

几种重要的马尔科夫过程

- 几种重要的马尔科夫过程
 - ◆ 泊松过程
 - ◆ 纯增值过程，尤尔过程
 - ◆ 生灭过程
- 分析方法：
 - ◆ 马尔可夫过程：
 - 定义、性质
 - ◆ 数学描述：
 - 跳跃率矩阵、 Q ，状态转换图，
 - 状态列矢量、转移概率矩阵、转移概率行矢量、转移概率列矢量，
 - ◆ 基本规律：
 - 前进方程、后退方程、福克-布朗克方程
 - ◆ 过程分析：
 - 暂态（拉氏变换、母函数）、稳态（条件）
 - ◆ 典型过程的分析，
- 1 泊松过程
 - 定义
- 2 纯增值过程，尤尔过程
 - 定义
 - 跳跃率
 - 微分方程
 - 拉氏变换求解
- 3 生灭过程
 - 定义
 - 跳跃率
 - 前进微分方程
 - 利用母函数求解
 - 福克普朗克方程，以及均值的福克普朗克方程
 - 稳态解
- 4 马尔可夫过程举例：利用微分方程求同解，利用稳态方程求稳态解
 - 纯增值过程：尤尔过程举例
 - 电话的话音模型
 - 简单排队问题
 - 可靠性问题
 - 电话交换问题

1 泊松过程

2 纯增值过程

2.1 定义

2.2 分析

2.2 例：尤尔过程

3 生灭过程

3.1 定义：生灭过程

3.2 跳跃强度矩阵

3.3 前进微分方程

3.4 福克普朗克方程

3.4 研究稳态 $t \rightarrow \infty$ 的解

4 举例

1 泊松过程

泊松过程的状态为 $\{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$ 。在任意状态下，在 $[t, t + \Delta t]$ 时间间隔内出现一次事件的概率是 $\lambda(t) \Delta t + O(\Delta t)$ ，出现两次事件的概率是 $O(\Delta t)$ 。 $\lambda(t) = \lambda$ 是常数，则为齐次泊松过程， $\lambda(t)$ 是时间的函数，则为非齐次泊松过程。

2 纯增值过程

2.1 定义

纯增值过程是泊松过程的推广。

纯增值过程的状态为 $\{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$ 。在状态 n 下，在 $[t, t + \Delta t]$ 时间间隔内出现一次事件的概率是 $\lambda_n(t) \Delta t + O(\Delta t)$ ，出现两次事件的概率是 $O(\Delta t)$ 。

2.2 分析

纯增值过程转移概率的方程：

$$P\{\xi(t + \Delta t) = k / \xi(t) = n\} = \begin{cases} \lambda_n(t) \Delta t + O(\Delta t), & k = n + 1 \\ 1 - \lambda_n(t) \Delta t + O(\Delta t), & k = n \\ O(\Delta t), & \text{otherwise} \end{cases}$$

设初始状态是 m 状态，当 $\lambda_n(t) = \lambda_n$ 时：

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda_m & \lambda_m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda_{m+1} & \lambda_{m+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & & -\lambda_n & \dots \\ 0 & 0 & & & \dots \end{bmatrix}$$

纯增值过程状态概率的微分方程：

$$\frac{dW(t)}{dt} = W(t) \cdot Q$$

$$\begin{aligned} \text{即：} \quad \frac{dw_m(t)}{dt} &= -\lambda_m w_m(t) \\ \frac{dw_n(t)}{dt} &= -\lambda_n w_n(t) + \lambda_{n-1} w_{n-1}(t), \quad n > m \end{aligned}$$

求解微分方程、用拉氏变换方法求解微分方程。

$$\begin{aligned} s w_m(s) &= -\lambda_m w_m(s) \\ s w_n(s) &= -\lambda_n w_n(s) + \lambda_{n-1} w_{n-1}(s), \quad n > m \end{aligned}$$

于是有，

$$\begin{aligned} w_m(s) &= \frac{1}{s + \lambda_m} \\ w_n(s) &= \frac{\lambda_{n-1}}{s + \lambda_n} w_{n-1}(s), \quad n > m \\ w_n(s) &= \frac{\lambda_{n-1} \lambda_{n-2} \dots \lambda_m}{(s + \lambda_n)(s + \lambda_{n-1}) \dots (s + \lambda_m)} \\ &= \sum_{i=m}^n \frac{A_i}{s + \lambda_i}, \quad n > m \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{(-1)^{n-m} \lambda_{n-1} \lambda_{n-2} \dots \lambda_m}{\prod_{\substack{j=m \\ j \neq i}}^n (\lambda_i - \lambda_j)} \\ w_n(t) &= (-1)^{n-m} \lambda_{n-1} \lambda_{n-2} \dots \lambda_m \sum_{i=m}^n \frac{e^{-\lambda_i t}}{\prod_{\substack{j=m \\ j \neq i}}^n (\lambda_i - \lambda_j)} \end{aligned}$$

2.2 例：尤尔过程

尤尔过程： $\lambda_n = n\lambda$

按照对纯增值过程的解展开，可得：

$$w_n(t) = \binom{n-1}{m-1} e^{-m\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^{n-m}$$

$w_n(t)$ 是一个负二项式分布。

如果 $m=1$ ，即初始状态为 1，则相应的 t 时刻的分布是，

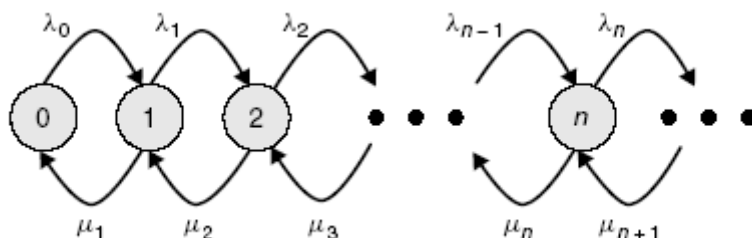
$$w_n(t) = e^{-\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^{n-1}$$

这实际是一个几何分布。

3 生灭过程

3.1 定义：生灭过程

设有随机过程 $\xi(t) = i, t \in T, i \in I$ ，在任何时刻状态的转移只能从一个状态向它的临近状态转移，即状态处于 $n, n \geq 1$ ，则可以转移到状态 $(n+1)$ 或状态 $(n-1)$ ；如果处于 0 状态，则只能转移到状态 1。在 t 时刻处于 n 状态，在 $(t, t + \Delta t)$ 时间间隔内，由状态 n 转移到状态 $(n+1)$ 的概率为 $\lambda_n(t) \cdot \Delta t + O(\Delta t)$ ，由状态 n 转移到状态 $(n-1)$ 的概率为 $\mu_n(t) \cdot \Delta t + O(\Delta t)$ ；在 $(t, t + \Delta t)$ 时间间隔内，由状态 n 转移到其他状态的概率为 $O(\Delta t)$ 。



3.2 跳跃强度矩阵

$$Q = \begin{pmatrix} q_{00} & q_{01} & q_{02} & \cdots \\ q_{10} & q_{11} & q_{12} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & \cdots \\ \mu_1 & -(\mu_1 + \lambda_1) & \lambda_1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

3.3 前进微分方程

$$\frac{dP_{ij}(t)}{dt} = \sum_k P_{ik}(t)q_{kj}$$

对于初始状态 0，有

$$\frac{dP_{00}(t)}{dt} = P_{00}(t)q_{00} + P_{01}(t)q_{10} = -\lambda_0 P_{00}(t) + \mu_1 P_{01}(t)$$

$$\begin{aligned} \frac{dP_{0n}(t)}{dt} &= P_{0n-1}(t)q_{n-1n} + P_{0n}(t)q_{nn} + P_{0n+1}(t)q_{n+1n} \\ &= \lambda_{n-1}P_{0n-1}(t) - (\lambda_n + \mu_n)P_{0n}(t) + \mu_{n+1}P_{0n+1}(t) \end{aligned}$$

--- --- --- ---

对于初始状态 i，有

$$\frac{dP_{i0}(t)}{dt} = P_{i0}(t)q_{00} + P_{i1}(t)q_{10} = -\lambda_0 P_{i0}(t) + \mu_1 P_{i1}(t)$$

$$\begin{aligned} \frac{dP_{in}(t)}{dt} &= P_{in-1}(t)q_{n-1n} + P_{in}(t)q_{nn} + P_{in+1}(t)q_{n+1n} \\ &= \lambda_{n-1}P_{in-1}(t) - (\lambda_n + \mu_n)P_{in}(t) + \mu_{n+1}P_{in+1}(t) \end{aligned}$$

--- --- --- ---

如果已知初始状态的概率分布，作为微分方程求解的初始条件。例如初始状态为状态 0，则有

$$P_{in}(0) = \delta_{i0}$$

3.4 福克普朗克方程

$$\frac{d}{dt} \mathbf{w}(t) = \mathbf{w}(t) \mathbf{Q}$$

求解各个时刻的状态分布概率（略）

3.4 研究稳态 $t \rightarrow \infty$ 的解

稳态方程

$$w(t) \cdot Q = \frac{d}{dt} w(t) = 0,$$

即

$$\sum_k w_k(t) \cdot q_{kn} = 0,$$

$$w_0 \cdot q_{00} + w_1 \cdot q_{10} = 0$$

$$w_{n-1} \cdot q_{n-1n} + w_n \cdot q_{nn} + w_{n+1} \cdot q_{n+1n} = 0$$

即，

$$-\lambda_0 w_0 + \mu_1 w_1 = 0$$

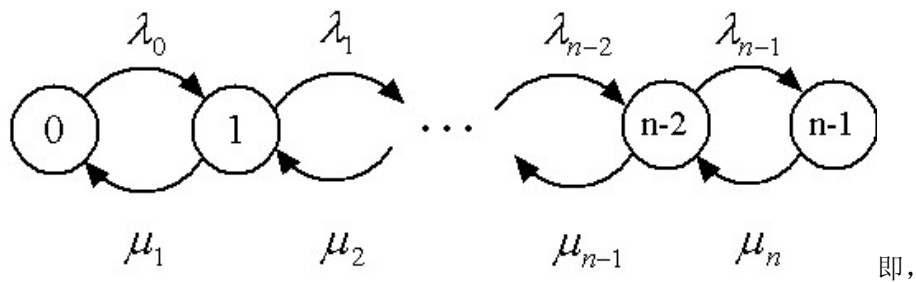
$$\lambda_{n-1} \cdot w_{n-1} - (\lambda_n + \mu_n) w_n + \mu_{n+1} \cdot w_{n+1} = 0, \quad n > 0$$

由此可得，

$$\mu_1 w_1 = \lambda_0 w_0$$

$$\mu_{n+1} \cdot w_{n+1} = \lambda_n \cdot w_n, \quad n > 1$$

上述方程称为生灭过程的稳态平衡流方程。



$$w_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} w_0$$

$$w_2 = \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1} \cdot w_0$$

--- --- --- ---

$$w_n = \frac{\lambda_{n-1} \cdots \lambda_1 \lambda_0}{\mu_n \cdots \mu_2 \mu_1} \cdot w_0$$

考虑到归一化条件, $\sum_{n=0}^{\infty} w_n = 1$,

可以确定存在极限分布的条件、以及相应条件下各个状态的稳态概率。

4 举例

例 1 纯增值过程：尤尔过程举例

例 2 电话的话音模型，

设话音的正常发音时间是一负指数分布的随机变量，平均发音时间为 $1/\lambda$ ，它停止发音的间歇时间也是一个负指数分布的随机变量，它的平均间歇时间为 $1/\mu$ 。求话音发音时间和间歇时间的分布函数。

解 1:

绘出状态图、标出状态转移强度，

分析 $t=0$ 时正在发音，在 $t=x$ 时仍在发音的概率，

分析 $t=0$ 时正在发音，在 $t=x$ 时停止发音的概率密度，

分析 $t=0$ 时停止发音，在 $t=x$ 时仍在停止发音的概率，

分析 $t=0$ 时停止发音，在 $t=x$ 时开始发音的概率密度。

解 2: 利用前进和后退方程来解（同上题）。

例 3 简单排队问题（见下一节）

例 4 可靠性问题，（见下一节）

设有一个系统由 M 个元件组成，每个元件的正常工作时间服从负指数分布。如果系统在时刻 t 有 n 个元件失效，则在 $(t, t + \Delta t)$ 时间间隔内产生一个新的失效元件的概率是 $\lambda_n \cdot \Delta t + o(\Delta t)$ ；失效元件可以修复，在 $(t, t + \Delta t)$ 时间间隔内修复一个元件的概率是 $\mu_n \cdot \Delta t + o(\Delta t)$ 。假设在 $(t, t + \Delta t)$ 时间间隔内有二个或二个以上的元件失效或同时修复二个或二个以上元件的概率是 $o(\Delta t)$ 。某系统要正常工作至少要有 k 个元件正常工作，因此当系统中有 $(M-k+1)$ 元件失效时系统就停止工作，等待修复。若定义失效元件数为系统运行中的状态，则构成了一个生灭过程。（见下一节）

例 5 电话交换问题，（见下一节）