend la méthode de variable de contrôle très efficace.

De plus, lorsque $\rho \rightarrow 1$, l'écart entre les deux variances augmente encore en faveur du put, ce qui indique que la méthode reste efficace, voire plus efficace dans cette zone.

Ainsi, dans toute la plage de $\rho \in [-1, 1]$, la condition $\text{Var}(X - Y^c) < \text{Var}(X)$ est vérifiée, garantissant la validité de la réduction de variance par variable de contrôle.

10.5 Analyse de la variance selon le coefficient α

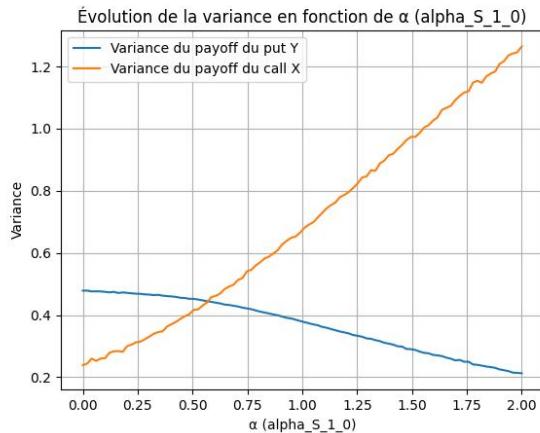


Figure 8: Évolution de la variance en fonction de α

Ici, on observe que pour les petites valeurs de α , la variance du put (en bleu) est légèrement supérieure à celle du call (en orange). La condition $\text{Var}(Y) < \text{Var}(X)$, nécessaire à l'efficacité de la méthode de réduction de variance, n'est donc pas toujours vérifiée dans cette zone.

En revanche, dès que α dépasse une certaine valeur (environ 0,58 dans notre configuration), la variance du put devient inférieure à celle du call. La méthode de variable de contrôle devient alors efficace, et son efficacité s'accroît avec l'augmentation de α .

Ainsi, la réduction de variance par variable de contrôle est plus pertinente pour des pondérations importantes de S_1 dans le panier.

10.6 Analyse de la variance selon le strike K

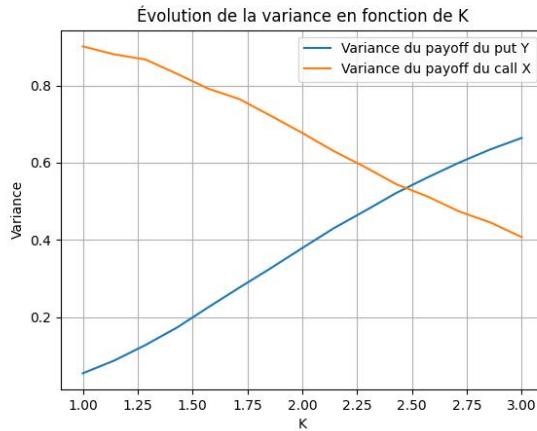


Figure 9: Évolution de la variance en fonction du strike K

On observe que pour $K \in [1, 2.35]$, la variance du call X (en orange) est supérieure à celle du put Y (en bleu), ce qui valide l'efficacité de la variable de contrôle. En revanche, à partir de $K \approx 2.35$, la variance du put devient plus grande que celle du call.

Cela signifie que la réduction de variance par variable de contrôle est pertinente uniquement lorsque le call n'est pas trop loin out of the money. Quand K est trop élevé, l'option call a très peu de chance d'être exercée, ce qui diminue sa variance, tandis que la variance du put augmente, réduisant ainsi l'efficacité de la méthode.

La variable de contrôle est donc **la plus efficace** dans la zone où K est modéré, c'est-à-dire typiquement dans une région où la probabilité d'exercice du call reste significative.

10.7 Conclusion sur la méthode de contrôle

- La méthode de réduction de variance par variable de contrôle est simple à mettre en œuvre et peut être très efficace lorsque les conditions sont réunies.
- Son efficacité est maximale lorsque la variance du put Y est inférieure à celle du call X , c'est-à-dire :

- pour des pondérations **importantes** de S_1 (i.e. $\alpha \gtrsim 0.58$) ;
- pour des strikes **modérés** (i.e. $K \lesssim 2.35$).
- En dehors de ces zones, la variance du put peut devenir plus grande que celle du call, ce qui diminue l'intérêt de la méthode.
- Lorsqu'elle est bien appliquée, cette technique permet de réduire significativement l'intervalle de confiance autour de l'estimateur du prix de l'option.

Les résultats obtenus avec cette méthode pour les paramètres de base sont :

Prix MC (contrôle) = 0,3597, Erreur = 0,00235, IC à 95% = [0,3574 ; 0,3621]

Ces résultats confirment la fiabilité de l'estimation et la réduction effective de la variance par rapport à une méthode de Monte Carlo classique.

11 Estimation de $\Delta_1 = \frac{\partial P}{\partial S_{1,0}}$

Nous cherchons ici à estimer la dérivée du prix du call par rapport à $S_{1,0}$, en notant cette quantité Δ_1 . Deux méthodes seront envisagées, dont la première repose sur l'approximation log-normale et l'autre sur Monte Carlo avec conditionnement..

11.1 Par Approximation log-normale

Cette méthode a l'avantage de fournir une formule analytique explicite. Selon les résultats de la question 2, lorsque le prix du call est approché par une loi log-normale, il s'écrit :

$$P = S_{B,0} \mathcal{N}(d_1) - K e^{-rT} \mathcal{N}(d_2)$$

où $\mathcal{N}(x)$ est la fonction de répartition de la loi normale standard, définie par :

$$\mathcal{N}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy = \int_{-\infty}^x \phi(y) dy$$

avec :

$$d_1 = \frac{1}{\sigma_B \sqrt{T}} \left(\log \left(\frac{S_{B,0}}{K} \right) + \left(r + \frac{\sigma_B^2}{2} \right) T \right)$$

$$d_2 = \frac{1}{\sigma_B \sqrt{T}} \left(\log \left(\frac{S_{B,0}}{K} \right) + \left(r - \frac{\sigma_B^2}{2} \right) T \right)$$

$$\sigma_B = \sqrt{\frac{1}{T} \ln \left(\frac{\alpha^2 S_{1,0}^2 e^{\sigma_1^2 T} + \beta^2 S_{2,0}^2 e^{\sigma_2^2 T} + 2\alpha\beta S_{1,0} S_{2,0} e^{\rho\sigma_1\sigma_2 T}}{S_{B,0}^2} \right)}$$

Nous souhaitons maintenant évaluer :

$$\Delta_1 = \frac{\partial P}{\partial S_{1,0}} = \alpha \mathcal{N}(d_1) + S_{B,0} \phi(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial S_{1,0}} - K e^{-rT} \phi(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial S_{2,0}}$$

On exprime maintenant les dérivées partielles des d_i :

$$\begin{aligned} \frac{\partial d_1}{\partial S_{1,0}} &= -\frac{1}{\sigma_B} \frac{\partial \sigma_B}{\partial S_{1,0}} d_1 + \frac{1}{\sigma_B \sqrt{T}} \left(\frac{\alpha}{S_{B,0}} + T \frac{\partial \sigma_B}{\partial S_{1,0}} \right) \\ \frac{\partial d_2}{\partial S_{2,0}} &= -\frac{1}{\sigma_B} \frac{\partial \sigma_B}{\partial S_{2,0}} d_2 + \frac{1}{\sigma_B \sqrt{T}} \left(\frac{\alpha}{S_{B,0}} - T \frac{\partial \sigma_B}{\partial S_{2,0}} \right) \end{aligned}$$

Pour calculer $\frac{\partial \sigma_B}{\partial S_{1,0}}$, posons $g(S_{1,0}) = \frac{1}{T} \ln(f(S_{1,0}))$, avec :

$$f(S_{1,0}) = \frac{\alpha^2 S_{1,0}^2 e^{\sigma_1^2 T} + \beta^2 S_{2,0}^2 e^{\sigma_2^2 T} + 2\alpha\beta S_{1,0} S_{2,0} e^{\rho\sigma_1\sigma_2 T}}{S_{B,0}^2}$$

alors :

$$\begin{aligned} \sigma_B &= \sqrt{g(S_{1,0})} \\ \frac{\partial \sigma_B}{\partial S_{1,0}} &= \frac{g'(S_{1,0})}{2\sqrt{g(S_{1,0})}} \\ &= \frac{f'(S_{1,0})}{2T f(S_{1,0}) \sigma_B} \end{aligned}$$

Il nous reste donc à déterminer $f'(S_{1,0})$, qui donne après développement :

$$\begin{aligned} f'(S_{1,0}) &= \frac{-2\alpha^3 S_{1,0}^2 e^{\sigma_1^2 T}}{S_{B,0}^3} + \frac{-4\alpha^2 \beta S_{1,0} S_{2,0} e^{\rho\sigma_1\sigma_2 T}}{S_{B,0}^3} + \frac{2\alpha^2 S_{1,0} e^{\sigma_1^2 T}}{S_{B,0}^2} \\ &\quad - \frac{2\alpha\beta^2 S_{2,0}^2 e^{\sigma_2^2 T}}{S_{B,0}^3} + \frac{2\alpha\beta S_{2,0} e^{\rho\sigma_1\sigma_2 T}}{S_{B,0}^2} \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi une expression explicite de Δ_1 . Cette estimation est réalisée numériquement à l'aide de la fonction

delta_approx_log_normale($S_{1,0}, S_{2,0}, \alpha, \beta, \sigma_1, \sigma_2, \rho, T, r, K$).

En fixant $\alpha = \beta = 0,5$, on observe l'évolution de Δ_1 en fonction de $S_{1,0}$ pour deux valeurs de corrélation : $\rho = 0,5$ et $\rho = -0,5$. La figure 10 illustre ces comportements.

On observe que dans les deux cas, Δ_1 est une fonction croissante de $S_{1,0}$. Cela signifie que plus la valeur initiale $S_{1,0}$ augmente, plus la sensibilité du prix de l'option à cet actif devient importante. Cette tendance est cohérente avec le comportement attendu d'un call.

Lorsque $\rho = -0,5$ (courbe orange), la croissance de Δ_1 est plus rapide pour de faibles valeurs de $S_{1,0}$, mais tend à ralentir au-delà de $S_{1,0} \approx 2,8$. À l'inverse, lorsque $\rho = 0,5$ (courbe bleue), l'augmentation de Δ_1 est plus modérée au départ, mais s'accélère pour les grandes valeurs de $S_{1,0}$.

Ces observations traduisent l'effet de la corrélation entre les actifs sur la sensibilité du prix : une corrélation négative rend le panier plus sensible à $S_{1,0}$ lorsque celui-ci est faible, tandis qu'une corrélation positive favorise une montée progressive de Δ_1 à mesure que $S_{1,0}$ augmente.

Enfin, la courbure des deux courbes met en évidence la convexité du prix par rapport à $S_{1,0}$, en lien avec la positivité de la dérivée seconde. Ce phénomène confirme les résultats obtenus à la question 8.

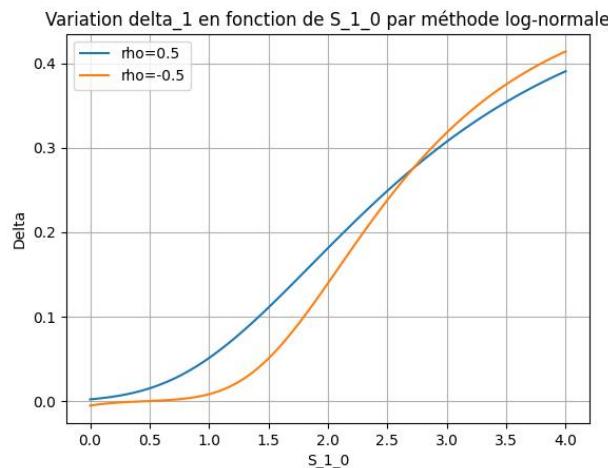


Figure 10: Évolution de Δ_1 en fonction de $S_{1,0}$ pour $\rho = 0,5$ et $\rho = -0,5$

11.2 Dérivée numérique avec un pricing Monte Carlo par conditionnement

On estime ici Δ_1 pour différentes valeurs de $S_{1,0}$ en approchant la dérivée par le taux de variation :

$$\Delta_1 = \frac{\partial P}{\partial S_{1,0}} \approx \frac{P(S_{1,0} + h) - P(S_{1,0})}{h}$$

Ce calcul est réalisé à l'aide de la fonction `delta_MC_red_var(t, sigma_1, sigma_2, beta, alpha, r, K, rho, N, S_1_0, S_2_0, h=0.01)`.

Nous traçons ensuite l'évolution de Δ_1 en fonction de $S_{1,0}$, pour deux valeurs de corrélation : $\rho = 0,5$ et $\rho = -0,5$.

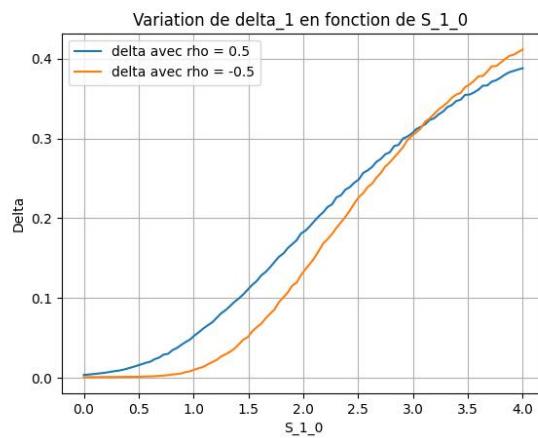


Figure 11: Variation de Δ_1 en fonction de $S_{1,0}$ via dérivée numérique

On observe que Δ_1 croît avec $S_{1,0}$ dans les deux cas, avec une pente plus marquée lorsque $\rho = 0,5$. Cette croissance traduit une dérivée seconde positive, donc une convexité du prix par rapport à $S_{1,0}$, ce qui corrobore les résultats obtenus à la question 8.

11.3 Comparaison entre les deux méthodes d'estimation de Δ_1

Afin de comparer la précision des deux approches étudiées — l'approximation log-normale et la méthode de Monte Carlo avec réduction de variance par conditionnement — nous représentons, dans la figure 12, la différence $\Delta_1^{\text{log-normale}} - \Delta_1^{\text{MC}}$ en fonction de $S_{1,0}$ pour deux valeurs du coefficient de corrélation : $\rho = 0,5$ et $\rho = -0,5$.

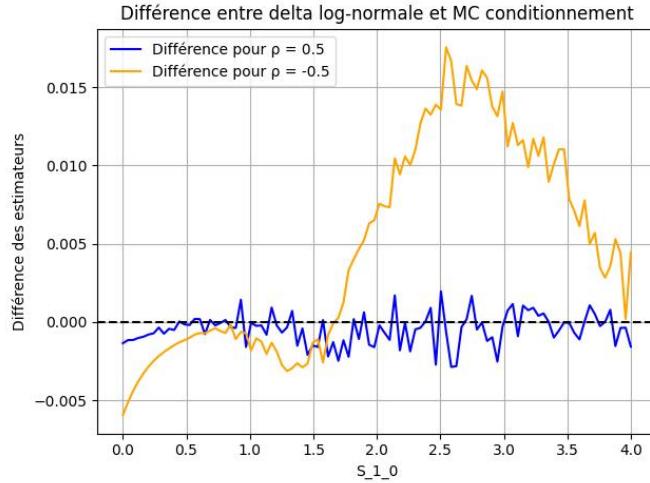


Figure 12: Différence entre les estimateurs Δ_1 par méthode log-normale et par MC conditionné, en fonction de $S_{1,0}$

Pour $\rho = 0,5$ (courbe bleue), on constate que la différence reste proche de zéro sur tout l'intervalle étudié. Cela indique que les deux méthodes produisent des estimations très proches de Δ_1 , suggérant que l'approximation log-normale est dans ce cas très fiable.

En revanche, pour $\rho = -0,5$ (courbe orange), la différence devient significative à partir de $S_{1,0} \approx 1,5$, atteignant un maximum autour de $S_{1,0} = 2,5$. Cela montre que l'approximation log-normale surestime Δ_1 par rapport à l'estimation Monte Carlo dans cette région. Ce comportement peut s'expliquer par une mauvaise représentation de la corrélation négative dans l'approximation log-normale.

Ainsi, si l'approximation log-normale est robuste pour une corrélation positive modérée, elle devient moins fiable dans les cas de forte anticorrélation. Le recours à une méthode par conditionnement est alors préférable pour obtenir des estimations plus précises.

12 Une nouvelle variable de contrôle

On cherche à calculer $e^{-rT} \mathbb{E} \left[\left(e^{\alpha \ln(S_1(T)) + \beta \ln(S_2(T))} - K \right)_+ \right]$.

Introduisons une nouvelle variable aléatoire F_T définie par :

$$\begin{aligned} F_T = \alpha \ln(S_1(T)) + \beta \ln(S_2(T)) &= \alpha \ln(S_{1,0}) + \alpha \left(\left(r - \frac{\sigma_1^2}{2} \right) T + \sigma_1 W_1(T) \right) \\ &\quad + \beta \ln(S_{2,0}) + \beta \left(\left(r - \frac{\sigma_2^2}{2} \right) T + \sigma_2 W_2(T) \right) \end{aligned}$$

On observe que F_T suit une loi normale dont on peut expliciter l'espérance et la variance :

$$\mathbb{E}[F_T] = \alpha \ln(S_{1,0}) + \beta \ln(S_{2,0}) + \alpha \left(r - \frac{\sigma_1^2}{2} \right) T + \beta \left(r - \frac{\sigma_2^2}{2} \right) T$$

$$\text{Var}[F_T] = \text{Var}(\alpha \sigma_1 W_1(T) + \beta \sigma_2 W_2(T)) = (\alpha \sigma_1)^2 T + (\beta \sigma_2)^2 T + (2\rho \alpha \sigma_1 \beta \sigma_2) T$$

Par calcul en annexe 13.4, on obtient :

$$e^{-rT} \mathbb{E} \left[(e^{F_T} - K)_+ \right] = e^{-rT} \left[e^{\mathbb{E}[F_T] + \frac{1}{2} \text{Var}[F_T]} \mathcal{N}(d + \sqrt{\text{Var}[F_T]}) - K \mathcal{N}(d) \right]$$

où :

$$d = \frac{\mathbb{E}[F_T] - \log(K)}{\sqrt{\text{Var}[F_T]}}$$

On obtient ainsi une forme explicite de $\exp(-rT) \mathbb{E} \left[(e^{F_T} - K)_+ \right]$.

D'autre part, l'espérance $\exp(-rT) \mathbb{E} \left[(\alpha S_1(T) + \beta S_2(T) - K)_+ - (e^{F_T} - K)_+ \right]$ est simulable numériquement par Monte Carlo. Nous pouvons donc calculer P en construisant un estimateur de variance réduite :

$$\begin{aligned} P &= \exp(-rT) \mathbb{E} \left[(\alpha S_1(T) + \beta S_2(T) - K)_+ - (e^{F_T} - K)_+ \right] \\ &\quad + \exp(-rT) \mathbb{E} \left[(e^{F_T} - K)_+ \right] \end{aligned}$$

Enfin, posons les notations suivantes pour l'écriture de la méthode de réduction de variance :

$$\begin{aligned} X &= (\alpha S_1(T) + \beta S_2(T) - K)_+ \\ Y &= (e^{F_T} - K)_+ \\ Y^c &= X - Y \end{aligned}$$

L'estimation du prix du call à l'aide de la variable de contrôle finale est réalisée grâce à la fonction suivante :

```
Euro_call_new_control(t, alpha, beta, S1_0, S2_0, alpha_S1_0,
beta_S2_0, r, sigma1, sigma2, rho, N, K)
```

Avec les valeurs suivantes :

$$\sigma = (0.35, 0.4), \quad \alpha S_{1,0} = \beta S_{2,0} = 1, \quad \alpha = \beta = 0.5, \quad S_{1,0} = S_{2,0} = 2, \\ \rho = 0.3, \quad K = 2, \quad r = 0.01, \quad T = 2$$

et en prenant $N = 100000$ simulations, on obtient les résultats suivants :

```
MC_price = 0.3598
MC_error = 0.0009
IC_inf = 0.3588
IC_sup = 0.3608
```

On constate que cette méthode permet une réduction significative de l'erreur par rapport aux approches Monte Carlo classiques (avec ou sans conditionnement). L'ajout de cette variable de contrôle rend l'estimateur à la fois plus précis et plus stable.

Comparaison des variances obtenues

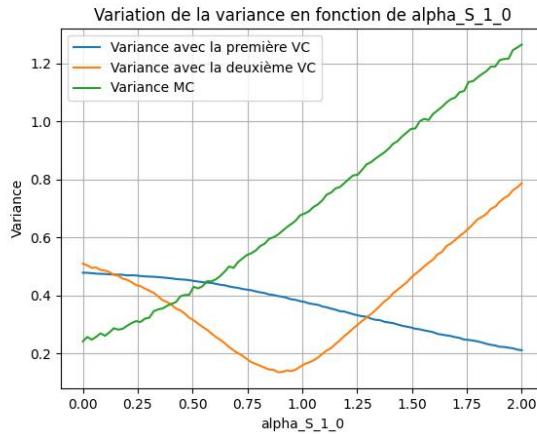


Figure 13: Comparaison des trois méthodes de réduction de variance selon $\alpha S_{1,0}$

La figure 13 compare les variances obtenues selon la pondération $\alpha S_{1,0}$ pour trois méthodes : la méthode sans contrôle, celle avec une première variable de contrôle (Question 10), et enfin la méthode utilisant la variable finale $F(T)$.

On constate que la variance de l'estimateur augmente fortement avec $\alpha S_{1,0}$ dans la méthode Monte Carlo classique (courbe verte). La première variable de contrôle (bleue) permet de réduire la variance sur l'ensemble des valeurs de α , avec une efficacité relativement constante.

En revanche, la deuxième variable de contrôle basée sur $F(T)$ (courbe orange) se révèle nettement plus performante. Elle permet une réduction importante de la variance, notamment lorsque $\alpha S_{1,0}$ est proche de 1, c'est-à-dire lorsque le panier est également pondéré. On observe que cette méthode satisfait la condition :

$$\text{Var}(X - Y^c) < \text{Var}(X)$$

pour un intervalle beaucoup plus large que celui couvert par la première variable de contrôle.

Cette comparaison confirme que l'utilisation de la variable logarithmique $F(T)$ comme variable de contrôle est la plus efficace pour stabiliser les estimations du prix, quelle que soit la pondération α .

Conclusion

Dans ce projet, nous avons étudié en détail la valorisation d'une option de type call européen sur un panier de deux actifs, en utilisant plusieurs approches issues de la finance quantitative.

Nous avons d'abord développé une approximation log-normale du prix de l'option, fondée sur l'idée d'approximer une somme de variables log-normales par une unique variable log-normale. Cette méthode fournit une formule explicite et facilement calculable, ce qui en fait une solution rapide et pratique, notamment pour des besoins de calibration ou de gestion.

Cependant, cette approximation repose sur des hypothèses simplificatrices fortes. Nous avons donc confronté ses résultats à ceux obtenus par des simulations de Monte Carlo classiques, ainsi qu'à des versions améliorées utilisant des techniques de réduction de variance. Les simulations Monte Carlo offrent une meilleure robustesse et permettent une prise en compte plus fidèle de la distribution réelle du payoff.

Les comparaisons numériques ont montré que :

- L'approximation log-normale donne des estimations proches des résultats Monte Carlo, notamment lorsque les pondérations des actifs sont équilibrées et que la corrélation est positive ou modérée ;
- Pour des configurations extrêmes (forte corrélation négative, poids déséquilibrés), l'approximation log-normale peut s'écartez sensiblement de la valeur estimée par simulation ;
- Les méthodes de Monte Carlo avec réduction de variance — que ce soit par conditionnement ou par variable de contrôle — permettent d'améliorer significativement la précision tout en gardant des temps de calcul raisonnables.

Enfin, nous avons étudié l'estimation du delta du call, essentiel pour la couverture des options. Là encore, l'approximation log-normale fournit une expression explicite mais sensible à la structure du panier, tandis que la méthode Monte Carlo avec conditionnement permet une estimation plus souple et plus précise dans des contextes complexes.

En résumé, l'approximation log-normale constitue une solution simple et efficace dans de nombreux cas standards, mais les méthodes Monte Carlo, enrichies par des techniques de réduction de variance, s'avèrent plus fiables et plus générales pour traiter des situations plus complexes ou asymétriques.

13 Annexe

13.1 Détail des calculs de $S(t)$

Application de la formule d'Itô

Soit $(S_1(t))_{t \geq 0}$ une solution strictement positive de l'équation différentielle stochastique :

$$dS_1(t) = S_1(t)(r dt + \sigma_1 dW_1(t)).$$

Nous posons $f(x) = \log(x)$, qui n'est pas de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ mais peut être utilisée formellement. En appliquant la formule d'Itô à $S_1(t)$, on a :

$$\log(S_1(t)) = \log(S_{1,0}) + \int_0^t \frac{dS_1(s)}{S_1(s)} - \frac{1}{2} \int_0^t \left(\frac{1}{S_1(s)} \right)^2 \sigma_1^2 S_1(s)^2 ds,$$

ce qui donne :

$$\log(S_1(t)) = \log(S_{1,0}) + \int_0^t (r ds + \sigma_1 dW_1(s)) - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_1^2 ds.$$

Donc,

$$\log(S_1(t)) = \log(S_{1,0}) + \left(r - \frac{\sigma_1^2}{2} \right) t + \sigma_1 W_1(t),$$

et par exponentiation,

$$S_1(t) = S_{1,0} \cdot \exp \left(\left(r - \frac{\sigma_1^2}{2} \right) t + \sigma_1 W_1(t) \right).$$

Existence de la solution

Définissons $f(s, x) = S_{1,0} \cdot \exp \left(\left(r - \frac{\sigma_1^2}{2} \right) s + \sigma_1 x \right)$. On vérifie que :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(s, x) = \sigma_1 f(s, x), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, x) = \sigma_1^2 f(s, x), \quad \frac{\partial f}{\partial s}(s, x) = \left(r - \frac{\sigma_1^2}{2} \right) f(s, x).$$

En appliquant la formule d'Itô à $f(s, W_1(s))$, on obtient :

$$\begin{aligned} S_1(t) &= f(t, W_1(t)) = f(0, 0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, W_1(s)) ds \\ &\quad + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, W_1(s)) dW_1(s) + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, W_1(s)) ds. \end{aligned}$$

En simplifiant, cela revient à :

$$S_1(t) = S_{1,0} + \int_0^t rS_1(s)ds + \int_0^t \sigma_1 S_1(s)dW_1(s),$$

ce qui montre que $S_1(t)$ satisfait bien l'équation différentielle stochastique donnée.

Unicité

Il est maintenant possible de prouver l'unicité de la solution de l'équation différentielle stochastique. Supposons que $S_1(t)$ est une solution de :

$$dS_1(t) = rS_1(t)dt + \sigma_1 S_1(t)dW_1(t)$$

et qu'il existe une autre solution $(X(t))_{t \geq 0}$ à cette même équation. On cherche à étudier la "différentielle stochastique" du produit $X(t)S_1(t)^{-1}$.

Définissons le processus suivant :

$$Z(t) = S_{1,0}S_1(t)^{-1} = \exp\left(\left(-r + \frac{\sigma_1^2}{2}\right)t - \sigma_1 W_1(t)\right)$$

On remarque que si $X(t)$ est solution de l'EDS, alors le produit $X(t)Z(t)$ satisfait :

$$d(X(t)Z(t)) = X(t)dZ(t) + Z(t)dX(t) + d\langle X, Z \rangle_t$$

En appliquant les règles du calcul stochastique, on obtient :

$$\begin{aligned} d(X(t)Z(t)) &= Z(t)X(t)(\sigma_1^2 - r)dt - Z(t)X(t)\sigma_1 dW_1(t) \\ &\quad + X(t)Z(t)r dt + X(t)Z(t)\sigma_1 dW_1(t) - X(t)Z(t)\sigma_1^2 dt \end{aligned}$$

Après simplification :

$$d(X(t)Z(t)) = 0 \Rightarrow X(t)Z(t) \equiv \text{constante P.s.}$$

Or, on a $X(0)Z(0) = S_{1,0}$, donc pour tout $t \geq 0$:

$$X(t)Z(t) = S_{1,0} \Rightarrow X(t) = S_1(t)$$

Ainsi, l'unicité de la solution est démontrée.

13.2 Détermination de r_B et σ_B pour la question 2

13.2.1 Théorème 1

Pour calculer les expressions attendues, on utilise la propriété classique suivante :

$$\text{Si } X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2), \text{ alors } \mathbb{E}[e^{zX}] = e^{\mu z + \frac{1}{2}\sigma^2 z^2}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad (5)$$

Dans le cas où X est un vecteur gaussien de dimension $d > 0$: $\tilde{X} \sim \mathcal{N}(\tilde{\mu}, \tilde{\Gamma})$.

Alors

$$\mathbb{E}(\exp(\tilde{\sigma}^\top \tilde{X})) = \exp\left(\tilde{\mu}^\top \tilde{\sigma} + \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^\top \tilde{\Gamma} \tilde{\sigma}\right), \quad \forall \tilde{\sigma} \in \mathbb{C}^d$$

13.2.2 Détermination de r_B

Commençons par la détermination de r_B . En supposant que $S_B(t)$ est log-normal, on a :

$$S_B(t) = S_{B,0} \exp\left(\sigma_B W(t) + \left(r_B - \frac{\sigma_B^2}{2}\right)t\right)$$

L'espérance s'écrit alors :

$$\mathbb{E}[S_B(t)] = S_{B,0} \cdot \mathbb{E}\left[\exp\left(\sigma_B W(t) + \left(r_B - \frac{\sigma_B^2}{2}\right)t\right)\right] = S_{B,0} \cdot \exp(r_B t)$$

En parallèle, on a :

$$\mathbb{E}[\alpha S_1(t) + \beta S_2(t)] = (\alpha S_{1,0} + \beta S_{2,0}) \exp(rt)$$

Par identification, il en découle :

$$r_B = r$$

13.2.3 Détermination de σ_B

Passons maintenant à la détermination de σ_B . On développe :

$$\mathbb{E}[(\alpha S_1(t) + \beta S_2(t))^2] = \alpha^2 \mathbb{E}[S_1^2(t)] + 2\alpha\beta \mathbb{E}[S_1(t)S_2(t)] + \beta^2 \mathbb{E}[S_2^2(t)]$$

En utilisant la forme log-normale des actifs :

$$\begin{aligned}\alpha^2 \mathbb{E}[S_1^2(t)] &= \alpha^2 S_1^2(0) \exp\left(2rt + \sigma_1^2 t\right) \\ \beta^2 \mathbb{E}[S_2^2(t)] &= \beta^2 S_2^2(0) \exp\left(2rt + \sigma_2^2 t\right)\end{aligned}$$

Pour le terme croisé :

$$\begin{aligned}2\alpha\beta \mathbb{E}[S_1(t)S_2(t)] &= \\ 2\alpha\beta \mathbb{E}[S_1(0)S_2(0) \exp(\sigma_1 W_1(t) + \sigma_2 W_2(t))] \exp\left(\left(2r - \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2}\right)t\right) &=\\ \mathbb{E}[\exp(\sigma_1 W_1(t) + \sigma_2 W_2(t))] &= \exp\left(\frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)t + \sigma_1\sigma_2\rho t\right)\end{aligned}$$

$W = (W_1(t), W_2(t)) \sim \mathcal{N}(0, \Gamma_{\text{cov}})$, où $\Gamma_{\text{cov}} = t\Gamma$ représente la matrice de covariance et Γ est la matrice de corrélation. En utilisant le (théorème 1 13.2.1):

$$\mathbb{E}[\exp(\sigma_1 W_1(t) + \sigma_2 W_2(t))] = \exp\left(\frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)t + \sigma_1\sigma_2\rho t\right)$$

Ainsi, on obtient :

$$2\alpha\beta \mathbb{E}[S_1(t)S_2(t)] = 2\alpha\beta S_1(0)S_2(0) \exp((2r + \sigma_1\sigma_2\rho)t)$$

En résumé :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(\alpha S_1(t) + \beta S_2(t))^2] &= \alpha^2 S_1^2(0) \exp(2rt + \sigma_1^2 t) + 2\alpha\beta S_1(0)S_2(0) \\ &\quad \exp((2r + \sigma_1\sigma_2\rho)t) + \beta^2 S_2^2(0) \exp(2rt + \sigma_2^2 t)\end{aligned}$$

D'autre part, comme $S_B(t)$ suit une loi log-normale :

$$\mathbb{E}[S_B^2(t)] = S_B^2(0) \exp((2r + \sigma_B^2)t)$$

En égalant les deux expressions précédentes et en isolant σ_B^2 , on obtient :

$$\sigma_B^2 = \frac{1}{T} \log \left(\frac{\alpha^2 S_1^2(0)}{S_B^2(0)} e^{\sigma_1^2 T} + \frac{\beta^2 S_2^2(0)}{S_B^2(0)} e^{\sigma_2^2 T} + \frac{2\alpha\beta S_1(0)S_2(0)}{S_B^2(0)} e^{\sigma_1\sigma_2\rho T} \right)$$

13.3 Détails de calcul pour la Question 3

Partons de la quantité suivante :

$$P = e^{-rT} \mathbb{E} [(S_B(T) - K)_+]$$

En utilisant l'écriture log-normale :

$$S_B(T) = S_{B,0} \exp \left(\left(r_B - \frac{\sigma_B^2}{2} \right) T + \sigma_B W(T) \right)$$

On souhaite calculer :

$$\begin{aligned} P &= e^{-rT} \mathbb{E} [(S_B(T) - K)_+] \\ &= e^{-rT} \mathbb{E} [(S_B(T) \mathbb{1}_{\{S_B(T) > K\}})] - K e^{-rT} \mathbb{E} [\mathbb{1}_{\{S_B(T) > K\}}] \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \{S_B(T) > K\} &= \left\{ S_B(0) \exp \left(\left(r_B - \frac{\sigma_B^2}{2} \right) T + \sigma_B W_B(t) \right) > K \right\} \\ &= \left\{ W_B(t) > \left[\log \left(\frac{K}{S_B(0)} \right) - \left(r_B - \frac{\sigma_B^2}{2} \right) T \right] / \sigma_B \right\} \\ &= \left\{ G > \underbrace{\frac{1}{\sqrt{T}\sigma_B} \left[\log \left(\frac{K}{S_B(0)} \right) - \left(r_B - \frac{\sigma_B^2}{2} \right) T \right]}_d \right\} \quad \text{avec } G \sim \mathcal{N}(0, 1) \end{aligned}$$

Donc

$$P = e^{-rT} \mathbb{E} \left[\left(S_{B,0} \exp \left\{ \left(r_B - \frac{\sigma_B^2}{2} \right) T + \sigma_B \sqrt{T} G \right\} \right) \mathbb{1}_{\{G > d\}} \right] - K e^{-rT} \mathbb{E} [\mathbb{1}_{\{G > d\}}]$$

En passant par la forme intégrale de l'espérance et en sachant que G suit une loi normale centrée réduite, nous avons :

$$P = \frac{S_{B,0}}{\sqrt{2\pi}} \int_d^\infty \exp \left(-\frac{(x - \sigma_B \sqrt{T})^2}{2} \right) dx - K e^{-rT} \mathbb{P}(G < -d)$$

Par un changement de variable sur l'intégrale $y = x - \sigma_B \sqrt{T}$:

$$P = \frac{S_{B,0}}{\sqrt{2\pi}} \int_{d - \sigma_B \sqrt{T}}^\infty \exp \left(-\frac{y^2}{2} \right) dy - K e^{-rT} \mathbb{P}(G < -d)$$

$$= S_{B,0} \mathbb{P}(G > d - \sigma_B \sqrt{T}) - K e^{-rT} \mathbb{P}(G < -d)$$

La formule du prix s'exprime donc en fonction de \mathcal{N} , la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$:

$$P = S_B(0) \mathcal{N}(d_1) - K e^{-rB^T} \mathcal{N}(d_2) \quad \text{avec} \quad d_1 = \sigma_B \sqrt{T} - d \quad \text{et} \quad d_2 = -d$$

13.4 Calcul de $\mathbb{E}[(e^{F(T)} - K)^+]$

Commençons par le calcul intermédiaire suivant :

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{F(T) \geq \log K\}} e^{F(T)}]$$

Comme $F(T) \sim \mathcal{N}(\mathbb{E}[F(T)], \text{Var}[F(T)])$, et en posant $G \sim \mathcal{N}(0, 1)$, on a :

$$F(T) \geq \log K \iff \frac{F(T) - \mathbb{E}[F(T)]}{\sqrt{\text{Var}[F(T)]}} \geq \frac{\log K - \mathbb{E}[F(T)]}{\sqrt{\text{Var}[F(T)]}} \iff G \geq -d$$

avec :

$$d = \frac{\mathbb{E}[F(T)] - \log K}{\sqrt{\text{Var}[F(T)]}}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{F(T) \geq \log K\}} e^{F(T)}] &= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{G \geq -d\}} e^{F(T)}] \\ &= \int_{-d}^{\infty} e^{\mathbb{E}[F(T)] + \sqrt{\text{Var}[F(T)]}x} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= e^{\mathbb{E}[F(T)] + \frac{1}{2}\text{Var}[F(T)]} \int_{-d}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x - \sqrt{\text{Var}[F(T)]})^2}{2}} dx \end{aligned}$$

Par changement de variable $y = x - \sqrt{\text{Var}[F(T)]}$, on obtient :

$$\begin{aligned} &= e^{\mathbb{E}[F(T)] + \frac{1}{2}\text{Var}[F(T)]} \int_{-(d + \sqrt{\text{Var}[F(T)]})}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\ &= e^{\mathbb{E}[F(T)] + \frac{1}{2}\text{Var}[F(T)]} \mathcal{N}(d + \sqrt{\text{Var}[F(T)]}) \end{aligned}$$

Finalement,

$$\mathbb{E}[(e^{F(T)} - K)^+] = \mathbb{E}[(e^{F(T)} - K) \mathbb{1}_{\{F(T) > \log K\}}]$$

$$\begin{aligned} &= \mathbb{E} \left[e^{F(T)} \mathbb{1}_{\{F(T) > \log K\}} \right] - K \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{F(T) > \log K\}} \right] \\ &= e^{\mathbb{E}[F(T)] + \frac{1}{2} \text{Var}[F(T)]} \mathcal{N}(d + \sqrt{\text{Var}[F(T)]}) - K \mathcal{N}(d) \end{aligned}$$