§6.4 傅里叶级数

6.4.1 三角函数系的正交性

一、三角函数系：

$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots$

二、三角函数系的正交性：

三角函数系中任何两个不同函数的乘积在 $[-\pi, \pi]$ 上的积分等于零，即

三角函数系：

$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = 0 \quad (n=1, 2, 3, \cdots);$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0 \quad (n=1, 2, 3, \cdots);$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx dx = 0 \quad (m, n=1, 2, 3, \cdots);$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = 0 \quad (m, n=1, 2, 3, \cdots, m \neq n);$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = 0 \quad (m, n=1, 2, 3, \cdots, m \neq n)。$$

三角函数系：

$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots$

在三角函数系中，任意一个函数的自乘在$[-\pi, \pi]$上的积分为

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx = 2\pi \ ;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \pi \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \ ;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \pi \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \ ;$$

6.4.2 函数展开为傅里叶级数

一、欧拉—傅里叶公式

设以 2π 为周期的函数 $f(x)$ 可展开成三角级数

$$\boxed{f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\ldots\ldots(1)}$$

并设级数(1)在$[-\pi,\ \pi]$上可逐项积分，那么系数

$a_0,\ a_1,\ b_1,a_2,\ b_2,\cdots$ 与 $f(x)$ 存在什么关系？如何求出？

利用三角函数系的正交性，对(1)式两边在$[-\pi,\ \pi]$ 上积分：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\ldots\ldots(1)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx\right)=a_0\pi$$

故 $\boxed{a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx\text{。}}$

用 $\cos nx$ 乘以(1)式两边后积分：

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx$$

$$=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nxdx+b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cos nxdx\right)$$

$$=a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nxdx=a_n\pi\ ,$$

$$\therefore \boxed{a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \quad (n = 1, 2, \cdots)\text{。}}$$

同理用 $\sin nx$ 乘以（1）式两边后积分，得

$$\boxed{b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \quad (n = 1, 2, \cdots)\text{。}}$$

a_0 可由 a_n 统一给出：

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx & (n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots) \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx & (n = 1,\ 2,\ \cdots) \end{cases} \qquad (2)$$

（2）式称为欧拉—傅里叶公式。

2. 傅里叶级数

设 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上可积，则以（2）式中的 a_n 和 b_n

作为系数而得到的三角级数 $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

称为函数 $f(x)$ 的**傅里叶级数**，记为

$$\boxed{f(x) \sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\text{。}} \qquad (3)$$

a_n $(n=0, 1, 2, \cdots)$ 和 b_n $(n=1, 2, \cdots)$ 称为函数 $f(x)$

的**傅里叶系数**。

例 1． $f(x)$ 以 2π 为周期，且 $x\in(-\pi,\pi]$ 时 $f(x)=x$ ，

求 $f(x)$ 的傅里叶级数。

解： $a_0=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}xdx=0$ ， $a_n=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos nxdx=0$ ，

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nxdx=-\frac{1}{n\pi}x\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{2}{n},$$

$$\therefore\ f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin nx\ 。$$

三、傅里叶级数的收敛性

定理 1（狄利克雷（*Dirichlet*）充分条件）

设 $f(x)$ 以 2π 为周期，在 $[-\pi,\pi]$ 上满足：

（1）连续或只有有限个第一类间断点；

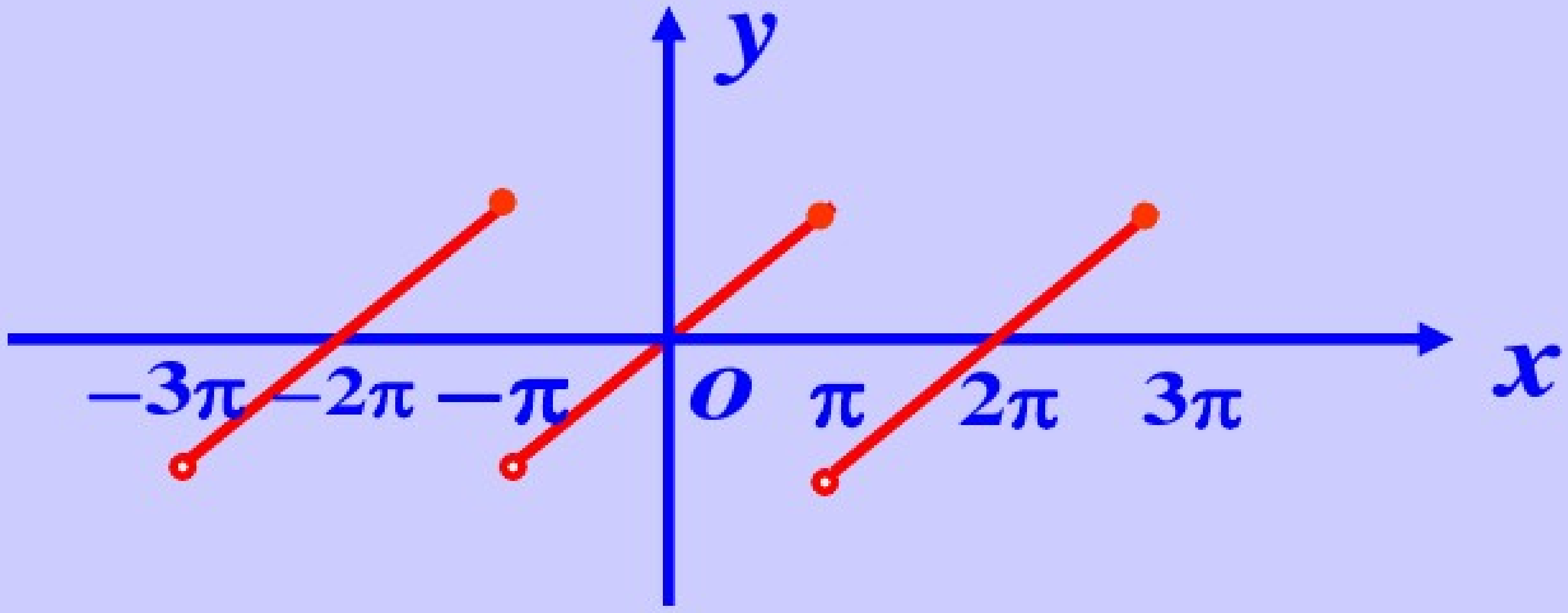
（2）只有有限个极值点；

则 $f(x)$ 的傅里叶级数 $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

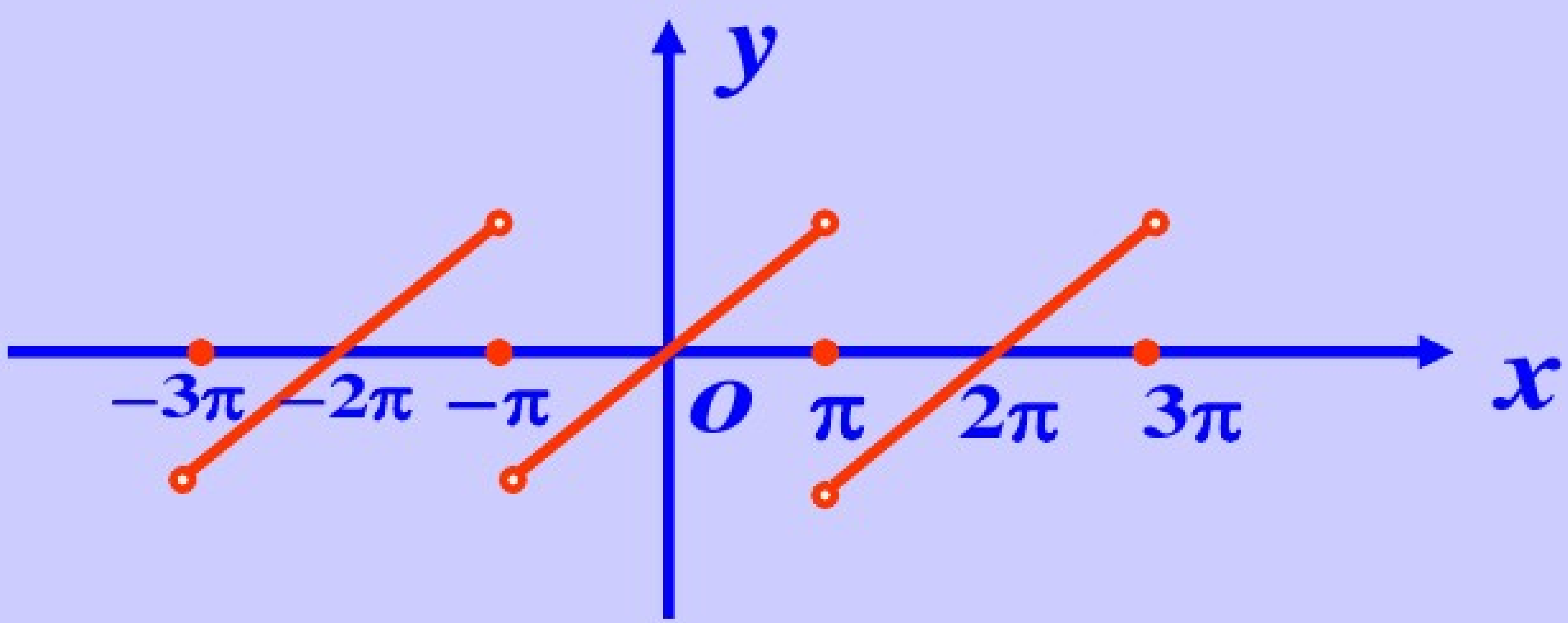
在 $[-\pi,\pi]$ 上收敛，且其和函数为

$$S(x)=\begin{cases} f(x), & x\text{为}f(x)\text{的连续点}, \\ \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}, & x\text{为}f(x)\text{的间断点}, \\ \dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}, & x=\pm\pi. \end{cases}$$

即 $S(x)=\begin{cases} x, & x\in(-\pi,\pi), \\ 0, & x=\pm\pi. \end{cases}$



$f(x)$的图象.



$S(x)$的图象.

把 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上展开为傅里叶级数的步骤为

（1）用狄氏条件判断 $f(x)$ 能否展开为傅里叶级数；

（2）求出傅里叶系数；

（3）写出傅里叶级数并注明在何处收敛于 $f(x)$；

（4）画出 $f(x)$ 和 $S(x)$ 的图形（至少画出三个周期），

并写出 $S(x)$ 的表达式。

例 2. 设 $f(x)$ 以 2π 为周期，且 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\le x<0\\ 1, & 0\le x<\pi\end{cases}$，

将 $f(x)$ 展开为傅里叶级数， 并求其和函数 $S(x)$。

解： $f(x)$ 满足狄氏条件。求傅里叶系数：

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} dx=0,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx \quad =\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\cos nx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos nx\,dx$$

$$=0\ (n=1,2,\cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx \quad =\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\sin nxdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin nxdx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos nx}{n}\right]\Bigg|_{-\pi}^{0}+\frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]\Bigg|_{0}^{\pi}$$

$$=\frac{1}{n\pi}(1-\cos n\pi-\cos n\pi+1)=\frac{2}{n\pi}[1-(-1)^n]$$

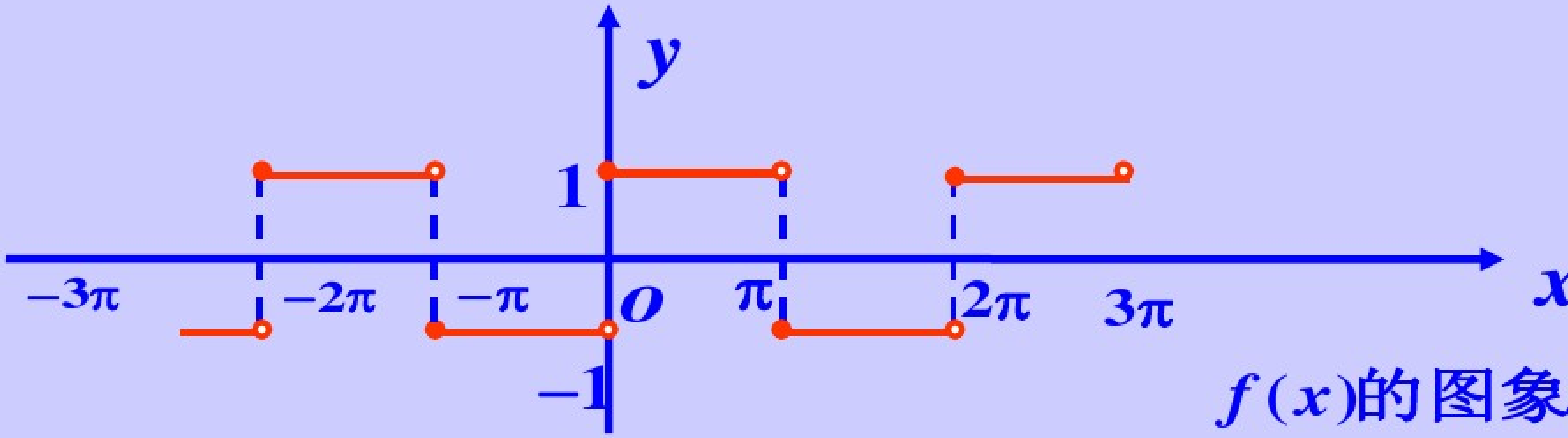
$$=\begin{cases}\dfrac{4}{(2k-1)\pi}, & n=2k-1,\\ 0, & n=2k.\end{cases}\quad (k=1,2,\cdots)$$

$f(x)$ 的傅里叶级数展开式为

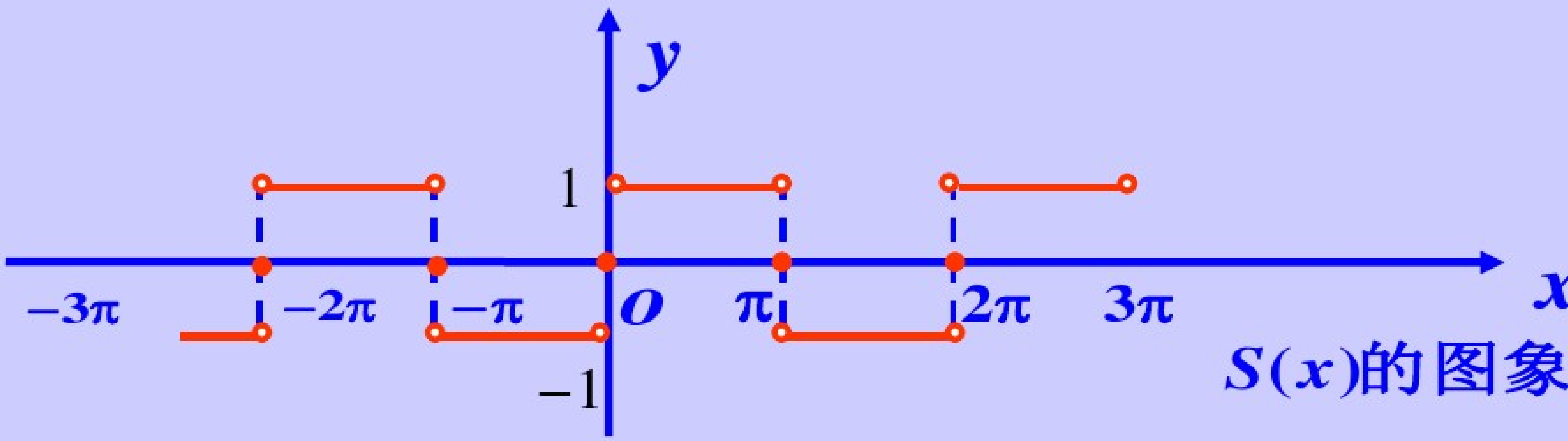
$$f(x)=\frac{4}{\pi}\left[\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\cdots+\frac{1}{2k-1}\sin(2k-1)x+\cdots\right],$$

$$x\in(-\pi,0)\cup(0,\pi)$$

$$S(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x<0,\\ 1, & 0<x<\pi,\\ 0, & x=0,\ \pm\pi.\end{cases}$$



f(x)的图象.



S(x)的图象.

例 3. 设 $f(x)$ 以 2π 为周期，且 $f(x)=\begin{cases} x & -\pi \le x \le 0 \\ 1 & 0 < x < \pi \end{cases}$，

将 $f(x)$ 展开为傅里叶级数，并求其和函数 $S(x)$。

解：$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} xdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} dx=1-\frac{\pi}{2}$，

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\cos nx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos nx\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}\right]_{-\pi}^{0}+\frac{1}{n\pi}[\sin nx]_{0}^{\pi}$$

$$=\frac{1}{n^2\pi}(1-\cos nx)=\frac{1}{n^2\pi}[1-(-1)^n]=\begin{cases} \frac{2}{(2k-1)^2\pi}, & n=2k-1, \\ 0, & n=2k. \end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\sin nxdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin nxdx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}\right]_{-\pi}^{0}-\frac{1}{n\pi}\left[\cos nx\right]_{0}^{\pi}$$

$$=-\frac{\cos nx}{n}-\frac{1}{n\pi}(\cos n\pi-1)=\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\frac{(-1)^{n+1}+1}{n\pi}\ (n=1,2,3,\cdots).$$

$f(x)$ 的傅里叶级数展开式为

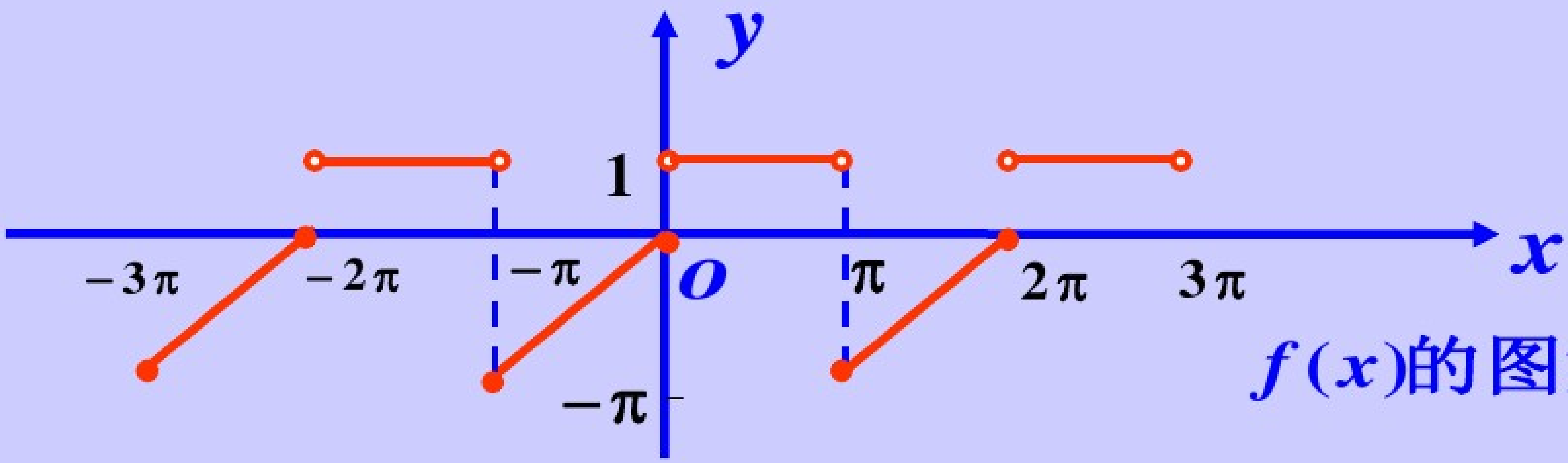
$$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\left[\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+....\right]$$

$$+\left[(1+\frac{2}{\pi})\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}(1+\frac{2}{\pi})\sin 3x+.....\right].$$

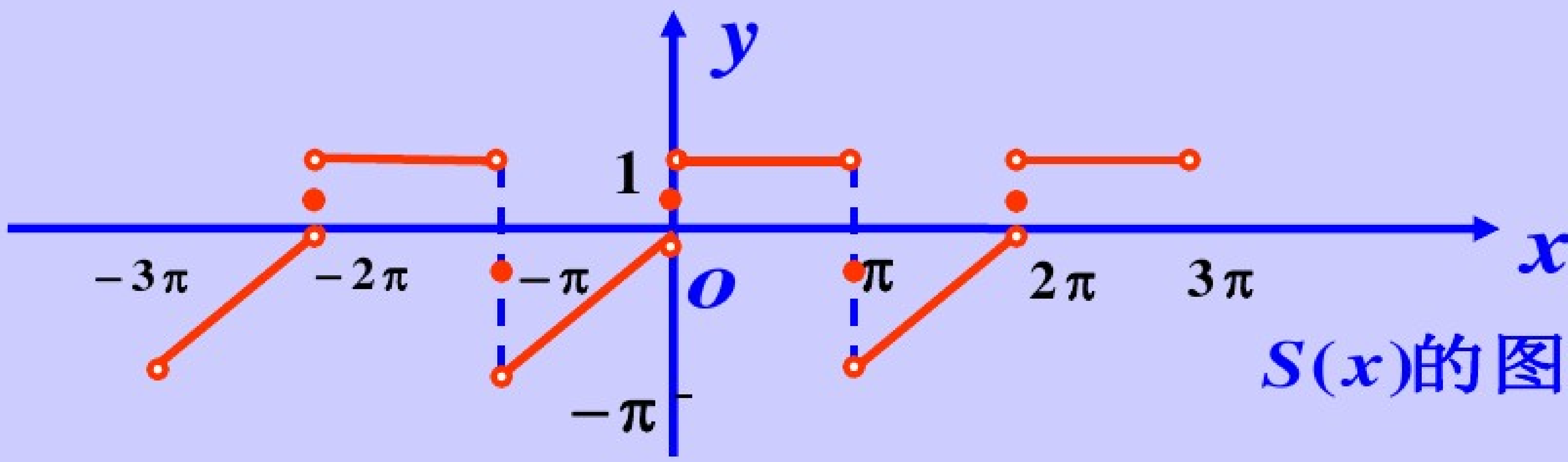
$$x\in(-\pi,0)\cup(0,\pi)$$

当 $x=0$ 时，级数收敛于级数 $\dfrac{f(0+0)+f(0-0)}{2}=\dfrac{1}{2}$；

当 $x=\pm\pi$ 时，级数收敛于 $\dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}=\dfrac{1-\pi}{2}$。



$f(x)$的图象.



$S(x)$的图象.

若 $f(x)$ 只在 $[-\pi,\pi]$ 上有定义，且满足收敛定理的条件，则将 $f(x)$ 延拓为以 2π 为周期的函数 $F(x)$，即定义一个函数 $F(x)$，使它在 $(-\infty,+\infty)$ 上以 2π 为周期，在 $(-\pi,\pi]$ 上 $F(x)=f(x)$，然后将 $F(x)$ 展开为傅里叶级数，再把 x 限制在 $(-\pi,\pi)$ 上，便得 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式。根据收敛定理，这级数在 $x=\pm\pi$ 处收敛于 $\dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$。$F(x)$ 称为 $f(x)$ 的周期延拓。

例 4．将函数 $f(x)=x^2(-\pi\le x\le\pi)$ 展开成傅里叶级数。

解：把 $f(x)$ 在 $(-\pi,\pi]$ 上作周期延拓，

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2dx=\frac{2\pi^2}{3},$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos nxdx$$

$$=\frac{(-1)^n 4}{n^2}(n=1,2,\cdots),$$

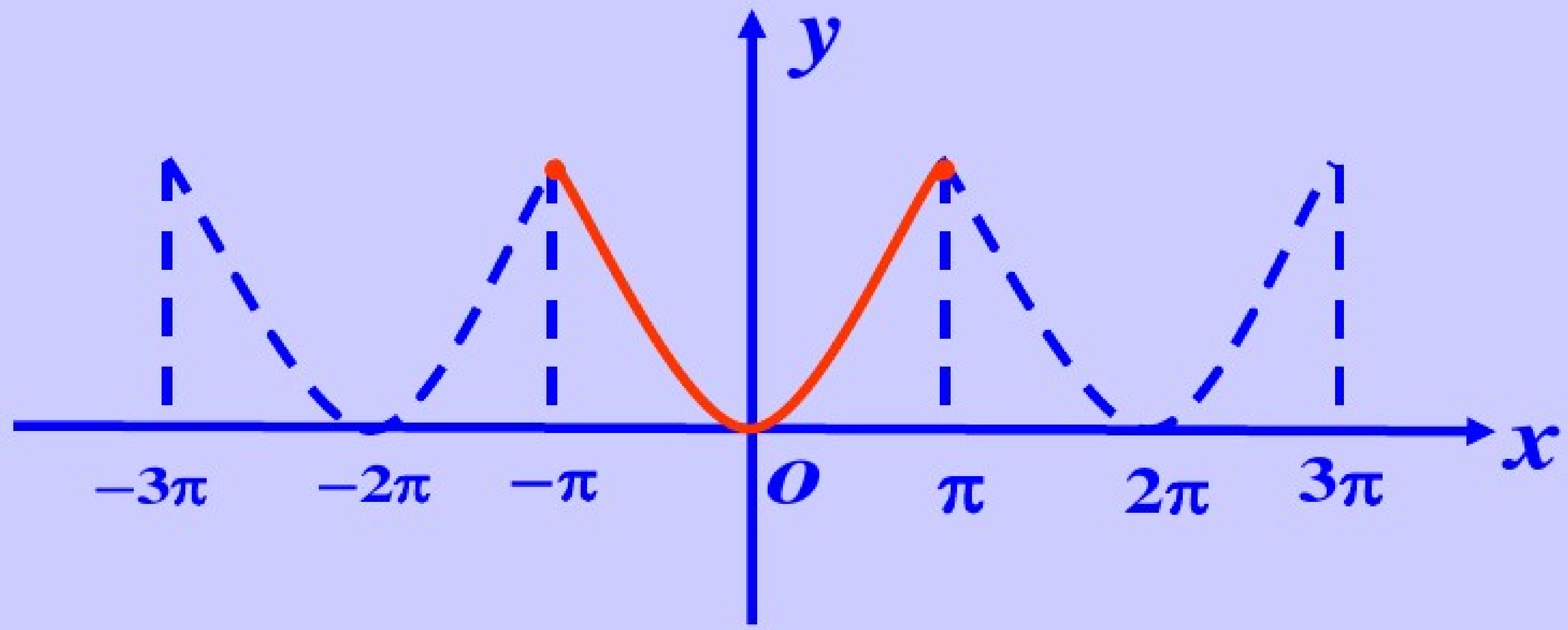
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\sin nxdx=0,$$

$\because$ $f(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 内连续，

当 $x=\pm\pi$ 时， $\dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}=\pi^2=f(\pm\pi)$，

故由收敛定理得

$$f(x)=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx \quad (-\pi\le x\le\pi)。$$

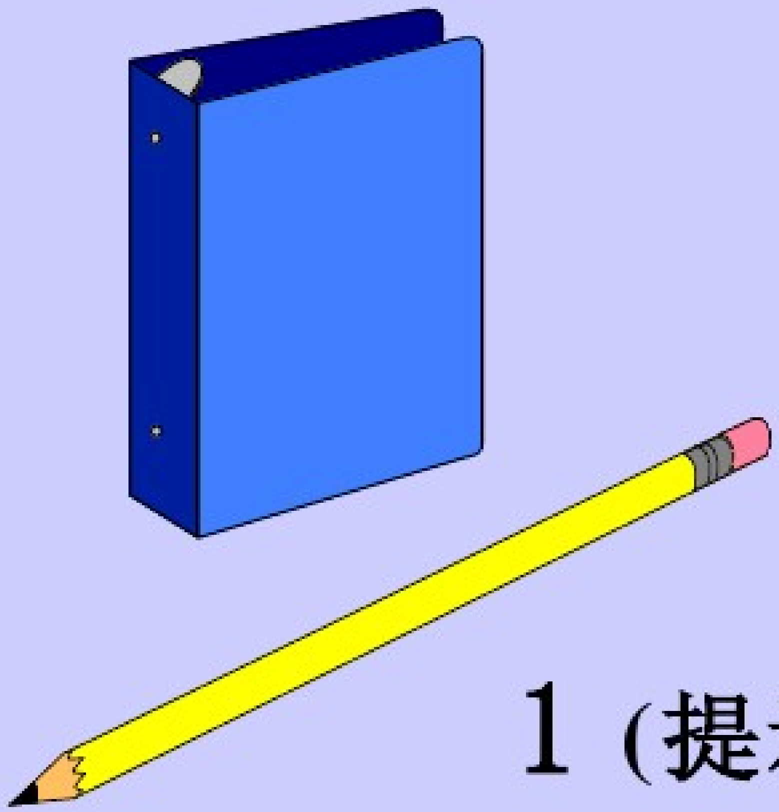


当 $x=0$ 时， $f(0)=\dfrac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n^2}=0$ ，

$$得\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}\ 。$$

当 $x=\pi$ 时， $f(\pi)=\dfrac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}=\pi^2$ ，

$$得\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}\ 。$$



作　业

习 题 八 （P57）

1 (提示：分 $n=1$ 和 $n\geq 2$ 两种情况求 a_n.)

3（1）(提示：分 $n=1$ 和 $n\geq 2$ 两种情况求 a_n.)

（3）。