7.平稳随机过程的谱分析

7.1 确定性信号的谱分析

7.1.1 确定性周期函数：

周期函数的傅立叶级数展开，

周期函数的帕塞伐定理，

周期函数的时间相关函数，

周期函数时间相关函数和功率谱的傅立叶变换对，

7.1.2 确定性非周期函数

非周期函数的傅立叶变换，

非周期函数的帕塞伐定理，

非周期函数的时间相关函数，

非周期函数时间相关函数和能量谱的傅立叶变换对。

7.2 平稳随机过程的谱分析

7.2.1 周期平稳随机过程的谱分析，

周期样本函数的傅立叶级数展开，

周期样本函数傅立叶级数系数的正交性，

随机过程在一个周期内能量的统计平均值，

周期平稳随机过程的功率谱密度，

周期平稳随机过程的相关函数和功率谱是傅立叶变换对，

7.2.2 非周期平稳随机过程的谱分析

定义 1，非周期平稳随机过程的功率谱密度函数，

定义 2，非周期平稳随机过程的功率谱密度函数，

7.3 平稳随机过程功率谱密度的性质

7.3.1 连续时间平稳随机过程：

连续时间平稳随机过程的功率谱密度和自相关函数的性质。

7.3.2 连续时间实平稳随机过程：

连续时间实平稳随机过程的功率谱密度和自相关函数的性质。

7.3.3 连续时间周期平稳随机过程：

连续时间周期平稳随机过程的功率谱密度和自相关函数，

7.3.4 联合平稳随机过程的互相关函数和互功率谱密度

定义 1，联合平稳随机过程的互相关函数的傅立叶变换称为它们的互谱密度。

性质 1，$P_{\xi\eta}(f) = P_{\xi\xi}(f) \cdot H^*(f)$

性质 2，$P_{\xi\eta}(f) = P_{\xi\xi}(f) \cdot H^*(f)$

性质 3，$P_{\eta\eta}(f) = P_{\xi\xi}(f) \cdot H(f)H^*(f) = P_{\xi\xi}(f) \cdot |H(f)|^2$

7.3.5 离散时间平稳随机序列：

离散时间平稳随机序列的相关函数和功率谱密度函数，

离散时间实平稳随机序列的相关函数和功率谱密度函数，

实平稳随机序列相关函数和功率谱密度是傅立叶变换对。

7.4 功率谱分析

7.4.1 典型随机过程的功率谱

常见的随机过程的相关函数和功率谱对：

7.4.1 典型随机过程的功率谱（续）

21 平稳随机过程的谱分析

7.1 确定性信号的谱分析

7.1.1 确定性周期函数：

周期函数的傅立叶级数展开，

设 $x(t)$ 是周期为 T 的周期性函数，且 $x(t)$ 在一个周期内绝对可积，则 $x(t)$ 可用傅立叶级数展开，即

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n e^{jn\cdot 2\pi f_0 t}, \quad a_n=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-jn\cdot 2\pi f_0 t}dt$$

其中，$\omega_0=\frac{2\pi}{T}=2\pi f_0$

周期函数的帕塞伐定理，

一个周期信号的能量可以按时域去计算，也可以按频域去计算，他们是相等的。

$$\frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2 dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|a_n|^2$$

证明，

$$\frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2 dt=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\cdot\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n e^{jn\cdot 2\pi f_0 t}\right]^* dt$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n^*\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,e^{-jn\cdot 2\pi f_0 t}dt$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\cdot a_n^*$$

帕塞伐定理，左边是单位时间内信号的能量，即功率；右边是每个谱线的功率。

周期函数的功率谱 $|a_n|^2$，写成功率谱密度形式是，

$$P(f)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|a_n|^2\cdot\delta(f-nf_0)$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T|x(t)|^2dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|a_n|^2=\int_{-\infty}^{\infty}P(f)df$$

周期函数的时间相关函数，

$$R(\tau)=\left\langle x(t+\tau)x^*(t)\right\rangle=\frac{1}{T}\int_0^T x(t+\tau)x^*(t)\cdot dt$$

$$=\frac{1}{T}\int_0^T x(t+\tau)\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n{}^*e^{-jn2\pi f_0 t}\cdot dt$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n{}^*e^{-jn2\pi f_0\tau}\cdot\frac{1}{T}\int_0^T x(t+\tau)e^{-jn2\pi f_0(t+\tau)}\cdot dt$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n{}^*e^{-jn2\pi f_0\tau}\cdot a_n$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|a_n|^2e^{-jn2\pi f_0\tau}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|a_n|^2\int_{-\infty}^{\infty}\delta(f-nf_0)e^{-j2\pi f\tau}df$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}|a_n|^2\delta(f-nf_0)e^{-j2\pi f\tau}df$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}P(f)e^{-j2\pi f\tau}d\,f$$

周期函数时间相关函数和功率谱的傅立叶变换对，

$$P(f)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|a_n|^2\delta(f-nf_0)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|a_n|^2\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j2\pi(f-nf_0)\tau}d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}|a_n|^2e^{-j2\pi(f-nf_0)\tau}d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}|a_n|^2e^{j2\pi nf_0\tau}\right]e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}R(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$

7.1.2 确定性非周期函数

非周期函数的傅立叶变换，

设 x(t)是定义在时间 t 上的确定性非周期函数，且绝对可积，则 x(t)的傅立叶积分存在，或者说 x(t)具有频谱 $F_x(f)$

$$F_x(f)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j2\pi ft}dt\,,\quad x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}F_x(f)e^{j2\pi ft}df$$

非周期函数的帕塞伐定理，

信号的能量可以按时域去计算，也可以按频域去计算，他们是相等的。

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt&=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\int_{-\infty}^{\infty}F_x^*(f)e^{-j2\pi ft}df\cdot dt\\&=\int_{-\infty}^{\infty}F_x^*(f)\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j2\pi ft}dtdf\\&=\int_{-\infty}^{\infty}F_x(f)F_x^*(f)\cdot df\\&=\int_{-\infty}^{\infty}|F_x(f)|^2df\end{aligned}$$

非周期函数的能量谱，

$$F_x(f)F_x^*(f)=|F_x(f)|^2$$

非周期函数的时间相关函数，

$$R(\tau)=\left\langle x(t+\tau)x^*(t)\right\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}x(t+\tau)x^*(t)\cdot dt$$

非周期函数时间相关函数和能量谱的傅立叶变换对。

$$\begin{aligned}R(\tau)&=\int_{-\infty}^{\infty}x(t+\tau)x^*(t)\cdot dt\\&=\int_{-\infty}^{\infty}x(t+\tau)\int_{-\infty}^{\infty}F_x^*(f)e^{-j2\pi ft}\cdot df\cdot dt\\&=\int_{-\infty}^{\infty}F_x^*(f)\int_{-\infty}^{\infty}x(t+\tau)e^{-j2\pi f(t+\tau)}\cdot dt\cdot e^{j2\pi f\tau}df\\&=\int_{-\infty}^{\infty}|F_x(f)|^2\cdot e^{j2\pi f\tau}df\end{aligned}$$

$$\left|F_x(f)\right|^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(u)x^*(v)e^{-j2\pi f u}e^{j2\pi f v}\cdot du\cdot dv$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(u+v)x^*(v)e^{-j2\pi f(u+v)}e^{j2\pi f v}\cdot du\cdot dv$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(u+v)x^*(v)e^{-j2\pi f u}\cdot du\cdot dv$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f u}\int_{-\infty}^{\infty} x(u+v)x^*(v)\cdot dv\cdot du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f u}R(u)\cdot du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f \tau}R(\tau)\cdot d\tau$$

7.2 平稳随机过程的谱分析

7.2.1 周期平稳随机过程的谱分析

周期平稳随机过程

平稳随机过程$\xi(t)$的相关函数具有周期性，则随机过程$\xi(t)$和$\xi(t+T)$以概率 1 相等。除了以概率为零的样本函数外，所有样本函数是周期的。设 x(t)是$\xi(t)$的一个样本函数，周期为 T。

周期平稳随机过程的功率谱密度，

周期平稳随机过程的功率谱是离散谱，定义

谱密度是$P(f)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} r_n\cdot\delta(f-nf_0)$，其中$r_k=\frac{1}{T}\int_0^T R_{\xi\xi}(\tau)\cdot e^{-j2\pi n f_0\tau}d\tau$

周期样本函数的傅立叶级数展开，

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{jn\cdot 2\pi f_0 t}$$

$$x_n=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-jn\cdot 2\pi f_0 t}dt$$

周期样本函数傅立叶级数系数的正交性，

$$E\left\{x_n x_m^*\right\} = E\left\{\frac{1}{T^2}\int_0^T \xi(t)e^{-j2\pi n f_0 t}dt \cdot \int_0^T \xi^*(s)e^{j2\pi m f_0 s}ds\right\}$$

$$= \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T R_{\xi\xi}(t-s)\cdot e^{-j2\pi n f_0 t}\cdot e^{j2\pi m f_0 s}dt\cdot ds$$

$$= \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_k e^{j2\pi k f_0(t-s)}\cdot e^{-j2\pi n f_0 t}\cdot e^{j2\pi m f_0 s}dt\cdot ds$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_k \cdot \delta_{kn}\delta_{km}$$

$$= r_n \delta_{nm}$$

其中，

$$R_{\xi\xi}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_k e^{j2\pi k f_0 \tau}$$

$$r_k = \frac{1}{T}\int_0^T R_{\xi\xi}(\tau)\cdot e^{-j2\pi n f_0 \tau}d\tau$$

随机过程在一个周期内能量的统计平均值，

$$E\left\{\frac{1}{T}\int_0^T \left|\xi(t)\right|^2 dt\right\} = E\left\{\frac{1}{T}\int_0^T\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{j2\pi n f_0 t}\right)\cdot\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} x_m^{\ *} e^{-j2\pi m f_0 t}\right)dt\right\}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} E\left(x_n \cdot x_m^{\ *}\right)\frac{1}{T}\int_0^T e^{j2\pi(n-m)f_0 t}dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} r_n \delta_{n,m}\frac{1}{T}\int_0^T e^{j2\pi(n-m)f_0 t}dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_n$$

周期平稳随机过程的相关函数和功率谱是傅立叶变换对，

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_{\xi\xi}(\tau)\cdot e^{-j2\pi f\tau}d\tau = \int_{-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} r_m e^{-j2\pi m f_0 \tau}\cdot e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_m \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi m f_0 \tau}\cdot e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_m \cdot \delta(f - mf_0)$$

$$= P(f)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(f)\cdot e^{j2\pi f\tau}df=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} r_m\delta(f-mf_0)\cdot e^{j2\pi f\tau}df$$
$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty} r_m\int_{-\infty}^{\infty}\delta(f-mf_0)\cdot e^{j2\pi f\tau}df$$
$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty} r_m e^{-j2\pi m f_0\tau}$$
$$=R_{\xi\xi}(\tau)$$

7.2.2 非周期平稳随机过程的谱分析

定义 1，非周期平稳随机过程的功率谱密度函数，

设 $\{\xi(t),t\in T\}$ 是平稳连续的随机过程， $R_{\xi\xi}(\tau)$ 是它的相关函数，且满足 $\int_{-\infty}^{\infty}|R_{\xi\xi}(\tau)|d\tau<\infty$，则称 $P_{\xi\xi}(f)=\int_{-\infty}^{\infty}R_{\xi\xi}(\tau)\cdot e^{-j2\pi f\tau}\cdot d\tau$ 为该随机过程的功率谱密度。

非周期平稳随机过程的相关函数和功率谱是傅立叶变换对，

$$P(f)=\int_{-\infty}^{\infty}R_{\xi}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$
$$R_{\xi}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}P(f)e^{j2\pi f\tau}d\tau$$

定义 2，非周期平稳随机过程的功率谱密度函数，

$$P(f)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}E\left\{|F_{\xi}(f,T)|^2\right\}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}E\left\{\left|\int_{-T}^{T}\xi(t)e^{-j2\pi ft}dt\right|^2\right\}$$

两个定义的一致性：定义随机过程 $\xi(t)$ 样本函数的一个截尾函数 $\xi_T(t)=\xi(t),|t|\le T$， $\xi_T(t)=0,|t|>T$，它的傅立叶变换是，

$$F_{\xi}(f,T)=\int_{-\infty}^{\infty}\xi_T(t)e^{-j2\pi ft}dt=\int_{-T}^{T}\xi(t)e^{-j2\pi ft}dt,$$

利用帕塞伐定理，在 2T 时间内 $\xi(t)$ 的能量是，

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\xi_T(t)|^2dt=\int_{-\infty}^{\infty}|F_{\xi}(f,T)|^2df$$

单位时间内的能量（功率）是，

$$\frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\xi_T(t)\right|^2 dt = \frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty}\left|F_{\xi}(f,T)\right|^2 df$$

当$T \to \infty$时，由上式给出了$\xi(t)$一个样本函数的平均功率：

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\xi_T(t)\right|^2 dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty}\left|F_{\xi}(f,T)\right|^2 df$$

$\xi(t)$的平均功率是

$$\lim_{T\to\infty} E\left\{\frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\xi_T(t)\right|^2 dt\right\} = \int_{-\infty}^{\infty}\lim_{T\to\infty}\left\{\frac{1}{2T}E\left|F_{\xi}(f,T)\right|^2\right\}df$$

相应的功率谱密度是，

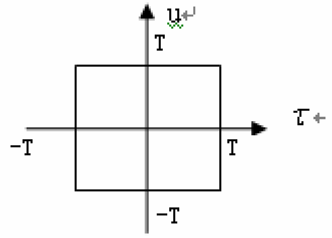
$$P(f) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}E\left\{\left|F_{\xi}(f,T)\right|^2\right\} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}E\left\{\left|\int_{-T}^{T}\xi(t)e^{-j2\pi f t}dt\right|^2\right\}$$

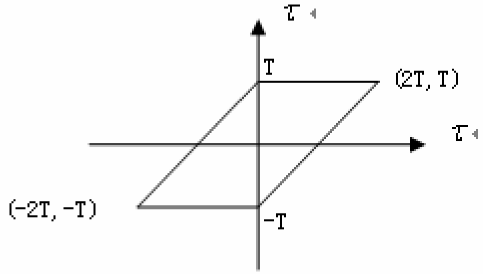
考虑到，

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2T}E\left\{\left|\int_{-T}^{T}\xi(t)e^{-j2\pi f t}dt\right|^2\right\} \\
&= \frac{1}{2T}E\left\{\int_{-T}^{T}\xi(u)e^{-j2\pi f u}du \cdot \int_{-T}^{T}\xi^*(v)e^{j2\pi f v}dv\right\} \\
&= \frac{1}{2T}\left\{\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}E\left\{\xi(u)\xi^*(v)\right\}e^{-j2\pi f u}e^{j2\pi f v}dudv \cdot\right\} \\
&= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}R_{\xi}(u-v)e^{-j2\pi f(u-v)}dudv
\end{aligned}$$

进行坐标变换，设$u - v = \tau$，$u = \tau'$，则$u = \tau'$，$v = \tau - \tau'$，有

$$= \frac{1}{2T}\iint\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(\tau,\tau')}\right|R_{\xi}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau d\tau'$$





$$=\frac{1}{2T}\left[\int_{-2T}^{0} d\tau R_{\xi}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}\int_{-T}^{T+\tau} d\tau' + \int_{0}^{2T} d\tau R_{\xi}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}\int_{-T+\tau}^{T} d\tau'\right]$$

$$=\frac{1}{2T}\left[\int_{-2T}^{0} R_{\xi}(\tau)e^{-j2\pi f\tau} d\tau(2T+\tau) + \int_{0}^{2T} R_{\xi}(\tau)e^{-2\pi f\tau} d\tau(2T-\tau)\right]$$

$$=\int_{-2T}^{2T} R_{\xi}(\tau)e^{-2\pi f\tau}\left[1-\frac{|\tau|}{2T}\right]d\tau$$

随机过程的功率谱密度是，

$$P(f)=\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|\tau|}{2T}\right)R_{\xi}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} R_{\xi}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$

这就是，平稳随机过程的帕塞伐定理，维纳一欣斤定理

7.3 平稳随机过程功率谱密度的性质

7.3.1 连续时间平稳随机过程：

连续时间平稳随机过程的功率谱密度和自相关函数的性质。

平稳随机过程功率谱密度是实数值，且大于零。

$$P(f)>0$$

平稳随机过程功率谱密度的积分等于平稳随机过程的均方值；

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_{\xi\xi}(f)df = R_{\xi\xi}(0)$$

平稳随机过程功率谱的零频率分量等于自相关函数的积分。

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_{\xi\xi}(\tau)d\tau = P_{\xi\xi}(0)$$

7.3.2 连续时间实随机过程：

连续时间实平稳随机过程的功率谱密度和自相关函数的性质。

$$R_{\xi\xi}(-\tau)=R_{\xi\xi}(\tau)$$

$$P_{\xi\xi}(-f)=P_{\xi\xi}(f)$$

$$R_{\xi\xi}(\tau)=2\int_0^{\infty}P_{\xi\xi}(f)\cos 2\pi f\tau\, df$$

$$P_{\xi\xi}(f)=2\int_0^{\infty}P_{\xi\xi}(f)\cos 2\pi f\tau\, d\tau$$

7.3.3 连续时间周期平稳随机过程：

连续时间周期平稳随机过程的功率谱密度和自相关函数，

随机过程 $\xi(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\eta_n e^{j\omega_n t}$ ，其中 $\{\eta_n, n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ 为复随机变量序列，且

$E\{\eta_n\}=0$，$E\{\eta_n\eta_m^*\}=\sigma^2\delta_{nm}$，$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sigma_n^2<\infty$，$\{\omega_n\}$ 为任意一列实数，则

$$E\{\xi(t)\}=0,\quad R_{\xi\xi}(t,s)=E\left\{\xi(t)\xi^*(s)\right\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sigma_n^2 e^{j\omega_n(t-s)}=R_{\xi\xi}(t-s)\text{。}$$

离散功率谱和相关函数是傅立叶变换对，

$$P_{\xi\xi}(n)=\int_0^T R_{\xi\xi}(\tau)e^{-j\omega_n\tau}d\tau=\int_0^T\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sigma_n^2 e^{j\omega_m s}e^{-j\omega_n\tau}d\tau$$
$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sigma_n^2\int_0^T e^{j\omega_m\tau}e^{-j\omega_n\tau}d\tau=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sigma_n^2\delta_{m,n}=\sigma_n^2$$

因此随机过程 $\xi(t)$ 是平稳的，且具有离散功率谱，谱线位于 ω_n 处。所以这个随机过程可以看作具有随机振幅的。

7.3.5 联合平稳随机过程的互相关函数和互功率谱密度：

联合平稳随机过程的互相关函数和互功率谱密度

定义 1，设有两个二阶矩随机过程 $\{\xi(t),\eta(t),t\in T\}$，它们的均值是常数，自相关函数和互相关函数都仅是 $\tau=t_2-t_1$ 的函数，则称它们为联合宽平稳随机过程或联合广义平稳随机过程。

定义 2，联合平稳随机过程的互相关函数的傅立叶变换称为它们的互谱密度。

如果两个二阶矩随机过程 $\{\xi(t),\eta(t),t\in T\}$ 是联合广义平稳的，且

$$F_\eta(f)=F_\xi(f)\cdot H^*(f)$$

$$\eta(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\xi(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

性质 1，$P_{\xi\eta}(f)=P_{\xi\xi}(f)\cdot H^*(f)$

证明：

$$
\begin{aligned}
P_{\xi\eta}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{\xi\eta}(\tau)\cdot e^{-j2\pi f\tau}d\tau = E\int_{-\infty}^{\infty}\xi(t+\tau)\cdot\eta^*(t)\cdot e^{-j2\pi f\tau}d\tau \\
&= E\int_{-\infty}^{\infty}\xi(t+\tau)\cdot e^{-j2\pi f\tau}d\tau\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\xi^*(s)e^{j2\pi vs}ds\right]H^*(v)e^{-j2\pi vt}dv \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}e^{-j2\pi f\tau}d\tau\cdot\int_{-\infty}^{\infty}H^*(v)e^{-j2\pi vt}dv\cdot\int_{-\infty}^{\infty}E\left[\xi(t+\tau)\xi^*(s)\right]e^{j2\pi vs}ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}ds\cdot\int_{-\infty}^{\infty}H^*(v)e^{-j2\pi vt}e^{j2\pi vs}dv\cdot\int_{-\infty}^{\infty}R_{\xi\xi}(t+\tau-s)e^{-j2\pi f\tau}d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}ds\cdot\int_{-\infty}^{\infty}H^*(v)e^{-j2\pi(v-f)t}e^{j2\pi(v-f)s}dv\cdot\int_{-\infty}^{\infty}R_{\xi\xi}(t+\tau-s)e^{-j2\pi f(t+\tau-s)}d\tau \\
&= P_{\xi\xi}(f)\int_{-\infty}^{\infty}H^*(v)e^{-j2\pi(v-f)t}dv\int_{-\infty}^{\infty}e^{j2\pi(v-f)s}ds \\
&= P_{\xi\xi}(f)\int_{-\infty}^{\infty}H^*(v)e^{-j2\pi(v-f)t}\delta(v-f)\cdot dv \\
&= P_{\xi\xi}(f)\cdot H^*(f)
\end{aligned}
$$

性质 2，$P_{\eta\xi}(f)=P_{\xi\xi}(f)\cdot H(f)$

证明：（略）

性质 3，$P_{\eta\eta}(f)=P_{\xi\xi}(f)\cdot H(f)H^*(f)=P_{\xi\xi}(f)\cdot\left|H(f)\right|^2$

证明：（略）

7.3.5 离散时间平稳随机序列：

离散时间平稳随机序列的功率谱密度函数：

设 $\{\xi(k),k=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ 是平稳的随机序列，$R_{\xi\xi}(\tau)$ 是它的相关函数，且满足 $\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|R_{\xi\xi}(\tau)\right|<\infty$，则称 $f_{\xi\xi}(\lambda)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}R_{\xi\xi}(k)\cdot e^{-jk\lambda},-\pi<\lambda<\pi$ 为该序列的功率谱密度，并有 $R_{\xi\xi}(k)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_{\xi\xi}(\lambda)\,e^{-jk\lambda}\,d\lambda$。

实平稳随机序列

设 $\{\xi(k),k=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ 是实平稳的随机序列，$R_{\xi\xi}(\tau)$ 是它的相关函数，且满足

$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|R_{\xi\xi}(\tau)\right|<\infty$，则称 $f_{\xi\xi}(\lambda)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}R_{\xi\xi}(k)\cdot e^{-jk\lambda},-\pi<\lambda<\pi$ 为该序列的功率谱密度，它是实偶函数，有 $f_{\xi\xi}(\lambda)=f_{\xi\xi}(-\lambda)$，$R_{\xi\xi}(k)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f_{\xi\xi}(\lambda)\cos k\lambda\,d\lambda$。

这时，功率谱和相关函数的付立叶变换克表示为，

$$R_{\xi\xi}(k)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f_{\xi\xi}(f)\cos k\lambda\,d\lambda$$

$$f_{\xi\xi}(\lambda)=R_{\xi\xi}(0)+2\sum_{k=1}^{\infty}R_{\xi\xi}(k)\cos k\lambda$$

7.4 功率谱分析

7.4.1 典型随机过程的功率谱（1）

举例：

例 1、随机二进制电报信号的相关函数和功率谱。

例 2、随机相位正弦波的相关函数和功率谱。

例 3、白噪声通过一阶低通滤波器的相关函数和功率谱

例 4、白噪声的相关函数和功率谱。

常见的随机过程的相关函数和功率谱对：

基本信号的相关函数和功率谱：

白噪声，

随机相位正弦波。

基带信号：

白噪声通过一阶低通滤波器，

白噪声通过高斯低通滤波器，

白噪声通过理想低通滤波器，

随机二进制周期脉冲序列。

带通信号：

白噪声通过一阶低通滤波器调制正弦载波，

白噪声通过高斯低通滤波器调制正弦载波，

白噪声通过理想低通滤波器调制正弦载波，

随机二进制周期脉冲序列调制正弦载波。

7.4.2 典型随机过程的功率谱（2）

例题 1（P-9-22）

计算随机二进制电报信号的功率谱，随机电报信号市取值为+1 或-1 的过程

$$x(t)=\begin{cases}+1 & t_{2i}<t<t_{2i+1}\\ -1 & t_{2i-1}<t<t_{2i}\end{cases}$$

其中t_i是平均密度为λ的破送点列，其自相关函数是$e^{-2\lambda|\tau|}$，其功率谱密度是

$$S(\omega)=\frac{4\lambda}{4\lambda^2+\omega^2}$$

例题 2（P-9-23）

计算泊松计数过程的功率谱，泊松脉冲串定义为

$$z(t)=\frac{d}{dt}\sum_i U(t-t_i)=\sum_i \delta(t-t_i)$$

其自相关函数是，

$$R_{zz}(\tau)=\lambda^2+\lambda\delta(\tau)$$

功率谱密度函数是

$$S_{zz}(\omega)=\lambda+2\pi\lambda^2\delta(\omega) \qquad S_{zz}^c(\omega)=\lambda$$

引理，

任意给定一个正函数$S(\omega)$均能找到一个功率谱为$S(\omega)$的随机过程。

证明 a，考虑过程$x(t)=ae^{j(\omega t-\varphi)}$，其中$a$是常数，$\omega$是概率密度为$f(\omega)$的随机变量，$\varphi$是在区间$[-\pi,\pi]$ 均匀分布的随机变量。该过程是广义平稳的，均值为零，自相关函数为

$$R_{xx}(\tau)=a^2E\left\{e^{j\omega\tau}\right\}=a^2\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\omega\tau}f_\omega(\omega)d\omega$$

它的功率谱是自相关函数的傅里叶变换，

$$S_{xx}(\omega)=2\pi a^2 f_\omega(\omega)$$

$$f_\omega(\omega)=\frac{S_{xx}(\omega)}{2\pi a^2}$$

$$a^2=a^2\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f_\omega(\omega)d\omega=R(0)$$

可以按照 $f_\omega(\omega)=\frac{S_{xx}(\omega)}{2\pi a^2}$ 构造随机变量ω，进一步得到$x(t)=ae^{j(\omega t-\varphi)}$。

证明 b，若$S(-\omega)=S(\omega)$则可以找到一个功率谱为$S(\omega)$的实过程，首先构造

$$y(t) = a\cos(\omega t - \varphi)$$

$$R_y(\tau) = \frac{a^2}{2}E\{\cos\omega\tau\} = \frac{a^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)\cos\omega\tau d\omega$$

若 $f_\omega(\omega) = S(\omega)/\pi a^2$，可以得到

$$S_y(\omega) = S(\omega)$$

例题 3（P-9-24）

多普勒效应，正弦波振荡器的速度是 v，发射信号是 $e^{j\omega_0 t}$，观察者收到的信号是 $s(t) = ae^{j\omega_0(t-r/c)}$，其中 c 是传播速度，$r = r_0 + vt$ 是发射机到接收机的距离，有

$$s(t) = ae^{j(\omega t-\varphi)}, \quad \omega = \omega_0\left(1-\frac{v}{c}\right), \quad \varphi = \frac{r_0\omega_0}{c}$$

接收信号的频谱是

$$S(\omega) = 2\pi a^2 f_\omega(\omega) = \frac{2\pi a^2 c}{\omega_0} f_v\left(\left(1-\frac{\omega}{\omega_0}\right)c\right)$$

如果 $v = 0$，相应的频谱是

$$s(t) = e^{j(\omega_0 t-\varphi)}, \quad R(\tau) = a^2 e^{j\omega_0\tau}, \quad S(\omega) = 2\pi a^2\delta(\omega-\omega_0)$$

线谱：线谱信号

线谱 1、假定随机变量 c_i 互不相关，且均值为零，若过程

$$x(t) = \sum_i c_i e^{j\omega_i t}$$

则 $x(t)$ 是广义平稳随机过程，有

$$R(\tau) = \sum_i \sigma_i^2 e^{j\omega_i\tau}, \quad S(\omega) = 2\pi\sum_i \sigma_i^2\delta(\omega-\omega_i)$$

其中 $E\left[c_i^2\right] = \sigma_i^2$，$S(\omega)$ 由线谱组成。

线谱 2、当 a_i, b_i 均值为零，$E\left[a_i^2\right] = \sigma_i^2, E\left[b_i^2\right] = \sigma_i^2$，

$$y(t) = \sum_i\left(a_i\cos\omega t + b_i\sin\omega t\right)$$

是广义平稳随机过程，且有

$$R(\tau) = \sum_i \sigma_i^2\cos\omega\tau, \quad S(\omega) = \pi\sum_i \sigma_i^2\left[\delta(\omega-\omega_i)+\delta(\omega+\omega_i)\right]$$

例题 4（P-9-26）微分器

随机过程 $x(t)$ 的微分可以看作一个线性系统的输出。这个线性系统输入是 $x(t)$。考虑

系统的输入是$e^{j\omega t}$，相应的输出是$\frac{d}{dt}\left[e^{j\omega t}\right]=j\omega\left[e^{j\omega t}\right]$，系统的相应函数是$H(\omega)=j\omega$。系统输入和输出的相关函数，输出的自相关函数可以表示为

$$R_{xx'}(\tau)=-\frac{d}{d\tau}R_{xx}(\tau),\quad R_{x'x'}(\tau)=-\frac{d^2}{d\tau^2}R_{xx}(\tau)$$

$$S_{xx'}(\omega)=-j\omega S_{xx}(\omega),\quad S_{x'x'}(\omega)=\omega^2 S_{xx}(\omega)$$

随机过程$x(t)$的 n 阶微分是$y(t)=x^{(n)}(t)$，系统函数是$H(\omega)=\left[j\omega\right]^n$，所以有

$$S_{xy}(\omega)=\left[-j\omega\right]^n S_{xx}(\omega),\quad S_{yy}(\omega)=\omega^{2n}S_{xx}(\omega)$$

例题 5（P-9-27）典型线性系统

微分方程 1，它的输入是$x(t)$，输出是$y(t)$

$$y'(t)+cy(t)=x(t)$$

相应系统函数可以求得

$$sY(s)+cY(s)=X(s)$$

$$H(\omega)=\frac{1}{j\omega+c}$$

假设输入信号的功率谱是$R_{xx}(\tau)=q\delta(\tau)$，输出的功率谱和相关函数是

$$S_{xx}(\omega)=q$$

$$S_{yy}(\omega)=S_{xx}(\omega)\left|H(\omega)\right|^2=\frac{q}{\omega^2+c^2}$$

$$R_{yy}(\tau)=qce^{-c|\tau|}$$

$$E\left\{y^2(t)\right\}=R_{yy}(0)=qc$$

微分方程 2，它的输入是$x(t)$，输出是$y(t)$

$$y''(t)+by'(t)+cy(t)=x(t)$$

相应系统函数可以求得

$$s^2Y(s)+bsY(s)+cY(s)=X(s)$$

假设输入信号的功率谱是$S_{xx}(\tau)=q\delta(\tau)$，输出的功率谱和相关函数是

$$H(\omega)=\frac{1}{-\omega^2+jb\omega+c}$$

$$S_{yy}(\omega)=\frac{q}{\left(c-\omega^2\right)^2+b^2\omega^2}$$

若$b^2<4c$，

$$R_{yy}(\tau)=\frac{q}{2bc}e^{-\alpha|\tau|}\left[\cos\beta\tau+\frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|\right]$$

$$\alpha=\frac{b}{2}\quad \alpha^2+\beta^2=c$$

若$b^2=4c$，

$$R_{yy}(\tau)=\frac{q}{2bc}e^{-\alpha|\tau|}\left[1+\alpha|\tau|\right]$$

$$\alpha=\frac{b}{2}$$

若$b^2>4c$，

$$R_{yy}(\tau)=\frac{q}{4\gamma bc}\left[(\alpha+\gamma)e^{-(\alpha-\gamma)|\tau|}-(\alpha-\gamma)e^{-(\alpha+\gamma)|\tau|}\right]$$

$$\alpha=\frac{b}{2}\quad \alpha^2-\gamma^2=c$$

而$E\left\{y^2(t)\right\}=R_{yy}(0)=q/2bc$

例题 6（P-9-28）希尔伯特变换

希尔伯特变换，等效线性系统的频率响应是

$$H(\omega)=-j\,\mathrm{sgn}\,\omega=\begin{cases}-j & \omega\ge 0\\ j & \omega<0\end{cases}$$

$$h(t)=\frac{1}{\pi t}$$

系统的输入是$x(t)$，输出是$\hat{x}(t)$，则有

$$\hat{x}(t)=x(t)*\frac{1}{\pi t}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{t-u}x(u)du$$

$$S_{x\hat{x}}(\omega)=jS_{xx}(\omega)\,\mathrm{sgn}(\omega)=-S_{\hat{x}x}(\omega)$$

$$S_{\hat{x}\hat{x}}(\omega)=S_{xx}(\omega)$$

定义解析信号为复过程

$$z(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$$

它的频率响应是

$$1 + j\left(-j\,\mathrm{sgn}\,\omega\right) = 2U\left(\omega\right)$$

于是有

$$S_{zz}(\omega) = 4S_{xx}(\omega)U(\omega) = 2S_{xx}(\omega) + 2jS_{\hat{x}x}(\omega)$$
$$R_{zz}(\tau) = 2R_{xx}(\tau) + 2jR_{\hat{x}x}(\tau)$$