马尔可夫过程 更新过程

更新过程的基本概念

定义、更新过程的基本参数，参数间的关系

更新过程分析

计算 N(t)的概率分布

计算更新过程的期望

计算更新过程的强度

计算更新过程的速率

典型更新过程-泊松过程

泊松过程的分布特性

更新时间间隔呈负指数分布的更新过程

事件间隔、更新时刻、计数过程 N(t)、均值过程、更新过程的强度

更新过程举例：

例1、 给定一种更新间隔分布，计算更新过程 N(t)的概率分布

例 2、给定更新强度，计算更新间隔的概率分布

例 3、给定更新间隔分布，计算更新过程的速率

例 4、计算更新过程的速率

例 5、计算更新过程的速率

例 6 、事件间隔呈负指数分布的更新过程

1. 更新过程的基本概念

1.1 更新过程定义

设{N(t), t>0}是一个计数过程，x_n $(n \ge 1)$表示第 n-1 次事件和第 n 次事件的时间间隔，再设$\{x_1, x_2, \cdots\}$ 为非负、独立、同分布的随机变量序列，则称计数过程{N(t), t>0}为更新过程。

特点：根据事件间隔的特征(独立、同分布)定义；

举例：

假设灯泡的寿命是统计独立、同分布的随机变量，若每次使用一个灯泡，当灯泡损坏后立刻更换新的，则在时间 t 内损害的灯泡数是一个更新过程{N(t), t>0}，其中 N(t)是在时间 t 内损坏的灯泡数。

1.2 更新过程的基本参数及其关系

N(t)：[0，t）内发生的事件数，更新次数；

x_n：第 n 次事件的更新间隔；

S_n：第 n 次事件的更新时刻；

S_n 与 x_n 的关系：

$S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$， $S_0 = 0$ 表示过程的起始时刻；

若给定事件间隔 x_n $(n \ge 1)$的概率分布函数 F(t)，或概率密度函数 f(t) 时，设更新时刻S_n的分布函数是$F_n(t)$、概率密度函数是 $f_n(t)$，因为$S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$，$\{x_1, x_2, \cdots\}$ 为非负、独立、同分布的随机变量序列，则$F_n(t)$应是$F(t)$的 n 次卷积，$f_n(t)$应是 $f(t)$的 n 次卷积。

N(t)与 S_n 的关系：

如果$S_n < t$，则在时间 t 内，至少发生了 n 次更新，即

$$p\{S_n < t\} = p\{N(t) \ge n\}$$

如果在时间 t 内，发生了 n 次更新，则 $S_n < t, S_{n+1} \ge t$，即

$$p\{N(t) = n\} = p\{S_n < t, S_{n+1} \ge t\}$$

$$\begin{aligned} P\left\{N(t) = n\right\} &= P\left\{N(t) \ge n\right\} - P\left\{N(t) \ge n+1\right\} \\ &= P\{S_n < t\} - P\{S_{n+1} < t\} \\ &= F_n(t) - F_{n+1}(t) \end{aligned}$$

2．更新过程分析

2.1 计算 N(t)的概率分布

对于更新过程，当给定事件间隔 $x_n \quad (n \ge 1)$ 的概率分布函数 F(t)，或概率密度函数 f(t) 时，计算 N(t)的概率分布。

设 S_n 的分布函数是 $F_n(t)$， $F_n(t)$ 是 $F(t)$ 的 n 次卷积；

$P\left\{N(t) = n\right\} = F_n(t) - F_{n+1}(t)$ 。

2.2 计算更新过程的期望

$$\begin{aligned} m(t) = E\left\{N(t)\right\} &= \sum_{n=1}^{\infty} nP\left\{N(t) = n\right\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} P\left\{N(t) = n\right\} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty} P\left\{N(t) = n\right\} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P\left\{N(t) \ge k\right\} = \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{N(t) \ge n\right\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{S_n < t\right\} = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \end{aligned}$$

m(t)是更新过程的数学期望，或者是更新过程的均值，表示[0,t)内发生事件的平均次数；

2.3 计算更新过程的强度（平均强度）

更新过程的强度记为 $\lambda(t)$，表示某时刻发生更新的强度；

$\lambda(t)$ dt 表示 [t,t+dt)内发生更新事件的次数。

$$\lambda(t)=\frac{d}{dt}m(t)=\frac{d}{dt}\sum_{n=1}^{\infty}F_n(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{dt}F_n(t)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)$$

对上式两端作拉氏变换，有

$$\int_0^{\infty}\lambda(t)e^{-st}dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}f_n(t)e^{-st}dt$$

定义

$$\Lambda(s)=\int_0^{\infty}\lambda(t)e^{-st}dt\text{，}\ \phi(s)=\int_0^{\infty}f(t)e^{-st}dt\text{，}\ [\phi(s)]^n=\int_0^{\infty}f_n(t)e^{-st}dt$$

等式右端有，

$$\frac{\phi(s)}{1-\phi(s)}=\sum_{n=1}^{\infty}[\phi(s)]^n\text{，}$$

更新强度拉氏变换的结果是：

$$\Lambda(s)=\frac{\phi(s)}{1-\phi(s)}\text{，}\ \phi(s)=\frac{\Lambda(s)}{1+\Lambda(s)}$$

$$\phi(s)=\Lambda(s)-\Lambda(s)\phi(s)$$

对上式做拉氏反变换得到：

$$f(t)=\lambda(t)-\int_0^t\lambda(t-u)f(u)du$$

给定了更新过程强度 λ(t)后，更新过程间隔概率密度函数 f(t)可由上述积分方程求解。

2.4 更新过程的极限，平均更新时间与更新速率

在有限的时间内更新的次数是有限的、当时间 t 趋于无穷时，更新的次数趋于无穷，考虑到，

S_n 是第 n 次更新事件发生的时刻，

N(t)是直到时刻 t 发生更新事件的次数，

$$S_{N(t)}<t\le S_{N(t)+1}$$

$$\frac{S_{N(t)}}{N(t)} < \frac{t}{N(t)} \le \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)}$$

其中 $\frac{S_{N(t)}}{N(t)} = \sum_{i=0}^{N(t)} x_i \Big/ N(t)$ 是 t 时间内 N(t)个同分布独立随机变量的平均值，

$$\frac{S_{N(t)}}{N(t)} < \frac{t}{N(t)} \le \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)+1} \cdot \frac{N(t)+1}{N(t)}$$

其中 $(N(t)+1)/N(t)$ 随着 t 趋于无穷趋于 1，

上述不等式两端随着 t 趋于无穷，都趋于 μ，

因此有，

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = 1/\mu$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t}{N(t)} = \mu$$

1/μ 称为更新过程的速率：单位时间内的更新次数；

μ 称为更新过程的平均更新时间：平均的更新间隔。

3. 从更新过程研究泊松过程

12.2.1 泊松过程和更新过程：

泊松过程的分布特性：

在(0,t)时间间隔内发生 n 个事件的概率是 $\frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$，

从 0 时间开始，到 t 时刻发生第 1 次事件的概率密度是 $\lambda e^{-\lambda t}$

从 0 时间开始，到 t 时刻发生第 2 次事件的概率密度是 $\lambda \cdot \frac{\lambda t}{1!} e^{-\lambda t}$

从 0 时间开始，到 t 时刻发生第 n 次事件的概率密度是 $\lambda \cdot \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}$

泊松过程中事件之间的时间间隔是呈负指数分布

泊松过程是更新时间间隔呈负指数分布的更新过程

事件间隔 x 呈负指数分布： $f(t) = \lambda e^{-\lambda t} = f_1(t)$

更新时刻的概率密度函数：

$S_0=0$，表示过程的起始时刻；

$S_1=x_1$，表示过程的第一次更新时刻；

$S_1=x_1$与事件间隔 x 的分布相同，呈负指数分布：$f(t)=\lambda e^{-\lambda t}=f_1(t)$，

$S_2=x_1+x_2$，表示过程第一次更新时刻，它的分布是；$f_2(t)=\lambda\cdot\lambda te^{-\lambda t}$

$$
\begin{aligned}
&S_2=x_1+x_2,\\
&f(t)=f_1(t)\otimes f_2(t)\\
&\qquad=\int_0^t \lambda e^{-\lambda(t-\mu)}\cdot\lambda e^{-\lambda\mu}d\mu\\
&\qquad=\int_0^t e^{-\lambda t}\cdot\lambda^2 d\mu\\
&\qquad=\lambda\cdot\lambda te^{-\lambda t}
\end{aligned}
$$

$S_n=\sum_{i=1}^{n}x_i$，表示过程的第 n 次更新时刻；$f_n(t)=\lambda\cdot\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda t}$

应用数学归纳法可以证明

更新时刻的概率密度函数：

$$F_1(t)=\int_0^t f(t)dt=\int_0^t\lambda e^{-\lambda t}dt=1-e^{-\lambda t}$$

$$F_2(t)=\int_0^t f_2(t)dt=\int_0^t\lambda\cdot\lambda te^{-\lambda t}=1-e^{-\lambda t}-\lambda te^{-\lambda t}$$

$\cdots$

$$
\begin{aligned}
F_n(t)&=\int_0^t\lambda\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda t}dt\\
&=1-e^{-\lambda t}-(\lambda t)e^{-\lambda t}-\cdots-\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda t}\\
&=1-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(\lambda t)^i}{i!}e^{-\lambda t}\\
&=\sum_{i=n}^{\infty}\frac{(\lambda t)^i}{i!}e^{-\lambda t}
\end{aligned}
$$

泊松过程作为更新过程的概率分布函数

$$P\{N(t)=k\}=F_k(t)-F_{k+1}(t)$$

$$=\left[1-\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(\lambda t)^i}{i!}e^{-\lambda t}\right]-\left[1-\sum_{i=0}^{k}\frac{(\lambda t)^i}{i!}e^{-\lambda t}\right]=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$$

泊松过程作为更新过程的均值过程

$$m(t)=\sum_{n=1}^{\infty}F_n(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[1-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(\lambda t)^i}{i!}e^{-\lambda t}\right]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^i}{i!}e^{-\lambda t}-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(\lambda t)^i}{i!}e^{-\lambda t}\right]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=n}^{\infty}\frac{(\lambda t)^i}{i!}e^{-\lambda t}=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{i}\frac{(\lambda t)^i}{i!}e^{-\lambda t}$$

$$=e^{-\lambda t}\sum_{i=1}^{\infty}i\frac{(\lambda t)^i}{i!}=e^{-\lambda t}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{i-1}}{(i-1)!}\lambda t$$

$$=\lambda t\cdot e^{-\lambda t}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^i}{i!}=\lambda t$$

泊松过程作为更新过程的强度

$$\lambda(t)=\frac{d}{dt}m(t)=\lambda$$

结论：泊松过程是更新强度是常数的更新过程。

4．更新过程举例

例 1、计算更新过程 N(t)的概率分布

设更新过程的更新间隔 x_n $(n\geq 1)$ 是非负整数的随机变量，且 $P\{x_n=i\}=p(1-p)^{i-1}$， $i\geq 1$，求更新过程 N(t)的概率分布。

分析：

更新间隔 x_n 呈几何分布， x_n=i 是由 $(i-1)$ 个继续工作事件的时间间隔和 1 个结束工作的时间间隔组成，每一个时间间隔上，发生继续工作事件的概率为 $(1-p)$，发生结束工作事件的概率为 p 。每一个更新间隔可视为一个两状态(工作、结束工作)的马尔可夫链，结束工作的状态为吸收态，导致当前的间隔结束，进入下一次

更新。

$S_n \quad (n \geq 1)$ 是由 n 个相互独立的 $x_m(m=1,2,\cdots n)$ 组成。S_n=k 由 k 个时间间隔构成，表示经过 k 个时间间隔发生了 n 次更新事件(结束工作的事件)。k 个时间间隔的最后一个时间间隔对应概率为 p 的结束工作的 1 个时间间隔，在它之前，总共有 $(k-1)$ 个时间间隔，其中有 $(n-1)$ 个概率为 p 的结束工作事件的时间间隔，$(k-n)$ 个概率为 $(1-p)$ 的继续工作事件的时间间隔。

S_n 的概率分布为：

$$P\{S_n = k\} = \begin{cases} \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n} & (k \geq n) \\ 0 & (k < n) \end{cases}$$

S_n 的分布函数为：

$$\begin{aligned} F_n(t) &= P\{S_n \leq t\} \\ &= \sum_{k=n}^{t} P\{S_n = k\} \\ &= \sum_{k=n}^{t} \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n} \end{aligned}$$

则 $N(t)$ 的概率分布为：

$$\begin{aligned} P\{N(t)=n\} &= F_n(t) - F_{n+1}(t) \\ &= \sum_{k=n}^{t} \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n} - \sum_{k=n+1}^{t} \binom{k-1}{n} p^{n+1} (1-p)^{k-n-1} \end{aligned}$$

例 2、计算更新间隔的概率分布

某更新过程自时间 t 开始，它的强度是常数λ，求该更新过程{N(t), t>0}的时间间隔 x_n 的概率密度。

解：

若更新强度为λ，其对应的拉氏变换为：

$$\Lambda(s) = \int_0^{\infty} \lambda(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \lambda\, e^{-st} dt = \frac{\lambda}{s}$$

设 x_n 的概率密度函数 f(t)的拉氏变换为 $\phi(s)$，根据 $\phi(s)=\dfrac{\Lambda(s)}{1+\Lambda(s)}$ 得：

$$\phi(s)=\frac{\dfrac{\lambda}{s}}{1+\dfrac{\lambda}{s}}=\frac{\lambda}{\lambda+s}$$

则 x_n 的概率密度函数 f(t)为：

$$f(t)=L^{-1}\{\phi(s)\}=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t} & t\ge 0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

更新间隔的分布服从参数为 λ 的负指数分布，则更新计数过程服从参数为 λ 的泊松分布。

结论：

更新强度是常数的更新计数过程服从泊松分布，更新间隔服从负指数分布。

例 3、计算更新过程的速率

当电池失效时，立刻更换新的电池。电池的寿命是在 30 小时到 60 小时均匀分布的随机变量，问长时间工作情况下，更换电池的速率？

解：

电池的平均寿命为：

$$\mu=\int_{30}^{60} t\cdot\frac{1}{30}dt=45$$

长时间工作的条件下，电池更新的速率是

$$\lim_{t\to\infty}\frac{N(t)}{t}=1/\mu$$

平均每 45 小时更新一次电池。

例 4、计算更新过程的速率

当电池失效时，立刻到市场去购买同一型号的电池，获得新电池的时间也是一个均匀分布的随机变量，均匀分布于 0 到 1 小时之间，问长时间工作情况下，更换电池的速率？

解,

设第 i 次电池使用的时间是 x_i，购买电池的时间是 u_i，它们都是随机变量，

则平均更新间隔为:

$$\mu = E[x_i] + E[u_i]$$

$$E[x_i] = \int_{30}^{60} t \cdot \frac{1}{30} dt = 45$$

$$E[u_i] = \int_{0}^{1} t \cdot 1 dt = 1/2$$

$$\mu = 45.5$$

平均每 45.5 小时更新一次电池。

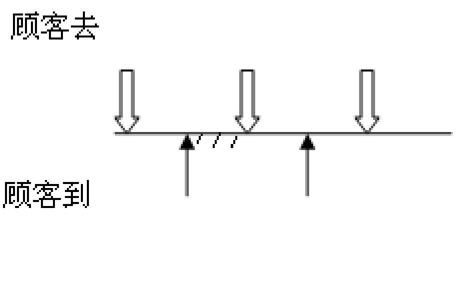
例 5、计算更新过程的速率

顾客以泊松律到达银行，到达率为 λ。顾客到达时，如果服务员空闲，他就进入银行接受服务，如果到达时服务员正在接待顾客他就离去，顾客接受服务的时间是一个随机变量，服从某种服务规律 G，平均值是 μ_G。问顾客进入银行的速率，进入银行的顾客占潜在顾客的比例。

解:

分析：

首先分析顾客离开银行的速率。将顾客离开银行的事件视为更新事件，即一个顾客离开银行到下一个顾客离开银行为一个更新间隔。



更新间隔 x_k 包括两段时间间隔：第一段时间间隔 y_k，前一个顾客离去，到下一个顾客到来，第二段时间间隔 z_k，新到来的顾客接受服务直到离开。

$$x_k = y_k + z_k$$

由于顾客以泊松到达率到达银行，因而到达的时间间隔是参数为 λ 的无记忆

的负指数分布，到达时间的间隔的均值为$1/\lambda$，根据负指数分布的无记忆特性，从上一个顾客离开的时刻到下一个顾客到达的时间间隔也是参数λ为的负指数分布，均值为$1/\lambda$，即$E\left[y_k\right]=1/\lambda$

而顾客接受服务的时间的均值$E\left[Z_k\right]$已知为 μ_G

因此，顾客接受服务离开系统的间隔的均值为：

$$\mu = E\left[x_k\right] = E\left[y_k\right] + E\left[z_k\right] = 1/\lambda + \mu_G$$

顾客以同样的速率到达系统接受服务。

则：顾客进入系统接受服务的速率为：

$$\lambda_{入} = \frac{1}{1/\lambda + \mu_G} = \frac{\lambda}{1+\lambda\mu_G}$$

潜在顾客以λ的速率到达银行，其中部分顾客以$\lambda_{入}$的速率进入银行接收服务，其它顾客则为接受服务即离去，则进入银行的顾客与潜在顾客的比例为：

$$\lambda_{入}/\lambda = \frac{1}{1/\lambda + \mu_G}\Big/\lambda = \frac{1}{1+\lambda\mu_G}$$

例 6 事件间隔呈负指数分布的更新过程

如果事件的间隔是负指数分布，事件的时间间隔的概率密度函数和概率分布函数是：

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t},$$

$$F(t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda t}$$

于是有，

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

$$f_2(t) = f(t) \otimes f(t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda u} \cdot \lambda e^{-\lambda(t-u)} du = \lambda t\, e^{-\lambda t} \cdot \lambda$$

$$f_3(t) = \frac{(\lambda t)^2}{2!} e^{-\lambda t} \cdot \lambda$$

$$\cdots \qquad \cdots$$

$$f_n(t) = \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} \cdot \lambda$$

$$\cdots \qquad \cdots$$

$$F(t)=\int_0^t f(t)dt=\int_0^t \lambda e^{-\lambda t}dt=1-e^{-\lambda t}$$

$$F_2(t)=\int_0^t f_2(t)dt=\int_0^t \lambda t\, e^{-\lambda t}\cdot\lambda dt=1-e^{-\lambda t}-\lambda t\, e^{-\lambda t}$$

$$F_3(t)=\int_0^t f_3(t)dt=\int_0^t \frac{(\lambda t)^2}{2!}e^{-\lambda t}\cdot\lambda dt=1-e^{-\lambda t}-\lambda t\, e^{-\lambda t}-\frac{(\lambda t)^2}{2!}e^{-\lambda t}$$

$$\cdots \qquad \cdots$$

$$F_n(t)=\int_0^t f_n(t)dt=\int_0^t \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda t}\cdot\lambda dt=1-\sum_{k=1}^{n}\frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda t}$$

$$\cdots \qquad \cdots$$

更新计数过程的分布：

$$\begin{aligned}P_r\{N(t)=n\}&=F_n(t)-F_{n+1}(t)\\&=\left(1-\sum_{k=1}^{n}\frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda t}\right)-\left(1-\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda t}\right)\\&=\frac{(\lambda t)^n}{(n+1-1)!}e^{-\lambda t}\\&=\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}\end{aligned}$$

结论：

更新间隔为负指数分布的更新计数过程服从泊松分布。

总结

更新过程的基本概念

定义、更新过程的基本参数，参数间的关系

更新过程分析

给定更新间隔的分布，计算 N(t)的概率分布

计算更新过程的期望，

计算更新过程的强度，

研究更新过程的数字特征：

计算更新过程的极限。$\lim\limits_{t\to\infty}\frac{t}{N(t)}=\mu$

典型更新过程-泊松过程

泊松过程的分布特性

更新时间间隔呈负指数分布的更新过程

事件间隔、更新时刻、计数过程 N(t)、均值过程、更新过程的强度

典型更新过程

例2、　　计算更新过程 N(t)的概率分布

给定一种更新间隔分布，求更新计数过程分布

例 2、给定更新强度，计算更新间隔的概率分布

结论:更新强度是常数的更新计数过程服从泊松分布,更新间隔服从负指数分布.

例 3、给定更新间隔分布，计算更新过程的速率

基本概念：速率定义

例 4、计算更新过程的速率

分析更新间隔的构成

例 5、计算更新过程的速率

分析更新间隔构成

例 6 、事件间隔呈负指数分布的更新过程

结论：更新间隔为负指数分布的更新计数过程服从泊松分布。