随机分析

概述

- 基本不等式
  - Schwartz 不等式　$\left|E\{\xi\cdot\eta\}\right|\le\left\{E|\xi|^2\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{E|\eta|^2\right\}^{\frac{1}{2}}$
  - 均方不等式　$E|\xi|\le\left\{E|\xi|^2\right\}^{\frac{1}{2}},\qquad\left[E|\xi|\right]^2\le\left\{E|\xi|^2\right\}$
  - 三角不等式　$\sqrt{E|\xi+\eta|^2}\le\sqrt{E|\xi|^2}+\sqrt{E|\eta|^2}$
- 概念
  - 均方极限
  - 均方连续
  - 均方导数
  - 随机积分
- 充分必要条件
  - 均方极限

    柯西准则

    Loeve 准则
  - 均方连续

    均方连续的充分必要条件是它的自相关函数连续（定理）
  - 均方导数

    均方可导的充分必要条件是它的自相关函数二阶偏微商存在（定理）
  - 随机积分

    均方可积的充分必要条件是它的自相关函数均方可积（定理）
- 基本性质
  - 极限、连续、导数、积分与期望运算的可交换性
  - 均方极限
  - 极限运算与期望运算的可交换性
  - 均方极限条件下的两个随机变量相等，则它们的均值和均方值相等
  - 线性变换的均方极限
  - 乘积的均方极限
  - 均方极限唯一性
  - 函数的均方极限

均方连续

- 二阶矩过程的连续性

  均方连续的二阶矩过程是均值是连续的
- 广义平稳二阶矩过程的连续性

  均方连续、在 t=0 处均方连续、自相关函数连续、自相关函数在$\tau=0$处连续等命题是等价的

均方导数

- 导数期望的可交换性
- 随机过程导数的相关函数
- 线性变换的均方可导
- 函数乘积的均方可导
- 高阶导数
- 泰勒展开

随机积分

- 积分与期望可交换性

➢ 数学分析

- 研究二阶矩过程在均方意义下的随机分析，把数学分析的方法推广到二阶矩过程

1 均方极限

1.1 定义

设有随机变量序列$\{\xi_n\}, n=1,2,3,\cdots$存在二阶矩，即$E\{|\xi_n|^2\}<\infty, n=1,2,3\cdots$；又设有随机变量$\xi$，它也存在二阶矩，即$E\{|\xi|^2\}<\infty$；当$n\to\infty$时，$E\{|\xi_n-\xi|^2\}=0$，则称序列$\{\xi_n\}$均方收敛于$\xi$，或序列的均方极限是$\xi$，记作$\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\,\xi_n=\xi$。

1.2 定理 1：均方极限下的均值和均方值

设有二阶矩随机序列$\{\xi_n\}, n=1,2,3,\cdots$及二阶矩随机变量$\xi$，且$\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\,\xi_n=\xi$，则有：

$\lim\limits_{n\to\infty}E\{\xi_n\}=E\{\xi\}=E\{\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\,\xi_n\}$，及$\lim\limits_{n\to\infty}E\{|\xi_n|^2\}=E\{|\xi|^2\}=E\left\{\left|\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\,\xi_n\right|^2\right\}$，

即极限和统计平均可以交换次序，但先取极限时，指的是均方极限。

证明：

关于$\lim\limits_{n\to\infty}E\{\xi_n\}=E\{\xi\}=E\{\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\,\xi_n\}$

利用随机变量平均的模小于等于随机变量模的平均，Schwarts 不等式随机变量乘积取模统计平均的平方，小于等于随机变量取模平方统计平均的乘积，有

$$|E\{\xi_n\}-E\{\xi\}|=|E\{\xi_n-\xi\}|\le E|\xi_n-\xi|\le\{E|\xi_n-\xi|^2\}^{\frac{1}{2}}$$

由于$\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\,\xi_n=\xi$，即 $\lim\limits_{n->\infty}E\{|\xi_n-\xi|^2\}=0$，故当$n\to\infty$时，有

$$\lim_{n\to\infty} E\{\xi_n\} = E\{\xi\} = E\left\{\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\, \xi_n\right\}$$

关于 $\lim_{n\to\infty} E\left\{|\xi_n|^2\right\} = E\left\{|\xi|^2\right\} = E\left\{\left|\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\, \xi_n\right|^2\right\}$

利用三角不等式，$\sqrt{E|\xi+\eta|^2} \le \sqrt{E|\xi|^2} + \sqrt{E|\eta|^2}$

可以得到，

$$\begin{aligned} E\left\{|\xi_n|^2\right\} &= E\left\{\left|\xi + (\xi_n - \xi)\right|^2\right\} \\ &\le \left\{\sqrt{E\left\{|\xi|^2\right\}} + \sqrt{E\left\{|\xi_n - \xi|^2\right\}}\right\}^2 \end{aligned}$$

即，

$$\sqrt{E\left\{|\xi_n|^2\right\}} - \sqrt{E\left\{|\xi|^2\right\}} \le \sqrt{E\left\{|\xi_n - \xi|^2\right\}}$$

同理可得，

$$\sqrt{E\left\{|\xi|^2\right\}} - \sqrt{E\left\{|\xi_n|^2\right\}} \le \sqrt{E\left\{|\xi_n - \xi|^2\right\}}$$

当 $n \to \infty$，$limE\left\{|\xi_n - \xi|^2\right\} = 0$，则有

$$\lim_{n\to\infty} E\left\{|\xi_n|^2\right\} = \lim_{n\to\infty} E\left\{|\xi|^2\right\} = E\left\{\left|\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\, \xi_n\right|^2\right\}$$

1.3 定理 2：线性变换的均方极限

设二阶矩随机序列 $\{\xi_n\}, n=1,2,3,\cdots$、$\{\eta_n\}, n=1,2,3,\cdots$ 和随机变量 ξ、η，$E\left\{|\xi_n|^2\right\} < \infty$、$E\left\{|\eta_n|^2\right\} < \infty$、$E\left\{|\xi|^2\right\} < \infty$、$E\left\{|\eta|^2\right\} < \infty$，$\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\, \xi_n = \xi$、$\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\, \eta_n = \eta$，a、b 为任意常数，则 $\underset{n\to\infty}{l.i.m}(a\xi_n + b\eta_n) = a\xi + b\eta$

证明：

$$\begin{aligned} E\left\{\left|(a\xi_n + b\eta_n) - (a\xi + b\eta)\right|^2\right\} &= E\left\{\left|a(\xi_n - \xi b) + b(\eta_n - \eta)\right|^2\right\} \\ &\le E\left\{\left(|a|^2 |\xi_n - \xi|\right)^{1/2} + \left(|b|^2 |\eta_n - \eta|\right)^{1/2}\right\}^2 \end{aligned}$$

上式的推导使用了三角不等式，随着 n 趋于无穷，上式趋于零，因此有 $\underset{n\to\infty}{l.i.m}(a\xi_n + b\eta_n) = a\xi + b\eta$。

1.4 定理 3：乘积的均方极限

设二阶矩随机序列$\{\xi_n\}, n=1,2,3,\cdots$、$\{\eta_n\}, n=1,2,3,\cdots$均存在二阶矩，随机变量$\xi$、$\eta$，均有二阶矩，且$\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\,\xi_n=\xi$、$\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\,\eta_n=\eta$，则$\underset{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}{\mathrm{l.i.m}}(\xi_m\eta_n)=\xi\eta$。

证明：

$$\begin{aligned}
&\left|E\{\xi_m\overline{\eta}_n\}-E\{\xi\overline{\eta}\}\right|=\left|E\{\xi_m\overline{\eta}_n-\xi\overline{\eta}\}\right|\\
&\quad=\left|E\{\xi(\overline{\eta}_n-\overline{\eta})+(\xi_m-\xi)\overline{\eta}+(\xi_m-\xi)(\overline{\eta}_n-\overline{\eta})\}\right|\\
&\quad\le\left\{E|\xi|^2E|\overline{\eta}_n-\overline{\eta}|^2\right\}^{1/2}+\left\{E|\xi_m-\xi|^2E|\overline{\eta}|^2\right\}^{1/2}\\
&\qquad+\left\{E|\xi_m-\xi|^2E|\overline{\eta}_n-\overline{\eta}|^2\right\}^{1/2}
\end{aligned}$$

上式的推导使用了三角不等式，随着 m,n 趋于无穷，上式趋于零，因此有$\underset{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}{\mathrm{l.i.m}}(\xi_m\eta_n)=\xi\eta$。

1.5 定理 4：均方极限的唯一性

均方极限是唯一的，即设$\{\xi_n\}, n=1,2,3,\cdots$是具有二阶矩的随机变量序列，$\xi$、$\eta$为两个具有二阶矩的随机变量，且$\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\,\xi_n=\xi$、$\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\,\xi_n=\eta$,则有$\xi=\eta$。

证明：

考虑$E\{(\xi_n-\eta)(\overline{\xi}_n-\overline{\eta})\}=E\{\xi_n\overline{\xi}_n\}-E\{\eta\overline{\xi}_n\}-E\{\xi_n\overline{\eta}\}+E\{\eta\overline{\eta}\}$

当 n 趋于无穷时，上式左右两边分别用ξ、η代入，

左边是$E\left\{|\xi-\eta|^2\right\}$，右边是$E\{\eta\overline{\eta}\}-E\{\eta\overline{\eta}\}-E\{\eta\overline{\eta}\}+E\{\eta\overline{\eta}\}=0$

因此有$\xi=\eta$，即极限是唯一的。

1.6 定理 5：柯西准则

设$\{\xi_n\}, n=1,2,3,\cdots$是随机变量序列，且$E\left\{|\xi_n|^2\right\}<\infty$，则$\{\xi_n\}$均方收敛于$\xi$的充要条件是$\underset{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}{l\ im}\,E\left\{|\xi_n-\xi_m|^2\right\}=0$

证明：（这里只给出了必要性的证明）

如果序列均方收敛于ξ，

$$E|\xi_n-\xi_m|^2 = E|(\xi_n-\xi)-(\xi-\xi_m)|^2$$
$$\le \left\{\left[E|\xi_n-\xi|^2\right]^{1/2}+\left[E|\xi-\xi_m|^2\right]^{1/2}\right\}^2$$

当 m,n 趋于无穷时，上式右边趋于零。因此有上式左边趋于零，定理的必要性得到证明。

1.7 定理 6：Loeve 准则

设 $\{\xi_n\}$ $n=1,2,3,\cdots$ 是随机序列，且 $E\{|\xi_n|^2\}<\infty$，则 $\{\xi_n\}$ 均方收敛于 ξ 的充要条件是 $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}(\xi_m\xi^*_n)$ =常数。

证明：

使用 Schwartz 不等式，有

$$\left|E\{(\xi-\xi_n)\overline{\xi}_m\}\right|^2 \le \{E|(\xi-\xi_n)||\overline{\xi}_m|\}^2 \le E|(\xi-\xi_n)|^2 E|\overline{\xi}|^2$$

当 n 趋于无穷，上式将趋于零，

1.8 定理 7：函数的均方极限

设二阶矩随机序列 $\{\xi_n\}$，$n=1,2,3,\cdots$ 及二阶矩的随机变量 ξ，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=\xi$，设 $f(u)$ 是一确定性函数，又设 $\{f(\xi_n)\}$，$n=1,2,3,\cdots$ 和 $f(\xi)$ 是二阶矩随机变量，则 $\lim\limits_{n\to\infty} f(\xi_n)=f(\xi)$。

证明：

（略）

2 均方连续

2.1 定义

定义 1：以概率 1 在 t 点连续

如果对所有的样本函数在 t 点满足 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\xi(t+\varepsilon)=\xi(t)$，则除了以零概率出现的样本函数才不满足上述关系，则称该随机过程以概率 1 在 t 点连续。

定义 2： 均方收敛意义下的连续

二阶矩随机过程$\xi(t)$，在每个 t，$-\infty<t<\infty$，有$\lim\limits_{h\to 0}E\left\{\left|\xi(t+h)-\xi(t)\right|^2\right\}=0$即$\xi(t)=\underset{h\to 0}{l.i.m}\,\xi(t+h)$，则称$\xi(t)$在任意 t 点是均方意义下连续的，或称$\xi(t)$是在均方意义下连续的随机过程，或称该二阶矩过程具有均方连续性。

2.2 定理 1：均方连续的充要条件

设有二阶矩随机过程$\{\xi(t),t\in T\}$，$R(s,t)$为其自相关函数，则$\xi(t)$在$t=t_0\in T$上均方连续的充要条件为它的自相关函数$R(s,t)$在$(t_0,t_0)\in(T\times T)$处连续。

证明：

设$R(s,t)$在$(s=t_0,t=t_0)\in(T\times T)$处连续，则，

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}E\left\{\left|\xi(t_0+h)-\xi(t_0)\right|^2\right\}\\
&\quad=\lim_{h\to 0}E\left\{\xi(t_0+h)\overline{\xi(t_0+h)}-\xi(t_0+h)\overline{\xi(t_0)}-\xi(t_0)\overline{\xi(t_0+h)}+\xi(t_0)\overline{\xi(t_0)}\right\}\\
&\quad=\lim_{h\to 0}E\left\{R(t_0+h,t_0+h)-R(t_0+h,t_0)-R(t_0,t_0+h)+R(t_0,t_0)\right\}\\
&\quad=0
\end{aligned}$$

即

$$\underset{h\to 0}{l.i.m}\,\xi(t_0+h)=\xi(t_0)$$

又设$\xi(t)$在$t=t_0\in T$上均方连续，则，

$$\begin{aligned}
&\left|R(t_0+h,t_0+k)-R(t_0,t_0)\right|\\
&\quad=\left|E\left\{\xi(t_0+h)\overline{\xi(t_0+k)}-\xi(t_0)\overline{\xi(t_0)}\right\}\right|\\
&\quad=\left|E\left\{\xi(t_0+h)\overline{\xi(t_0+k)}-\xi(t_0)\overline{\xi(t_0+k)}+\xi(t_0)\overline{\xi(t_0+k)}-\xi(t_0)\overline{\xi(t_0)}\right\}\right|\\
&\quad=\left|E\left\{\left(\xi(t_0+h)-\xi(t_0)\right)\overline{\xi(t_0+k)}+\xi(t_0)\left(\overline{\xi(t_0+k)}-\overline{\xi(t_0)}\right)\right\}\right|\\
&\quad\le E\left\{\left|\xi(t_0+h)-\xi(t_0)\right|\cdot\left|\xi(t_0+k)\right|\right\}+E\left\{\left|\xi(t_0)\right|\cdot\left|\overline{\xi(t_0+k)}-\overline{\xi(t_0)}\right|\right\}\\
&\quad\le\left\{E\left|\xi(t_0+h)-\xi(t_0)\right|^2\cdot E\left|\xi(t_0+k)\right|^2\right\}^{1/2}\\
&\qquad\qquad+\left\{E\left|\xi(t_0)\right|^2\cdot E\left|\overline{\xi(t_0+k)}-\overline{\xi(t_0)}\right|^2\right\}^{1/2}
\end{aligned}$$

即

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}}R(t_0+h,t_0+k)=R(t_0,t_0)$$

2.3 定理 2：二阶矩过程的均方连续

二阶矩随机过程$\xi(t)$是在均方意义下连续的，则$\lim\limits_{h\to 0}E\{\xi(t+h)\}=E\{\xi(t)\}$。

证明：

随机过程是均方连续的，

$$\lim_{h\to 0}E\left\{|\xi(t+h)-\xi(t)|^2\right\}=0$$

它们的均值是连续的，即

$$\lim_{h\to 0}E\{\xi(t+h)\}=E\{\xi(t)\}$$

2.4 定理 3：宽平稳过程的均方连续

设二阶矩随机过程$\xi(t)$，$-\infty<t<\infty$，是宽平稳随机过程，则以下的各论断是等价的：

①$\xi(t)$均方连续；即

$$\lim_{h\to 0}E\left\{|\xi(t+h)-\xi(t)|^2\right\}=0,\quad -\infty<t<\infty$$

②$\xi(t)$在 t=0 处均方连续；即

$$\lim_{h\to 0}E\left\{|\xi(h)-\xi(0)|^2\right\}=0$$

③自相关函数$R_{\xi\xi}(\tau)$在$-\infty<t<\infty$上连续；即

$$\lim_{h\to 0}R(t+h)=R(t),\quad -\infty<t<\infty$$

④自相关函数$R_{\xi\xi}(\tau)$在$\tau=0$处连续。即

$$\lim_{h\to 0}R(h)=R(0)$$

或者说，宽平稳随机过程$\xi(t)$，$-\infty<t<\infty$均方连续的充要条件是其相关函数$R_{\xi\xi}(\tau)$在$\tau=0$处连续。

证明：以下的论断是可以相互推导得到的

①与②相互等价，

$$
\begin{aligned}
&E\left\{\left|\xi(t+h)-\xi(t)\right|^2\right\}\\
&\quad=E\left\{\left|\xi(t+h)\right|^2\right\}-E\left\{\xi(t+h)\overline{\xi(t)}\right\}-E\left\{\overline{\xi(t+h)}\xi(t)\right\}+E\left\{\left|\xi(t)\right|^2\right\}\\
&\quad=R_{\xi\xi}(0)-R_{\xi\xi}(h)-R_{\xi\xi}(-h)+R_{\xi\xi}(0)\\
&\quad=E\left\{\left|\xi(h)\right|^2\right\}-E\left\{\xi(h)\overline{\xi(0)}\right\}-E\left\{\overline{\xi(h)}\xi(0)\right\}+E\left\{\left|\xi(0)\right|^2\right\}\\
&\quad=E\left\{\left|\xi(h)-\xi(0)\right|^2\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\lim_{h\to 0}E\left\{\left|\xi(t+h)-\xi(t)\right|^2\right\}=\lim_{h\to 0}E\left\{\left|\xi(h)-\xi(0)\right|^2\right\}
$$

由①可得到③进一步得到④，

$$
\begin{aligned}
&\left|R_{\xi\xi}(\tau+h)-R_{\xi\xi}(\tau)\right|\\
&\quad=\left|E\left[\xi(\tau+h)\overline{\xi(0)}\right]-E\left[\xi(\tau)\overline{\xi(0)}\right]\right|\\
&\quad=\left|E\left[\left[\xi(\tau+h)-\xi(\tau)\right]\overline{\xi(0)}\right]\right|\\
&\quad\le E\left\{\left|\xi(\tau+h)-\xi(\tau)\right|\left|\xi(0)\right|\right\}\\
&\quad\le\left\{E\left|\xi(\tau+h)-\xi(\tau)\right|^2\cdot E\left|\xi(0)\right|^2\right\}^{1/2}
\end{aligned}
$$

因为$\lim_{h\to 0}E\left\{\left|\xi(\tau+h)-\xi(\tau)\right|^2\right\}=0$，故$\lim_{h\to 0}\left|R_{\xi\xi}(\tau+h)-R_{\xi\xi}(\tau)\right|=0$，

在上述证明中，令$\tau=0$，可以得到$\lim_{h\to 0}\left|R_{\xi\xi}(h)-R_{\xi\xi}(0)\right|=0$。

由④可得到①，

$$
\begin{aligned}
&E\left\{\left|\xi(t+h)-\xi(t)\right|^2\right\}\\
&\quad=E\left\{\left|\xi(t+h)\right|^2\right\}-E\left\{\xi(t+h)\overline{\xi(t)}\right\}-E\left\{\overline{\xi(t+h)}\xi(t)\right\}+E\left\{\left|\xi(t)\right|^2\right\}\\
&\quad=R_{\xi\xi}(0)-R_{\xi\xi}(h)-R_{\xi\xi}(-h)+R_{\xi\xi}(0)\\
&\quad=2R_{\xi\xi}(0)-R_{\xi\xi}(h)-\overline{R_{\xi\xi}(h)}
\end{aligned}
$$

因为④成立，即相关函数$R_{\xi\xi}(\tau)$在$\tau=0$处连续，

$\lim_{h\to 0}\left|R_{\xi\xi}(h)-R_{\xi\xi}(0)\right|=0$，$\lim_{h\to 0}\left|\overline{R_{\xi\xi}(h)}-R_{\xi\xi}(0)\right|=0$，则有

$$
\lim_{h\to 0}E\left\{\left|\xi(\tau+h)-\xi(\tau)\right|^2\right\}=0
$$

因此，一个平稳随机过程是否均方连续，只要研究它的相关函数是否连续，如果相关函数在$\tau=0$处连续，则该过程均方连续。

3 均方导数

3.1 定义

设有随机过程$\{\xi(t), t\in T\}$和随机过程$\{\eta(t), t\in T\}$，当$h\to 0$，$\dfrac{\xi(t_0+h)-\xi(t_0)}{h}$ 均方收敛于$\eta(t_0)$，其中$t_0, t_0+h\in T$，记作$\xi'(t_0)=\eta(t_0)$，并称$\eta(t_0)$为过程$\xi(t)$在$t=t_0$处的均方导数。

如在整个 T 内有$\lim\limits_{h\to 0} E\left\{\left|\dfrac{\xi(t+h)-\xi(t)}{h}-\eta(t)\right|^2\right\}=0$，则称$\eta(t)=\xi'(t)=\dfrac{d\xi(t)}{dt}$为随机过程$\xi(t)$在均方意义下的导数。

3.2 定理 1：均方可导的充要条件

设有二阶矩过程$\xi(t)$，它的自相关函数为$R(t,s)$，则$\xi(t)$在$t=t_0\in T$处具有均方导数的充要条件是$\dfrac{\partial^2 R(t,s)}{\partial t\partial s}$在$(t_0,t_0)$附近存在，且在$(t_0,t_0)$连续。

证明：

证明下列极限存在：

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} E\left\{\left(\frac{\xi(t_0+h)-\xi(t_0)}{h}\right)\left(\frac{\overline{\xi(t_0+k)-\xi(t_0)}}{k}\right)\right\}=0$$

考虑下式：

$$E\left\{\left(\frac{\xi(t_0+h)-\xi(t_0)}{h}\right)\left(\frac{\overline{\xi(t_0+k)-\xi(t_0)}}{k}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{hk}\left[R_{t,s}(t_0+h,t_0+k)-R_{t,s}(t_0,t_0+k)-R_{t,s}(t_0+h,t_0)+R_{t,s}(t_0,t_0)\right]$$

如果它们的相关函数的偏微商存在，利用中值定理，上式可以进一步写作，

$$=\frac{1}{hk}\left[R_{t,s}(t_0+h,t_0+k)-R_{t,s}(t_0,t_0+k)-R_{t,s}(t_0+h,t_0)+R_{t,s}(t_0,t_0)\right]$$

$$=\frac{1}{k}\left[\frac{\partial}{\partial t}R_{t,s}(t_0+\theta_1 h,t_0+k)-\frac{\partial}{\partial t}R_{t,s}(t_0+\theta_1 h,t_0)\right]$$

$$=\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t}R_{t,s}(t_0+\theta_1 h,t_0+\theta_2 k)$$

因此有，

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}}E\left\{\left(\frac{\xi(t_0+h)-\xi(t_0)}{h}\right)\left(\overline{\frac{\xi(t_0+k)-\xi(t_0)}{k}}\right)\right\}$$

$$=\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}}\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t}R_{t,s}(t_0+\theta_1 h,t_0+\theta_2 k)$$

$$=\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t}R_{t,s}(t_0,t_0)$$

上述是给出了充分必要条件的证明，以上的推导完全是双方向等价的。

定理 1 结论 1：

$$E\left\{\xi'(t)\overline{\xi'(s)}\right\}=\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}}E\left\{\frac{\xi(t+h)-\xi(t)}{h}\,\overline{\frac{\xi(s+k)-\xi(s)}{k}}\right\}$$

$$=\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t}R(t,s)$$

定理 1 结论 2：

$$E\left\{\xi'(t)\overline{\xi(s)}\right\}=\lim_{h\to 0}E\left\{\frac{\xi(t+h)-\xi(t)}{h}\overline{\xi(s)}\right\}$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}R(t,s)$$

定理 1 结论 3：

$$E\left\{\xi(t)\overline{\xi'(s)}\right\}=\lim_{k\to 0}E\left\{\xi(t)\overline{\frac{\xi(s+k)-\xi(s)}{k}}\right\}$$

$$=\frac{\partial}{\partial s}R(t,s)$$

推论 1，线性变换的均方可导

设 $\xi(t)$，$\eta(t)$ 为二均方可导的随机过程 a,b 为常数，则 $a\xi(t)+b\eta(t)$ 也均方可导，

且 $\frac{d}{dt}[a\xi(t)+b\eta(t)]=a\frac{d}{dt}\xi(t)+b\frac{d}{dt}\eta(t)$

证明：（略）

推论 2，函数乘积的均方可导

设 $\xi(t)$ 为均方可导的随机过程，$f(t)$ 为一确定性的可导函数则 $f(t)\ \xi(t)$ 也是均方可导的，且 $\frac{d}{dt}[f(t)\xi(t)]=\frac{df(t)}{dt}\xi(t)+f(t)\frac{d\xi(t)}{dt}$

证明：（略）

推论 3，导数和期望的可交换性

$\xi'(t)$ 的数学期望是，$E\{\xi'(t)\}=\frac{dE\{\xi(t)\}}{dt}$

证明：（略）

3.3 定理 2：平稳随机过程的均方导数

设有平稳过程 $\xi(t)$，它的自相关函数为 $R(t,s)=R(t-s)=R(\tau)$， $\tau=t-s$，若 $R''(\tau)$ 存在， $t\in T$，而且在 $\tau=0$ 处 $R''(\tau)$ 连续，则 $\xi(t)$ 在 $t\in T$ 内均方可导，且 $E\{\xi'(t)\xi'^{*}(s)\}=-R''(\tau)$。

证明：（略）

推论 3，

平稳随机过程 $\xi(t)$ 的数学期望是常数，因此 $\xi'(t)$ 的数学期望是零。

证明：（略）

3.4 高阶导数

如果随机过程 $\xi(t)$ 的相关函数有 2n 阶导数，且在 t=s 上连续，则 $\xi(t)$ 有均方意义上的 n 阶导数 $\xi^{(n)}(t)$，即 $\frac{d^n}{dt^n}\xi(t)=\xi^{(n)}(t)$ 存在。

$$R_{\xi^{(n)}\xi^{(n)}}(t,s)=E\left\{\xi^{(n)}(t)\xi^{(n)*}(s)\right\}=\frac{\partial^{2n}}{\partial t^n\partial s^n}R_{\xi\xi}(t,s)$$

$$R_{\xi^{(m)}\xi^{(n)}}(t,s)=E\left\{\xi^{(m)}(t)\xi^{(n)*}(t)\right\}=\frac{\partial^{(m+n)}}{\partial t^m\partial s^n}R_{\xi\xi}(t,s)$$

如果随机过程 $\xi(t)$ 是平稳的，则有

$$R_{\xi^{(m)}\xi^{(n)}}(t,s)=E\left\{\xi^{(m)}(t)\xi^{(n)*}(s)\right\}$$
$$=\frac{d}{dt^m\cdot ds^n}R_{\xi\xi}(t,s)$$
$$=\frac{d}{d\tau^m\cdot d\tau^n}(-1)^n R_{\xi\xi}(\tau),\quad(\tau=t-s)$$
$$=(-1)^n\frac{d}{d\tau^{m+n}}R_{\xi\xi}(\tau)$$

证明：（略）

泰勒级数展开

若$\left\{\xi(t),-\infty<t<\infty\right\}$为平稳随机过程

证明：（略）

4 随机积分

4.1 定义

定义 1

设$\left\{\xi(t),a<t<b\right\}$为定义在$a\le t\le b$上的二阶矩过程，$h(t,\tau)$为定义在[a,b]上的任意函数，其中 τ 为一参数，现把[a,b]分成 n 间隔$a=t_0<t_1<t_2\cdots<t_n=b$并设$\Delta t_i=t_i-t_{i-1},i=1,2,3,\cdots,n$，$\hat{t}_i\in[t_{i-1},t_i]$，又设，

$$S_n(\tau)=\sum_{i=1}^{n}h(\hat{t}_i,\tau)\xi(\hat{t}_i)(t_i-t_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}h(\hat{t}_i,\tau)\xi(\hat{t}_i)\Delta t_i\ ,$$

于是$S_n(\tau)$是以τ为参数的随机函数；如果存在$\eta(\tau)$，且不依赖与$\hat{t}_i$的选择有

$$\lim_{\substack{\max\Delta t_i\to 0\\ n\to\infty}}E\left\{\left|S_n(\tau)-\eta(\tau)\right|^2\right\}=0,$$

即，

$$\lim_{\substack{\max\Delta t_i\to 0\\ n\to\infty}}E\left\{\left|\sum_{i=1}^{n}h(\hat{t}_i,\tau)\xi(\hat{t}_i)\Delta t_i-\eta(\tau)\right|^2\right\}=0$$

则称$S_n(\tau)$均方收敛于$\eta(\tau)$，也称$h(t,\tau)\xi(t)$在$a\le t\le b$均方可积，$S_n(\tau)$的均方极限是$\int_a^b h(t,\tau)\xi(t)dt$，即

$$\eta(\tau)=\int_a^b h(t,\tau)\xi(t)dt=\lim_{\substack{\max\Delta t_i\to 0\\ n\to\infty}}\sum_{i=1}^{n}h(\hat{t}_i,\tau)\xi(\hat{t}_i)\Delta t_i$$

定义 2

设$\{\xi(t),a<t<b\}$为定义在$a\le t\le b$上的随机样本函数，$h(t,\tau)$为定义在[a,b]上的任意确定性函数，其中 τ 为一参数，对$h(t,\tau)\xi(t)$作一黎曼积分，这是一个普通函数 的积分，即

$$[\eta(\tau)]=\int_a^b h(t,\tau)\xi(t)dt=\lim_{\substack{\max\Delta t_i\to 0\\ n\to\infty}}\sum_{i=1}^{n}h(\hat{t}_i,\tau)\xi(\hat{t}_i)\Delta t_i\ ,$$

由于随机过程的每次样本不同，因而上述积分是一个随机变量。

4.2 定理 1：（概率论的基本定理）

设有一定义在概率空间$\{\Omega,F,P\}$的随机变量序列$\{\xi_n\}$，均方收敛于某个极限，以概率 1 收敛于另一个极限，则两个极限以概率 1 相等。

根据概率论的基本定理，随机积分两个定义是以概率 1 相同的。

4.3 均方可积的准则

定理 1：

$h(t,\tau)\xi(t)$在[a,b]上均方可积的充分必要条件是，

$$\int_a^b\int_a^b h(t,\tau)\overline{h(t,\tau)}R_{\xi\xi}(t,u)dtdu\text{ 存在。}$$

证明，利用 Loeve 准则。

首先定义两种不同的在[a,b]上的分割，形成的两个随机序列，

$$S_n(\tau)=\sum_{i=1}^{n}h(\hat{t}_i,\tau)\xi(\hat{t}_i)(t_i-t_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}h(\hat{t}_i,\tau)\xi(\hat{t}_i)\Delta t_i\ ,$$

$$S_m(\tau)=\sum_{i=1}^{m}h(\hat{u}_i,\tau)\xi(\hat{u}_i)(u_i-u_{i-1})=\sum_{i=1}^{m}h(\hat{u}_i,\tau)\xi(\hat{u}_i)\Delta u_i\ 。$$

证明

$$\lim_{\substack{m,n\to\infty \\ \max\Delta t_i\to 0 \\ \max\Delta u_i\to 0}} E\left\{S_n(\tau)\overline{S_m(\tau)}\right\}$$存在。

考虑到，

$$\begin{aligned}
&E\left\{S_n(\tau)\overline{S_m(\tau)}\right\} \\
&= E\left\{\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} h(\hat{t}_i,\tau)\xi(\hat{t}_i)\Delta t_i \overline{h(\hat{u}_k,\tau)\xi(\hat{u}_k)}\Delta u_k\right\} \\
&= \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} h(\hat{t}_i,\tau)\overline{h(\hat{u}_k,\tau)}\cdot E\left\{\xi(\hat{t}_i)\overline{\xi(\hat{u}_k)}\right\}\cdot\Delta t_i\Delta u_k \\
&= \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} h(\hat{t}_i,\tau)\overline{h(\hat{u}_k,\tau)}\cdot R_{\xi\xi}(\hat{t}_i,\hat{u}_k)\cdot\Delta t_i\Delta u_k
\end{aligned}$$

上式中若 $R_{\xi\xi}(\hat{t}_i,\hat{u}_k)$ 存在，且 $E\left\{S_n(\tau)\overline{S_m(\tau)}\right\}$存在，而且是一个确定的值，

根据 Loeve 准则，$S_n(\tau)$ 的极限存在。记作，

$$\eta(\tau)=\int_a^b h(t,\tau)\xi(t)dt=\lim_{\substack{\max\Delta t_i\to 0 \\ n\to\infty}}\sum_{i=1}^{n} h(\hat{t}_i,\tau)\xi(\hat{t}_i)\Delta t_i\ 。$$

如果[a,b]不是有限区间，

则上述随机积分收敛是表示为，

$$\lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} E\left|\int_a^b h(t,\tau)\xi(t)dt-\eta(\tau)\right|^2$$

记作，

$$\eta(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t,\tau)\xi(t)dt$$

随机积分存在的条件理解为，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(t,\tau)\overline{h(t,\tau)}R_{\xi\xi}(t,u)dtdu<\infty\ 。$$

随机积分 $\eta(\tau)=\int_a^b h(t,\tau)\xi(t)dt$ 是 τ 的函数，可以求它的均值、相关函数：

$$E\{\eta(\tau)\}=E\left\{\int_a^b h(t,\tau)\xi(t)dt\right\}=\int_a^b h(t,\tau)\ E[\xi(t)]\,dt$$

$$E\left[\eta(\tau_1)\overline{\eta(\tau_2)}\right] = E\left\{\int_a^b h(t,\tau_1)\xi(t)dt\int_a^b \overline{h(u,\tau_2)\xi(u)}du\right\}$$

$$= \int_a^b \int_a^b h(t,\tau_1)\overline{h(u,\tau_2)}\ E\left[\xi(t)\overline{\xi(u)}\right]dtdu$$

$$= \int_a^b \int_a^b h(t,\tau_1)\overline{h(u,\tau_2)}\ R_{\xi\xi}\ (t,u)dtdu$$

4.4 均方积分的性质

性质 1

设$\{\xi(t), t\in T=[a,b]\}$为均方连续随机过程，对任意$t\in T$，有

$$E\left\{\int_a^t \xi(u)du\overline{\int_a^t \xi(v)dv}\right\} = E\left\{\left|\int_a^t \xi(u)du\right|^2\right\}$$

$$\le (t-a)\int_a^t E\left\{\xi(u)\overline{\xi(u)}\right\}du \le (b-a)\int_a^t E\left\{\xi(u)\overline{\xi(u)}\right\}du$$

证明：

$$E\left\{\left|\int_a^t \xi(u)du\right|^2\right\} = E\left\{\int_a^t \xi(u)du\overline{\int_a^t \xi(v)dv}\right\}$$

$$= \int_a^t\int_a^t E\left\{\xi(u)\overline{\xi(v)}\right\}dudv$$

$$E\left\{\left|\int_a^t \xi(u)du\right|^2\right\}$$

$$\le \int_a^t\int_a^t E\left\{\left|\xi(u)\overline{\xi(v)}\right|\right\}dudv$$

$$\le \int_a^t\int_a^t \left\{E\left|\xi(u)\right|^2\cdot E\left|\xi(v)\right|^2\right\}^{1/2}dudv$$

$$= \left\{\int_a^t \left\{E\left|\xi(u)\right|^2\right\}^{1/2}du\right\}^2$$

$$\le \int_a^t 1^2\cdot dv\cdot\int_a^t E\left|\xi(u)\right|^2du$$

$$= (t-a)\cdot\int_a^t E\left|\xi(u)\right|^2du$$

性质 2

设 $\{\xi(t), t\in T=[a,b]\}$ 为均方连续随机过程，有

$$\left\{E\left|\int_a^b \xi(u)du\right|^2\right\}^{1/2} \le \int_a^b \left\{E|\xi(u)|^2\right\}^{1/2} du$$

证明

$$\left\{E\left|\int_a^b \xi(u)du\right|^2\right\}^{1/2} = \left\{E\left|\underset{n\to\infty}{l.i.m.}\sum_{i=1}^n \xi(\hat{u}_i)\Delta u_i\right|^2\right\}^{1/2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{E\left|\sum_{i=1}^n \xi(\hat{u}_i)\Delta u_i\right|^2\right\}^{1/2}$$

$$\le \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n \left\{E|\xi(\hat{u}_i)|^2\right\}^{1/2}\Delta u_i$$

$$=\int_a^b \left\{E|\xi(\hat{u}_i)|^2\right\}^{1/2} du$$

性质 3

设 $\{\xi(t), \eta(t),\quad t\in T=[a,c]\}$ 为均方连续可积的随机过程，α,β 为任意常数，有

$$\int_a^c [\alpha\xi(t)+\beta\eta(t)]dt = \alpha\int_a^c \xi(t)dt + \beta\int_a^c \eta(t)dt$$

进一步，如果 $a\le b\le c$，有

$$\int_a^c \xi(t)dt = \int_a^b \xi(t)dt + \int_b^c \xi(t)dt$$

性质 4

设 $\{\xi(t),\quad t\in T=[a,b]\}$ 为均方连续可积的随机过程，$\eta(t)=\int_a^b \xi(t)dt$，则 $\eta(t)$ 在 $T=[a,b]$ 均方连续、可导，且有 $\eta'(t)=\xi(t)$

证明：

现在证明它是均方可导的，考虑下列不等式，

$$E\left\{\left|\frac{\eta(t+h)-\eta(t)}{h}-\xi(t)\right|^2\right\}=E\left\{\left|\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\xi(u)du-\xi(t)\right|^2\right\}$$

$$=E\left\{\left|\frac{1}{h}\int_t^{t+h}[\xi(u)-\xi(t)]du\right|^2\right\}\le\left\{\left|\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\sqrt{E\left[|\xi(u)-\xi(t)|^2\right]}du\right|^2\right\}$$

$$\le\left\{\max_{|u-t|\le h}\sqrt{E\left[|\xi(u)-\xi(t)|^2\right]}\right\}^2$$

当 $h\to 0$ 时，上述不等式趋于 0，因此有均方收敛意义下的

$\eta'(t)=\xi(t)$。

5 举例

5.1 均方周期性

定义，随机过程满足条件 $E\left\{\left[x(t+T)-x(t)\right]^2\right\}=0$，则称为均方周期性的。

定理（9-1）：当且仅当过程 $x(t)$ 的自相关函数是双周期的，即对于任意一对整数 m 和 n 有 $R(t_1+mT,t_2+nT)=R(t_1,t_2)$，则过程是均方周期的

证明：

1. 由于 $E^2\left\{zw\right\}\le E\left\{z^2\right\}E\left\{w^2\right\}$ 得到

$$E^2\left\{x(t_1)\left[x(t_2+T)-x(t_2)\right]\right\}\le E\left\{x(t_1)^2\right\}E\left\{\left[x(t_2+T)-x(t_2)\right]^2\right\}$$

因为过程是均方周期的，不等式右方趋于零，得到

$$R(t_1,t_2+T)=R(t_1,t_2)$$

反复使用上述方法可以证明

$$R(t_1+mT,t_2+nT)=R(t_1,t_2)$$

2. 由于 $R(t_1+mT,t_2+nT)=R(t_1,t_2)$，可以得到

$$R(t_1+T,t_2+T)=R(t_1+T,t_2)=R(t_1,t_2)$$

因而，

$$E\left\{\left[x(t+T)-x(t)\right]^2\right\}=R(t+T,t+T)+R(t,t)-2R(t+T,t)=0$$

5.2 （9.2.2）微分器

线性系统微分器 $L\left[x(t)\right]=x'(t)$ 的输出 $y(t)$ 的均值和相关函数

$$E\left\{x'(t)\right\}=\left[E\left\{x(t)\right\}\right]'，\text{即} \eta_{x'}(t)=\eta_x'(t)$$

$$R_{xx'}(t_1,t_2)=L_2\left[R_{xx}(t_1,t_2)\right]=\frac{\partial}{\partial t_2}\left[R_{xx}(t_1,t_2)\right]$$

$$R_{x'x'}(t_1,t_2)=L_1\left[R_{xx'}(t_1,t_2)\right]=\frac{\partial^2}{\partial t_1\partial t_2}\left[R_{xx}(t_1,t_2)\right]$$

对于平稳过程，若 $x(t)$ 是广义平稳的，则 $E\left\{x'(t)\right\}=0$

$$R_{xx}(t_1,t_2)=R_{xx}(\tau)$$

$$R_{xx'}(t_1,t_2)=\frac{\partial}{\partial t_2}\left[R_{xx}(t_1,t_2)\right]=-\frac{dR_{xx}(\tau)}{d\tau}$$

$$R_{x'x'}(t_1,t_2)=\frac{\partial^2}{\partial t_1\partial t_2}\left[R_{xx}(t_1,t_2)\right]=-\frac{d^2R_{xx}(\tau)}{d\tau^2}$$

泊松脉冲列：微分器的输入 $x(t)$ 是泊松过程时，相应的输出 $z(t)$ 是脉冲串 $z(t)=\sum_i\delta\left(t-t_i\right)$，$z(t)$ 是一个平稳随机过程，$\eta_z(t)=\lambda$，$R_z(\tau)=\lambda^2+\lambda\delta\left(\tau\right)$

证明：因为 $z(t)=x'(t)$，$\eta_x(t)=\lambda t$，则有 $\eta_z(t)=\frac{d}{dt}\left[\lambda t\right]=\lambda$。又有，

$$\begin{aligned}R_{xx}(t_1,t_2)&=\lambda^2t_1t_2+\lambda\min\left[t_1,t_2\right]\\&=\lambda^2t_1t_2+\lambda t_1U\left(t_2-t_1\right)+\lambda t_2U\left(t_1-t_2\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R_{xz}(t_1,t_2)&=\frac{\partial}{\partial t_2}R_{xx}(t_1,t_2)\\&=\lambda^2t_1+\lambda t_1\delta\left(t_2-t_1\right)-\lambda t_2\delta\left(t_1-t_2\right)+\lambda U\left(t_1-t_2\right)\\&=\lambda^2t_1+\lambda U\left(t_1-t_2\right)\end{aligned}$$

$$R_{zz}(t_1,t_2)=\frac{\partial}{\partial t_1}R_{xz}(t_1,t_2)=\lambda^2+\lambda\delta\left(t_1-t_2\right)$$