随机过程和线性系统

随机过程和线性系统

1 概述

线性系统的定义

定义 1，线性系统

定义 2，瞬时系统

定义 3，动态（记忆）系统

定义 4，因果系统

定义 5，时不变系统

定义 6，集总参数、连续时间的动态系统

定义 7，集总参数、离散时间的动态系统

线性系统的数学描述

微分方程和差分方程

单位脉冲的冲击响应

变换域响应。

1.1 连续时间线性系统的描述

系统的输入信号为 x(t)、输出信号为 y(t)

微分方程：

$$a_n \frac{d^n}{dt^n} y(t) + \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} a_{n-1} y(t) + \cdots + a_0 y(t)$$
$$= b_m \frac{d^m}{dt^m} x(t) + b_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} x(t) + \cdots + b_0 x(t)$$

或使用算符 s，差分方程可简写作，

$$a(s)y(t) = b(s)x(t)$$

单位样值冲击响应：

$$h(t), t \in R$$

如果系统是因果的、物理可实现的，则

$$h(t) = 0, t < 0$$

传递函数：

$$H(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0},$$

系统对输入信号激励的响应、输出信号是：

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-u)x(u)du = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)x(t-u)du$$

如果系统是因果物理可实现的，则

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t-u)x(u)du = \int_{0}^{\infty} h(u)x(t-u)du$$

稳态的系统对输入信号激励的响应、输出信号的响应是：

$$Y(s) = H(s)X(s)$$

$$Y(s)=\int_0^{\infty} y(t)e^{-st}dt$$

$$X(s)=\int_0^{\infty} x(t)e^{-st}dt$$

1.2 离散时间线性系统的描述

系统的输入信号为 x(k)、输出信号为 y(k)

差分方程：

$$\begin{aligned}&a_n y(k-n)+a_{n-1}y(k-n+1)+\cdots+a_0 y(k)\\&=b_m x(k-m)+b_{m-1}x(k-m+1)+\cdots+b_0 x(k)\end{aligned}$$

或使用算符 s，差分方程可简写作，

$$a(s)y(k)=b(s)x(k)$$

单位样值冲击响应：

$$h(l),l=\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots$$

如果系统是因果的、物理可实现的，则

$$h(l)=0,l<0$$

传递函数：

$$H(z)=\sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l)z^{-l},$$

如果系统是物理可实现的，则

$$H(z)=\sum_{l=0}^{\infty} h(l)z^{-l}$$

系统对输入信号激励的响应、输出信号是：

$$y(k)=\sum_{l=-\infty}^{\infty} h(k-l)x(l)=\sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l)x(k-l)$$

如果系统是因果物理可实现的，则

$$y(k)=\sum_{l=-\infty}^{k} h(k-l)x(l)=\sum_{l=0}^{\infty} h(l)x(k-l)$$

稳态的系统对输入信号激励的响应、输出信号的响应是：

$$Y(z) = H(z)X(z)$$

$$Y(z) = \sum_{l=0}^{\infty} y(l) z^{-l}, \qquad X(z) = \sum_{l=0}^{\infty} x(l) z^{-l}$$

1.3 离散时间自回归过程

一阶自回归过程

动态方程

$$s(k) = as(k-1) + w(k-1)$$

其中，a 是系统的参量，w(k)是均值为零的白噪声样本，

$$E\{w(k)\} = 0, \quad E\{w(k)w(l)\} = \begin{cases} 0, & (k \neq l) \\ \sigma_w^2 & (k = l) \end{cases}$$

系统的输入信号是 w(k)，输出是 s(k)。

系统的传递函数是，

$$H(z) = \frac{s(z)}{w(z)} = \frac{z^{-1}}{1 - az^{-1}} = \frac{e^{-j2\pi f}}{1 - ae^{-j2\pi f}}$$

系统输出响应的均值、功率谱、相关函数、输出功率：

$$E\{s(k)\} = 0$$

$$P_{ss}(f) = \sigma_w^2 |H(f)|^2 = \frac{\sigma_w^2}{(1 + a^2) - 2a\cos(2\pi f)}$$

$$\begin{aligned} R_{ss}(k) &= \int_{-\pi}^{\pi} P_{ss}(f) e^{j2\pi f} df \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sigma_w^2}{(1 + a^2) - 2a\cos(2\pi f)} e^{j2\pi f} df \\ &= \frac{\sigma_w^2}{(1 - a^2)} a^{|k|} \end{aligned}$$

$$R_{ss}(0) = \frac{\sigma_w^2}{(1 - a^2)} = \sigma_s^2$$

二阶自回归过程

系统方程

$$s(k)=as(k-1)+bs(k-2)+w(k-1)$$

系统的状态方程

定义 $s_1(k)=s(k),\quad s_2(k)=s(k-1)$

$$s_1(k)=as_1(k-1)+bs_2(k-1)+w_1(k-1)$$
$$s_2(k)=s_1(k-1)$$

写成矩阵方程 $S(k)=AS(k-1)+BW(k-1)$

$$A=\begin{pmatrix}a & b\\ 1 & 0\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\qquad W(k-1)=\begin{pmatrix}w_1(k-1)\\ w_2(k-1)\end{pmatrix}$$

系统噪声

$$E\{W(k)\}=0$$
$$E\{W(k_1)W^T(k_2)\}=Q\Delta(k_1-k_2)$$

观察方程 $\eta(k)=CS(k-1)+V(k-1)$

观察噪声

$$E\{N(k)\}=0$$
$$E\{N(k_1)N^T(k_2)\}=L\Delta(k_1-k_2)$$
$$E\{W(k_1)N^T(k_2)\}=0$$

高阶自回归过程可以写成一阶自回归的矩阵形式。

2 连续时间线性系统

2.1 连续时间线性系统的微分方程

利用系统的微分方程求解输出随机过程的均值，输出和输入随机过程的互相关函数，输出随机过程的自相关函数。

输出随机过程 $\eta(t)$ 和输入随机过程 $\xi(t)$ 的微分方程：

$$a(s)\eta(t)=b(s)\xi(t)$$

$$s=d/dt$$

已知输入过程的均值函数$\mu_{\xi}(t)$求输出过程的均值函数$\mu_{\eta}(t)$，

相应的微分方程和初始条件是，

$a(s)\mu_{\eta}(t)=b(s)\mu_{\xi}(t)$，

$\mu_{\eta}(t=0^{-})$，

$s=d/dt$

微分方程推导：由$a(s)\eta(t)=b(s)\xi(t)$，

$E\{a(s)\eta(t)\}=E\{b(s)\xi(t)\}$，

$a(s)E\{\eta(t)\}=b(s)E\{\xi(t)\}$

求输入过程和输出过程的互相关函数$R_{\xi\eta}(t_1,t_2)$，相应的微分方程和初始条件是，

$a(s_2)R_{\xi\eta}(t_1,t_2)=b(s_2)R_{\xi\xi}(t_1,t_2)$，

$R_{\xi\eta}(t_1,t_2=0^{-})$，

$s=d/dt_2$

微分方程推导：由$a(s_2)\eta(t_2)=b(s_2)\xi(t_2)$，

$\xi(t_1)a(s_2)\eta(t_2)=\xi(t_1)b(s_2)\xi(t_2)$

$E\{\xi(t_1)a(s_2)\eta(t_2)\}=E\{\xi(t_1)b(s_2)\xi(t_2)\}$，

$a(s_2)E\{\xi(t_1)\eta(t_2)\}=b(s_2)E\{\xi(t_1)\xi(t_2)\}$

$a(s_2)R_{\xi\eta}(t_1,t_2)=b(s_2)R_{\xi\xi}(t_1,t_2)$

求输入过程和输出过程的互相关函数$R_{\eta\xi}(t_1,t_2)$，相应的微分方程和初始条件是，

$a(s_1)R_{\eta\xi}(t_1,t_2)=b(s_1)R_{\xi\xi}(t_1,t_2)$，

$R_{\eta\xi}(t_1,t_2=0^{-})$，

$s=d/dt_1$

微分方程推导：由$a(s_1)\eta(t_1)=b(s_1)\xi(t_1)$，

$a(s_1)\eta(t_1)\xi(t_2)=b(s_1)\xi(t_1)\xi(t_2)$

$$E\{a(s_1)\eta(t_1)\xi(t_2)\} = E\{b(s_1)\xi(t_1)\xi(t_2)\}$$

$$a(s_1)E\{\eta(t_1)\xi(t_2)\} = b(s_1)E\{\xi(t_1)\xi(t_2)\}$$

$$a(s_1)R_{\eta\xi}(t_1,t_2) = b(s_1)R_{\xi\xi}(t_1,t_2)$$

求输出过程的自相关函数，

$a(s_1)R_{\eta\eta}(t_1,t_2) = b(s_1)R_{\xi\eta}(t_1,t_2)$，

$R_{\eta\eta}(t_1 = 0^-, t_2)$，

$s = d/dt_1$

微分方程推导：由 $a(s_1)\eta(t_1) = b(s_1)\xi(t_1)$，

$$a(s_1)\eta(t_1)\eta(t_2) = b(s_1)\xi(t_1)\eta(t_2)$$

$$E\{a(s_1)\eta(t_1)\eta(t_2)\} = E\{b(s_1)\xi(t_1)\eta(t_2)\}$$

$$a(s_1)E\{\eta(t_1)\eta(t_2)\} = b(s_1)E\{\xi(t_1)\eta(t_2)\}$$

$$a(s_1)R_{\eta\eta}(t_1,t_2) = b(s_1)R_{\xi\eta}(t_1,t_2)$$

系统、均值、相关函数的微分方程（小结）：

输入输出过程的微分方程

$$a_n y^{(n)}(t) + \cdots + a_0 y(t) = x(t)$$

输入输出过程均值的微分方程

$$a_n \eta_y^{(n)}(t) + \cdots + a_0 \eta_y(t) = \eta_x(t)$$

输入与输出互相关函数的微分方程

$$a_n \frac{\partial^n}{\partial t_2^n} R_{xy}(t_1,t_2) + \cdots + a_0 R_{xy}(t_1,t_2) = R_{xx}(t_1,t_2)$$

输出与输出相关函数的微分方程

$$a_n \frac{\partial^n}{\partial t_1^n} R_{yy}(t_1,t_2) + \cdots + a_0 R_{yy}(t_1,t_2) = R_{xy}(t_1,t_2)$$

2.2 连续时间线性系统的冲击响应

（一般情形，考虑物理可实现的情形）

利用线性系统的冲击响应求解输出随机过程的均值，输出和输入随机过程的互相关函数，输出随机关过程的自相关函数。

线性系统对输入随机过程$\xi(t)$的冲击响应是$h(t)$，求输出随机过程$\eta(t)$，

$$\begin{aligned}\eta(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t-u)\xi(u)du \\ &= \int_{-\infty}^{t} h(t-u)\xi(u)du \\ &= \int_{0}^{\infty} h(u)\xi(t-u)du\end{aligned}$$

求瞬态响应、必须给定初始条件，

$$\eta(t)-\eta(t=0) = \int_{0}^{t} h(t-u)\xi(u)du = \int_{0}^{t} h(u)\xi(t-u)du$$

求输出过程的均值函数（考虑初始条件为零），

$$\begin{aligned}\mu_{\eta}(t) = E\{\eta(t)\} &= E\left\{\int_{-\infty}^{t} h(t-u)\xi(u)du\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{t} h(t-u)E\{\xi(u)\}du \\ &= \int_{-\infty}^{t} h(t-u)\mu_{\xi}(t)du\end{aligned}$$

求输入过程和输出过程的互相关函数，

$$\begin{aligned}R_{\xi\eta}(t_1,t_2) = E\{\xi(t_1)\eta^*(t_2)\} &= E\left\{\xi(t_1)\cdot\int_{-\infty}^{t_2} h^*(t_2-u)\xi^*(u)du\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{t_2} h^*(t_2-u)E\{\xi(t_1)\cdot\xi^*(u)\}du \\ &= \int_{-\infty}^{t_2} h^*(t_2-u)R_{\xi\xi}(t_1,u)du\end{aligned}$$

$$R_{\eta\xi}(t_1,t_2)=E\{\eta(t_1)\xi^*(t_2)\}=E\left\{\xi^*(t_2)\cdot\int_{-\infty}^{t_1}h(t_1-u)\xi(u)du\right\}$$

$$=\int_{-\infty}^{t_2}h(t_2-u)E\{\xi(u)\cdot\xi^*(t_2)\}du$$

$$=\int_{-\infty}^{t_2}h(t_2-u)R_{\xi\xi}(u,t_1)du$$

求输出过程的自相关函数，

$$R_{\eta\eta}(t_1,t_2)=E\{\eta(t_1)\eta^*(t_2)\}=E\left\{\int_{-\infty}^{t_1}h(t_1-u)\xi(u)du\cdot\int_{-\infty}^{t_2}h^*(t_2-v)\xi^*(v)dv\right\}$$

$$=\int_{-\infty}^{t_1}\int_{-\infty}^{t_2}h(t_1-u)h^*(t_2-v)\cdot E\{\xi(u)\xi^*(v)\}dudv$$

$$=\int_{-\infty}^{t_1}\int_{-\infty}^{t_2}h(t_1-u)h^*(t_2-v)\cdot R_{\xi\xi}(u,v)dudv$$

2.3 连续时间线性系统的冲击响应（稳态）

（稳态情形）利用线性系统的冲击响应，求解稳态情形下，输出随机过程的均值，输出和输入随机过程的互相关函数，输出随机关过程的自相关函数。

求输出随机过程的冲击响应，

$$\eta(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t-u)\xi(u)du=\int_{-\infty}^{\infty}h(u)\xi(t-u)du$$

求输出过程的均值函数，

$$\mu_\eta(t)=E\{\eta(t)\}=E\left\{\int_{-\infty}^{\infty}h(u)\xi(t-u)du\right\}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}h(u)E\{\xi(t-u)\}du$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}h(u)\mu_\xi du$$

求输入过程和输出过程的互相关函数，

$$R_{\xi\eta}(t_1,t_2)=E\{\xi(t_1)\eta^*(t_2)\}=E\left\{\xi(t_1)\cdot\int_{-\infty}^{\infty}h^*(t_2-u)\xi^*(u)du\right\}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}h^*(t_2-u)E\{\xi(t_1)\cdot\xi^*(u)\}du$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}h^*(t_2-u)R_{\xi\xi}(t_1,u)du$$

$$R_{\eta\xi}(t_1,t_2)=E\{\eta(t_1)\xi^*(t_2)\}=E\left\{\xi^*(t_2)\cdot\int_{-\infty}^{\infty}h(t_1-u)\xi(u)du\right\}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}h(t_1-u)E\{\xi(u)\cdot\xi^*(t_2)\}du$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}h(t_1-u)R_{\xi\xi}(u,t_2)du$$

求输出过程的自相关函数，

$$R_{\eta\eta}(t_1,t_2)=E\{\eta(t_1)\eta^*(t_2)\}=E\left\{\int_{-\infty}^{\infty}h(t_1-u)\xi(u)du\cdot\int_{-\infty}^{\infty}h^*(t_2-v)\xi^*(v)dv\right\}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(t_1-u)h^*(t_2-v)\cdot E\{\xi(u)\xi^*(v)\}dudv$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(t_1-u)h^*(t_2-v)\cdot R_{\xi\xi}(u,v)dudv$$

$$R_{\eta\eta}(t_1,t_2)=E\{\eta(t_1)\eta^*(t_2)\}=E\left\{\int_{-\infty}^{\infty}h(u)\xi(t_1-u)du\cdot\int_{-\infty}^{\infty}h^*(v)\xi^*(t_2-v)dv\right\}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(u)h^*(v)\cdot E\{\xi(t_1-u)\xi^*(t_2-v)\}dudv$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(u)h^*(v)\cdot R_{\xi\xi}(t_1-u,t_2-v)dudv$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(u)h^*(v)\cdot R_{\xi\xi}(t_1-t_2-u+v)dudv$$

2.4 连续时间线性系统的传递函数

（稳态情形）利用线性系统的传输函数，求解稳态情形下，输出随机过程的功率谱密度，自相关函数。线性系统对输入随机过程 $\xi(t)$ 的冲击响应是 $h(t)$，求输出随机过程 $\eta(t)$，

输入随机过程 $\xi(t)$ 的功率谱密度

$$P_{\xi\xi}(f)=\int_{-\infty}^{\infty}R_{\xi\xi}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$

输出随机过程 $\eta(t)$ 的功率谱密度

$$P_{\eta\eta}(f)=\int_{-\infty}^{\infty}R_{\eta\eta}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$

定理 1：

线性系统输出随机过程的功率谱密度等于系统频率响应模的平方乘以输入随机过程的功率谱密度。

证明：

$$\begin{aligned}
P_{\eta\eta}(f)&=\int_{-\infty}^{\infty}R_{\eta\eta}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(u)h^{*}(v)R_{\xi\xi}(\tau-u+v)e^{-j2\pi f\tau}dudv\cdot d\tau\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(u)h^{*}(v)\left(\int_{-\infty}^{\infty}R_{\xi\xi}(\tau-u+v)e^{-j2\pi f\tau}d\tau\right)\cdot dudv\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(u)e^{-j2\pi fu}h^{*}(v)e^{j2\pi fv}\cdot dudv\cdot P_{\xi\xi}(f)\\
&=P_{\xi\xi}(f)H(f)H^{*}(f)\\
&=P_{\xi\xi}(f)\left|H(f)\right|^{2}
\end{aligned}$$

其中，$H(f)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)e^{j2\pi f\tau}d\tau$

频率响应的方法：只适用于平稳随机过程激励线性系统达到稳态的响应

输出随机过程 $\eta(t)$ 的自相关函数，

$$\begin{aligned}
R_{\eta\eta}(\tau)&=\int_{-\infty}^{\infty}P_{\eta\eta}(f)e^{j2\pi f\tau}d\tau\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}P_{\xi\xi}(f)\left|H(f)\right|^{2}e^{j2\pi f\tau}d\tau
\end{aligned}$$

定理 2：

线性系统输出输入随机过程的互功率谱密度等于系统频率响应乘以输入随机过程的功率谱密度。

证明：

$$
\begin{aligned}
P_{\eta\xi}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{\eta\xi}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} E\left[\eta(t+\tau)\overline{\xi(t)}\right]e^{-j2\pi f\tau}d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} E\left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} h(u)\xi(t+\tau-u)du\right)\overline{\xi(t)}\right]e^{-j2\pi f\tau}d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} h(u)\left[E\left(\xi(t+\tau-u)\overline{\xi(t)}\right)\right]du\right)\right]e^{-j2\pi f\tau}d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} h(u)R_{\xi\xi}(\tau-u)du\right)\right]e^{-j2\pi f\tau}d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} h(u)\left(\int_{-\infty}^{\infty} R_{\xi\xi}(\tau-u)e^{-j2\pi f(\tau-u)}d\tau\right)e^{j2\pi fu}du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} h(u)e^{j2\pi fu}du\cdot P_{\xi\xi}(f) \\
&= P_{\xi\xi}(f)H(f)
\end{aligned}
$$

其中，$H(f)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)e^{j2\pi f\tau}d\tau$

频率响应的方法：只适用于平稳随机过程激励线性系统达到稳态的响应

输出随机过程$\eta(t)$与输入随机过程$\xi(t)$的互相关函数，

$$
\begin{aligned}
R_{\eta\xi}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} P_{\eta\xi}(f)e^{j2\pi f\tau}d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} P_{\xi\xi}(f)H(f)e^{j2\pi f\tau}d\tau
\end{aligned}
$$

定理 3：

线性系统输入输出随机过程的互功率谱密度等于系统频率响应的复共轭乘以输入随机过程的功率谱密度。

证明：

$$
\begin{aligned}
P_{\xi\eta}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{\xi\eta}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} E\left[\xi(t+\tau)\overline{\eta(t)}\right]e^{-j2\pi f\tau}d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} E\left[\xi(t+\tau)\left(\int_{-\infty}^{\infty}\overline{h(u)\xi(t-u)}du\right)\right]e^{-j2\pi f\tau}d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(\int_{-\infty}^{\infty}\overline{h(u)}\left[E\left(\xi(t+\tau)\overline{\xi(t-u)}\right)\right]du\right)\right]e^{-j2\pi f\tau}d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(\int_{-\infty}^{\infty}\overline{h(u)}R_{\xi\xi}(\tau+u)du\right)\right]e^{-j2\pi f\tau}d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\overline{h(u)}\left(\int_{-\infty}^{\infty}R_{\xi\xi}(\tau+u)e^{-j2\pi f(\tau+u)}d\tau\right)e^{-j2\pi fu}du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} h(u)e^{-j2\pi fu}du\cdot P_{\xi\xi}(f) \\
&= P_{\xi\xi}(f)\overline{H(f)}
\end{aligned}
$$

其中，$H(f)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)e^{j2\pi f\tau}d\tau$

频率响应的方法：只适用于平稳随机过程激励线性系统达到稳态的响应

输入随机过程$\xi(t)$与输出随机过程$\eta(t)$的互相关函数，

$$
\begin{aligned}
R_{\xi\eta}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} P_{\xi\eta}(f)e^{j2\pi f\tau}d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} P_{\xi\xi}(f)\overline{H(f)}e^{j2\pi f\tau}d\tau
\end{aligned}
$$

2.5 一般矩、向量过程、多端口系统：

系统、均值、相关函数的冲击响应表达式（小结）：

利用算子表示线性系统输入输出相关函数的关系：

$$R_{xy}(t_1,t_2)=L_2\left[R_{xx}(t_1,t_2)\right]$$

$$R_{xy}(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}R_{xx}(t_1,t_2-\alpha)h(\alpha)d\alpha$$

$$R_{yy}(t_1,t_2)=L_1\left[R_{xy}(t_1,t_2)\right]$$

$$R_{yy}(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}R_{xy}(t_1-\alpha,t_2)h(\alpha)d\alpha$$

$$R_{yy}(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}R_{xx}(t_1-\alpha,t_2-\beta)h(a)h(\beta)d\alpha d\beta$$

对于自协方差函数

$$C_{xy}(t_1,t_2)=C_{xx}(t_1,t_2)*h(t_2)$$
$$C_{yy}(t_1,t_2)=C_{xy}(t_1,t_2)*h(t_1)$$

对于复随机过程的相关函数

$$R_{xy}(t_1,t_2)=R_{xx}(t_1,t_2)*h^*(t_2)$$
$$R_{yy}(t_1,t_2)=C_{xy}(t_1,t_2)*h(t_1)$$

一般矩：

$$R_{yyy}(t_1,t_2,t_3)=E\left\{y(t_1)y(t_2)y(t_3)\right\}$$
$$E\left\{x(t_1)x(t_2)y(t_3)\right\}=L_3\left[E\left\{x(t_1)x(t_2)x(t_3)\right\}\right]$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}R_{xxx}(t_1,t_2,t_3-\gamma)h(\gamma)d\gamma$$
$$E\left\{x(t_1)y(t_2)y(t_3)\right\}=L_2\left[E\left\{x(t_1)x(t_2)y(t_3)\right\}\right]$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}R_{xxy}(t_1,t_2-\beta,t_3)h(\beta)d\beta$$
$$E\left\{y(t_1)y(t_2)y(t_3)\right\}=L_1\left[E\left\{x(t_1)y(t_2)y(t_3)\right\}\right]$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}R_{xyy}(t_1-\alpha,t_2,t_3)h(\alpha)d\alpha$$

向量过程：

$$\mathbf{X}(t)=\left[x_i(t)\right],\quad \mathbf{Y}(t)=\left[y_j(t)\right]$$
$$E\left\{\mathbf{X}(t)\right\}=E\left\{\left[x_i(t)\right]\right\}=\left[\eta_i(t)\right]$$
$$R_{XX}(t_1,t_2)=E\left\{\mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{\dagger}(t)\right\}$$
$$R_{XY}(t_1,t_2)=E\left\{\mathbf{X}(t)\mathbf{Y}^{\dagger}(t)\right\}$$

多端口系统：

$$\mathbf{H}(t)=\left[h_{ji}(t)\right]$$

$$\mathbf{Y}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{H}(\alpha)\mathbf{X}(t-\alpha)d\alpha$$

$$\mathbf{X}(t_1)\mathbf{Y}^{\dagger}(t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{X}(t_1)\mathbf{X}^{\dagger}(t_2-\alpha)\mathbf{H}^{\dagger}(\alpha)d\alpha$$

$$\mathbf{R}_{xy}(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{R}_{xx}(t_1,t_2-\alpha)\mathbf{H}^{\dagger}(\alpha)d\alpha$$

$$\mathbf{R}_{yy}(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{H}^{\dagger}(\alpha)\mathbf{R}_{xy}(t_1-\alpha,t_2)d\alpha$$

3 离散时间线性系统

3.1 离散时间随机过程和离散时间线性系统

离散时间随机过程 $x[n]$ 的自相关函数和自协方差函数

$$R[n_1,n_2]=E\left\{x[n_1]x^*[n_2]\right\}$$

$$C[n_1,n_2]=E\left\{x[n_1]x^*[n_2]\right\}-\eta[n_1]\eta^*[n_2]$$

其中

$$\eta[n]=E\left\{x[n]\right\}$$

严格平稳离散时间随机过程 $x[n]$ 的统计特性对原点的移位保持不变

广义平稳离散时间随机过程 $x[n]$，则

$$\eta[n]=\eta$$

$$R[n+m,n]=E\left\{x[n+m]x^*[n]\right\}=R[m]$$

若随机变量 $x[n]$ 是相互统计独立的，则它是严格的白噪声

若随机变量 $x[n]$ 是不相关的，则它是的白噪声

零均值白噪声过程的自相关函数是

$$R[n_1,n_2]=q[n_1]\delta[n_1-n_2]$$

$$\delta[n]=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases}$$

$$q[n]=E\left\{x^2[n]\right\}$$

零均值平稳白噪声过程的自相关函数是

$$R[m]=q\delta[m]$$

离散时间线性系统

线性系统的冲击响应 $h[n]$ 式输入为 $\delta[n]$ 的响应系统函数是它的 z 变换，

$$H(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n}$$

线性系统的输入是 $x[n]$，系统函数是 $h[n]$，输出是 $y[n]$，则有

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k]=x[n]*h[n]$$

离散时间随机过程相关函数的非负性

埃米特-托普利兹矩阵：

设 $r_k=R[k]$，定义

$$\mathbf{T}_n=\begin{bmatrix} r_0 & r_1 & r_2 & \cdots & r_n \\ r_1^* & r_0 & r_1 & \cdots & r_{n-1} \\ r_2 & r_1^* & r_0 & \cdots & r_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_n^* & r_{n-1}^* & r_{n-2}^* & \cdots & r_0 \end{bmatrix}$$

则有，$S(\omega)\geq 0 \Leftrightarrow \mathbf{T}_n\geq 0$。

证明：定义 $\mathbf{a}=\left[a_0,a_1,\cdots,a_n\right]^t$，有

$$\begin{aligned}\mathbf{a}^{\dagger}\mathbf{T}_n\mathbf{a}&=\sum_{i=0}^{n}\sum_{m=0}^{n} a_i^* r_{i-m} a_m \\ &=\sum_{i=0}^{n}\sum_{m=0}^{n} a_i^* a_m \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)e^{j(i-m)\omega}d\omega \\ &=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\left|\sum_{m=0}^{n} a_m e^{-jm\omega}\right|^2 d\omega\end{aligned}$$

对于任意的 $\mathbf{a}$，有 $S(\omega)\geq 0 \Leftrightarrow \mathbf{T}_n\geq 0$。

（略）

采样，

给定模拟过程 $x(t)$ 构造离散时间过程 $x[n]=x(nT)$，T 为给定的常数。因此所构造的离散时间过程的均值、相关函数可以表示为

$$\eta[n]=\eta_a(nT)$$
$$R[n_1,n_2]=R_a\left(n_1T,n_2T\right)$$

如果 $x(t)$ 是平稳的随机过程，则 $x[n]$ 也是平稳的随机过程。这就有相应的相关函数和功率谱：

$$R[m] = R_a\left(mT\right)$$
$$S(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_a\left(mT\right)e^{-jm\omega} = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} S_a\left(\frac{m+2\pi n}{T}\right)$$

3.2 离散时间线性系统的单位样值冲击响应

研究离散时间线性系统，在离散时间随机序列的激励下的响应。激励信号是随机序列 $\left\{\xi(n), n=\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\right\}$，系统的输出是 $\left\{\eta(n), n=\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\right\}$。求输出随机过程的均值、自相关函数。

输出随机序列的均值：

$$\begin{aligned}E\left\{\eta(n)\right\} &= E\left\{\sum_{l=-\infty}^{\infty} h(n-l)\xi(l)\right\} \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(n-l)E[\xi(l)] \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(n-l)\mu_{\xi}(l) \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l)\mu_{\xi}(n-l)\end{aligned}$$

考虑到系统是物理可实现的，则

$$\begin{aligned}E\left\{\eta(n)\right\} &= E\left\{\sum_{l=0}^{\infty} h(n-l)\xi(l)\right\} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} h(n-l)E[\xi(l)] \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} h(n-l)\mu_{\xi}(l) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} h(l)\mu_{\xi}(n-l)\end{aligned}$$

如果输入是平稳的随机过程，而且系统也进入平稳状态，则，

$$\begin{aligned}E\left\{\eta(n)\right\} &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l)\mu_{\xi}(n-l) \\ &= \mu_{\xi}\sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l) \\ &= const\end{aligned}$$

输出随机序列的相关函数，

$$R_{\eta\eta}(m+n,n) = E\{\eta(m+n)\eta(n)\}$$

$$= E\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}\xi(m+n-k)h(k)\sum_{l=-\infty}^{\infty}\xi(n-l)h(l)\right\}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}h(l)h(k)E\{\xi(m+n-k)\xi(n-l)\}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}h(l)h(k)R_{\xi\xi}(m+n-k,n-l)$$

考虑到输入随机过程是平稳的，它的相关函数只是 m 的函数，

$$R_{\eta\eta}(m+n,n) == \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}h(l)h(k)R_{\xi\xi}(m-k+l)$$

离散时间线性系统的均值、输入与输出互相关函数、输出的自相关函数（小结）

$$\eta_y[n] = \eta_x[n] * \eta_h[n]$$

$$R_{xy}[n_1,n_2] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{xx}[n_1,n_2-k] * h^*[k]$$

$$R_{yy}[n_1,n_2] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{xy}[n_1-r,n_2] * h[r]$$

若 $x[n]$ 是平均强度为 $q[n]$ 的白噪声，则有

$$E\left\{y^2[n]\right\} = q[n]\left|h[n]\right|^2$$

若 $x[n]$ 是平均强度为 q 的白噪声，则有

$$R_{xy}[m] = R_{xx}[m] * h[-m]$$

$$R_{yy}[m] = R_{xy}[m] * h[m]$$

$$R_{yy}[m] = R_{xx}[m] * \rho[m]$$

$$\rho[m] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[n+k] * h[k]$$

3.3 离散时间线性系统的 Z 变换和功率谱的方法

研究离散时间线性系统，在离散时间随机序列的激励下的响应。激励信号是随机序列 $\{\xi(n), n=\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$，系统的输出是 $\{\eta(n), n=\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$。求输出随机过程的相关函数和功率谱。

相关函数和功率谱的 Z 变换和傅立叶变换

设 $x[n]$ 是一个广义平稳随机过程，他的自相关函数的 z 变换和功率谱

$$S_{\xi\xi}(z)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}R[n]z^{-m}$$

$$S_{\xi\xi}(\lambda)=S(e^{j\lambda})=\sum_{k=-\infty}^{\infty}R_{\xi\xi}[k]\cdot e^{-jk\lambda}\geq 0,\qquad -\pi<\lambda<\pi$$

$S(e^{j\omega})$ 是 $R[m]$ 的离散傅里叶变换，还是周期为 2π 的周期函数相应的傅里叶系数,

若 $x[n]$ 是实过程， $R[m]=R[-m]$

$$S(e^{j\omega})=R[0]+2\sum_{m=1}^{\infty}R[n]\cos m\omega$$

离散时间平稳随机过程的相关函数和功率谱密度的关系

$$S_{\xi\xi}(\lambda)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}R_{\xi\xi}[k]\cdot e^{-jk\lambda},\qquad -\pi<\lambda<\pi$$

$$R_{\xi\xi}[k]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}S_{\xi\xi}(\lambda)e^{jk\lambda}d\lambda\,,\qquad (k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots)$$

作 z 变换，定义 $z=e^{j\lambda}$，则有 z 变换，

$$\Phi_{\xi\xi}(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}R_{\xi\xi}[k]\cdot z^{-k}$$

$$R_{\xi\xi}[k]=\frac{1}{2\pi j}\oint\Phi_{\xi\xi}(z)z^{k-1}dz$$

上述积分是 z 平面上的环路积分。

线性离散系统输出的相关函数和功率谱

输出随机过程的功率谱，

$$
\begin{aligned}
\Phi_{\eta\eta}(z) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{\eta\eta}(m)\cdot z^{-m} \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} h(k)h(l)R_{\xi\xi}(m-k+l)\cdot\right]z^{-m} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)z^{-k}\sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l)z^{l}\sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{\eta\eta}(m)\cdot z^{-(m-k+l)} \\
&= H(z)\cdot H(1/z)\cdot\Phi_{\xi\xi}(z)
\end{aligned}
$$

输出随机过程的相关函数，

$$R_{\eta\eta}(k)=\frac{1}{2\pi j}\oint\Phi_{\eta\eta}(z)z^{k-1}dz 。$$

4 连续时间线性系统随机过程举例

4.1 利用冲击响应研究线性系统输出的统计特性：

例 1， $y(t)=\frac{d}{dt}x(t)$

$\frac{d}{dt}$ 是线性算子。

例 2， $y(t)=\left[x(t)\right]^2$

$[\ \ ]^2$ 不是线性算子。

例 3， $y(t)=\int_{-\infty}^{t} x(u)du$

$\int_{-\infty}^{t}(\ \ )du$ 是线性算子。

例 4，RC 低通滤波器的输入是平稳的随机过程 $\xi(t)$，它的均值为零，相关函数是

$$R_{\xi\xi}(t_1,t_2)=\sigma^2e^{-\beta|t_1-t_2|}$$

RC 低通滤波器的初始输出是 $\eta(t=0^-)=0$。试研究电路输出过程的统计特性。

解：

滤波器的冲击响应，

滤波器的输出，

输出的均值，

输出的相关函数（积分求解较为复杂）。

例 5，噪声馈入 RLC 串联电路，电容上的电压信号为输出信号。已知初始时刻电容上电压信号和它的一阶微商的均值和协方差函数，输入信号的相关函数，求输出的统计特性。

解：

系统的微分方程和通解，

电容上的电荷、电流的通解形式，

由初始条件确定电容上电荷的通解，

由初始条件确定电容上电流的通解，

求冲击响应的通解，

求输出的通解。

例 6，噪声馈入 RLC 并联电路，电容上的电压信号为输出信号。已知初始时刻电容上电压信号和它的一阶微商的均值和协方差函数，输入信号的相关函数，求输出的统计特性。

解：

例 7，（P-9-18）自相关函数为 $R_{vv}(\tau)=q\delta(\tau)$ 的一个平稳随机过程 $v(t)$ 在 $t=0$ 时加到冲击响应为 $h(t)=e^{-ct}U(t)$ 的线性系统的输入端，证明 $0<t_1<t_2$ 时输出的自相关函数为

$$R_{yy}(t_1,t_2)=\frac{q}{2c}\left(1-e^{-2ct_1}\right)e^{-c|t_1-t_2|}$$

证明：系统的输入是 $x(t)=v(t)U(t)$，输入信号的相关函数是

$$\begin{aligned}&R_{xx}(t_1,t_2)=0, \qquad t_1<0\ or\ t_2<0\\&R_{xx}(t_1,t_2)=E\left[v(t_1)v(t_2)\right]=q\delta(t_1-t_2) \quad t_1>0\ and\ t_2>0\end{aligned}$$

考虑输入和输出的相关函数

$$\begin{aligned}R_{xy}(t_1,t_2)&=\int_{-\infty}^{\infty}R_{xx}(t_1,t_2-a)h(a)da\\&=\int_{-\infty}^{\infty}q\delta\left(t_1-\left(t_2-\alpha\right)\right)e^{-c\alpha}U(\alpha)d\alpha\\&=qe^{-c(t_2-t_1)}U\left(t_2-t_1\right)\cdot U\left(t_1\right)\end{aligned}$$

再考虑输出的自相关函数

$$
\begin{aligned}
R_{yy}(t_1,t_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(t_1-\alpha,t_2)h(\alpha)d\alpha \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} qe^{-c(t_2-(t_1-\alpha))}U\left(t_2-(t_1-\alpha)\right)\cdot U\left(t_1-\alpha\right)e^{-c\alpha}U(\alpha)d\alpha \\
&= q\int_0^{t_1} e^{-c(t_1-\alpha-t_2-)}\cdot e^{-c\alpha}d\alpha \\
&= \frac{q}{2c}\left(1-e^{-2ct_1}\right)e^{-c|t_1-t_2|}
\end{aligned}
$$

例 8,（定理 9-3）,线性系统的输入是自相关函数为 $R_{xx}(t_1,t_2)=q(t_1)\delta(t_1-t_2)$ 的白噪声，则

$$
E\left\{|y(t)|^2\right\}=q(t)*|h(t)|^2=\int_{-\infty}^{\infty}q(t-\alpha)|h(\alpha)|^2\,d\alpha
$$

证明：

$$
\begin{aligned}
R_{xy}(t_1,t_2) &= q(t_1)\delta(t_2-t_1)*h^*(t_2) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} q(t_1)\delta(t_2-\alpha-t_1)h^*(\alpha)d\alpha \\
&= q(t_1)h^*(t_2-t_1) \\
R_{yy}(t_1,t_2) &= q(t_1)h^*(t_2-t_1)*h(t_1) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} q(t_1-\alpha)h^*\left(t_2-(t_1-\alpha)\right)h(\alpha)d\alpha
\end{aligned}
$$

于是有，

$$
\begin{aligned}
E\left\{y^2(t)\right\} &= R_{yy}(t,t)=\int_{-\infty}^{\infty}q(t-\alpha)h^*\left(t-(t-\alpha)\right)h(\alpha)d\alpha \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}q(t-\alpha)|h(\alpha)|^2\,d\alpha
\end{aligned}
$$

应用 1、 $x(t)$ 是平稳白噪声， $q(t)=q$ ，则

$$
E\left\{y^2(t)\right\}=qE,\quad E=\int_{-\infty}^{\infty}|h(\alpha)|^2\,d\alpha
$$

应用 2、相对 $q(t)$ 的变化， $h(t)$ 是短有效支撑的，则

$$
E\left\{y^2(t)\right\}=q(t)\int_{-\infty}^{\infty}|h(\alpha)|^2\,d\alpha=q(t)E
$$

应用 3、 $R_{vv}(\tau)=q\delta(\tau)$ 在 t=0 时刻，加到系统上， $q(t)=qU(t)$ 则

$$
E\left\{y^2(t)\right\}=q\int_{-\infty}^{\infty}U(t-\alpha)|h(\alpha)|^2\,d\alpha=q\int_0^t|h(\alpha)|^2\,d\alpha
$$

例 9,（例 9-19）积分 $y(t)=\int_0^t v(\alpha)d\alpha$ ，可以看作 $x(t)=v(t)U(t)$ 输入到冲击响应为

$h(t)=U(t)$ 的线性系统的输出。$v(t)$ 是平均强度为 $q(t)U(t)$ 的白噪声，则有

$$E\left\{y^2(t)\right\}=\int_0^t q(\alpha)\left|h(\alpha)\right|^2 d\alpha=\int_0^t q(\alpha)d\alpha$$

4.2 利用功率谱研究线性系统输出的统计特性

例 1，RC 积分电路，输入随机过程的相关函数是 $R_{\xi\xi}(\tau)=\sigma^2 e^{-\beta|\tau|}$，求输出的功率谱和相关函数。

例 2，白噪声通过理想的低通滤波器，求输出的功率谱和相关函数。

例 3，R 和 RC 并联后的串联电路，输入随机过程的相关函数是 $R_{\xi\xi}(\tau)=\sigma^2 e^{-\beta|\tau|}$，求 R 和 RC 并联上输出 $\eta_1(t)$，$\eta_2(t)$ 的功率谱。

解：

求传递函数，

求相关函数，

求功率谱。

例 4，有两个线性时不变系统，他们的传递函数是 $H_1(jf)$，$H_2(jf)$。在这两个系统上馈入均值为零的随机过程 $\xi(t)$，相应的输出是 $\eta_1(t)$，$\eta_2(t)$，问怎样才能保证 $\eta_1(t)$，$\eta_2(t)$ 是不相关的。

解：

5 离散时间线性系统随机过程举例

例 1，已知冲击响应，$h(k)=\begin{cases}0 & (k<0)\\ 1 & (k\ge 0)\end{cases}$ 求 z 变换。

例 2，已知时间序列，$x(k)=\begin{cases}0 & (k<0)\\ 1 & (k\ge 0)\end{cases}$ 求 z 变换。

例 3，离散时间的低通滤波器，它的冲击响应是，

$$h(k)=\begin{cases}0 & k<0\\ e^{-\alpha k} & k\ge 0\end{cases}$$

输入是均值为零的随机过程，它的相关函数是，

$$R_{\xi\xi}(n)=\begin{cases}\dfrac{N_0}{2} & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases}$$

求输出的均值和相关函数。

解：

系统的传递函数，

求输出的均值，

输入的相关函数和 z 变换，

输出的 z 变换，

输出的相关函数。

例 4，（例 9-32）离散线性系统的输入是 $x[n]$，输出是 $y[n]$，有功率谱的关系成立，

$$S_{xy}(e^{j\omega})=S_{xx}(e^{j\omega})H^{\dagger}(e^{j\omega})$$
$$S_{yy}(e^{j\omega})=S_{xy}(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$
$$S_{yy}(e^{j\omega})=S_{xx}(e^{j\omega})\left|H(e^{j\omega})\right|^2$$

若 $h(n)$ 为实数，$H^{\dagger}(e^{j\omega})=H(e^{-j\omega})$，则

$$S_{yy}(z)=S_{xx}(z)H(z)H(1/z)\text{。}$$

例 5，（例 9-33）求过程 $x[n]$ 的一阶差分 $y[n]=x[n]-x[n-1]$ 的系统响应、输出功率谱、输出相关函数；若输入是白噪声，结果又如何。

例 6，（例 9-34）递归过程 $y[n]-ay[n-1]=x[n]$ 定义了一个线性系统，输入为 $x[n]$。求系统的冲击响应、输出功率谱、输出相关函数；若输入是白噪声，结果又如何。

实或复随机过程 $x[n]$ 的功率谱为正函数

离散时间线性系统，有

$$E\left\{\left|y[n]\right|^2\right\}=R_{yy}(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S(e^{j\omega})\left|H(e^{j\omega})\right|^2 d\omega$$

经过带宽任意小的带通滤波器的输出有

$$E\left\{|y[n]|^2\right\}=R_{yy}(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{\omega_0-\Delta}^{\omega_0+\Delta}S(e^{j\omega})d\omega\approx\frac{\Delta}{\pi}S(e^{j\omega_0})$$

$$S(e^{j\omega_0})\geq 0$$

例 7，（例 9-35）假定 $x(t)$ 是 M 个指数函数组成的广义平稳过程，

$$x(t)=\sum_{i=1}^{m}c_i e^{j\omega_i t},\quad S_a(\omega)=2\pi\sum_{i=1}^{m}\sigma_i^2\delta(\omega-\omega_i)$$

求过程 $x[n]$ 的功率谱 $S(e^{j\omega})$。考虑到 $\delta(\omega/T)=T\delta(\omega),\quad \delta((\omega-\omega_i)/T)=T\delta(\omega-\omega_i)$，

有（没看懂）

$$\begin{aligned}S(e^{j\omega})&=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}S_a\left(\frac{m+2\pi n}{T}\right)\\&=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}2\pi\sum_{i=1}^{m}\sigma_i^2\delta(\omega-\omega_i)\\&=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}2\pi\sum_{i=1}^{m}\sigma_i^2\delta(\omega-\omega_i)\end{aligned}$$

$$S_a(\omega)=2\pi\sum_{i=1}^{m}\sigma_i^2\delta(\omega-\omega_i)$$