随机过程的基本概念

- 马尔科夫性质
  - 马尔科夫过程与马尔科夫链的定义
  - 马尔科夫过程与马尔科夫链的联合概率
- 二阶矩过程
  - 定义
  - 协方差函数和相关函数的存在性
  - 自相关函数的对称性
  - 自相关函数的非负定性
- 严平稳随机过程及其性质
- 宽平稳随机过程及其性质
  - 定义
  - 宽平稳正态过程是严平稳的
  - 对称性
  - 均值的平方小于平均功率
  - 相关函数的模小于平均功率
  - 相关矩阵的非负性
- 功率谱
  - 周期平稳随机过程的谱分析
  - 非周期平稳随机过程的谱分析
- 例题

1 马尔可夫性质

马尔可夫性质，或称作无记忆性，或称作无后效性。

马尔可夫性质是说过程的历史对将来的影响，都是通过当前状态对将来的影响来表示，即当前的状态概括了过去历史对将来的影响。

马尔可夫过程和马尔可夫链，分别表示具有马尔可夫性质的随机过程和随机序列。

任意维数的马尔可夫过程和马尔可夫链的概率分布，都可以用它们的初始分布和条件转移概率分布来表示。

1.1 马尔可夫链

定义（使用转移概率、条件概率来表示）:

设有一个随机过程$\{\xi(n), n=0,1,2\cdots\}$是离散状态的随机过程，且$\xi(n)$满足条件：

$P\{\xi(n+1)=j/\xi(0)=i_0,\xi(1)=i_1,\cdots\xi(n)=i_n\}=P\{\xi(n+1)=j/\xi(n)=i_n\}$ 则称这类随机过程是马尔可夫链。

马尔可夫链的有限维概率密度(马尔可夫链的性质)

$$
\begin{aligned}
&P\{\xi(0)=i_0,\xi(1)=i_1,\cdots\xi(n)=i_n,\xi(n+1)=j\}\\
&\quad=P\{\xi(n+1)=j/\xi(n)=i_n\}\cdot P\{\xi(n)=i_n/\xi(n-1)=i_{n-1}\}\cdots\\
&\qquad P\{\xi(1)=i_1/\xi(0)=i_0\}\cdot P\{\xi(0)=i_0\}
\end{aligned}
$$

1.2 马尔可夫过程

定义（使用条件概率密度函数，或条件概率分布函数来表示）:

设有一个随机过程$\{\xi(t),t\in T\}$，$t_1<t_2<\cdots<t_m<t_{m+1}\in T$，若在这些时刻观察到随机过程的值是$x_1,x_2,\cdots x_m,x_{m+1}$，若它的条件概率密度和条件分布函数满足条件

$f_{t_{m+1}/t_1,t_2\cdots t_m}(x_{m+1}/x_1,x_2,\cdots x_m)=f_{t_{m+1}/t_m}(x_{m+1}/x_m)$或

$F_{t_{m+1}/t_1,t_2\cdots t_m}(x_{m+1}/x_1,x_2,\cdots x_m)=F_{t_{m+1}/t_m}(x_{m+1}/x_m)$，则称这类随机过程为具有马尔可夫性质的随机过程或马尔可夫过程。

马尔可夫过程的有限维概率密度(马尔可夫过程的性质)

$$
\begin{aligned}
&f_{t_1,t_2\cdots t_m,t_{m+1}}(x_1,x_2,\cdots x_m,x_{m+1})\\
&\quad=f_{t_{m+1}/t_m}(x_{m+1}/x_m)\cdot f_{t_m/t_{m-1}}(x_m/x_{m-1})\cdot f_{t_2/t_1}(x_2/x_1)\cdot f_{t_1}(x_1)
\end{aligned}
$$

2 二阶矩过程

2.1 定义

设有随机过程$\{\xi(t),t\in T\}$，若对每个$t\in T$，$\xi(t)$的均值和方差都存在，则称$\xi(t)$为二阶矩过程。

2.2 定理 1

二阶矩过程的自协方差函数以及自相关函数总是存在的。

证明：

根据协方差函数的定义，有：

$$\operatorname{cov}\{\xi(t_1),\xi(t_2)\}=E\{[\xi(t_1)-\mu(t_1)]\cdot[\xi(t_2)-\mu(t_2)]^*\}$$

可以有：

$$
\begin{aligned}
\left|\operatorname{cov}\{\xi(t_1),\xi(t_2)\}\right|^2 &= \left|E\{[\xi(t_1)-\mu(t_1)]\cdot[\xi(t_2)-\mu(t_2)]^*\}\right|^2 \\
&\le \left\{E\left|\{[\xi(t_1)-\mu(t_1)]\cdot[\xi(t_2)-\mu(t_2)]^*\}\right|\right\}^2 \\
&\le E\left|\xi(t_1)-\mu(t_1)\right|^2\cdot E\left|\xi(t_2)-\mu(t_2)\right|^2 \\
&= D\xi(t_1)\cdot D\xi(t_2) \\
&< \infty
\end{aligned}
$$

第一个不等式成立是：随机变量均值的模小于等于随机变量模的均值。

第二个不等式成立是：Schwartz 不等式，随机变量乘积取模统计平均的平方，小于等于随机变量取模平方统计平均的乘积。

上述两个不等式的证明见附录。

2.3 定理 2

设有二阶矩过程$\{\xi(t),t\in T\}$，$R_{\xi\xi}(t_1,t_2)$是它的相关函数，则有：

$$R_{\xi\xi}(t_2,t_1)=\overline{R_{\xi\xi}(t_1,t_2)} \qquad (t_1,t_2\in T)$$

2.4 定理 3

二阶矩过程的自相关函数$R_{\xi\xi}(t_1,t_2)$具有非负定性，即对于任意有限个$t_1,t_2,t_3,\cdots t_n\in T$和任意 n 个复数$\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n$，n 为任意正整数，有

$\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}R_{\xi\xi}(t_k,t_m)\lambda_k\lambda_m^*\ge 0$，或写作矩阵形式，

$$(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\cdot R_{\xi\xi}(t_k,t_m)\cdot(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)^T\ge 0$$

证明：

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}R_{\xi\xi}(t_k,t_m)\lambda_k\overline{\lambda_m} &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}E\left\{\xi(t_k)\cdot\overline{\xi(t_m)}\right\}\lambda_k\overline{\lambda_m} \\
&= E\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\left\{\xi(t_k)\lambda_k\cdot\overline{\xi(t_m)\lambda_m}\right\} \\
&= E\sum_{k=1}^{n}\xi(t_k)\lambda_k\sum_{m=1}^{n}\overline{\xi(t_m)\lambda_m} \\
&= E\left|\sum_{k=1}^{n}\xi(t_k)\lambda_k\right|^2\ge 0
\end{aligned}
$$

随机过程$\xi(t)$的自协方差是中心化的随机过程$\xi(t)-\mu_\xi$的自相关函数，因此自协方差

函数也是非负定的。

3 严平稳随机过程

3.1 定义

设有随机过程 $\{\xi(t), t\in T\}$，对任意正整数 n、选定时间 $t_1 \le t_2 \le \cdots \le t_n$，$t_i \in T, i=1,2,\cdots n$、及任意时间间隔 τ 和 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n \in R$，有 n 维分布函数 $F_\xi(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n) = F_\xi(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1+\tau, t_2+\tau, \cdots, t_n+\tau)$ 则称该过程为严平稳随机过程。

例 2
例 3

3.2 性质

严平稳随机过程的一维分布函数与时间无关，二维分布函数仅与时间间隔有关而与时间本身无关。

3.3 K 级平稳随机过程

设有随机过程 $\{\xi(t), t\in T\}$，对任意正整数 n<K 及选定时间 $t_1 \le t_2 \le \cdots \le t_n$，$t_i \in T, i=1,2,\cdots n$，任意时间间隔 τ 和 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n \in R$，有 n 维分布函数 $F_\xi(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n) = F_\xi(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1+\tau, t_2+\tau, \cdots, t_n+\tau)$ 则称该过程为 K 级严平稳随机过程。

4 宽平稳随机过程

4.1 定义

设有一个二阶矩随机过程 $\{\xi(t), t\in T\}$，它的均值是常数，相关函数仅是 $\tau = t_2 - t_1$ 的函数，则称它为宽平稳随机过程或广义平稳随机过程。

例 1
例 4
例 5

4.2 正态平稳随机过程

既是广义平稳的随机过程，又是严平稳的随机过程。

4.3 宽平稳随机过程的性质 1

$R_{\xi\xi}(t_1, t_2) = \overline{R_{\xi\xi}(t_2, t_1)}$ 或 $R_{\xi\xi}(\tau) = \overline{R_{\xi\xi}(-\tau)}$，$(\tau = t_2 - t_1)$。

对于实宽平稳随机过程，$R_{\xi\xi}(\tau)=R_{\xi\xi}(-\tau)$，实自相关函数是偶函数。证明（略）

4.4 宽平稳随机过程的性质 2

$R_{\xi\xi}(0)\geq|\mu_{\xi}|^2$，$\mu_{\xi}$ 是随机过程的均值。

证明：

考虑到

$$
\begin{aligned}
R_{\xi\xi}(0) &= E\{\xi(t)\overline{\xi(t)}\} \\
&= E\{[\xi(t)-\mu_{\xi}][\overline{\xi(t)-\mu_{\xi}}]\}+|\mu_{\xi}|^2 \\
&= D[\xi(t)]+|\mu_{\xi}|^2
\end{aligned}
$$

$$D[\xi(t)]=E\{[\xi(t)-\mu_{\xi}][\overline{\xi(t)-\mu_{\xi}}]\}\geq 0$$

因此有

$$R_{\xi\xi}(0)\geq|\mu_{\xi}|^2$$

4.5 宽平稳随机过程的性质 3

$|R_{\xi\xi}(\tau)|\leq R_{\xi\xi}(0)$，$|C_{\xi\xi}(\tau)|\leq C_{\xi\xi}(0)$

证明：

$$
\begin{aligned}
|R_{\xi\xi}(\tau)|^2 &= |E\{\xi(t+\tau)\overline{\xi(t)}\}|^2 \\
&\leq E\{|\xi(t+\tau)\overline{\xi(t)}|^2\} \\
&\leq E\{|\xi(t+\tau)|^2\}\cdot E\{|\xi(t)|^2\} \\
&= R_{\xi\xi}(0)\cdot R_{\xi\xi}(0)
\end{aligned}
$$

以上证明中、第一个不等式成立是：随机变量平均的模小于等于随机变量模的平均；第二个不等式成立是：Schwartz 不等式，随机变量乘积取模统计平均的平方，小于等于随机变量取模平方统计平均的乘积。

因此有：

$$|R_{\xi\xi}(\tau)|^2\leq|R_{\xi\xi}(0)|^2$$

$$|R_{\xi\xi}(\tau)|\leq|R_{\xi\xi}(0)|$$

同理有：

$$|C_{\xi\xi}(\tau)|\leq|C_{\xi\xi}(0)|。$$

4.6 宽平稳随机过程的性质 4

宽平稳随机过程相关函数 $R_{\xi\xi}(\tau)$ 具有非负定性,对于任意正整数 n，任意 n 个实数 $t_1,t_2,t_3,\cdots t_n \in T$，任意 n 个复数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n$，有 $\sum\sum R_{\xi\xi}(t_i-t_k)\lambda_i\lambda_k^* \ge 0$。

证明（略）

5 平稳随机过程的功率谱

5.1 周期平稳随机过程

5.2 周期平稳随机过程的谱分析

周期平稳随机过程

平稳随机过程 $\xi(t)$ 的相关函数具有周期性，则随机过程 $\xi(t)$ 和 $\xi(t+T)$ 以概率 1 相等。除了以概率为零的样本函数外，所有样本函数是周期的。设 x(t)是 $\xi(t)$ 的一个样本函数，周期为 T。

周期平稳随机过程的功率谱密度

周期平稳随机过程的功率谱是离散谱，定义谱密度是

$P(f)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} r_n\cdot\delta(f-nf_0)$，其中 $r_k=\frac{1}{T}\int_0^T R_{\xi\xi}(\tau)\cdot e^{-j2\pi n f_0\tau}d\tau$

周期平稳随机过程的相关函数和功率谱是傅立叶变换对

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_{\xi\xi}(\tau)\cdot e^{-j2\pi f\tau}d\tau = P(f)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(f)\cdot e^{j2\pi f\tau}df = R_{\xi\xi}(\tau)$$

5.3 非周期平稳随机过程的谱分析

定义 1：非周期平稳随机过程的功率谱密度函数

设 $\{\xi(t),t\in T\}$ 是平稳连续的随机过程，$R_{\xi\xi}(\tau)$ 是它的相关函数，且满足

$\int_{-\infty}^{\infty} \left| R_{\xi\xi}(\tau) \right| d\tau < \infty$，则称 $P_{\xi\xi}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{\xi\xi}(\tau) \cdot e^{-j2\pi f\tau} \cdot d\tau$ 为该随机过程的功率谱密度。

非周期平稳随机过程的功率谱密度函数

$$P(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} E\left\{ \left| F_{\xi}(f,T) \right|^2 \right\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} E\left\{ \left| \int_{-T}^{T} \xi(t) e^{-j2\pi f t} dt \right|^2 \right\}$$

非周期平稳随机过程的相关函数和功率谱是傅立叶变换对

$$P(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{\xi}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

$$R_{\xi}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} P(f) e^{j2\pi f\tau} d\tau$$

6 例题

例 1（例 P-9-12）广义平稳随机过程的积分

设 $x(t)$ 是广义平稳随机过程，$s = \int_{-T}^{T} x(t)dt$，

(1) 计算 S 的均值和方差

S 的均值：$\eta_s = E\left\{ \int_{-T}^{T} x(t)dt \right\} = \int_{-T}^{T} E\{x(t)\}dt$

$$s - \eta_s = \int_{-T}^{T} \left(x(t) - E\left[x(t) \right] \right) dt = \int_{-T}^{T} \left[x(t) - \eta_x(t) \right] dt$$

$$\sigma_s^2 = D[s] = E\left\{ \left| s - \eta_s \right|^2 \right\}$$

$$= \int_{-T}^{T} \int_{-T}^{T} C_x(t_1, t_2) dt_1 dt_2$$

$$= \int_{-T}^{T} \int_{-T}^{T} C_x(t_1 - t_2) dt_1 dt_2$$

进行坐标变换

$$\begin{cases} t_1 - t_2 = \tau \\ t_1 + t_2 = u \end{cases}, \text{则} \quad \begin{cases} t_1 = (u + \tau)/2 \\ t_2 = (u - \tau)/2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial t_1 / \partial u = 1/2 & \partial t_2 / \partial u = 1/2 \\ \partial t_1 / \partial \tau = 1/2 & \partial t_2 / \partial \tau = -1/2 \end{cases}$$

$$\left|\frac{\partial(t_1,t_2)}{\partial(u,\tau)}\right|=\frac{1}{2}$$

则

$$\sigma_s^2=\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}C_x(t_1-t_2)dt_1dt_2$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\int_{-2T}^{2T}C_x(\tau)d\tau\int_{-2T+|\tau|}^{2T-|\tau|}du$$
$$=\int_{-2T}^{2T}\left(2T-|\tau|\right)C_x(\tau)d\tau$$

(2)考虑 $C_x(\tau)=q\delta(\tau)$

$$\sigma_s^2=q\int_{-2T}^{2T}\left(2T-|\tau|\right)\delta(\tau)d\tau=2Tq$$

(3)考虑考虑 $C_x(\tau)$ 是 α 相依的，且 $\partial<<T$

则 $\sigma_s^2=\int_{-2T}^{2T}\left(2T-|\tau|\right)C_x(\tau)d\tau=2T\int_{-\alpha}^{\alpha}C_x(\tau)d\tau$

- 注：∂-相依过程

如果随机过程 $\xi(t)$，对所有的 $|t_1-t_2|>\partial$，有 $C_\xi(t_1,t_2)=0$，则称过程 $\xi(t)$ 是 ∂-相依的。

例 2（习题 6）

设 z 为随机变量，θ 为另一随机变量，z 与 θ 相互统计独立，θ 均匀分布于 $(0,2\pi)$ 间；又设有随机过程 $\xi(t)=z\sin(\omega t+\theta)$　　$(-\infty<t<\infty)$ 其中 ω 为常数，ω>0，试利用特征函数证明 $\xi(t)$ 系一严平稳随机过程。

解：先求 $\xi(t)$ 的二维特征函数

$$E\left[e^{ju_1\xi(t_1)+ju_2\xi(t_2)}\right]=E_z\left[E_\theta\left[e^{jz[u_1\cos(\omega t_1+\theta)+u_2\cos(\omega t_2+\theta)]}\right]\right]$$
$$=\int f(z)dz\cdot\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}e^{jz[u_1\cos(\omega t_1+\theta)+u_2\cos(\omega t_2+\theta)]}d\theta$$

$$= \int f(z)dz \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} e^{jz[u_1 \cos\theta' + u_2 \cos(\theta' + \omega\tau)]} d\theta' \qquad \left(\theta' = \theta + \omega t_1, 0 \sim 2\pi \text{均匀分布}\right)$$

$$= E[e^{jz[u_1 \cos\theta' + u_2 \cos(\theta' + \omega\tau)]}]$$

$\xi(t_1)$、$\xi(t_2)$二维特征函数等于$\xi(0)$、$\xi(\tau)$二维特征函数，$\xi(t)$的二维特征函数随着时间平移而不变。

同理可证，$\xi(t_1),\xi(t_2),\cdots\xi(t_n)$特征函数等于$\xi(0),\xi(t_2-t_1),\cdots\xi(t_n-t_1)$特征函数，$\xi(t_1),\xi(t_2),\cdots\xi(t_n)$的 n 维特征函数随着时间平移而不变，因此，$\xi(t)$系一严平稳随机过程。

例 3（习题 8）

设有一时间离散的马尔可夫过程$\xi(n)$，n＝0,1,2,⋯，$\xi(0)$具有概率密度函数 $f_0(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x < 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$，对于 n＝1,2,3, ⋯, 当给定$\xi(n-1) = x$时$\xi(n)$的条件概率密度均匀分布于（1-x,1）之间。问$\xi(n)$，n=0,1,2, ⋯, 是否满足严平稳的条件？

解：

由题意知转移概率与时间无关

$$f(\xi(n) = y / \xi(n-1) = x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & 1 - x < y < 1 \\ 0 & otherwise \end{cases},$$

则任意时刻的分布分析如下：

先求$\xi(1)$的分布

$$f_1(y) = \int_x f_{0,1}(x, y)dx = \int_x f_0(x) f_{1/0}(y/x)dx$$

$$= \int_{1-y}^{1} 2x \cdot \frac{1}{x} dx = 2y$$

上式的积分区间由条件转移概率的定义域给出

$1 - x < y < 1$，$1 - y < x < 1$

我们得到 $f_1(y) = f_0(y)$，由于转移概率相同，可以得到

$f_2(y) = f_0(y)$

……………….

$$f_n(y)=f_0(y)$$

任意 n 个时刻的分布与时间平移无关，即为一阶平稳随机过程。

任意 n 个时刻的联合分布:

$$\begin{aligned}
& f\left\{\xi(0)=x_0,\xi(1)=x_1,\cdots\xi(n)=x_n,\xi(n+1)=x_{n+1}\right\} \\
&\quad = f_{n+1/n}\left\{\xi(n+1)=x_{n+1}/\xi(n)=x_n\right\}\cdot f_{n/n-1}\left\{\xi(n)x_n/\xi(n-1)=x_{n-1}\right\}\cdots \\
&\qquad f_{1/0}\left\{\xi(1)=x_1/\xi(0)=x_0\right\}\cdot f_0\left\{\xi(0)=x_0\right\} \\
&\quad = f_{1/0}\left\{\xi(n+1)=x_{n+1}/\xi(n)=x_n\right\}\cdot f_{1/0}\left\{\xi(n)x_n/\xi(n-1)=x_{n-1}\right\}\cdots \\
&\qquad f_{1/0}\left\{\xi(1)=x_1/\xi(0)=x_0\right\}\cdot f_0\left\{\xi(0)=x_0\right\} \\
&\quad = f_{n+m+1/n+m}\left\{\xi(n+1)=x_{n+1}/\xi(n)=x_n\right\}\cdot f_{n+m/n+m-1}\left\{\xi(n)x_n/\xi(n-1)=x_{n-1}\right\}\cdots \\
&\qquad f_{m+1/m+0}\left\{\xi(1)=x_1/\xi(0)=x_0\right\}\cdot f_m\left\{\xi(0)=x_0\right\} \\
& f\left\{\xi(0+m)=x_0,\xi(1+m)=x_1,\cdots\xi(n+m)=x_n,\xi(n+1+m)=x_{n+1}\right\}
\end{aligned}$$

该过程为一严平稳随机过程。

例 4（例 P-9-13）随机正弦波信号的平稳特性-1

考虑随机过程 $x(t)=a\cos\omega t+b\sin\omega t$ 平稳的充分条件和必要条件

(1)考虑随机过程的均值为

$$E\left[x(t)\right]=E\left[a\right]\cos\omega t+E\left[b\right]\sin\omega t$$

$x(t)$ 的均值应该与时间无关，对于严格平稳和广义平稳随机过程其必要条件是

$$E\left[a\right]=E\left[b\right]=0$$

(2) $x(t)$ 是广义平稳随机过程的充分条件：当随机变量 a,b 不相关，且方差相等，即

$$E\left[ab\right]=0 \qquad E\left[a^2\right]=E\left[b^2\right]=\sigma^2$$

当满足此条件时，有

$$R(\tau)=\sigma\cos\omega\tau$$

证明 1：若 $x(t)$ 是广义平稳随机过程，则

$$E\left[x^2(0)\right]=E\left[x^2(\pi/2\omega)\right]=R(0)$$

但是 $x(0)=a,\quad x(\pi/2\omega)=b$，因此有 $E\left[a^2\right]=E\left[b^2\right]=\sigma^2$，进一步有

$$
\begin{aligned}
&E\left[x(t+\tau)x(t)\right] \\
&\quad = E\left\{\left[a\cos\omega\left(t+\tau\right)+b\sin\omega\left(t+\tau\right)\right]\left[a\cos\omega t+b\sin\omega t\right]\right\} \\
&\quad = \sigma^2\cos\omega\tau+E\left[ab\right]\sin\omega\left(2t+\tau\right)
\end{aligned}
$$

仅当$E\left[ab\right]=0$，自相关函数与 t 无关，$x(t)$才是广义平稳随机过程。

证明 2：反之，若$E\left[ab\right]=0$　　$E\left[a^2\right]=E\left[b^2\right]=\sigma^2$，$x(t)$的自相关函数是

$$E\left[x(t+\tau)x(t)\right]=\sigma^2\cos\omega\tau$$

故$x(t)$是广义平稳随机过程。

(3)严格平稳情况，当且仅当随机变量a,b的联合概率密度函数是圆对称的，即$f(a,b)=f\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)$, $x(t)$才是严格平稳的随机过程。

证明

关于极坐标变换：见附录

1：若$x(t)$是严格平稳的随机过程，则$x(0)=a$,　$x(\pi/2\omega)=b$以及随机变量

$$x(t)=a\cos\omega t+b\sin\omega t,\quad x(t+\pi/2\omega)=b\cos\omega t-a\sin\omega t$$

有相同的概率分布函数，则随机变量a,b的概率密度函数$f(a,b)$必须是圆对称的。

证明 2：

若$f(a,b)$是圆对称的，证明$x(t)$是严格平稳的随机过程。设τ是一个给定的数，令

$$a_1=a\cos\omega\tau+b\sin\omega\tau,\quad b_1=b\cos\omega\tau-a\sin\omega\tau$$

$$
\begin{aligned}
a_1^2+b_1^2 &= \left[a\cos\omega\tau+b\sin\omega\tau\right]^2+\left[b\cos\omega\tau-a\sin\omega\tau\right]^2 \\
&= a^2\left[\cos^2\omega\tau+\sin^2\omega\tau\right]+b^2\left[\cos^2\omega\tau+\sin^2\omega\tau\right] \\
&= a^2+b^2
\end{aligned}
$$

由此构造过程

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= a_1\cos\omega t+b_1\sin\omega t \\
&= \left(a\cos\omega\tau+b\sin\omega\tau\right)\cos\omega t+\left(b\cos\omega\tau-a\sin\omega\tau\right)\sin\omega t \\
&= a\left(\cos\omega t\cos\omega\tau-\sin\omega t\sin\omega\tau\right)+b\left(\cos\omega t\sin\omega\tau+\sin\omega t\cos\omega\tau\right)\qquad x(t)\text{ 和 }x_1(t) \\
&= a\cos\omega\left(t+\tau\right)+b\sin\omega\left(t+\tau\right) \\
&= x(t+\tau)
\end{aligned}
$$

的统计特性分别由随机变量a,b以及a_1,b_1的联合概率密度函数$f(a,b)$，来确定，他们是圆对称，就具有相同的联合概率密度函数，过程$x(t)$和$x_1(t)$具有相同的统计特性。

例 5（例 P-9-14）随机正弦波信号的平稳特性-2

给定一个随机变量ω，其概率密度函数为$f(\omega)$，随机变量φ在区间$[0,2\pi]$内均匀分布，且与ω独立。构造随机过程$x(t)=a\cos\left(\omega t+\varphi\right)$,证明$x(t)$的均值为零，自相关函数为

$R_x(\tau)=\dfrac{a^2}{2}E\left[\cos\omega\tau\right]=\dfrac{a^2}{2}\mathrm{Re}\,\Phi_\omega(\tau)$,其中，

$\Phi_\omega(\tau)=E\left[e^{j\omega\tau}\right]=E\left[\cos\omega\tau\right]+jE\left[\sin\omega\tau\right]$

证明：

首先求均值过程

$$\begin{aligned}E\left[x(t)\right]&=E\left[a\cos\left(\omega t+\varphi\right)\right]\\&=E_\omega\left\{E_\varphi\left[a\cos\left(\omega t+\varphi\right)\middle|\omega\right]\right\}\\&=E_\omega\left\{E_\varphi\left[a\cos\omega t\cos\varphi-a\sin\omega t\sin\varphi\middle|\omega\right]\right\}\\&=E_\omega\left\{a\cos\omega t\cdot E_\varphi\left[\cos\varphi\middle|\omega\right]\right\}-E_\omega\left\{a\sin\omega t\cdot E_\varphi\left[\sin\varphi\middle|\omega\right]\right\}\end{aligned}$$

其中

$$E_\varphi\left[\cos\varphi\middle|\omega\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\varphi d\varphi=0$$

$$E_\varphi\left[\sin\varphi\middle|\omega\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin\varphi d\varphi=0$$

于是有

$$E\left[x(t)\right]=E\left[a\cos\left(\omega t+\varphi\right)\right]=0$$

同理可得

$$E\left[a\cos\left(2\omega t+\omega\tau+2\varphi\right)\right]=0$$

接着求相关函数

$$
\begin{aligned}
R_x(\tau) &= E\left[a\cos\left(\omega\left(t+\tau\right)+\varphi\right)a\cos\left(\omega t+\varphi\right)\right] \\
&= \frac{a^2}{2}E\left[\cos\left(\omega\left(t+\tau\right)+\varphi-\left(\omega t+\varphi\right)\right)+\cos\left(\omega\left(t+\tau\right)+\varphi+\left(\omega t+\varphi\right)\right)\right] \\
&= \frac{a^2}{2}E\left[\cos\omega\tau+\cos\left(2\omega t+\omega\tau+2\varphi\right)\right] \\
&= \frac{a^2}{2}E\left[\cos\omega\tau\right]
\end{aligned}
$$

定 义 ，

$\Phi_{\omega}(\tau)=E\left[e^{j\omega\tau}\right]$，则有

$$
\begin{aligned}
&\Phi_{\omega}(\tau)=E\left[e^{j\omega\tau}\right]=E\left[\cos\omega\tau\right]+jE\left[\sin\omega\tau\right] \\
&\operatorname{Re}\Phi_{\omega}(\tau)=E\left[\cos\omega\tau\right]
\end{aligned}
$$

$$
R_x(\tau)=\frac{a^2}{2}E\left[\cos\omega\tau\right]=\frac{a^2}{2}\operatorname{Re}\Phi_{\omega}(\tau)
$$

附录：

1. 重要不等式

1.1. 随机变量均值的模小于等于随机变量模的均值，即$\left|E(X)\right| \le E(\left|X\right|)$

证明：

$$\left|E(X)\right| = \left|\sum_i x_i p(x_i)\right|$$

$$E(\left|X\right|) = \sum_i \left|x_i\right| p(x_i) = \sum_i \left|x_i p(x_i)\right|$$，其中 $p(x_i) > 0$

由定理$\left|a+b\right| \le \left|a\right| + \left|b\right|$可得

$$\left|E(X)\right| \le E(\left|X\right|)$$

1.2. Schwarta 不等式：

Schwarta 不等式：设（X，Y）为一随机向量，若$E(X^2), E(Y^2)$存在，则$E(XY)$也存在，且$[E(XY)]^2 \le E(X^2)E(Y^2)$

证明：

定义实变量 t 的二次函数（X，Y 为随机变量）为

$$u(t) = E\left(t\left|X\right| - \left|Y\right|\right)^2 = t^2 E(\left|X\right|^2) - 2tE(\left|X\right|\left|Y\right|) + E(\left|Y\right|^2)$$

因为对一切 t，必然有$\left(t\left|X\right| - \left|Y\right|\right)^2 \ge 0$，从而$u(t) \ge 0$，于是方程要么无实根，要么有一个重根，即判别式非正，从而

$$\left[E\left\{\left|X\right|\left|Y\right|\right\}\right]^2 - E\left\{\left|X\right|^2\right\}E\left\{\left|Y\right|^2\right\} \le 0$$

即，

$$\left[E\left\{\left|XY\right|\right\}\right]^2 \le \left[E\left\{\left|X\right|\left|Y\right|\right\}\right]^2 \le E\left\{\left|X\right|^2\right\}E\left\{\left|Y\right|^2\right\}$$

第二个不等式，

Schwarta 不等式的其他表示：

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right|^2 \le \int_a^b \left|f(x)\right|^2 dx \cdot \int_a^b \left|g(x)\right|^2 dx$$ 当且仅当 $f(x) = kg^*(x)$ 时等式成立。

证明：

显然有

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)||g(x)|dx$$

等号成立当且仅当函数总是正的或总是负的情形。

考虑二次型

$$\begin{aligned} I(z) &= \int_a^b \left||f(x)| - z|g(x)|\right|^2 dx \\ &= z^2\int_a^b |g(x)|^2 dx - 2z\int_a^b \left[|f(x)||g(x)|\right]dx + \int_a^b |f(x)|^2 dx \\ &\ge 0 \end{aligned}$$

则有

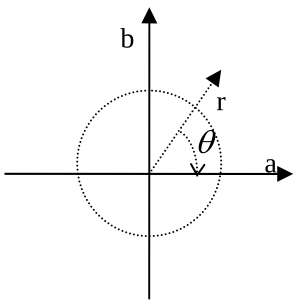
$$\left[\int_a^b |f(x)||g(x)|dx\right]^2 \le \int_a^b |f(x)|^2 dx \cdot \int_a^b |g(x)|^2 dx$$

可以得到

$$\left[\left|\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx\right|\right]^2 \le \int_a^b |f(x)|^2 dx \cdot \int_a^b |g(x)|^2 dx$$

上述不等式在本节二阶矩随机过程性质中有应用。

2. 极坐标表示



$$\begin{aligned} a\cos\omega t + b\sin\omega t &= \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\omega t + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\omega t\right) \\ &= r\left(\cos\theta\cos\omega t + \sin\theta\sin\omega t\right) \\ &= r\cos(\omega t - \theta) \end{aligned}$$

用幅度、相位表示的正弦信号为极坐标系下的表示形式；

而用同相分量、正交分量的表示的正弦信号为直角坐标系下的表示形式。

幅度 r、相位θ相互统计独立且相位θ在$[0,2\pi]$均匀分布等价于同相分量、正交分量a,b的联合概率密度函数是圆对称的。