正弦波和窄带实平稳高斯随机过程之和

- 概述
- 信号瞬时值特性
  - 正弦波和窄带高斯过程之和的表达式
  - 正弦波和窄带高斯过程之和数字特征：均值，相关函数
  - 随机相位的正弦波的特征函数和概率密度函数
  - 窄带实平稳高斯随机过程的特征函数和概率密度函数
  - 正弦波和窄带高斯过程之和的特征函数与概率密度函数
- 信号的包络和相位特性
  - 任意一个时刻包络相位的联合概率密度函数

    基于 $x_c(t), x_s(t), \theta$ 的联合概率密度函数

    基于 $z_c(t), z_s(t), \theta$ 的联合概率密度函数

    基于 $V_t, \varphi(t), \theta$ 的联合概率密度函数
  - 某个时刻信号包络的概率密度函数
  - 某个时刻给定正弦波相位 θ 后，信号相位 $\varphi(t)$ 的概率密度函数

1 信号瞬时值特性

随机相位的正弦波：

$A\sin(\omega_c t+\theta)$，其中幅度 A，角频率ω₀，随机相位θ均匀分布于（0，2π）。

窄带实平稳高斯随机过程：

$\xi(t)=x_c(t)\cos 2\pi f_c t + x_s(t)\sin 2\pi f_c t$，均值零，方差 σ_ξ^2

窄带实平稳高斯随机过程与随机相位正弦波统计独立；

正弦波和窄带高斯过程之和：

$\eta(t)=A\sin(\omega_c t+\theta)+\xi(t)$

正弦波和窄带高斯过程之和的数字特征：

均值：

$$\begin{aligned} E\{\eta(t)\} &= E\{A\sin(\omega_c t+\theta)+\xi(t)\} \\ &= E\{A\sin(\omega_c t+\theta)\}+E\{\xi(t)\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

相关函数：

$$
\begin{aligned}
R_{\eta\eta}(t_1-t_2) &= E\{\eta(t_1)\eta(t_2)\} \\
&= E\{[A\sin(\omega_c t_1+\theta)+\xi(t_1)][A\sin(\omega_c t_2+\theta)+\xi(t_2)]\} \\
&= E\{A\sin(\omega_c t_1+\theta)A\sin(\omega_c t_2+\theta)\}+E\{\xi(t_1)\xi(t_2)\} \\
&= \frac{A^2}{2}\cos(\omega_c t_1-\omega_c t_2)+R_{\xi\xi}(t_1-t_2) \\
&= \frac{A^2}{2}\cos\omega_c\tau+R_{\xi\xi}(\tau)
\end{aligned}
$$

随机相位的正弦波的特征函数：

$$
\begin{aligned}
\Phi_s(u) &= E\{\exp(juA\sin(\omega_c t+\theta))\} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp(juA\sin(\omega_c t+\theta))d\theta \\
&= J_0(Au)
\end{aligned}
$$

随机相位的正弦波的概率密度函数：

$$
f_s(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{A^2-x^2}}, & |x|\le A \\ 0 & otherwise\end{cases}
$$

窄带实平稳高斯随机过程的特征函数：

$$
\Phi_\xi(u)=e^{-\frac{u^2}{2}}
$$

窄带实平稳高斯随机过程的概率密度函数：

$$
f_\xi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}
$$

正弦波和窄带高斯过程之和的特征函数与概率密度函数：

正弦波与窄带高斯过程之和特征函数是各自的特征函数的乘积，有：

$$
\begin{aligned}
\Phi_\eta(u) &= \Phi_s(u)\cdot\Phi_\xi(u) \\
&= J_0(Au)\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma_\xi^2u^2\right\}
\end{aligned}
$$

由此作傅立叶反变换，得到正弦波与窄带高斯过程之和的概率密度函数：

$$
f_\eta(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\xi^2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{x^2}{2\sigma_\xi^2}\right)^k\cdot{}_1F_1\left(k+\frac{1}{2};1;-\frac{A^2}{2\sigma_\xi^2}\right)
$$

$$
{}_1F_1(a;b;z)=1+\frac{a}{b}\frac{z}{1!}+\frac{a(a+1)}{b(b+1)}\frac{z^2}{2!}+\frac{a(a+1)(a+2)}{b(b+1)(b+2)}\frac{z^3}{3!}+\cdots
$$

2 信号的包络和相位特性

2.1任意一个时刻包络相位的联合概率密度函数

由于 $x_c(t), x_s(t), \theta$ 是相互统计独立的， $x_c(t), x_s(t)$ 是均值为零、方差是 σ_ξ^2 的高斯随机变量， θ 是均匀分布于（0，2π）的随机变量，因此：

$x_c(t), x_s(t), \theta$ **的联合概率密度函数：**

$$f_{x_c,x_s,\theta}(x_c, x_s, \theta) = \frac{1}{2\pi\sigma_\xi^2}\exp\left\{-\frac{{x_c}^2 + {x_s}^2}{2\sigma_\xi^2}\right\}\cdot\frac{1}{2\pi}$$

正弦波和窄带高斯过程之和，可以写作，

$$\begin{aligned}\eta(t) &= A\sin(\omega_c t + \theta) + \xi(t)\\ &= A\sin(\omega_c t + \theta) + x_c(t)\cos 2\pi f_c t + x_s(t)\sin 2\pi f_c t\\ &= [A\sin\theta + x_c(t)]\cos 2\pi f_c t + [A\cos\theta + x_s(t)]\sin 2\pi f_c t\\ &= z_c(t)\cos 2\pi f_c t + z_s(t)\sin 2\pi f_c t\end{aligned}$$

其中， $\begin{matrix} z_c(t) = A\sin\theta + x_c(t) \\ z_s(t) = A\cos\theta + x_s(t) \end{matrix}$ ，经过变换可以得到

$z_c(t), z_s(t), \theta$ **的联合概率密度函数：**

$$\begin{aligned}f_{z_c,z_s,\theta}(z_c, z_s, \theta) &= \frac{1}{2\pi\sigma_\xi^2}\exp\left\{-\frac{(z_c - A\sin\theta)^2 + (z_s - A\cos\theta)^2}{2\sigma_\xi^2}\right\}\cdot\frac{1}{2\pi}\\ &= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{2\pi\sigma_\xi^2}\exp\left\{-\frac{{z_c}^2 + {z_s}^2 + A^2 - 2A(z_c\sin\theta + z_s\cos\theta)}{2\sigma_\xi^2}\right\}\end{aligned}$$

$$\eta(t) = V_t\cos(2\pi f_c t + \varphi(t))$$

再作变换： $\begin{matrix} V_t\cos\varphi(t) = z_c = A\sin\theta + x_c \\ -V_t\sin\varphi(t) = z_s = A\cos\theta + x_s \end{matrix}$ ，经过变换可以得到

包络相位 V_t, φ_t, θ **的联合概率密度函数：**

$$f_{V_t,\varphi,\theta}(V_t, \varphi, \theta)$$

$$=\frac{V_t}{4\pi^2\sigma_\xi^2}\exp\left\{-\frac{V_t^{\,2}+A^2-2A(V_t\cos\varphi(t)\sin\theta-V_t\sin\varphi(t)\cos\theta)}{2\sigma_\xi^2}\right\}$$

$$=\frac{V_t}{4\pi^2\sigma_\xi^2}\exp\left\{-\frac{V_t^{\,2}+A^2-2AV_t\sin(\theta-\varphi(t))}{2\sigma_\xi^2}\right\}$$

2.2 一个时刻信号包络的概率密度函数：

对 $V_t,\varphi(t),\theta$ 的联合概率密度函数中的 $\varphi(t),\theta$ 积分，得到 V_t 的边缘分布，

$$f_{V_t}(V_t)=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_{V_t,\varphi,\theta}(V_t,\varphi,\theta)\cdot d\varphi\, d\theta$$

$$=\frac{V_t}{4\pi^2\sigma_\xi^2}\exp\left\{-\frac{V_t^{\,2}+A^2}{2\sigma_\xi^2}\right\}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp\left\{\frac{AV_t\sin(\theta-\varphi(t))}{\sigma_\xi^2}\right\}\cdot d\varphi\, d\theta$$

$$=\frac{V_t}{\sigma_\xi^2}\exp\left\{-\frac{V_t^{\,2}+A^2}{2\sigma_\xi^2}\right\}$$

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp\left\{\frac{AV_t\cos(\theta-\varphi(t)-\pi/2)}{\sigma_\xi^2}\right\}\cdot d\varphi\, d\theta$$

$$=\frac{V_t}{\sigma_\xi^2}\exp\left\{-\frac{V_t^{\,2}+A^2}{2\sigma_\xi^2}\right\}\cdot I_0\left(\frac{AV_t}{\sigma_\xi^2}\right)$$

其中 $V_t\geq 0$。

正弦波和窄带高斯过程之和的包络的概率密度函数为莱斯分布。

采用归一化变量的表示，可以写作

$$f_v(v)=\exp\left\{-\frac{v^2+a^2}{2}\right\}\cdot I_0(av)$$

其中 $v=\frac{V_t}{\sigma_\xi},a=\frac{A}{\sigma_\xi}$

2.3 给定正弦波相位 θ 后，信号相位 $\varphi(t)$ 的概率密度函数：

$V_t,\varphi(t),\theta$ 的联合概率密度函数对 V_t 积分，得到 $\varphi(t)$，θ 的联合和边缘分布：

$$
\begin{aligned}
f_{V_t}(\varphi,\theta) &= \int_0^\infty f_{V_t,\varphi,\theta}(\mathrm{V}_t,\varphi,\theta)\cdot d\mathrm{V}_t \\
&= \int_0^\infty \frac{V_t}{4\pi^2\sigma_\xi^2}\exp\left\{-\frac{V_t^{\,2}+A^2}{2\sigma_\xi^2}\right\}\exp\left\{\frac{AV_t\sin\left(\theta-\varphi(t)\right)}{\sigma_\xi^2}\right\}\cdot dV_t
\end{aligned}
$$