最小二乘曲线拟合及 MATLAB 实现

届　　别	2009 届
系　　别	数学系
专　　业	信息与计算科学
姓　　名	王朵
指导教师	王仲华

二〇一三年五月

最小二乘曲线拟合及 MATLAB 实现

学生姓名:王朵　　指导教师:王仲华

摘要: 物理量之间的函数关系在实际研究工作中有很重要的作用. 本文首先介绍了最小二乘曲线拟合法的基本原理. 其次，对最小二乘曲线拟合法的 MATLAB 实现方法进行研究， 其实现方法非常方便、简单. 最后，通过案例分析，实验研究得出结论:基于 MATLAB 的最小二乘曲线拟合方法简单、容易实现，工程应用广泛.

关键词: 曲线拟合;最小二乘法;多项式拟合;MATLAB

1. 引言

在科学研究与工程计算中，常常需要从一组测量数据$(x_i, y_i)(i = 0,1,\cdots,m)$出发，寻找变量$x$与$y$的函数表达式. 有时很难找到它们之间的精确表达式$y = f(x)$，这时就要根据观察点的数值，利用最小二乘曲线拟合去构造一个近似解析式$y = f(x) \approx s(x)$. 利用该方法“拟合”出的函数曲线$y \approx s(x)$虽然不能保证通过所有的样本点，但是很好地“逼近”了它们，充分反映了已知数据间内在的数量关系. 因此，这种方法在生产实践和科学实验中具有广泛的应用前景. 一般构造$y \approx s(x)$的方法很多，本文仅在 MATLAB 环境下对最常用的最小二乘法予以介绍，通过实例讲述了其功能及用法，并对不超过 10 阶的曲线拟合给出了图形用户接口程式，使得低阶的拟合更加简单易行、直观明了[3].

2. 曲线拟合的基本原理

2.1 拟合问题[1]

假设已获得某函数关系的成批离散实验数据或观测数据，拟合问题就是为这样的大量离散数据建立对应的、近似的连续模型的一种应用基础问题. 所建立的模型的基本形式是一条曲线(一元函数)，称拟合曲线或经验公式.

其实，利用离散数据建立对应的连续模型，插值方法是其中的一种，其特点是要求目标模型(即插值函数)要过已知的离散点，且所得的插值函数通常用来作非插值节点上的近似计算. 而在拟合问题中，它不要求目标模型(即拟合曲线)精确地过已知的各离散点(离散点本来就可能不准确)，只是要求目标模型符合已知离散点分布的总体轮廓，并且尽可能接近已知的数据，即与已知的离散点的误差按某种意义尽量地小. 关键就在“误差按某种意义尽量地小”这一点上，可以有多种不同的提法，通常采用“误差的平方和最小”的原则，这就是“最小二乘拟合问题”.

2.2 最小二乘拟合问题[1]

设f是在$m+1$个节点$x_i \in [a,b]$上给定的离散函数，即给定离散数据(或称实验数据或观测数据)

$$(x_i,\ f(x_i)) \qquad i = 0,1,\cdots,m$$

要在某特定的函数空间Φ中，找出一个函数$s^*(x) \in \Phi$作为f的近似连续模型，要求$s*$在x_i处的值$s^*(x)$与$f(x_i)$的误差(工程中也称残差)

$$e_i = f(x_i) - s^*(x_i) \qquad (i = 0,1,\cdots,m)$$

的平方和最小，即(记$e = (e_0, e_1, \cdots, e_m)^T$)

$$\| e \|_2^2 = \sum_{i=0}^{m} e_i^2 = \sum_{i=0}^{m} [f(x_i) - s^*(x_i)]^2 = \min_{s\in\Phi} \sum_{i=0}^{m} [f(x_i) - s(x_i)]^2$$

或为了体现数据的重要性不同，引入对应$[a,b]$上不同点x_i的权函数值$\rho(x_i) > 0 (i = 0, 1, \cdots, m)$，因而上式写成更一般的带权形式

$$\| e \|_2^2 = \sum_{i=0}^{m} \rho(x_i)[f(x_i) - s^*(x_i)]^2 = \min_{s\in\Phi} \sum_{i=0}^{m} \rho(x_i)[f(x_i) - s(x_i)]^2$$

这就是最小二乘拟合问题，$s^*(x)$称为f在$m+1$个节点$x_i (i = 0, 1, \cdots, m)$上的最小二乘解（即拟合曲线或经验公式，或称为回归线）.

3. 多项式拟合[4]

通常，在简单情形下，取Φ为多项式空间（或其子空间）$\Phi = P_n = \mathrm{Span}\{1, x, \cdots, x^n\}$，这时$s(x) \in P_n$为

$$s(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \qquad (n \le m)$$

此时，称其为多项式拟合.

由最小二乘法确定系数$a_0, a_1, \cdots, a_n$，假设各数据点的权为 1，
令

$$F(a_0, a_1, \cdots, a_n) = \sum_{i=0}^{m} e_i^2 = \sum_{i=0}^{m} (y_i - a_0 - a_1 x_i - \cdots - a_n x_i^n)^2$$

要求其最小值，则有：

$$\frac{\partial F}{\partial a_j} = -2 \sum_{i=0}^{m} x_i^j (y_i - a_0 - a_1 x_i - \cdots - a_n x_i^n) = 0 \qquad j = 0, 1, \cdots, n$$

即：

$$\sum_{i=0}^{m} \left(a_0 x_i^j + a_1 x_i^{1+j} + \cdots + a_n x_i^{n+j}\right) = \sum_{i=0}^{m} x_i^j y_i$$

得方程组：

$$\begin{pmatrix} m+1 & \sum_{i=0}^{m} x_i & \cdots & \sum_{i=0}^{m} x_i^n \\ \sum_{i=0}^{m} x_i & \sum_{i=0}^{m} x_i^2 & \cdots & \sum_{i=0}^{m} x_i^{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=0}^{m} x_i^n & \sum_{i=0}^{m} x_i^{n+1} & \cdots & \sum_{i=0}^{m} x_i^{2n} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{m} y_i \\ \sum_{i=0}^{m} x_i y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{m} x_i^n y_i \end{pmatrix}$$

此方程称为多项式拟合的法方程. 令

$$X=\begin{pmatrix} m+1 & \sum_{i=0}^{m}x_i & \cdots & \sum_{i=0}^{m}x_i^n \\ \sum_{i=0}^{m}x_i & \sum_{i=0}^{m}x_i^2 & \cdots & \sum_{i=0}^{m}x_i^{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=0}^{m}x_i^n & \sum_{i=0}^{m}x_i^{n+1} & \cdots & \sum_{i=0}^{m}x_i^{2n} \end{pmatrix} \quad Y=\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{m}y_i \\ \sum_{i=0}^{m}x_iy_i \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{m}x_i^ny_i \end{pmatrix} \quad A=\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

则得:$XA=Y$，从而$A=X^{-1}Y$.

由此矩阵方程解出系数向量A，即得拟合多项式$s(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$.

值得注意的是，当n较大时$(n\ge 7)$，法方程的系数矩阵是高度病态的，也就是说解的舍入误差很大，以至毫无意义. 因此，用多项式作曲线拟合时，n 不宜取得很大.

4. 可化为线性拟合的其他曲线拟合[1]

上述讨论的是线性最小二乘拟合问题，即所拟合的函数

$$s(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$$

是关于待定参数$a_0,a_1,\cdots,a_n$为线性的模型. 但在实际的科学/工程系统中，其模型可能呈指数函数或双曲线函数等非线性形式. 因此，期望拟合曲线能表达这种规律. 两种常被采用的非线性模型是指数函数和双曲线函数:

指数模型　　$s(x)=ae^{bx}$　　或　　$s(x)=ae^{\frac{b}{x}}$

双曲线模型　　$s(x)=\frac{1}{a+bx}$　　或　　$s(x)=\frac{x}{ax+b}$

对于这些模型，如对指数模型，直接求

$$\sum_{i=0}^{m}\rho(x_i)\left[f(x_i)-ae^{bx_i}\right]^2 \qquad \text{或} \qquad \sum_{i=0}^{m}\rho(x_i)\left[f(x_i)-ae^{\frac{b}{x_i}}\right]^2$$

的最小二乘解，将导致求解关于 a，b 的非线性方程组，那一般是不宜求解的.

对此，通常采用一定的技巧把它转化为求“一次多项式模型”. 现分别讨论如下:

(1) 取模型$s(x)=ae^{bx}$，即视已知数据呈$f(x)=ae^{bx}$ 形状，两式两边取对数得

$$\ln s(x)=\ln a+bx \qquad \ln f(x)=\ln a+bx$$

对照最小二乘解法中的一次多项式模型，可令$y'=\ln s(x)$，则得$y'=\ln a+bx$. 从而由一次线性拟合求出$\ln a,b$，即可求出a,b的值.

(2) 取模型$s(x)=ae^{\frac{b}{x}}$，即视已知数据呈$f(x)=ae^{\frac{b}{x}}$形状，两式两边取对数得

$$\ln s(x)=\ln a+b\frac{1}{x} \qquad \ln f(x)=\ln a+b\frac{1}{x}$$

对照可知，可令$y'=\ln s(x)$，$x'=\frac{1}{x}$，则得$y'=\ln a+bx'$. 从而由一次线性拟合求出$\ln a,b$，即可求

出a,b的值.

(3) 取模型$s(x)=\frac{1}{a+bx}$，即视已知数据呈$f(x)=\frac{1}{a+bx}$形状. 取$s(x)$式与$f(x)$式的倒数有

$$\frac{1}{s(x)}=a+bx \qquad \frac{1}{f(x)}=a+bx$$

对照可知，可令$y'=\frac{1}{s(x)}$，则得$y'=a+bx$. 从而由一次线性拟合可求出a,b的值.

(4) 取模型$s(x)=\frac{x}{ax+b}$，即视已知数据呈$f(x)=\frac{x}{ax+b}$形状，各取倒数有

$$\frac{1}{s(x)}=a+b\frac{1}{x} \qquad \frac{1}{f(x)}=a+b\frac{1}{x}$$

对照可知，可令$y'=\frac{1}{s(x)}$，$x'=\frac{1}{x}$，则得$y'=a+bx'$. 从而由一次线性拟合可求出a,b的值.

可采用此法拟合的曲线还有S型曲线$y=\frac{1}{a+be^{-x}}$，倒指数曲线$y=ae^{\frac{b}{x}}$ $(a>0)$，及对数曲线$y=a+b\ln x$等. 这些曲线模型都可通过一次线性拟合来求得[4].

5. MATLAB 中曲线拟合的方法[3] [8]

5.1 命令行曲线拟合

[命令] polyfit

[调用格式] p=polyfit(x,y,n)

[功能] 对于已知的数据组 x,y 进行多项式拟合，拟合的多项式的次数为 n，输出结果 p 为多项式的系数矩阵，其对应的次数由高到低.

[命令] polyval

[调用格式] y1=polyval(p,x)

[功能] 此命令为求解多项式拟合的测试函数. 其中，x 为测试数据矢量;y1 为多项式拟合曲线的输出矢量.

[例 1] 给定下列数据，分别用 2 次，4 次，6 次多项式进行曲线拟合.

(-3, 4), (-2, 2), (-1, 3), (0, 0), (1, -1), (2, -2), (3, -5)

解 在 MATLAB 命令窗口输入如下的程序代码:

```
x=[-3 -2 -1 0 1 2 3];
y=[4 2 3 0 -1 -2 -5];
hold on
p2=polyfit(x,y,2)
```

结果:

```
p2 =
    -0.1310    -1.3929     0.6667
```

输入:

```
>> y2=polyval(p2,x);
>> p4=polyfit(x,y,4)
```

结果:

```
p4 =
```

```
    -0.0038    -0.0278    -0.0947    -1.1984     0.6277
```
输入:
```
>> y4=polyval(p4,x);
>> p6=polyfit(x,y,6)
```
结果:
```
p6 =
     0.0403    -0.0542    -0.5347     0.6042     1.4944    -2.5500     0.0000
```
输入:
```
>> y6=polyval(p6,x);
>> plot(x,y,'ro')
>> plot(x,y2,'g-')
>> plot(x,y4,'m^-.')
>> plot(x,y6,'bs-')
>> xlabel('x')
   ylabel('y')
   legend('原始数据','2 次多项式拟合','4 次多项式拟合','6 次多项式拟合')
```
结果:以 p2, p4, p6 为多项式的系数即可构造 y 关于 x 的 2 次, 4 次和 6 次多项式函数.

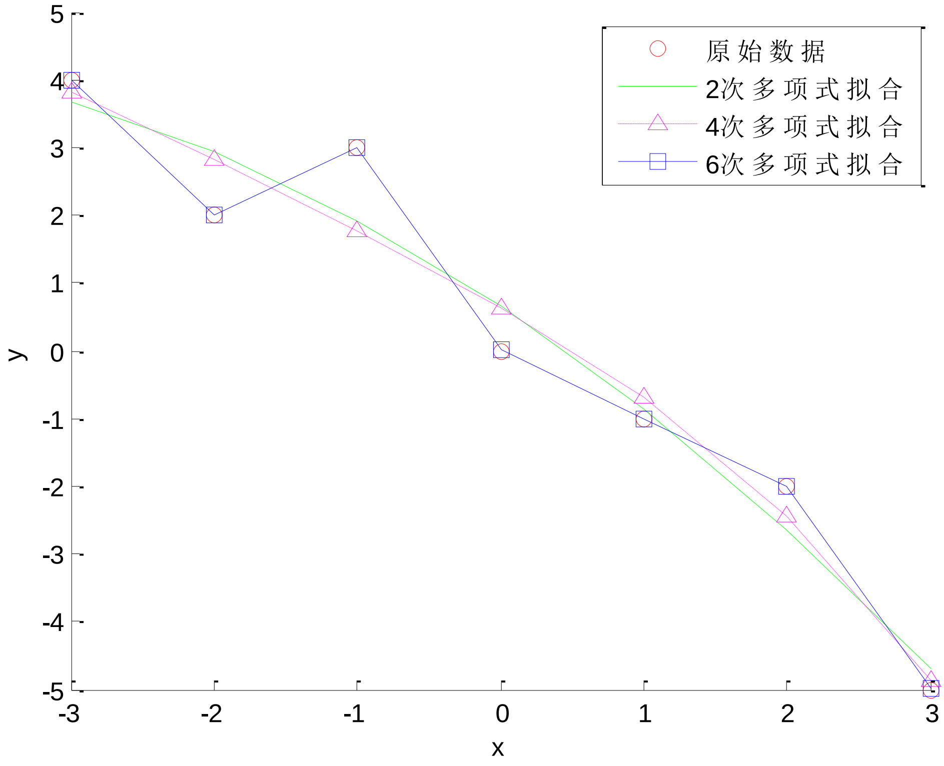

图 1

图 1 为拟合的多项式的曲线图像, 从图中可以看出 6 次多项式曲线与原数据吻合情况较好.由此可以看出在提高多项式的次数的情况下, 有可能得到较好的拟合曲线, 但是对于某些题目(如下例), 也不是次数越高, 精度越高, 所以使用多项式拟合时关键是选择适中的次数.

[例 2] 试用 5, 8, 60 次多项式拟合函数$y = 0.25x + 20\sin x$, 找出拟合效果最好的曲线.

解 其 MATLAB 程序代码及运行结果如下:

```
clear all
clc
clf
x=0:0.2:10;
y=0.25*x+20*sin(x);
p5=polyfit(x,y,5);
y5=polyval(p5,x);
p8=polyfit(x,y,8);
y8=polyval(p8,x);
p60=polyfit(x,y,60);
y60=polyval(p60,x);
hold on;
plot(x,y,'ro')
plot(x,y5,'b--')
plot(x,y8,'b:')
plot(x,y60,'r-.')
xlabel('x');
ylabel('y');
legend('原始数据','5 次多项式拟合','8 次多项式拟合','60 次多项式拟合');
Warning: Polynomial is not unique; degree >= number of data points.
> In polyfit at 71
```

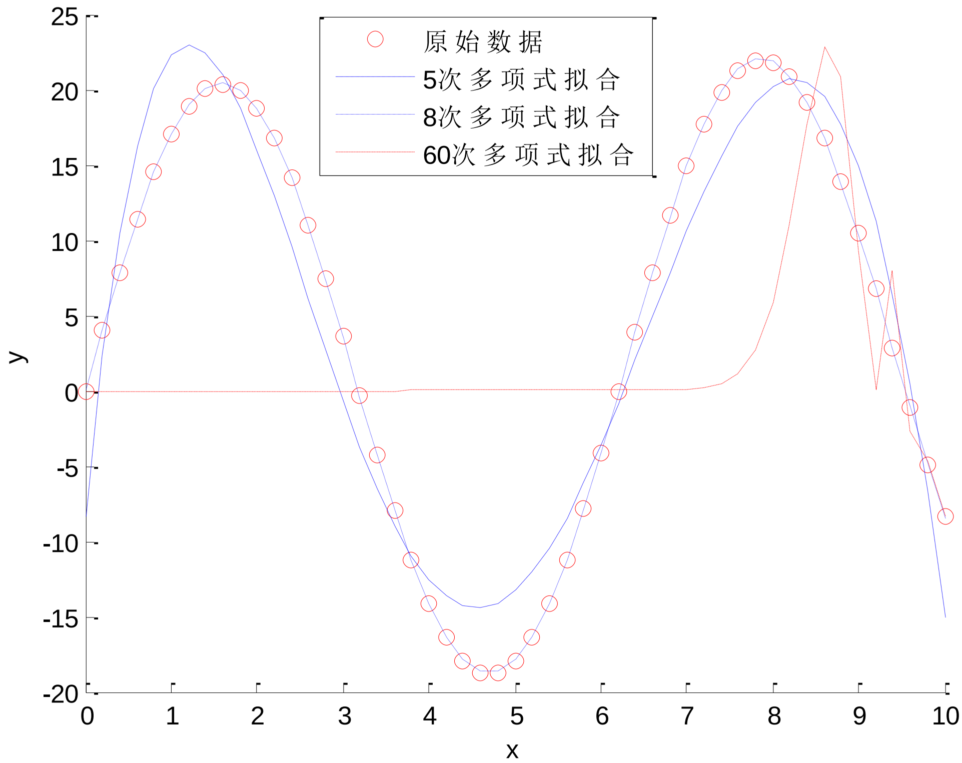

图 2

由图 2 可以看出:使用 5 次多项式拟合时，拟合的结果比较差.而使用 8 次多项式拟合时，得到

的结果与原始数据符合得很好. 但使用 60 次多项式拟合时，拟合的结果非常差. 可见，用多项式拟合时必须选择适中的次数，而不是次数越高精度越高.

5.2 图形用户界面的曲线拟合

为方便使用，在 MATLAB 中还提供了支持曲线拟合的图形用户界面. 它位于“Figure”窗口的“Tools Basic Fitting”菜单中. 一般使用步骤如下：

（1）在命令窗口中输入待拟合的数据，并利用 Plot 命令画图.

（2）在“Figure”窗口中点击菜单栏中的“Tools\Basic Fitting”得到“Basic Fitting”窗口，点击右下角的向右按钮，得“Basic Fitting”窗口的全貌.

（3）在“Plot fits”复选框中选择“Linear”、“cubic”、“5th degree polynomial”等选项，即可进行线性，三次和多次多项式的拟合过程，并且可以观察到图像，均方误差等.

[例 3] 试在图形用户界面用 3, 5, 8 次多项式拟合函数$y = 0.25x + 20\sin x$，找出拟合效果最好的曲线.

解 (1)用待拟合的数据画图

在 MATLAB 命令窗口输入程序代码：

```
 clf
>> x=0:0.2:10;
 y=0.25*x+20*sin(x);
 plot(x,y,'ro')
```

结果如图 3 所示：

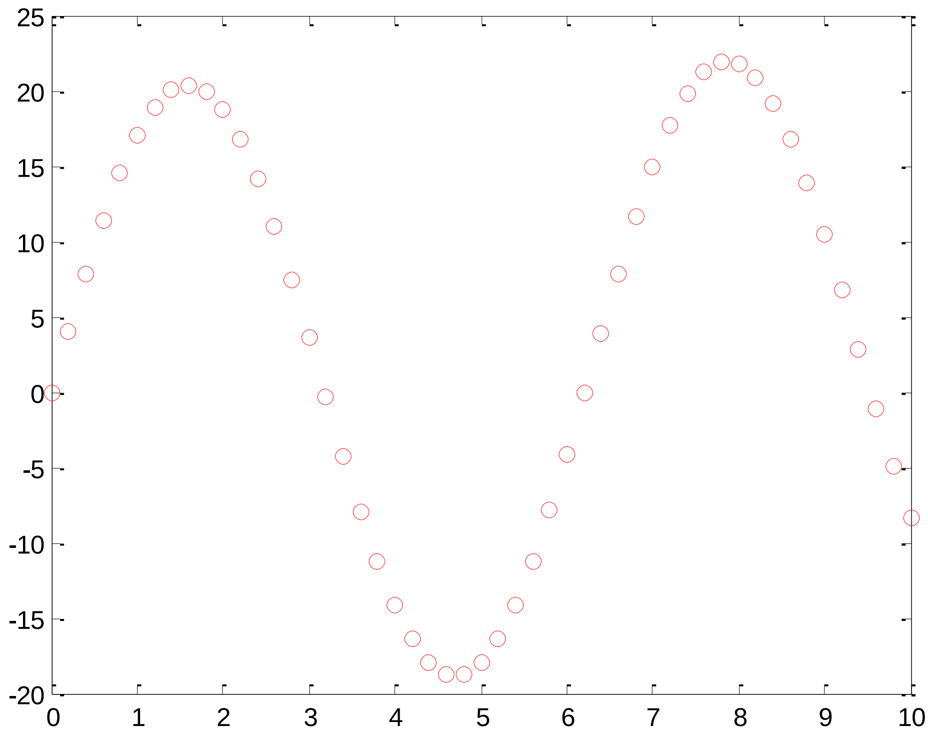

图 3

(2)得到“Figure”窗口，点击其菜单栏中的“Tools\Basic Fitting”，得到“Basic Fitting”窗口，点击其右下角的向右按钮，得到“Basic Fitting”窗口的全貌，如图 4(下页)所示.

(3)在“Basic Fitting”窗口的“Plot fits”复选框中选择“cubic”、“5th degree polynomial”、

和“8th degree polynomial”这三个选项，然后单击“Plot residuals”使之处在选上状态，最后把“Plot residuals”单选框正下方的下拉列表选择为“Bar plot”. 这时拟合的数据结果在“Basic Fitting”的“Numerical results”中显示出来，如图 5(下页)所示，同时“Figure”窗口已经图示出了拟合结果及残差，如图 6(下页)所示.

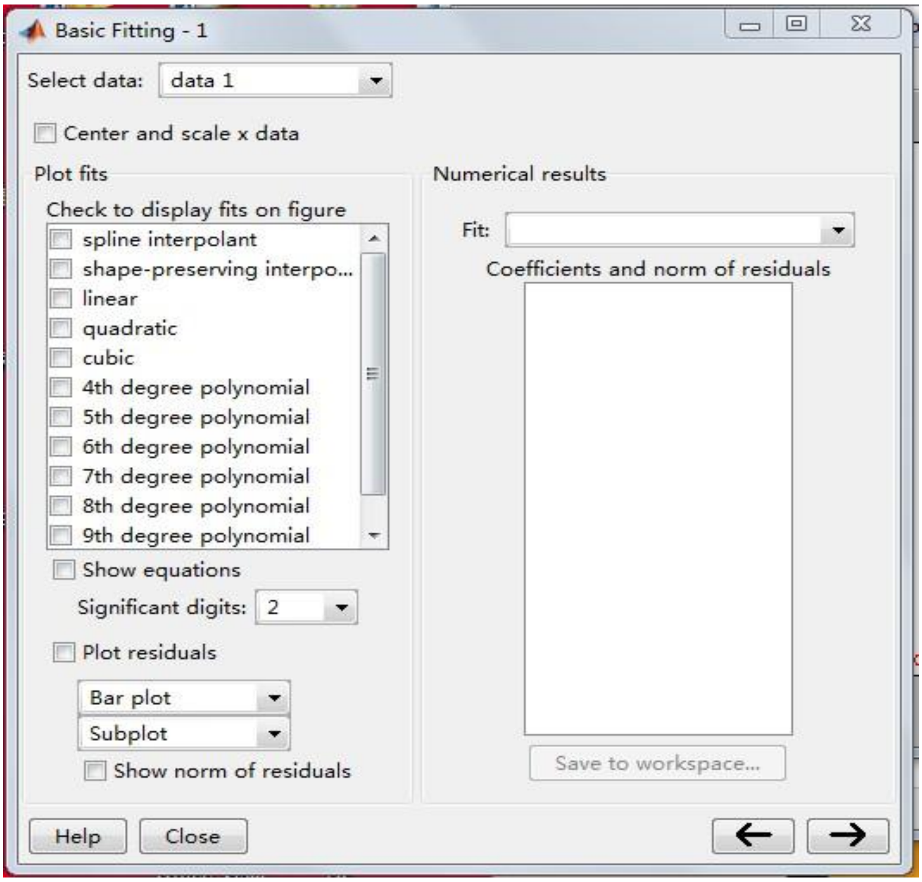

图 4

由图 6（下页）可以直观明了地看出:使用 8 次多项式拟合时，得到的拟合结果与原始数据符合得很好，而且残差很小，几乎处处为零，所以其拟合效果最好.

从上述使用步骤可以看到，图形用户界面使用简单，具有计算机操作能力即可进行曲线拟合的过程，而且图形出现的比较形象，数据结果也显示的非常清楚，但是“Plot fits”复选框只提供了 10 阶以内的多项式拟合的命令，所以对于高阶的曲线拟合得借助于命令窗口或者是寻求其它新的拟合方法.

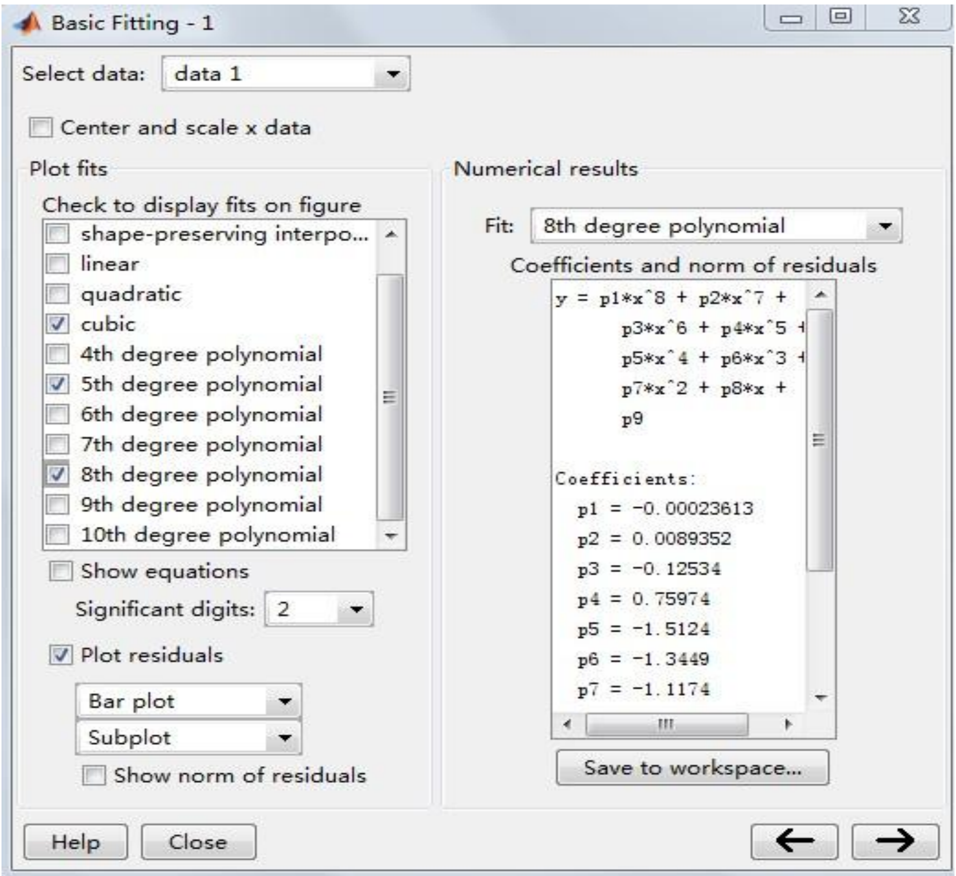
Basic Fitting - 1
Select data:
data 1
Center and scale x data
Plot fits
Check to display fits on figure
shape-preserving interpo...
linear
quadratic
cubic
4th degree polynomial
5th degree polynomial
6th degree polynomial
7th degree polynomial
8th degree polynomial
9th degree polynomial
10th degree polynomial
Show equations
Significant digits:
2
Plot residuals
Bar plot
Subplot
Show norm of residuals
Numerical results
Fit:
8th degree polynomial
Coefficients and norm of residuals
y = p1*x^8 + p2*x^7 +
p3*x^6 + p4*x^5 +
p5*x^4 + p6*x^3 +
p7*x^2 + p8*x +
p9
Coefficients:
p1 = -0.00023613
p2 = 0.0089352
p3 = -0.12534
p4 = 0.75974
p5 = -1.5124
p6 = -1.3449
p7 = -1.1174
Save to workspace...
Help
Close

图 5

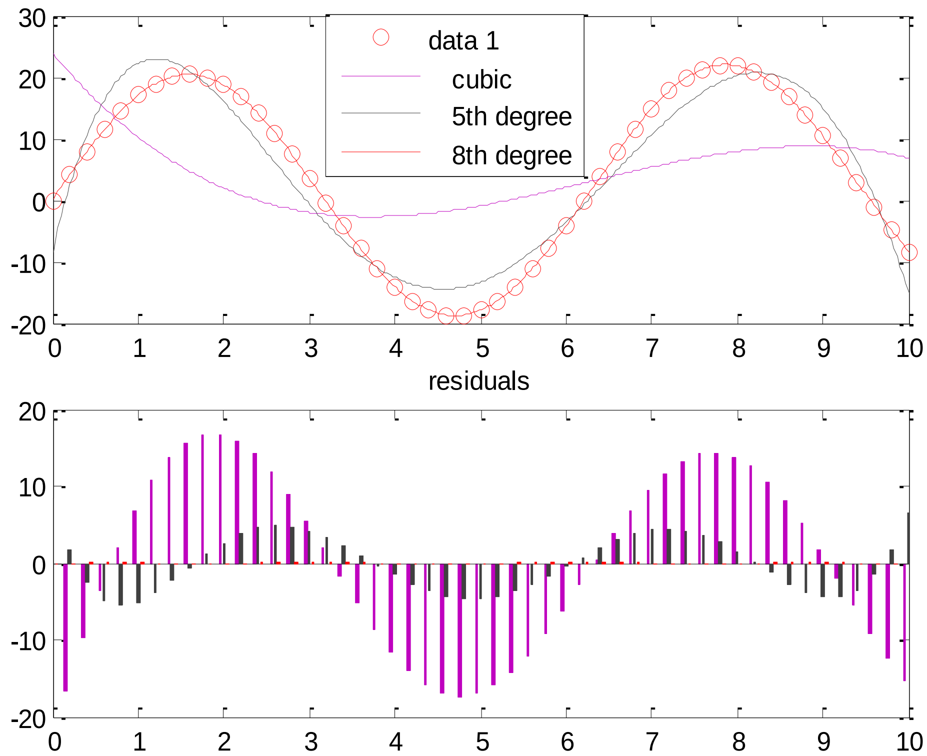
data 1
cubic
5th degree
8th degree
30
20
10
0
-10
-20
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
residuals

图 6

5.3 大量数据的曲线拟合

在实际问题中经常会遇到大量数据的情况，在 MATLAB 中直接输入的话就会比较麻烦而且容易出现错误，所以可利用导入数据的方法.

［例 4］给出含有 50 个数据的 x 向量和 y 向量，其中$x=0:0.1:5, y=0.25*x+20*\sin(x)$，分别存储在 G:\毕业论文\xx.txt 和 G:\毕业论文\yy.txt 中，对此数据做曲线拟合.

解 在 MATLAB 命令窗口输入如下的程序代码：

```
x=load('G:\毕业论文\xx.txt');  %导出 xx.txt 中的数据放在向量 x 中
y=load('G:\毕业论文\yy.txt');  %导出 yy.txt 中的数据放在向量 y 中
hold on;
p=polyfit(x,y,2)
y1=polyval(p,x);
plot(x,y,'ro--')
plot(x,y1,'gs-')
xlabel('x')
ylabel('y')
legend('原始数据','多项式拟合');
结果:p =
        -3.66360715144535      10.8104429357158       7.05305502110015
```

曲线图形可见图 7.

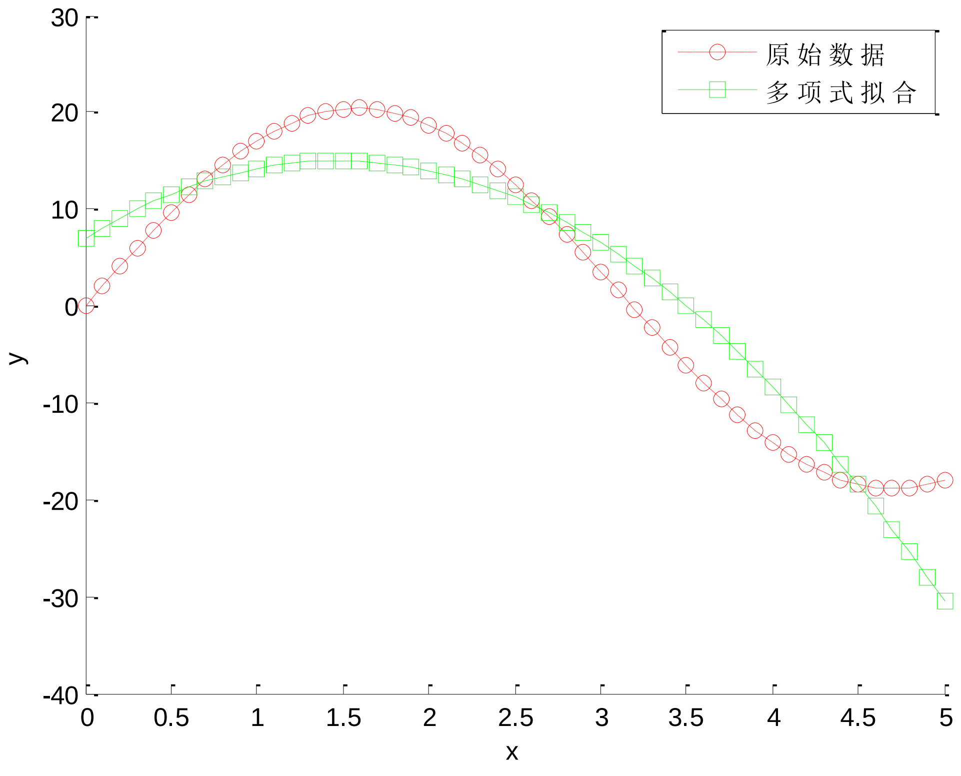

图 7

例 4 做的是二次多项式拟合，只要改变参数即可进行其他阶的多项式拟合.本例重在说明通过引入 load 函数，能够解决曲线拟合问题中大量数据的输入问题，由于各种数据文件都可以转换成 txt 文件，所以对于大量数据，可以很容易的进行曲线拟合.

5.4 其他形式的曲线拟合

在前边三种方法中，都是基于最小二乘法原理进行的线性多项式拟合.实际问题中需要拟合的函数的种类是多种多样的，譬如说指数函数、双曲线函数等等.一般情况下是将非线性的拟合函数通过变换转换成线性拟合函数，然后再进行曲线拟合的过程即可解决.

6.最小二乘曲线拟合的应用实例

［例 5］水的动态粘滞度$\mu(10^{-3}(N\cdot s)/m^3)$与温度$T(℃)$的关系如表 1 所示，试用最小二乘法求二次和三次拟合多项式[11].

表 1 温度与粘滞度之间的关系

$T/℃$	0	5	10	20	30	40
$\mu(10^{-3}(N\cdot s)/m^3)$	1.787	1.519	1.307	1.002	0.7975	0.6529

解 在 MATLAB 命令窗口输入如下的代码:

```
clear all
>> clf
>> x=[0 5 10 20 30 40];
   y=[1.787  1.519  1.307  1.002  0.7975  0.6529];
   p2=polyfit(x,y,2)
```

结果:

```
p2 =
    0.000548341661461588     -0.0494933660212368        1.76724498438476
```

输入:

```
>> p3=polyfit(x,y,3)
```

结果:

```
p3 =
     -9.89644144297787e-006          0.00114426073535933              -0.0582687464897621
1.78551847607354
```

输入:

```
y2=polyval(p2,x);
y3=polyval(p3,x);
hold on;
plot(x,y,'ro',x,y2,'b--',x,y3,'r-.')
xlabel('x');
ylabel('y');
legend('原始数据','二次拟合','三次拟合')
```

故二次、三次多项式分别为$y=0.0005x^2-0.0495x+1.7672$和$y=0x^3+0.0011x^2-0.0583x+1.7855$，拟合曲线见图 8(下页)所示.(小数点后保留四位)

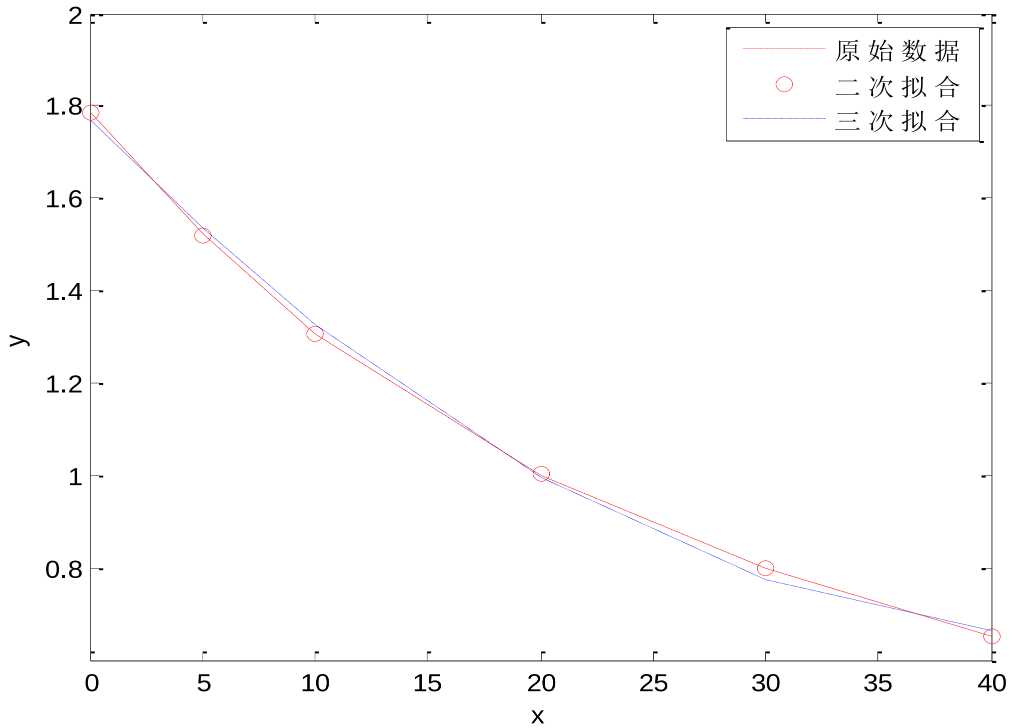

图 8

[例 6] 某建材公司有一大批水泥需要出售,根据以往统计资料,零售价增高,则销售量减少,具体数据如表2;如果作广告,可使销售量增加,具体增加量以售量提高因子k表示,k与广告费关系见表3.已知水泥的进价是 250 元/t,那么如何确定这批水泥的价格和广告费,才能使该公司的获利最大[10].

表 2　水泥预期销售量与价格关系

单价/(元·t^{-1})	250	260	270	280	290	300	310	320
售量/万 t	200	190	176	150	139	125	110	100

表 3　售量提高因子与广告费关系

广告费/万元	0	60	120	180	240	300	360	420
提高因子 k	1.00	1.40	1.70	1.85	1.95	2.0	1.95	1.80

解 用 x,y,z 和 c 分别表示销售单价、预期销售量、广告费和成本单价.

在 MATLAB 命令窗口输入如下的代码:

```
x=[250 260 270 280 290 300 310 320];
y=[200 190 176 150 139 125 110 100];
hold on;
plot(x, y, '.')
xlabel('单价/元');
ylabel('售量/万 t');
```

结果:表 2 的数据如图 9(下页).

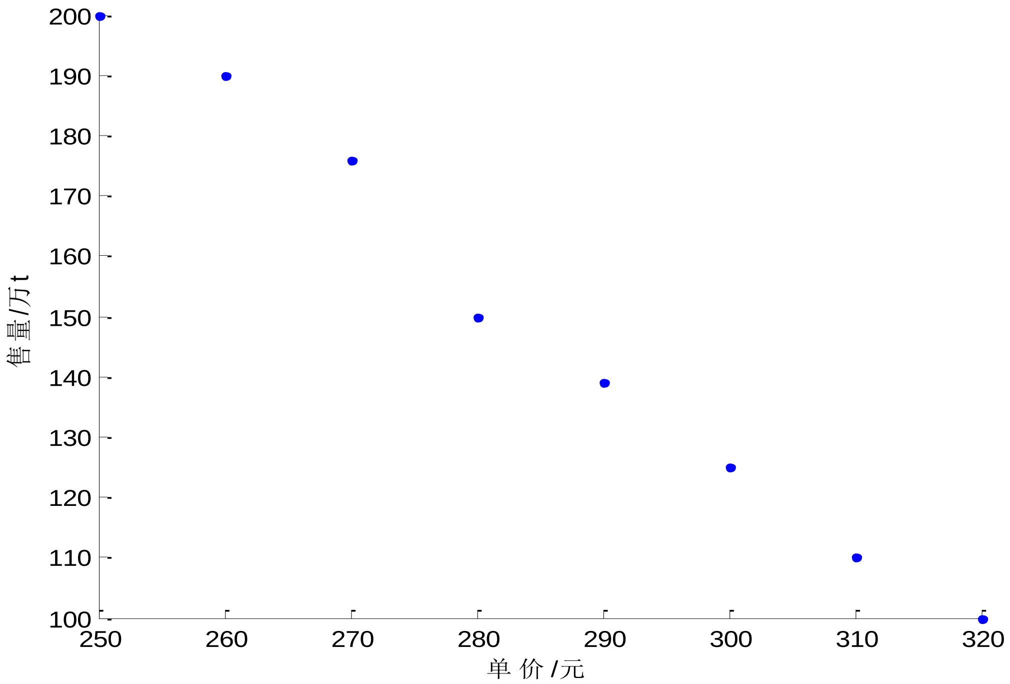

图 9　水泥销售量与价格的关系

由图 9 中可知售量与单价近似呈线性关系,因此可设　$y = a + bx$

在 MATLAB 中输入：

```
p1=polyfit(x,y,1)
```

结果：

```
p1 =
    -1.5047619047619             577.607142857142
```

即用最小二乘法解得　$y = 577.6071 - 1.5048x$　　(1)

继续分析表 3 中的数据：

在 MATLAB 命令窗口中输入如下的程序代码：

```
clear all
clf
z=[0 60 120 180 240 300 360 420];
k=[1.00 1.40 1.70 1.85 1.95 2.0 1.95 1.80];
plot(z,k,'r.')
xlabel('广告费/万元');
ylabel('提高因子');
```

结果:表 3 的数据如图 10(下页).

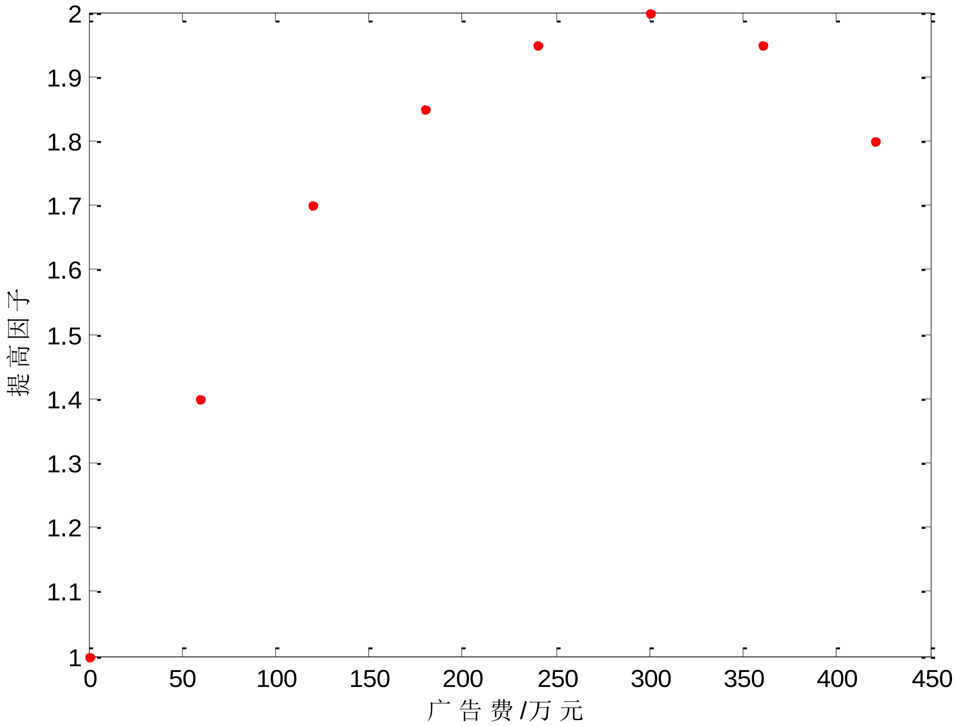

图 10 销量提高因子与广告费的关系

由图 10 可知提高因子与广告费近似成二次关系，因此可设 $k = d + e \cdot z + f \cdot z^2$

在 MATLAB 中输入：

```
p2=polyfit(z,k,2)
```

结果：

```
p2 =
    -1.18220899470899e-005          0.0068204365079365          1.01875
```

即用最小二乘法解得 $k = 1.0188 + 0.0068z - 1.1822 \times 10^{-5}z^2$ （2）

设销售量为 S，它等于预期销售量乘以提高因子，即$S = k \cdot y$. 于是利润 P 可以表示为

P=收入-广告费

=销售收入-成本支出-广告费

$=S \cdot x - S \cdot c - z$

$=k \cdot y(x - c) - z$ （3）

将式（1）、式（2）代入式（3），$c = 250$，可知 P 只是 x 和 z 的函数，即

$$P(x,z) = (d + e \cdot z + f \cdot z^2)(a + bx)(x - c) - z$$

为求出最大利润，需要利用函数求极值的方法，令$\frac{\partial P}{\partial x} = 0, \frac{\partial P}{\partial z} = 0$则得

$$\frac{\partial P}{\partial x} = (d + e \cdot z + f \cdot z^2)(a - b \cdot c + 2b \cdot x)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = (e + 2f \cdot z)(a + bx)(x - c) - 1$$

当$\frac{\partial P}{\partial x} = 0$时，得$x_0 = \frac{1}{2b}(b \cdot c - a) = 316.92$

由$\frac{\partial P}{\partial z}=0$, 可得$z_0=\frac{1}{2f}\left[\frac{1}{(a+bx)(x-c)}-e\right]=281.32$

进一步求$P(x,z)$在点(x_0,z_0)的二阶导数，得

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}=2b(d+e\cdot z+f\cdot z^2)=-6.01<0$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial z}=(e+2f\cdot z)(a-b\cdot c+2b\cdot x)=6.9306e-007=0$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}=2f(a+bx)(x-c)=-0.16<0$$

因在点(x_0,z_0),$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}-\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial z}\right)^2]>0$, 而$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}<0$, 故由多元函数极值的充分条件知, 在点$(x_0,z_0)$利润 P 取得最大值$P(x_0,z_0)=13171.36$元.

因此, 将单价定为 316.92 元/t, 花广告费 281.32 万元, 实际销售量可达到 201.03 万 t, 可获利润 13171.36 万元.

注释:

在 MATLAB 中计算过程如下:

输入:

```
b=-1.5048;c=250;a=577.6071;f=-1.1822e-005;e=0.0068;
        (b*c-a)/(2*b)
```

结果:

```
ans =
      316.921551036683
```

输入:

```
 x=316.92;
 (1/((a+b*x)*(x-c))-e)/(2*f)
```

结果:

```
ans =
      281.323602871482
```

输入:

```
 z=281.32;
 d=1.0188;
 2*b*(d+e*z+f*z*z)
```

结果:

```
ans =
      -6.00767858591949
```

输入:

```
 (e+2*f*z)*(a-b*c+2*b*x)
```

结果:

```
ans =
      6.93057586565621e-007
```

输入:

```
2*f*(a+b*x)*(x-c)
```
结果：

```
ans =
      -0.159342537533128
```
输入:

```
(d+e*z+f*z*z)*(a+b*x)*(x-c)-z
```
结果：

```
ans =
      13171.3562226978
```
输入:

```
 (d+e*z+f*z*z)*(a+b*x)
```
结果:

```
ans =
      201.02624361473
```

7. 结束语

在大量的应用领域中，人们经常需要借助已有的数据，选择适当的数学形式拟合变量间的关系，从而揭示变量的内在联系，而 MATLAB 环境下的最小二乘曲线拟合就是一种非常重要的方法.

本文首先介绍了最小二乘法的原理.其次对线性最小二乘曲线拟合应用 MATLAB 进行了具体实现，使得相关曲线拟合理论更加生动易懂.这使我们可以在今后的研究和工作中建立曲线模型，对相应对象进行曲线拟合，并应用 MATLAB 来实现，从而找到更好更形象的反映变量之间关系的曲线，也就找到最合适的模型了.

参考文献:

[1]郑咸义.计算方法[M].广州:华南理工大学出版社，2002

[2]罗成汉，刘小山.曲线拟合法的 Matlab 实现[J].电子技术，2003

[3]吕喜明，李明远.最小二乘曲线拟合的 MATLAB 实现[J].内蒙古民族大学学报(自然科学版)，2009，24(2):125-127

[4]陈光，任志良，孙海柱.最小二乘曲线拟合及 Matlab 实现[J].软件技术，2005，24(3):107-108

[5]代冬岩，李智勇，张宏礼.最小二乘曲线拟合及其 MATLAB 实现.科技论坛

[6]杨云升.Matlab 曲线拟合及其在试验数据处理中的应用[J].电脑与信息技术，2009，17(2):34-36

[7]冯元珍，屠小明，罗建平.MATLAB 软件在曲线拟合中的应用[J].福建电脑，2007(3):109，160

[8]申红莲.Matlab 中曲线拟合的方法[J].福建电脑，2010(7):10-11

[9]魏清洁，王玉彬.二元一次函数曲线拟合的 Matlab 实现[J].德州学院学报，2011，27:148-151

[10]李丽丹.基于 MATLAB 的离散数据最小二乘拟合[J].辽宁工程技术大学学报(自然科学版)，2011，30:202-204

[11]欧阳明松, 徐连民.基于 MATLAB 的试验数据拟合[J].南昌工程学院学报, 2010, 29(4):24-28

[12]王可, 毛志伋.基于 Matlab 实现最小二乘曲线拟合[J].北京广播学院学报(自然科学版), 2005, 12(2):52-56

[13]袭杨.空间直线拟合的一种方法[J].齐齐哈尔大学学报，2009, 25(2):64-68

[14]曾长雄.离散数据的最小二乘曲线拟合及应用分析[J].岳阳职业技术学院学报, 2010, 25(3):96-99

[15]G.Lindfield and J.Penny.Numerical Methods Using MATLAB.Ellis Horwood, New York, 1995

[16]J.H.Mathews and K.D.Fink.Numerical Methods Using MATLAB.Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 3d edition, 1999

Curve Fitting in Least Square Method and Its Realization with MATLAB

Student:Wang Duo Tutor:Wang Zhonghua

Abstract: Function relation between physics variables is important in actual research.The fundamental rule of least square curve fitting method is introduced firstly in this paper.The realization method to the least square curve fitting method based on MATLAB is researched then.Such realization means is very convenient and simple.Finally, case analysis show that least square fitting method based on MATLAB is simple, easily realized and therefore widely used in engineering.

Keywords: curve fitting;least square method;polynomial fitting;MATLAB