各态历经性（遍历性）

- 各态历经性（遍历性）
  - 定义：各态历经性

    均值各态历经性

    自相关各态历经性
  - 举例：
  - 性质：

    定理 1，均值各态历经定理

    定理 2，自相关函数的各态历经定理

    定理 3，均值各态历经定理

    定理 4，自相关函数的各态历经定理
- 各态历经性的应用举例
  - 遍历性转换技术测量随机过程的均值
  - 遍历性转换技术测量随机过程的相关函数
  - 利用相关技术从输入的噪声中提取微弱信号

    未知信号周期时，利用输入信号的自相关函数

    确知信号周期时，利用输入信号与周期信号的互相关函数
  - 观察时间有限时，确定输入信号的自相关函数的均值和方差
  - 观察时间有限时，确定输入信号的互相关函数的均值和方差

1 各态历经性（遍历性）

1.1 定义：各态历经性

均值各态历经性：

设$\xi(t)$是均方连续平稳的随机过程，如果沿时间的平均值即时间平均值$\langle \xi(t) \rangle$存在，即$\langle \xi(t) \rangle = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \xi(t)dt$存在，而且$\langle \xi(t) \rangle = E[\xi(t)] = \mu_\xi$以概率 1 相等。则称该过程是均值具有各态历经性。

自相关各态历经性：

设$\xi(t)$是均方连续平稳的随机过程，且对于固定的τ，$\xi(t+\tau)\xi(t)$也是均方连续平稳的随机过程，$\langle \xi(t+\tau)\overline{\xi(t)} \rangle$代表$\xi(t+\tau)\overline{\xi(t)}$沿时间的平均值，即$\langle \xi(t+\tau)\overline{\xi(t)} \rangle = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \xi(t+\tau)\overline{\xi(t)}dt$存在，称$\langle \xi(t+\tau)\overline{\xi(t)} \rangle$是$\xi(t)$的时间相关函数。如果$\langle \xi(t+\tau)\overline{\xi(t)} \rangle = E[\xi(t+\tau)\overline{\xi(t)}] = R_{\xi\xi}(\tau)$，则称该过程的自相关函数具有各态历经性。

1.2 举例

例 1: 有随机相位正弦波过程$\xi(t) = A\cos(\omega t + \theta)$,其中$A, \omega$ 是常数，$\theta \in [0, 2\pi)$是均匀分布的随机变量。试计算它的时间平均值和时间相关函数，该过程是否具有各态历经性？

例 2：设有平稳随机过程$\xi(t) = \eta$，其中η是异于零的随机变量，问该过程是否是各态历经的。

1.3 定理 1：均值各态历经定理

平稳随机过程$\xi(t)$的均值具有各态历经性的充分必要条件是：

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}\left(1-\frac{|\tau|}{2T}\right)\cdot\left(R_{\xi\xi}(\tau)-\left|\mu_{\xi}\right|^{2}\right)dt=0$$

证明：

从概率论的基本原理知，研究两个随机变量相等的方法，随机变量差的均值为零（随机变量均值相同），随机变量差的方差为零，则两个随机变量以概率 1 相等。

$\langle\xi(t)\rangle$是一个样本的时间平均值，不同的样本是不同的，它是一个随机变量，现计算它的均值和方差。

$$\begin{aligned}E\{\langle\xi(t)\rangle\}&=E\left\{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\xi(t)dt\right\}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}E\{\xi(t)\}dt\\&=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\mu_{\xi}\cdot dt=\mu_{\xi}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D\{\langle\xi(t)\rangle\}&=E\left\{\left|\langle\xi(t)\rangle-\mu_{\xi}\right|^{2}\right\}=E\left\{\left|\langle\xi(t)\rangle\right|^{2}\right\}-\left|\mu_{\xi}\right|^{2}\\&=E\left\{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\xi(t)dt\cdot\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\overline{\xi(\tau)}d\tau\right\}-\left|\mu_{\xi}\right|^{2}\\&=\lim_{T\to\infty}\left\{\frac{1}{4T^{2}}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}E\left[\xi(t)\overline{\xi(\tau)}\right]dtd\tau\right\}-\left|\mu_{\xi}\right|^{2}\\&=\lim_{T\to\infty}\left\{\frac{1}{4T^{2}}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}R_{\xi\xi}(t-\tau)dtd\tau\right\}-\left|\mu_{\xi}\right|^{2}\\&=\lim_{T\to\infty}\left\{\frac{1}{4T^{2}}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\left[R_{\xi\xi}(t-\tau)-\left|\mu_{\xi}\right|^{2}\right]dtd\tau\right\}\end{aligned}$$

$$=\lim_{T\to\infty}\left\{\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}C_{\xi\xi}(t-\tau)dtd\tau\right\}$$

进行变换：

$t+\tau=u, t-\tau=v$,

$t=(u+v)/2, \tau=(u-v)/2$

$$\frac{\partial(t,\tau)}{\partial(u,v)}=1/2$$

则：

$$D\{\langle\xi(t)\rangle\}=\lim_{T\to\infty}\left\{\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}C_{\xi\xi}(t-\tau)dtd\tau\right\}$$

$$=\lim_{T\to\infty}\left\{\frac{1}{4T^2}\int_{-2T}^{2T}\int_{-2T+|v|}^{2T-|v|}\frac{1}{2}C_{\xi\xi}(v)dudv\right\}$$

$$=\lim_{T\to\infty}\left\{\frac{1}{4T^2}\int_{-2T}^{2T}\left(2T-|v|\right)C_{\xi\xi}(v)dv\right\}$$

$$=\lim_{T\to\infty}\left\{\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}\left(1-\frac{|v|}{2T}\right)C_{\xi\xi}(v)dv\right\}$$

$$=\lim_{T\to\infty}\left\{\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}\left(1-\frac{|v|}{2T}\right)\left[R_{\xi\xi}(v)-\left|\mu_\xi\right|^2\right]dv\right\}$$

从概率论的基本原理知，如果随机变量的均值为 C，方差为零，则随机变量以概率 1 等于 C。现在随机过程的时间平均是$\langle\xi(t)\rangle=\mu_\xi$如果方差为零，$\langle\xi(t)\rangle=\mu_\xi$以概率 1 成立。而方差为零的条件是，

$$\lim_{T\to\infty}E\left\{\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}\left(1-\frac{|v|}{2T}\right)\left[R_{\xi\xi}(v)-\left|\mu_\xi\right|^2\right]dv\right\}=0$$

这就是均值满足各态历经的充分必要条件。

1.4 定理 2：自相关函数的各态历经定理

平稳随机过程$\xi(t)$的自相关函数具有各态历经性的充分必要条件是：

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}\left(1-\frac{|u|}{2T}\right)\cdot\left(B_{\xi\xi}(u)-\left|R_{\xi\xi}(\tau)\right|^2\right)du=0,$$

其中$B_{\xi\xi}(u)=E\left[\xi(t+\tau+u)\overline{\xi(t+u)}\overline{\xi(t+\tau)\overline{\xi(t)}}\right]$

证明：（略）

在实际工作中，通常只考虑$0\le t<\infty$的平稳随机过程，在这种情况下时间平均都应以$0\le t<\infty$上的时间平均来代替，因而定理 1、2 应采用下面的表达形式。

1.5 定理 3：均值各态历经定理

平稳随机过程$\xi(t)$的时间平均$\langle\xi(t)\rangle=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\xi(t)dt$，和集平均$E[\xi(t)]=\mu_\xi$以概率 1 相等的充分必要条件是：

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|\tau|}{T}\right)\cdot C_{\xi\xi}(\tau)\cdot dt=0;$$

如果$\xi(t)$是实平稳的随机过程，则其充分必要条件是：

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\left(1-\frac{\tau}{T}\right)\cdot C_{\xi\xi}(\tau)\cdot dt=0。$$

1.6 定理 4：自相关函数的各态历经定理

平稳随机过程$\xi(t)$的自相关函数和集相关函数以概率 1 相等的充分必

要条件是：$\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|u|}{T}\right)\cdot\left(B_{\xi\xi}(u)-\left|R_{\xi\xi}(\tau)\right|^{2}\right)du=0$。

其中，自相关函数为$\left\langle\xi(t+\tau)\overline{\xi(t)}\right\rangle=\lim\limits_{T\to\infty}\int_{0}^{T}\xi(t+\tau)\overline{\xi(t)}dt$，

集相关函数为$E\left[\xi(t+\tau)\overline{\xi(t)}\right]=R_{\xi\xi}(\tau)$ ，

$B_{\xi\xi}(u)=E\left[\xi(t+\tau+u)\overline{\xi(t+u)}\overline{\xi(t+\tau)\overline{\xi(t)}}\right]$。

如果$\xi(t)$是实平稳的随机过程，则其充分必要条件是：

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{0}^{T}\left(1-\frac{u}{T}\right)\cdot\left(B_{\xi\xi}(u)-\left|R_{\xi\xi}(\tau)\right|^{2}\right)du=0。$$

2 各态历经性的应用举例

- 遍历性转换技术测量随机过程的均值（略）
- 遍历性转换技术测量随机过程的相关函数（略）
- 利用相关技术从输入的噪声中提取微弱信号

  未知信号周期时，利用输入信号的自相关函数

  确知信号周期时，利用输入信号与周期信号的互相关函数
- 观察时间有限时，确定输入信号的自相关函数的均值和方差（略）
- 观察时间有限时，确定输入信号的互相关函数的均值和方差（略）

例 1

设接收信号是$y(t)=s(t)+n(t)$，其中$s(t)$是周期为 T，均值为零的信号，$n(t)$是随机噪声均值为零，信号与噪声相互统计独立，信号和噪声是各态历经的随机过程。

计算时间自相关函数：

$$
\begin{aligned}
\langle y(t+\tau)y(t)\rangle &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T y(t+\tau)y(t)dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T y(t+\tau)y(t)dt \\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \left[s(t+\tau)+n(t+\tau)\right]\left[s(t)+n(t)\right]dt \\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T s(t+\tau)s(t)dt + \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T n(t+\tau)n(t)dt \\
&\quad \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T s(t+\tau)n(t)dt + \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T n(t+\tau)s(t)dt \\
&= R_{ss}(\tau)+R_{nn}(\tau)+R_{sn}(\tau)+R_{ns}(\tau) \\
&= R_{ss}(\tau)+R_{nn}(\tau)
\end{aligned}
$$

上式计算中，利用了信号和噪声的各态历经特性，它们的时间相关函数等于统计相关函数;信号和噪声是统计独立的它们的均值为零因此他们的互相关函数为零。

进一步考虑到，周期性随机信号的相关函数具有周期性，噪声的相关函数不具有周期性，当 τ 增大时， $R_{nn}(\tau)$ 趋于零，因而 τ 增大时能从 $\langle y(t+\tau)y(t)\rangle = R_{ss}(\tau)$ 中检测出信号来。

进一步假设：$R_{nn}(\tau)=\sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}$， $s(t)=A\cos(\omega t+\theta)$其中$\theta$均匀分布在$\left[0,2\pi\right]$

$$
R_{ss}(\tau)=\frac{A^2}{2}\cos\omega\tau
$$

$$
R_{yy}(\tau)=\frac{A^2}{2}\cos\omega\tau+\sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}
$$

当τ增大时可以检测出信号来。

例 2

设接收信号是 $y(t)=s(t)+n(t)$，其中 $s(t)$ 是周期为 T，均值为零的信号，$n(t)$ 是随机噪声均值为零，信号与噪声相互统计独立，信号和噪声是各态历经的随机过程。如果信号的周期是已知的，可以在接收机产生一个与信号有相同周期的信号 $g(t)$，它与噪声统计独立，而且是各态历经的。计算 $g(t)$ 和输入信号的互相关函数，

$$\begin{aligned}
\langle y(t+\tau)g(t)\rangle &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T y(t+\tau)g(t)dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T y(t+\tau)g(t)dt \\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \left[s(t+\tau)+n(t+\tau)\right]g(t)dt \\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T s(t+\tau)g(t)dt + \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T n(t+\tau)g(t)dt \\
&= R_{sg}(\tau)+R_{ng}(\tau) \\
&= R_{sg}(\tau)
\end{aligned}$$

上式计算中，利用了信号和噪声的各态历经特性，它们的时间相关函数等于统计相关函数；信号和噪声是统计独立的它们的均值为零因此他们的互相关函数为零。

进一步考虑到，周期性随机信号 $s(t)$ 与相同周期的信号 $g(t)$ 的互相关函数具有周期性，因而 τ 增大时能从 $R_{sg}(\tau)$ 中检测出信号来。

例 3

设接收信号是 $y(t)=s(t)+n(t)$，考虑采用自相关方法从接收信号中检测信号，计算输入输出的信噪（功率）比。输入信号：$s(t)=A\cos(\omega t+\theta)$，

$R_{ss}(\tau)=\dfrac{A^2}{2}\cos\omega\tau$，输入噪声：$R_{nn}(\tau)=\sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}$，输入信号的自相关函数：$R_{yy}(\tau)=\dfrac{A^2}{2}\cos\omega\tau+\sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}$

解：

输入信噪比是：$SNR_i = A^2/2\sigma^2$

接收机相关输出的一个样本的数学期望是：

$$\begin{aligned}\langle z(t,\tau)\rangle &= \langle[s(t)+n(t)][s(t-\tau)+n(t-\tau)]\rangle \\ &= \langle s(t)s(t-\tau)+s(t)n(t-\tau)+n(t)s(t-\tau)+n(t)n(t-\tau)\rangle \\ &= R_{ss}(\tau)+R_{sn}(\tau)+R_{ns}(\tau)+R_{nn}(\tau) \quad \text{(应用各态历经性)} \\ &= R_{ss}(\tau)+R_{nn}(\tau) \quad \text{(信号与噪声不相关)} \\ &= \frac{A^2}{2}\cos\omega\tau+R_{nn}(\tau)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\{\langle z(t,\tau)\rangle\}^2 &= \left[\frac{A^2}{2}\cos\omega\tau+R_{nn}(\tau)\right]^2 \\ &= \frac{A^4}{4}\cos^2\omega\tau+R_{nn}(\tau)R_{nn}(\tau)+A^2\cos\omega\tau\cdot R_{nn}(\tau)\end{aligned}$$

接收机输出的一个样本的平方的平均值是：

$$\begin{aligned}\langle z^2(t,\tau)\rangle &= \left\langle[s(t)+n(t)]^2[s(t-\tau)+n(t-\tau)]^2\right\rangle \\ &= \left\langle s^2(t)s^2(t-\tau)+s^2(t)n^2(t-\tau)+2s^2(t)s(t-\tau)n(t-\tau)\right\rangle \\ &\quad +\left\langle 2s(t)n(t)s^2(t-\tau)+2s(t)n(t)n^2(t-\tau)+4s(t)n(t)s(t-\tau)n(t-\tau)\right\rangle \\ &\quad +\left\langle n^2(t)s^2(t-\tau)+n^2(t)n^2(t-\tau)+2n^2(t)s(t-\tau)n(t-\tau)\right\rangle \\ &= \left\langle s^2(t)s^2(t-\tau)\right\rangle+\left\langle s^2(t)n^2(t-\tau)\right\rangle+\left\langle n^2(t)s^2(t-\tau)\right\rangle \\ &\quad +\left\langle n^2(t)n^2(t-\tau)\right\rangle+\left\langle 4s(t)n(t)s(t-\tau)n(t-\tau)\right\rangle\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\langle \left[1+\cos\left(2\omega t+2\theta\right)\right]\left[1+\cos\left(2\omega t-2\omega\tau+2\theta\right)\right]A^4/4\right\rangle \\
&\qquad +\left\langle s^2(t)n^2(t-\tau)\right\rangle+\left\langle n^2(t)s^2(t-\tau)\right\rangle+\left\langle n^2(t)n^2(t-\tau)\right\rangle \\
&\qquad +\left\langle 4s(t)n(t)s(t-\tau)n(t-\tau)\right\rangle \\
&= \left[\frac{A^4}{4}+\frac{A^4}{8}\cos 2\omega\tau\right]+\frac{A^2}{2}\sigma^2+\frac{A^2}{2}\sigma^2+\sigma^4 \\
&\qquad\qquad +2R_{nn}(\tau)R_{nn}(\tau)+4R_{nn}(\tau)\frac{A^2}{2}\cos\omega\tau \\
&= \left(\frac{A^4}{4}\cos^2\omega\tau+\frac{A^4}{8}\right) \\
&\qquad\qquad +A^2\sigma^2+\sigma^4+2R_{nn}(\tau)R_{nn}(\tau)+2A^2R_{nn}(\tau)\cos\omega\tau \\
&= \left\{\frac{A^4}{4}\cos^2\omega\tau+R_{nn}(\tau)R_{nn}(\tau)+A^2\cos\omega\tau\cdot R_{nn}(\tau)\right\} \\
&\qquad\qquad +\left\{\frac{A^4}{8}+A^2\sigma^2+\sigma^4+R_{nn}(\tau)R_{nn}(\tau)+A^2\cos\omega\tau\cdot R_{nn}(\tau)\right\}
\end{aligned}
$$

接收机输出的一个样本的方差是：

$$
\begin{aligned}
D\left[z(t,\tau)\right] &= \left\langle z^2(t,\tau)\right\rangle-\left\langle z(t,\tau)\right\rangle^2 \\
&= \frac{A^4}{8}+A^2\sigma^2+\sigma^4+R_{nn}(\tau)R_{nn}(\tau)+A^2\cos\omega\tau\cdot R_{nn}(\tau) \\
&\approx \frac{A^4}{8}+A^2\sigma^2+\sigma^4
\end{aligned}
$$

其中最后一步推导是考虑到τ足够长的条件下，噪声的自相关趋于零。方差中第一项是信号的和频分量的波动，第二项是信号和噪声的乘积，第三项是噪声的平方。

N 次样本求和的输出信噪比是：

$$
\begin{aligned}
SNR_o &= \frac{(NP)^2}{ND\{P\}} \\
&= N\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{A^2}{2}\right)^2\Bigg/\left(\frac{A^4}{8}+A^2\sigma^2+\sigma^4\right)
\end{aligned}
$$

$$= N\Big/\left[1+4\cdot SNR_i^{-1}+2\cdot SNR_i^{-2}\right]$$

例 4

设接收信号是 $y(t)=s(t)+n(t)$，考虑采用互相关方法从接收信号中检测信号，计算输入输出的信噪（功率）比。输入信号：$s(t)=A\cos(\omega t+\theta)$，$R_{ss}(\tau)=\dfrac{A^2}{2}\cos\omega\tau$，输入噪声：$R_{nn}(\tau)=\sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}$，输入信号的自相关函数：$R_{yy}(\tau)=\dfrac{A^2}{2}\cos\omega\tau+\sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}$

解：

输入信噪比是：$SNR_i = A^2\big/2\sigma^2$

接收机产生一个与信号有相同周期的信号 $g(t)=B\sin(\omega t+\theta_L)$，其中 B 是信号的幅度、$\theta_L$ 是随机相位。当时间平均期间足够大，它们的时间平均是：

$$Z(t,\tau)=y(t)\cdot g(t-\tau)=\left[s(t)+n(t)\right]g(t-\tau)$$

时间平均的期望值是：

$$\begin{aligned}\langle Z(t,\tau)\rangle &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\left[s(t)+n(t)\right]g(t-\tau)dt\\ &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T A\cos(\omega t+\theta)\cdot B\cos\left[\omega(t-\tau)+\theta_L\right]dt\\ &= \frac{AB}{2}\cos(\omega\tau-\theta_D)=R_{yg}(\tau)\end{aligned}$$

时间平均平方的期望值是：

$$\left\langle Z^2(t,\tau)\right\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T [s(t)+n(t)]^2\cdot[g(t-\tau)]^2\,dt$$
$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T [s(t)]^2\cdot[g(t-\tau)]^2\,dt + \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T [n(t)]^2\cdot[g(t-\tau)]^2\,dt$$
$$+ \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T 2s(t)\cdot n(t)\cdot[g(t-\tau)]^2\,dt$$

其中，利用了信号的各态历经特性，有

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T [s(t)]^2\cdot[g(t-\tau)]^2\,dt$$
$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T [A\sin(\omega t+\theta)]^2\cdot[B\sin(\omega(t-\tau)+\theta_L)]^2\,dt$$
$$= \lim_{T\to\infty}\frac{A^2B^2}{4T}\int_0^T [1-\cos(2\omega t+2\theta)]\cdot[1-\cos(2\omega(t-\tau)+2\theta_L)]dt$$
$$= \frac{A^2B^2}{4} + \lim_{T\to\infty}\frac{A^2B^2}{4T}\int_0^T \frac{1}{2}\cos(2\omega\tau-2\theta_D)dt$$
$$= \frac{A^2B^2}{4} + \frac{A^2B^2}{8}\cos(2\omega\tau-2\theta_D)$$
$$= \frac{A^2B^2}{4}\left[1+\cos^2(\omega\tau-\theta_D)-\frac{1}{2}\right]$$
$$= \frac{A^2B^2}{4}\left[\frac{1}{2}+\cos^2(\omega\tau-\theta_D)\right]$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T [n(t)]^2\cdot[g(t-\tau)]^2\,dt$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T [n(t)]^2\cdot[B\sin(\omega(t-\tau)+\theta_L)]^2\,dt$$

$$=\langle n^2(t)\rangle\frac{B^2}{2}$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T 2s(t)\cdot n(t)\cdot[g(t-\tau)]^2\,dt$$

$$=\langle n(t)\rangle\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T 2s(t)\cdot[g(t-\tau)]^2\,dt$$

$$=0$$

输出信号的方差是：

$$D[Z(t,\tau)]=\langle Z^2(t,\tau)\rangle-[\langle Z(t,\tau)\rangle]^2$$

$$=\frac{A^2B^2}{4}\left[\frac{1}{2}+\cos^2(\omega\tau-\theta_D)\right]+\sigma^2\frac{B^2}{2}-\left[\frac{AB}{2}\cos(\omega\quad\tau+\theta_D)\right]^2$$

$$=\left[\frac{A^2}{4}+\sigma^2\right]\frac{B^2}{2}$$

方差中第一项是输入信号和参考信号的和频分量的波动、第二项是参考信号和噪声的乘积。

输出 N 个样本求和的输出信噪比是：

$$SNR_o=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{AB}{2}\right)^2\Big/\left[\frac{1}{N}\frac{B^2}{2}\cdot\left(\frac{A^2}{4}+\sigma^2\right)\right]$$

$$=N\Big/\left[1+2\cdot SNR_i^{-1}\right]$$

其中，输入信噪比是：$SNR_i=A^2/2\sigma^2$ 。