窄带实平稳随机过程

- 1 概述
  - 确定性窄带信号
    - 窄带信号的数学表达式
    - 同相分量、正交分量
    - 包络和相位分量
  - 窄带实平稳信号的 Hilbert 变换
    - Hilbert 变换（冲击响应、频率响应）和等效的线性系统
    - 窄带实平稳信号和它的 Hilbert 变换，它们的自相关函数和功率谱
    - 窄带实平稳信号和它的 Hilbert 变换，它们的互相关函数和互功率谱
- 2 线性调制过程（1）
  - 由两个均值为零实宽平稳过程 $a(t)$ 、 $b(t)$ ，常数 ω_0 ，构造线性调制过程
  - 线性调制过程的广义平稳的条件
  - 构造线性调制过程的对偶过程
  - 线性调制过程的复数表示
  - 线性调制过程相关函数和功率谱
  - 单边带调制过程
- 3 线性调制过程（2）
  - 由线性调制过程 $\xi(t)$ 构造对偶过程，解析信号
  - 等效低通信号
    - 定义、频谱、功率谱，数学表达式
    - 时域表示，等效低通信号，它的同相分量、正交分量
    - 窄带实平稳信号和它的 Hilbert 变换，它们的同相分量、正交分量
- 4 计算调制过程分量的相关函数和功率谱
  - 自相关函数和功率谱
    - $x_c(t)$ 、 $x_s(t)$ 的自相关函数和自功率谱
  - 互相关函数和功率谱
    - $x_c(t), x_s(t)$ ； $x_s(t), x_c(t)$ 的互相关函数和互功率谱
  - 相关函数和相关矩阵进一步讨论

    定理：

    窄带实平稳的随机过程的功率谱、时域的同相分量和正交分量表示、同相分量和正交分量的自功率谱、同相分量和正交分量的互功率谱、
  - 相关函数和功率谱密度的小结
- 5 窄带实平稳随机过程的相关函数和相关矩阵：
  - 相关函数
  - 相关矩阵

1 概述

1.1 确定性窄带信号

窄带信号，信号的频谱分量仅仅集中在载波频率附近。

窄带信号的数学表达式是：

$$\begin{aligned} x(t) &= V(t)\cos\left(2\pi f_c t - \phi(t)\right) \\ &= V(t)\cos\phi(t)\cos 2\pi f_c t + V(t)\sin\phi(t)\sin 2\pi f_c t \\ &= x_c(t)\cos 2\pi f_c t + x_s(t)\sin 2\pi f_c t \end{aligned}$$

同相分量、正交分量分别是：

$$\begin{aligned} x_c(t) &= V(t)\cdot\cos\phi(t) \\ x_s(t) &= V(t)\cdot\sin\phi(t) \end{aligned}$$

包洛和相位分量分别是：

$$V(t) = \sqrt{(x_c(t))^2 + (x_s(t))^2}$$

$$\phi(t) = \tan^{-1}\left[\frac{x_s(t)}{x_c(t)}\right]$$

1.2 窄带实平稳信号的 Hilbert 变换

Hilbert 变换和等效的线性系统

如果把变换看作一个线性系统，Hilbert 变换的频率响应和冲击响应分别是

$$H(jf) = -j\cdot\operatorname{sgn} f$$

$$h(t) = \frac{1}{\pi t}$$

随机过程 $\xi(t)$ 的 Hilbert 变换记作 $\hat{\xi}(t)$

$$\hat{\xi}(t) = \int \frac{1}{\pi u}\xi(t-u)du = \int \frac{1}{\pi(t-u)}\xi(u)du$$

窄带实平稳信号和它的 Hilbert 变换的自相关函数、互相关函数、功率谱和互功率谱：

它们的相关函数和功率谱是

$$P_{\hat{\xi}}(f) = |H(f)|^2 P_{\xi}(f) = P_{\xi}(f)$$

$$R_{\hat{\xi}}(\tau) = R_{\xi}(\tau)$$

它们的互相关函数和互功率谱是

$$
\begin{aligned}
&P_{\hat{\xi}\xi}(f)=H(f)P_{\xi}(f)=-j\cdot\operatorname{sgn}(f)\cdot P_{\xi}(f)\\
&P_{\xi\hat{\xi}}(f)=H^{*}(f)P_{\xi}(f)=j\operatorname{sgn}(f)\cdot P_{\xi}(f)\\
&R_{\hat{\xi}\xi}(\tau)=-R_{\xi\hat{\xi}}(\tau)
\end{aligned}
$$

2 线性调制过程（1）

2.1 构造线性调制过程

线性调制过程：

给定两个均值为零实宽平稳过程 $a(t)$、$b(t)$，常数 ω_0，构造过程 $x(t)$，

$$
\begin{aligned}
x(t)&=a(t)\cos\omega_0 t-b(t)\sin\omega_0 t\\
&=r(t)\cos\left[\omega_0 t+\varphi(t)\right]
\end{aligned}
$$

其中振幅过程 $r(t)$、相位过程 $\varphi(t)$

$$
r(t)=\sqrt{a^2(t)+b^2(t)}\qquad tg\varphi(t)=b(t)/a(t)
$$

该过程是具有振幅调制 $r(t)$ 和相位调制的调制过程。

2.2 线性调制过程的广义平稳的条件

线性调制过程是广义平稳充分必要条件

定理：当且仅当过程 $a(t),b(t)$ 满足下列条件：

$$
R_{aa}(\tau)=R_{bb}(\tau),\quad R_{ab}(\tau)=-R_{ba}(\tau)
$$

时，$x(t)$ 才是广义平稳的。

证明：

$$
\begin{aligned}
E\left[x(t)\right]&=E\left[a(t)\cos\omega_0 t-b(t)\sin\omega_0 t\right]\\
&=E\left[a(t)\right]\cos\omega_0 t-E\left[b(t)\right]\sin\omega_0 t=0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x(t+\tau)x(t) = & \left[a(t+\tau)\cos\omega_0\left(t+\tau\right) - b(t+\tau)\sin\omega_0\left(t+\tau\right)\right] \\
& \left[a(t)\cos\omega_0 t - b(t)\sin\omega_0 t\right] \\
& = a(t+\tau)a(t)\cos\omega_0\left(t+\tau\right)\cos\omega_0 t \\
& +b(t+\tau)b(t)\sin\omega_0\left(t+\tau\right)\sin\omega_0 t \\
& -a(t+\tau)b(t)\cos\omega_0\left(t+\tau\right)\sin\omega_0 t \\
& -b(t+\tau)a(t)\sin\omega_0\left(t+\tau\right)\cos\omega_0 t \\
& = \frac{1}{2}a(t+\tau)a(t)\left(\cos\omega_0\left(2t+\tau\right) + \cos\omega_0\tau\right) \\
& +\frac{1}{2}b(t+\tau)b(t)\left(\cos\omega_0\tau - \cos\omega_0\left(2t+\tau\right)\right) \\
& +\frac{1}{2}a(t+\tau)b(t)\left(\sin\omega_0\tau - \sin\omega_0\left(2t+\tau\right)\right) \\
& -\frac{1}{2}b(t+\tau)a(t)\left(\sin\omega_0\tau + \sin\omega_0\left(2t+\tau\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E\{x(t+\tau)x(t)\} = & \frac{1}{2}R_{aa}(\tau)\left(\cos\omega_0\left(2t+\tau\right) + \cos\omega_0\tau\right) \\
& +\frac{1}{2}R_{bb}(\tau)\left(\cos\omega_0\tau - \cos\omega_0\left(2t+\tau\right)\right) \\
& +\frac{1}{2}R_{ab}(\tau)\left(\sin\omega_0\tau - \sin\omega_0\left(2t+\tau\right)\right) \\
& -\frac{1}{2}R_{ba}(\tau)\left(\sin\omega_0\tau + \sin\omega_0\left(2t+\tau\right)\right) \\
& = \frac{1}{2}\left[R_{aa}(\tau) + R_{bb}(\tau)\right]\cos\omega_0\tau \\
& +\frac{1}{2}\left[R_{aa}(\tau) - R_{bb}(\tau)\right]\cos\omega_0\left(2t+\tau\right) \\
& +\frac{1}{2}\left[R_{ab}(\tau) - R_{ba}(\tau)\right]\sin\omega_0\tau \\
& -\frac{1}{2}\left[R_{ab}(\tau) + R_{ba}(\tau)\right]\sin\omega_0\left(2t+\tau\right)
\end{aligned}
$$

1：如果 $a(t), b(t)$ 满足 $R_{aa}(\tau) = R_{bb}(\tau), \quad R_{ab}(\tau) = -R_{ba}(\tau)$，则有

$$R_{xx}(\tau) = E\left[x(t+\tau)x(t)\right] = R_{aa}(\tau)\cos\omega_0\tau + R_{ab}(\tau)\sin\omega_0\tau$$

$x(t)$ 是广义平稳的。

2：如果 $x(t)$ 是广义平稳的，上式后边两项必须与 t 无关，

则条件 $R_{aa}(\tau) = R_{bb}(\tau), \quad R_{ab}(\tau) = -R_{ba}(\tau)$ 满足。

2.3 构造线性调制过程的对偶过程

线性调制过程 $x(t)$ 的对偶过程

$$y(t)=b(t)\cos\omega_0 t+a(t)\sin\omega_0 t$$

它也是广义平稳的，且有，

$$R_{yy}(\tau)=R_{xx}(\tau)\qquad R_{xy}(\tau)=-R_{yx}(\tau)$$
$$R_{xy}(\tau)=R_{ab}(\tau)\cos\omega_0\tau-R_{aa}(\tau)\sin\omega_0\tau$$

其中 $x(t)=a(t)\cos\omega_0 t-b(t)\sin\omega_0 t$

$$\begin{aligned}
x(t+\tau)y(t)=&\left[a(t+\tau)\cos\omega_0(t+\tau)-b(t+\tau)\sin\omega_0(t+\tau)\right]\\
&\left[b(t)\cos\omega_0 t+a(t)\sin\omega_0 t\right]\\
=&\,a(t+\tau)b(t)\cos\omega_0(t+\tau)\cos\omega_0 t\\
&-b(t+\tau)a(t)\sin\omega_0(t+\tau)\sin\omega_0 t\\
&+a(t+\tau)a(t)\cos\omega_0(t+\tau)\sin\omega_0 t\\
&-b(t+\tau)b(t)\sin\omega_0(t+\tau)\cos\omega_0 t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{xy}(\tau)=&\,R_{ab}(\tau)\cos\omega_0(t+\tau)\cos\omega_0 t\\
&-R_{ba}(\tau)\sin\omega_0(t+\tau)\sin\omega_0 t\\
&+R_{aa}(\tau)\cos\omega_0(t+\tau)\sin\omega_0 t\\
&-R_{bb}(\tau)\sin\omega_0(t+\tau)\cos\omega_0 t\\
=&\,R_{ab}(\tau)\cos\omega_0\tau-R_{aa}(\tau)\sin\omega_0\tau
\end{aligned}$$

2.4 线性调制过程的复数表示

线性调制过程的复数表示

$$w(t)=a(t)+jb(t)$$
$$z(t)=x(t)+jy(t)=w(t)e^{j\omega_0 t}$$

$$x(t)=\mathrm{Re}\,z(t)=\mathrm{Re}\left[w(t)e^{j\omega_0 t}\right]$$

从而求得

$$a(t)=x(t)\cos\omega_0 t+y(t)\sin\omega_0 t$$
$$b(t)=y(t)\cos\omega_0 t-x(t)\sin\omega_0 t$$

2.5 线性调制过程相关函数和功率谱

线性调制过程相关函数和功率谱

线性调制过程和它的对偶过程的相关函数和功率谱

$$
\begin{aligned}
R_{xx}(\tau) &= R_{yy}(\tau) \\
&= R_{aa}(\tau)\cos\omega_0\tau + R_{ab}(\tau)\sin\omega_0\tau
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{xy}(\tau) &= -R_{yx}(\tau) \\
&= R_{ab}(\tau)\cos\omega_0\tau - R_{aa}(\tau)\sin\omega_0\tau
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_{xx}(\omega) &= S_{yy}(\omega) \\
&= \left[S_{aa}(\omega-\omega_0) + S_{aa}(\omega+\omega_0)\right]/2 \\
&\qquad - j\left[S_{ab}(\omega-\omega_0) - S_{ab}(\omega+\omega_0)\right]/2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_{xy}(\omega) &= -S_{yx}(\omega) \\
&= \left[S_{ab}(\omega-\omega_0) + S_{ab}(\omega+\omega_0)\right]/2 \\
&\qquad + j\left[S_{aa}(\omega-\omega_0) - S_{aa}(\omega+\omega_0)\right]/2
\end{aligned}
$$

复过程 $w(t)$ 的自相关函数为

$$
R_{ww}(\tau) = E\left\{\left[a(t+\tau) + jb(t+\tau)\right]\left[a(t) - jb(t)\right]\right\}
$$
$$
R_{ww}(\tau) = 2R_{aa}(\tau) - 2jR_{ab}(\tau)
$$

同样可以得到

$$
R_{zz}(\tau) = 2R_{xx}(\tau) - 2jR_{xy}(\tau)
$$

进而注意到

$$
R_{zz}(\tau) = e^{j\omega_0\tau}R_{ww}(\tau)
$$

由此可以得到

$$
S_{ww}(\omega) = 2S_{aa}(\omega) - 2jS_{ab}(\omega)
$$
$$
S_{zz}(\omega) = 2S_{xx}(\omega) - 2jS_{xy}(\omega)
$$
$$
S_{zz}(\omega) = s_{ww}(\omega-\omega_0)
$$

2.6 单边带信号的线性调制

如果 $b(t) = \hat{a}(t)$ 是 $a(t)$ 的希尔伯特变换，注意到

$$
x(t) = a(t)\cos\omega_0 t - b(t)\sin\omega_0 t
$$

$$w(t)=a(t)+jb(t)$$

则有，

$$S_{ww}(\omega)=4S_{aa}(\omega)U(\omega)$$

这是因为

$$S_{a\hat{a}}(\omega)=j4S_{aa}(\omega)\operatorname{sgn}(\omega)$$

3 线性调制过程（2）

3.1 线性调制过程构造对偶信号和解析信号

对于窄带实平稳信号，构造它的对偶信号、以及解析信号

窄带实平稳信号：$\xi(t)$

窄带实平稳信号的对偶信号：$\hat{\xi}(t)$

窄带实平稳信号的解析信号、频谱、功率谱：

解析信号的定义，它的时域表示

$$\eta(t)=\xi(t)+j\hat{\xi}(t)$$

解析信号的频谱和功率谱

$$S_\eta(f)=S_\xi(f)+jS_{\hat{\xi}}(f)=S_\xi(f)[1+\operatorname{sgn}(f)]$$

$$P_\eta(f)=P_\xi(f)[1+\operatorname{sgn}(f)]^2=4P_\xi(f)\cdot U(f)$$

在正频率部分，解析信号等于窄带实平稳信号的两倍，在负频率部分，解析信号等于零。

窄带实平稳信号的解析信号的数学表示：

注意到，

$$\begin{aligned}\xi(t)&=x_c(t)\cos 2\pi f_c t+x_s(t)\sin 2\pi f_c t\\&=x_c(t)e^{j2\pi f_c t}/2+x_c(t)e^{-j2\pi f_c t}/2+x_s(t)e^{j2\pi f_c t}/2j-x_s(t)e^{-j2\pi f_c t}/2j\end{aligned}$$

$$\hat{\xi}(t)=-jx_c(t)e^{j2\pi f_c t}/2+jx_c(t)e^{-j2\pi f_c t}/2-jx_s(t)e^{j2\pi f_c t}/2j-jx_s(t)e^{-j2\pi f_c t}/2j$$

$$j\hat{\xi}(t)=x_c(t)e^{j2\pi f_c t}/2-jx_c(t)e^{-j2\pi f_c t}/2+x_s(t)e^{j2\pi f_c t}/2j+x_s(t)e^{-j2\pi f_c t}/2j$$

$$\eta(t)=\xi(t)+j\hat{\xi}(t)=x_c(t)e^{j2\pi f_c t}-jx_s(t)e^{j2\pi f_c t}$$

3.2 等效低通信号

窄带实平稳信号的等效低通信号、同相分量、正交分量

对解析信号进行频率搬移，将它的正频率载波分量搬移到直流附近的低通分量。相应的时域表示：

$$
\begin{aligned}
&\eta(t)e^{-j2\pi f_c t} \\
&\quad=\left[x_c(t)e^{j2\pi f_c t}-jx_s(t)e^{j2\pi f_c t}\right]\cdot e^{-j2\pi f_c t} \\
&\quad=x_c(t)-jx_s(t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\eta(t)e^{-j2\pi f_c t}&=\left[\xi(t)+j\hat{\xi}(t)\right]\cdot\left[\cos 2\pi f_c t-j\sin 2\pi f_c t\right] \\
&=\left[\xi(t)\cos 2\pi f_c t+\hat{\xi}(t)\sin 2\pi f_c t\right] \\
&\quad+j\left[-\xi(t)\sin 2\pi f_c t+\hat{\xi}(t)\cos 2\pi f_c t\right]
\end{aligned}
$$

相应的实部和虚部对应相等，可以得到等效低通信号的同相分量、正交分量表示：

$$
\begin{aligned}
x_c(t)&=\xi(t)\cos 2\pi f_c t+\hat{\xi}(t)\sin 2\pi f_c t \\
x_s(t)&=\xi(t)\sin 2\pi f_c t-\hat{\xi}(t)\cos 2\pi f_c t
\end{aligned}
$$

同样可以得到实平稳窄带随机信号的同相分量、正交分量表示：

$$
\begin{aligned}
\xi(t)&=x_c(t)\cos 2\pi f_c t+x_s(t)\sin 2\pi f_c t \\
\hat{\xi}(t)&=x_c(t)\sin 2\pi f_c t-x_s(t)\cos 2\pi f_c t
\end{aligned}
$$

4 计算调制过程分量的相关函数和功率谱

4.1 $x_c(t), x_s(t)$ 的自相关函数和它们的自功率谱

(1) $x_c(t)$ 的自相关函数

$$
\begin{aligned}
R_{x_c x_c}(t_1,t_2)&=E\{x_c(t_1)x_c(t_2)\} \\
&=E\Big\{\left[\xi(t_1)\cos 2\pi f_c t_1+\hat{\xi}(t_1)\sin 2\pi f_c t_1\right] \\
&\qquad\cdot\left[\xi(t_2)\cos 2\pi f_c t_2+\hat{\xi}(t_2)\sin 2\pi f_c t_2\right]\Big\} \\
&=R_{\xi\xi}(t_1,t_2)\cdot\cos 2\pi f_c t_1\cdot\cos 2\pi f_c t_2 \\
&\quad+R_{\hat{\xi}\hat{\xi}}(t_1,t_2)\cdot\sin 2\pi f_c t_1\cdot\sin 2\pi f_c t_2 \\
&\quad+R_{\xi\hat{\xi}}(t_1,t_2)\cdot\cos 2\pi f_c t_1\cdot\sin 2\pi f_c t_2 \\
&\quad+R_{\hat{\xi}\xi}(t_1,t_2)\cdot\sin 2\pi f_c t_1\cdot\cos 2\pi f_c t_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= R_{\xi\xi}(t_1, t_2) \cdot \cos 2\pi f_c (t_1 - t_2) \\
&\quad - R_{\xi\hat{\xi}}(t_1, t_2) \cdot \sin 2\pi f_c (t_1 - t_2) \\
&= R_{\xi\xi}(\tau) \cdot \cos 2\pi f_c (\tau) - R_{\xi\hat{\xi}}(\tau) \cdot \sin 2\pi f_c (\tau)
\end{aligned}
$$

(2) $x_s(t)$ 的自相关函数

$$
\begin{aligned}
R_{x_s x_s}(t_1, t_2) &= E\left\{ x_s(t_1) x_s(t_2) \right\} \\
&= E\left\{ \left[\xi(t_1) \sin 2\pi f_c t_1 - \hat{\xi}(t_1) \cos 2\pi f_c t_1 \right] \right. \\
&\qquad \left. \cdot \left[\xi(t_2) \sin 2\pi f_c t_2 - \hat{\xi}(t_2) \cos 2\pi f_c t_2 \right] \right\} \\
&= R_{\xi\xi}(t_1, t_2) \cdot \sin 2\pi f_c t_1 \cdot \sin 2\pi f_c t_2 \\
&\qquad + R_{\hat{\xi}\hat{\xi}}(t_1, t_2) \cdot \cos 2\pi f_c t_1 \cdot \cos 2\pi f_c t_2 \\
&\qquad - R_{\xi\hat{\xi}}(t_1, t_2) \cdot \sin 2\pi f_c t_1 \cdot \cos 2\pi f_c t_2 \\
&\qquad - R_{\hat{\xi}\xi}(t_1, t_2) \cdot \cos 2\pi f_c t_1 \cdot \sin 2\pi f_c t_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= R_{\xi\xi}(t_1, t_2) \cdot \cos 2\pi f_c (t_1 - t_2) \\
&\quad - R_{\xi\hat{\xi}}(t_1, t_2) \cdot \sin 2\pi f_c (t_1 - t_2) \\
&= R_{\xi\xi}(\tau) \cdot \cos 2\pi f_c (\tau) - R_{\xi\hat{\xi}}(\tau) \cdot \sin 2\pi f_c (\tau)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{x_c x_c}(\tau) &= R_{x_s x_s}(\tau) \\
&= R_{\xi\xi}(\tau) \cdot \cos 2\pi f_c (\tau) - R_{\xi\hat{\xi}}(\tau) \cdot \sin 2\pi f_c (\tau)
\end{aligned}
$$

(3) $x_c(t), x_s(t)$ 的自功率谱

$$
\begin{aligned}
P_{x_c}(f) &= P_{x_s}(f) \\
&= \int \left[R_{\xi\xi}(\tau) \cdot \cos 2\pi f_c (\tau) - R_{\xi\hat{\xi}}(\tau) \cdot \sin 2\pi f_c (\tau) \right] \cdot e^{-j2\pi f \tau} d\tau \\
&= \frac{1}{2} \int R_{\xi\xi}(\tau) \left[e^{-j2\pi (f - f_c)\tau} + e^{-j2\pi (f + f_c)\tau} \right] d\tau \\
&\quad - \frac{1}{2j} \int R_{\xi\hat{\xi}}(\tau) \left[e^{-j2\pi (f - f_c)\tau} - e^{-j2\pi (f + f_c)\tau} \right] d\tau \\
&= \frac{1}{2} \left[P_{\xi\xi}(f - f_c) + P_{\xi\xi}(f + f_c) \right] - \frac{1}{2j} \left[P_{\xi\hat{\xi}}(f - f_c) - P_{\xi\hat{\xi}}(f + f_c) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[P_{\xi\xi}(f - f_c) + P_{\xi\xi}(f + f_c) \right] \\
&\quad - \frac{1}{2j} \left[j \operatorname{sgn}(f - f_c) P_{\xi\xi}(f - f_c) - j \operatorname{sgn}(f + f_c) P_{\xi\xi}(f + f_c) \right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_{x_c}(f) &= P_{x_s}(f) \\
&= \left[P_{\xi\xi}(f-f_c)+P_{\xi\xi}(f+f_c)\right], \qquad |f|<f_d \\
P_{x_c}(f) &= P_{x_s}(f) \\
&= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad |f|>f_d
\end{aligned}
$$

4.2 $x_c(t), x_s(t)$ 的互相关函数和它们的互功率谱

(1) $x_c(t), x_s(t)$ 的互相关函数

$$
\begin{aligned}
R_{x_c x_s}(t_1,t_2) &= E\{x_c(t_1)x_s(t_2)\} \\
&= E\Big\{\left[\xi(t_1)\cos 2\pi f_c t_1 + \hat{\xi}(t_1)\sin 2\pi f_c t_1\right] \\
&\qquad \cdot\left[\xi(t_2)\sin 2\pi f_c t_2 - \hat{\xi}(t_2)\cos 2\pi f_c t_2\right]\Big\} \\
&= R_{\xi\xi}(t_1,t_2)\cdot\cos 2\pi f_c t_1\cdot\sin 2\pi f_c t_2 \\
&\quad - R_{\hat{\xi}\hat{\xi}}(t_1,t_2)\cdot\sin 2\pi f_c t_1\cdot\cos 2\pi f_c t_2 \\
&\quad - R_{\xi\hat{\xi}}(t_1,t_2)\cdot\cos 2\pi f_c t_1\cdot\cos 2\pi f_c t_2 \\
&\quad + R_{\hat{\xi}\xi}(t_1,t_2)\cdot\sin 2\pi f_c t_1\cdot\sin 2\pi f_c t_2 \\
&= -R_{\xi\xi}(t_1,t_2)\cdot\sin 2\pi f_c(t_1-t_2) \\
&\quad - R_{\xi\hat{\xi}}(t_1,t_2)\cdot\cos 2\pi f_c(t_1-t_2) \\
&= -R_{\xi\xi}(\tau)\cdot\sin 2\pi f_c(\tau) - R_{\xi\hat{\xi}}(\tau)\cdot\cos 2\pi f_c(\tau) \\
&= R_{x_c x_s}(\tau)
\end{aligned}
$$

(2) $x_s(t), x_c(t)$ 的互相关函数

$$
\begin{aligned}
R_{x_s x_c}(t_1,t_2) &= E\{x_s(t_1)x_c(t_2)\} \\
&= E\Big\{\left[\xi(t_1)\sin 2\pi f_c t_1 - \hat{\xi}(t_1)\cos 2\pi f_c t_1\right] \\
&\qquad \cdot\left[\xi(t_2)\cos 2\pi f_c t_2 + \hat{\xi}(t_2)\sin 2\pi f_c t_2\right]\Big\} \\
&= R_{\xi\xi}(t_1,t_2)\cdot\sin 2\pi f_c t_1\cdot\cos 2\pi f_c t_2 \\
&\quad - R_{\xi\xi}(t_1,t_2)\cdot\cos 2\pi f_c t_1\cdot\sin 2\pi f_c t_2 \\
&\quad + R_{\xi\hat{\xi}}(t_1,t_2)\cdot\sin 2\pi f_c t_1\cdot\sin 2\pi f_c t_2 \\
&\quad + R_{\xi\hat{\xi}}(t_1,t_2)\cdot\cos 2\pi f_c t_1\cdot\cos 2\pi f_c t_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= R_{\xi\xi}(t_1,t_2)\cdot\sin 2\pi f_c(t_1-t_2) \\
&\quad + R_{\xi\hat{\xi}}(t_1,t_2)\cdot\cos 2\pi f_c(t_1-t_2) \\
&= R_{\xi\xi}(\tau)\cdot\sin 2\pi f_c(\tau) + R_{\xi\hat{\xi}}(\tau)\cdot\cos 2\pi f_c(\tau) \\
&= R_{x_s x_c}(\tau) \\
&= -R_{x_c x_s}(\tau)
\end{aligned}
$$

因此有，

$$
R_{x_c x_s}(\tau) = -R_{x_s x_c}(\tau)
$$

(3) $x_c(t), x_s(t)$ 的互功率谱

$$
\begin{aligned}
P_{x_c x_s}(f) &= P_{x_s x_c}(f) \\
&= \int R_{x_c x_s}(\tau)\cdot e^{-j2\pi f\tau}\,d\tau \\
&= -\int\left[R_{\xi\xi}(\tau)\cdot\sin 2\pi f_c(\tau) + R_{\xi\hat{\xi}}(\tau)\cdot\cos 2\pi f_c(\tau)\right]e^{-j2\pi f\tau}\,d\tau \\
&= -\frac{1}{2j}\int R_{\xi\xi}(\tau)\left[e^{-j2\pi(f-f_c)\tau} - e^{-j2\pi(f+f_c)\tau}\right]d\tau \\
&\quad -\frac{1}{2}\int R_{\xi\hat{\xi}}(\tau)\left[e^{-j2\pi(f-f_c)\tau} + e^{-j2\pi(f+f_c)\tau}\right]d\tau \\
&= -\frac{1}{2j}\left[P_{\xi\xi}(f-f_c) - P_{\xi\xi}(f+f_c)\right] \\
&\quad -\frac{1}{2}\left[P_{\xi\hat{\xi}}(f-f_c) + P_{\xi\hat{\xi}}(f+f_c)\right] \\
&= -\frac{1}{2j}\left[P_{\xi\xi}(f-f_c) - P_{\xi\xi}(f+f_c)\right] \\
&\quad -\frac{1}{2}\left[j\,\mathrm{sgn}(f-f_c)P_{\xi\xi}(f-f_c) - j\,\mathrm{sgn}(f+f_c)P_{\xi\xi}(f+f_c)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&P_{x_c x_s}(f) = -P_{x_s x_c}(f) \\
&= \begin{cases} j\left[P_{\xi\xi}(f-f_c) - P_{\xi\xi}(f+f_c)\right], & |f| < f_d \\ 0 & |f| > f_d \end{cases}
\end{aligned}
$$

4.3 相关函数和功率谱密度进一步讨论

$$
\begin{aligned}
R_{x_c x_c}(\tau) &= R_{x_s x_s}(\tau) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} P_{x_c x_c}(f) e^{j2\pi f \tau} df \\
&= \int_{-f_d}^{f_d} \left[P_{\xi\xi}(f-f_c) + P_{\xi\xi}(f+f_c) \right] e^{j2\pi f \tau} df \\
&= \int_{-f_d-f_c}^{f_d-f_c} P_{\xi\xi}(f-f_c) e^{j2\pi(f-f_c)\tau} d(f-f_c) \cdot e^{j2\pi f_c \tau} \\
&\qquad + \int_{-f_d+f_c}^{f_d+f_c} P_{\xi\xi}(f+f_c) e^{j2\pi(f+f_c)\tau} d(f+f_c) \cdot e^{-j2\pi f_c \tau} \\
&= \int_{f_d+f_c}^{-f_d+f_c} P_{\xi\xi}(-f'') e^{-j2\pi f'' \tau} d\left(-f''\right) \cdot e^{j2\pi f_c \tau} \\
&\qquad + \int_{-f_d+f_c}^{f_d+f_c} P_{\xi\xi}(f') e^{j2\pi f' \tau} df' \cdot e^{-j2\pi f_c \tau} \\
&= \int_{-f_d+f_c}^{f_d+f_c} P_{\xi\xi}(f) e^{-j2\pi\left(f-f_c\right)\tau} df \\
&\qquad + \int_{-f_d+f_c}^{f_d+f_c} P_{\xi\xi}(f) e^{j2\pi\left(f-f_c\right)\tau} df \\
&= 2\int_{-f_d+f_c}^{f_d+f_c} P_{\xi\xi}(f) \cdot \cos 2\pi\left(f-f_c\right)\tau \cdot df \\
&= 2\int_{0}^{\infty} P_{\xi\xi}(f) \cos[2\pi \ (f-f_c)\tau \ ] df
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{x_c x_s}(\tau) &= -R_{x_s x_s}(\tau) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} P_{x_c x_s}(f) e^{j2\pi f\tau} df \\
&= j\int_{-f_d}^{f_d} \left[P_{\xi\xi}(f-f_c) - P_{\xi\xi}(f+f_c)\right] e^{j2\pi f\tau} df \\
&= j\int_{-f_d-f_c}^{f_d-f_c} P_{\xi\xi}(f-f_c) e^{j2\pi(f-f_c)\tau} d(f-f_c)\cdot e^{j2\pi f_c\tau} \\
&\quad - j\int_{-f_d+f_c}^{f_d+f_c} P_{\xi\xi}(f+f_c) e^{j2\pi(f+f_c)\tau} d(f+f_c)\cdot e^{-j2\pi f_c\tau} \\
&= j\int_{f_d+f_c}^{-f_d+f_{cc}} P_{\xi\xi}(-f'') e^{-j2\pi f''\tau} d(-f'')\cdot e^{j2\pi f_c\tau} \\
&\quad - j\int_{-f_d+f_c}^{f_d+f_c} P_{\xi\xi}(f') e^{j2\pi f'\tau} df'\cdot e^{-j2\pi f_c\tau} \\
&= j\int_{-f_d+f_c}^{f_d+f_{cc}} P_{\xi\xi}(f) e^{-j2\pi(f-f_c)\tau} df - j\int_{-f_d+f_c}^{f_d+f_c} P_{\xi\xi}(f) e^{j2\pi(f-f_c)\tau} df \\
&= 2\int_{-f_d+f_c}^{f_d+f_{cc}} P_{\xi\xi}(f)\cdot \sin 2\pi(f-f_c)\tau\cdot df \\
&= 2\int_{0}^{\infty} P_{\xi\xi}(f)\sin[2\pi(f-f_c)\tau]df
\end{aligned}
$$

总结以上的结果，可以得到下述定理。

4.4 相关函数和功率谱密度的定理：

若$\xi(t)$是窄带实平稳的随机过程，它的功率谱$P_\xi(f)$在$f_c - f_d < |f| < f_c + f_d$区间异于零，在其他频率$P_\xi(f)$为零，则$\xi(t)$可写作

$$\xi(t) = x_c(t)\cos 2\pi f_c t + x_s(t)\sin 2\pi f_c t$$

其中$x_c(t), x_s(t)$是宽平稳随机过程，且

$$P_{x_c}(f) = P_{x_s}(f) = P_\xi(f-f_c) + P_\xi(f+f_c),\ |f| < f_d$$

$$P_{x_c}(f) = P_{x_s}(f) = 0,\ |f| > f_d$$

$$P_{x_c x_s}(f) = -P_{x_s x_c}(f) = j\left[P_\xi(f-f_c) - P_\xi(f+f_c)\right],\ |f| < f_d$$

$$P_{x_c x_s}(f) = -P_{x_s x_c}(f) = 0, \ |f| > f_d$$

$$E\{\xi^2(t)\} = E\{x_c^2(t)\} = E\{x_s^2(t)\}$$

4.5 相关函数和功率谱密度的小结：

窄带平稳随机信号同相分量和正交分量的相关函数和功率谱表示（1）

$$\begin{aligned} R_{x_c x_c}(t_1, t_2) &= R_{x_s x_s}(t_1, t_2) \\ &= R_{\xi\xi}(\tau) \cdot \cos 2\pi f_c(\tau) - R_{\xi\hat{\xi}}(\tau) \cdot \sin 2\pi f_c(\tau) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{x_c}(f) &= P_{x_s}(f) \\ &= \left[P_{\xi\xi}(f - f_c) + P_{\xi\xi}(f + f_c)\right], \qquad |f| < f_d \\ P_{x_c}(f) &= P_{x_s}(f) \\ &= 0 \qquad |f| > f_d \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{x_c x_s}(\tau) &= -R_{x_s x_c}(\tau) \\ &= -R_{\xi\xi}(\tau) \cdot \sin 2\pi f_c(\tau) - R_{\xi\hat{\xi}}(\tau) \cdot \cos 2\pi f_c(\tau) \end{aligned}$$

$$P_{x_c x_s}(f) = -P_{x_s x_c}(f)$$
$$= \begin{cases} j\left[P_{\xi\xi}(f - f_c) - P_{\xi\xi}(f + f_c)\right], & |f| < f_d \\ 0 & |f| > f_d \end{cases}$$

5 窄带实平稳随机过程的相关函数和相关矩阵

相关函数，

$$R_{x_c x_c}(0) = R_{x_s x_s}(0) = R_{\xi\xi}(0)$$
$$R_{x_c x_s}(0) = -R_{x_s x_s}(0) = 0$$

$x_c(t), x_s(t), x_c(t+\tau), x_s(t+\tau)$ 的相关矩阵，

$$R = \begin{pmatrix} R_{\xi\xi}(0) & 0 & R_{x_c x_c}(\tau) & -R_{x_c x_s}(\tau) \\ 0 & R_{\xi\xi}(0) & R_{x_c x_s}(\tau) & R_{x_c x_c}(\tau) \\ R_{x_c x_c}(\tau) & R_{x_c x_s}(\tau) & R_{\xi\xi}(0) & 0 \\ -R_{x_c x_s}(\tau) & R_{x_c x_c}(\tau) & 0 & R_{\xi\xi}(0) \end{pmatrix}$$