随机过程和无记忆系统

- 概述
- 非线性变换下的概率密度
- 非线性变换下的均值、矩

- 非线性变换下的概率密度
  - 一般情形 $y = g(x)$

    输入和输出的概率分布函数，概率密度函数。
  - 非线性函数关系， $y = ax^2$

    一般情形，概率分布函数，概率密度函数；

    输入呈高斯分布，概率密度函数；

    输入呈瑞利分布，概率密度函数。
  - 非线性函数关系， $y = \begin{cases} bx, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

    一般情形，概率分布函数，概率密度函数；

    输入呈高斯分布，概率密度函数。
- 非线性变换下的均值、矩
  - 一般情形 $y = g(x)$

    均值、矩、相关函数，
  - 非线性函数关系， $y = ax^2$

    相关函数、矩；

    输入呈高斯分布，矩；

    输入呈瑞利分布，矩。
  - 经过非线性函数关系， $y = \begin{cases} bx, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ 之后

    矩、相关函数；

    输入呈高斯分布，均值、方差，奇数阶矩、偶数阶矩；

1 无记忆系统变换的概率密度

1.1 系统的输入输出关系 $y(t)=g[x(t)]$

输入输出的概率分布特性：

已知　　输入信号 $\xi(t)$ 的分布函数：$F_{\xi;t}(x)=P_r(\xi_t\le x)$

概率密度函数：$f_{\xi;t}(x)$

输出信号 $\eta(t)$ 的分布：

如果输入输出关系是单调递增的

$$F_{\eta;t}(y)=P_r(\eta_t\le y)=P_r(\eta_t=g(x)\le y)=P_r(\xi_t\le g^{-1}(y))$$

如果输入输出关系是单调递减的

$$F_{\eta;t}(y)=P_r(\eta_t\le y)=P_r(\eta_t=g(x)\le y)=P_r(\xi_t\ge g^{-1}(y))$$

输出信号的概率密度函数是（如果输入输出关系是单调递增的、单调递减的）：

$$f_{\eta;t}(y)=f_{\xi;t}\left[x=g^{-1}(y)\right]\cdot\left|\frac{\partial x}{\partial y}\right|$$

平稳不变性：假设无记忆系统输入的随机过程是严格平稳的，它的输出也是严格平稳的输出随机过程。

证明：设输入随机过程的 N 维概率密度分布函数为 $f_{\xi;t}(x_1,x_2,\cdots,x_N;t_1,t_2,\cdots,t_N)$；

输出过程的 N 维概率密度分布函数可以表示为：

$$\begin{aligned}f_{\eta;t}(y_1,y_2,\cdots,y_N;t_1,t_2,\cdots,t_N)&=\left|\frac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_N)}{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_N)}\right|f_{\xi;t}(x_1,x_2,\cdots,x_N;t_1,t_2,\cdots,t_N)\\&=\left|\frac{\partial(x_1)}{\partial(y_1)}\frac{\partial(x_2)}{\partial(y_2)}\cdots\frac{\partial(x_N)}{\partial(y_N)}\right|f_{\xi;t}(x_1,x_2,\cdots,x_N;t_1,t_2,\cdots,t_N)\\&=\left|\frac{1}{g'(x_1)}\frac{1}{g'(x_2)}\cdots\frac{1}{g'(x_N)}\right|f_{\xi;t}(x_1,x_2,\cdots,x_N;t_1,t_2,\cdots,t_N)\\&=\frac{f_{\xi;t}(x_1,x_2,\cdots,x_N;t_1,t_2,\cdots,t_N)}{\left|g'(x_1)g'(x_2)\cdots g'(x_N)\right|}\end{aligned}$$

由于 $f_{\xi;t}(x_1,x_2,\cdots,x_N;t_1,t_2,\cdots,t_N)$ 是严格平稳的，具有平移不变性，

因此 $f_{\eta;t}(y_1,y_2,\cdots,y_N;t_1,t_2,\cdots,t_N)$ 也具有平移不变性，是严格平稳的。

1.2 系统的输入输出关系 $y = ax^2$

$y = ax^2$：非线性函数关系

输出的概率分布函数、概率密度函数

一维的概率密度函数

$$P_r(\eta_t \le y) = P_r\left\{-\sqrt{y/a} \le \xi_t \le \sqrt{y/a}\right\}$$
$$= P_r\left\{\xi_t \le \sqrt{y/a}\right\} - P_r\left\{\xi_t \le -\sqrt{y/a}\right\}$$

$$f_{\eta;t}(y) = \left[\, f_{\xi;t}(x = \sqrt{y/a}) + f_{\xi;t}(x = -\sqrt{y/a})\right] \Big/ \left[2\sqrt{ay}\right]$$

二维的概率密度函数

$$f_{\eta;t}(y_1, y_2; t_1, t_2) = \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)} \sum f_{\xi;t}(\pm\sqrt{y_1}, \pm\sqrt{y_2}; t_1, t_2) \qquad y_1 \ge 0, y_2 \ge 0$$
$$= \frac{1}{4\sqrt{y_1 y_2}} \sum f_{\xi;t}(\pm\sqrt{y_1}, \pm\sqrt{y_2}; t_1, t_2)$$

输入是高斯过程，均值为零，方差为 σ_ξ^2

$$f_{\xi;t}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\xi^2}} \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma_\xi^2}\right]$$

输出的分布是，

$$f_{\eta;t}(y) = 2\left|\frac{\partial x}{\partial y}\right| \cdot f_{\xi;t}(x = \sqrt{y/a})$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi a y \sigma_\xi^2}} \exp\left(-\frac{y}{2a\sigma_\xi^2}\right) \qquad y \ge 0$$

$$f_{\eta;t}(y) = 0 \qquad y < 0$$

输入呈瑞利分布

$$f_{\xi;t}(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sigma_\xi^2} \exp\left[-\dfrac{x^2}{2\sigma_\xi^2}\right], & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

输出的分布是，

$$f_{\eta;t}(y) = \left|\frac{\partial x}{\partial y}\right| \cdot f_{\xi;t}(x = \sqrt{y/a})$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{ay}} \frac{\sqrt{y/a}}{\sigma_\xi^2} \exp\left(-\frac{y}{2a\sigma_\xi^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2a\sigma_\xi^2} \exp\left(-\frac{y}{2a\sigma_\xi^2}\right) \qquad y \geq 0$$

$$f_{\eta;t}(y) = 0 \qquad y < 0$$

1.3 系统的输入输出关系 $y = \begin{cases} bx, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

$y = \begin{cases} bx, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$：非线性函数关系

输出过程的概率分布函数、概率密度函数

$$P_r\{\eta_t \leq y\} = 0, \qquad y < 0$$

$$P_r\{\eta_t \leq y\} = P_r\{\xi_t \leq y/b\}$$

$$= \int_{-\infty}^{y/b} f_{\xi;t}(x)dx$$

$$= P_r\{\xi_t \leq 0\} + \int_0^{y/b} f_{\xi;t}(x)dx, \qquad y \geq 0$$

$$f_{\eta;t}(y) = P_r(\xi_t < 0)\delta(y) + f_{\xi;t}(x = y/b) \cdot U(y)/b$$

如果输入是窄带实平稳高斯随机过程，均值为零，

$$f_{\xi;t}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\xi^2}} \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma_\xi^2}\right]$$

相应输出的概率密度函数是，

$$f_{\eta;t}(y) = \delta(y)/2 + \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\xi^2}} \exp\left[-\frac{y^2}{2b^2\sigma_\xi^2}\right] \cdot U(y)/b$$

1.4 系统的输入输出关系 $y = \begin{cases} +1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

$y = \begin{cases} +1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$：非线性函数关系

输出过程的概率分布函数

$$P_r\{y(t)=1\}=P_r\{x(t)\geq 0\}=1-F_x(0)$$
$$P_r\{y(t)=-1\}=P_r\{x(t)<0\}=F_x(0)$$

输出的均值

$$\begin{aligned}E\{y(t)\}&=1\times P_r\{y(t)=1\}+(-1)P_r\{y(t)=-1\}\\&=1-2F_x(0)\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}R_y(\tau)&=E\{y(t+\tau)y(t)\}\\&=1\times P_r\{y(t+\tau)y(t)=1\}+(-1)P_r\{y(t+\tau)y(t)=-1\}\\&=1\times P_r\{x(t+\tau)x(t)\geq 0\}+(-1)P_r\{x(t+\tau)x(t)\leq 0\}\end{aligned}$$

2 无记忆系统变换随机过程的均值、矩

2.1 输入输出的矩

输出的均值、n 阶矩：

$$E[\eta(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}g[x(t)]\cdot f_{\xi;t}(x)dx$$

$$E\{[\eta(t)]^n\}=\int_{-\infty}^{\infty}\{g^n[x(t)]\}\cdot f_{\xi;t}(x)dx$$

输出的相关函数：

$$R_{\eta\eta}(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}g[x(t_1)]g[x(t_2)]\cdot f_{\xi_1\xi_2,t_1t_2}[x(t_1),x(t_2)]dx$$

2.2 系统的输入输出关系 $y=ax^2$

输出的相关函数：

$$R_{\eta\eta}(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}g[x(t_1)]g[x(t_2)]\cdot f_{\xi_1\xi_2,t_1t_2}[x(t_1),x(t_2)]dx$$
$$=a^2E\left[\xi^2(t_1)\xi^2(t_2)\right]$$

输出的 n 阶矩：

$$E[\eta^n]=a^nE[\xi^{2n}]$$

高斯随机变量ξ经过非线性器件$y=ax^2$之后，求输出η的 n 阶矩：

$$E\left[\eta^n\right]=a^n E\left[\xi^{2n}\right]=a^n \sigma_\xi{}^{2n}(2n-1)\cdots 3\cdot 1$$

$$E[\eta]=a\sigma_\xi^2$$

$$E\left[\eta^2\right]=3a^2\sigma_\xi^4$$

$$D[\eta]=2a^2\sigma_\xi^4$$

瑞利随机变量ξ经过非线性器件$y=ax^2$之后，求输出η的 n 阶矩：

$$E\left[\eta^n\right]=\int_0^\infty y^n\cdot f_\eta(y)dy$$

$$=\int_0^\infty y^n\cdot\frac{1}{2a\sigma_\xi^2}\exp\left[-\frac{y}{2a\sigma_\xi^2}\right]dy$$

$$=n!\cdot a^n\sigma_\xi^{2n}$$

$$E[\eta]=a\sigma_\xi^2$$

$$E\left[\eta^2\right]=2a^2\sigma_\xi^4$$

$$D[\eta]=a^2\sigma_\xi^4$$

2.3 系统的输入输出关系 $y=\begin{cases} bx, & x\geq 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$

求输出η的 n 阶矩

$$E\left[\eta^n(t)\right]=\int_{-\infty}^\infty y^n\cdot f_{\eta;t}(y)dy$$

$$=b^n\int_0^\infty x^n\cdot f_{\xi;t}(x)dx$$

求输出η的偶数（2m）阶矩，且概率密度函数是偶函数

$$E\left[\eta^{2m}(t)\right]=b^{2m}\int_0^\infty x^{2m}\cdot f_{\xi;t}(x)dx$$

$$=\frac{b^{2m}}{2}\int_{-\infty}^\infty x^{2m}\cdot f_{\xi;t}(x)dx$$

$$=\frac{b^{2m}}{2}E\left[\xi^{2m}(t)\right]$$

输出的相关函数：

$$R_{\eta\eta}(t_1,t_2)=b^2\int_0^\infty\int_0^\infty x(t_1)x(t_2)f_{\xi_1\xi_2,t_1t_2}\left[x(t_1),x(t_2)\right]dx_1dx_2$$

如果输入是窄带实平稳高斯随机过程，均值为零，

$$E\left[\eta^{2m}(t)\right]=\frac{b^{2m}}{2}\sigma_{\xi}^{2m}(2m-1)\cdots 5\cdot 3\cdot 1$$

$$E\left[\eta^{2m+1}(t)\right]=\frac{m!}{\sqrt{2\pi}}2^{2m}b^{2m+1}\sigma_{\xi}^{2m+1}(2m-1)\cdots 5\cdot 3\cdot 1$$

$$E\left[\eta(t)\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}b\sigma_{\xi}$$

$$D\left[\eta(t)\right]=E\left[\eta^{2}(t)\right]-\left\{E\left[\eta(t)\right]\right\}^{2}$$
$$=\frac{1}{2}b^{2}\sigma_{\xi}^{2}-\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}b\sigma_{\xi}\right)^{2}=\frac{1}{2}b^{2}\sigma_{\xi}^{2}\left(1-1/\pi\right)$$

例题

（P-9-17）对于无记忆系统 $y(t)=g\left[x(t)\right]$，如果输入是零均值正态过程，自相关函数是 $R_{xx}(\tau)$，则输入和输出的互相关函数与 $R_{xx}(\tau)$ 成比例，即 $R_{xy}(\tau)=KR_{xx}(\tau)$，其中，$R_{xx}(\tau)K=E\left[g'(x(t)\right]$。