# 窄带实平稳高斯随机过程

- 概述
- 窄带实平稳随机过程的一维包络分布和一维相位分布
  - 窄带实平稳随机过程，它的同相分量和正交分量
  - 一个时刻同相分量和正交分量是联合高斯的
  - 一个时刻包络和相位分量的联合概率密度
  - 一个时刻包络和相位是相互统计独立的随机变量
- 窄带实平稳随机过程的二维（两个时刻）包络和相位分布
  - 两个时刻信号的表达式
  - 两个时刻同相分量和正交分量是联合高斯的
  - 两个时刻同相分量和正交分量的协方差矩阵
  - 两个时刻同相分量和正交分量的联合概率密度函数
  - 两个时刻包络和相位的联合概率密度函数
  - 两个时刻包络的联合边缘分布
  - 两个相距无穷远时刻的包络联合边缘分布
  - 一个时刻包络的边缘分布
  - 两个时刻相位的联合边缘分布
  - 两个时刻相位和两个时刻包络的分布不是统计独立的

## 1 窄带实平稳高斯随机过程的一维包络和一维相位分布

窄带实平稳高斯随机过程$\xi(t)$服从$N(0,\sigma_\xi{}^2)$分布。

### 1.1 窄带实平稳随机过程，它的同相分量和正交分量

$$\xi(t)=x_c(t)\cos 2\pi f_c t+x_s(t)\sin 2\pi f_c t$$
$$\hat{\xi}(t)=x_c(t)\sin 2\pi f_c t-x_s(t)s\cos 2\pi f_c t$$

以及

$$x_c(t)=\xi(t)\cos 2\pi f_c t+\hat{\xi}(t)\sin 2\pi f_c t$$
$$x_s(t)=\xi(t)\sin 2\pi f_c t-\hat{\xi}(t)\cos 2\pi f_c t$$

窄带实平稳高斯随机过程的 Hilbert 变换是一个高斯随机过程；

窄带实平稳高斯随机过程的同相分量与正交分量是它和它的 Hilbert 变换的线性变换，因此，同相分量和正交分量也是高斯过程，并且是联合高斯的。

## 1.2 一个时刻同相分量和正交分量的联合概率密度

同相分量和正交分量 $x_c(t), x_s(t)$ 的一维相关矩阵为：

$$R=\begin{pmatrix} R_{\xi\xi}(0) & 0 \\ 0 & R_{\xi\xi}(0) \end{pmatrix}$$

同相分量和正交分量的联合概率密度是：

$$\begin{aligned} f_{x_c x_s}(x,y) &= f_{x_c}(x)\cdot f_{x_s}(y) \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_\xi^2}\exp\left\{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma_\xi^2}\right\} \end{aligned}$$

## 1.3 一个时刻包络和相位分量的联合概率密度

同相分量、正交分量与包络和相位分量的关系是：

$$\begin{aligned} x_c(t) &= V(t)\cdot\cos\phi(t) \\ x_s(t) &= V(t)\cdot\sin\phi(t) \end{aligned}$$

以及

$$V(t)=\sqrt{(x_c(t))^2+(x_s(t))^2}$$

$$\phi(t)=\tan^{-1}\frac{x_s(t)}{x_c(t)}$$

同相分量、正交分量到包络和相位分量的变换行列式是：

$$\frac{\partial(x_c,x_s)}{\partial(V,\phi)}=\left|\begin{pmatrix} \cos\phi(t) & -\sin\phi(t) \\ V(t)\sin\phi(t) & V(t)\cos\phi(t) \end{pmatrix}\right|=V(t)$$

一个时刻包络和相位分量的联合概率密度是：

$$\begin{aligned} f_{V\phi}(r,\phi) &= r\cdot f_{x_c x_s}(x,y) \\ &= r\frac{1}{2\pi\sigma_\xi^2}\exp\left\{-\frac{r^2}{2\sigma_\xi^2}\right\} \end{aligned}$$

包络和相位的一维概率密度分别是：

$$f_V(r) = r\frac{1}{\sigma_\xi^2}\exp\left\{-\frac{r^2}{2\sigma_\xi^2}\right\}$$

$$f_\phi(\phi) = \frac{1}{2\pi}$$

### 1.4 一个时刻包络和相位是相互统计独立的随机变量

$$f_{V\phi}(r,\phi) = f_V(r)\cdot f_\phi(\phi)$$

一维包络分量的数字特征是：

$$E\{V\} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}\sigma_\xi$$

$$E\{V^2\} = 2\sigma_\xi^2$$

$$D\{V\} = \left(2-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sigma_\xi^2$$

## 2 窄带实平稳高斯随机过程的二维包络和二维相位分布

### 2.1 两个时刻信号的表达式：

两个时刻信号的同相分量和正交分量表达式

$$\xi(t_1) = x_c(t_1)\cos 2\pi f_c t_1 + x_s(t_1)\sin 2\pi f_c t_1$$

$$\hat{\xi}(t_1) = x_c(t_1)\sin 2\pi f_c t_1 - x_s(t_1)s\cos 2\pi f_c t_1$$

$$\xi(t_2) = x_c(t_2)\cos 2\pi f_c t_2 + x_s(t_2)\sin 2\pi f_c t_2$$

$$\hat{\xi}(t_2) = x_c(t_2)\sin 2\pi f_c t_2 - x_s(t_2)s\cos 2\pi f_c t_2$$

两个时刻信号的包络和相位表达式

$$\xi(t_1) = V(t_1)\cos[2\pi f_c t_1 + \phi(t_1)]$$

$$\xi(t_2) = V(t_2)\cos[2\pi f_c t_2 + \phi(t_2)]$$

两个时刻同相分量和正交分量是联合高斯的：

由于ξ(t)是高斯分布的随机过程，而 $x_c(t_1),x_c(t_2),x_s(t_1),x_s(t_2)$都是由ξ(t)经过线性变换得到的，它们是联合高斯分布的随机变量。

两个时刻同相分量和正交分量的协方差矩阵：

两个时刻同相分量和正交分量 $x_c(t_1), x_s(t_1), x_c(t_2), x_s(t_2)$ 的协方差矩阵为：

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} R_{\xi\xi}(0) & 0 & R_{x_cx_c}(\tau) & -R_{x_cx_s}(\tau) \\ 0 & R_{\xi\xi}(0) & R_{x_cx_s}(\tau) & R_{x_cx_c}(\tau) \\ R_{x_cx_c}(\tau) & R_{x_cx_s}(\tau) & R_{\xi\xi}(0) & 0 \\ -R_{x_cx_s}(\tau) & R_{x_cx_c}(\tau) & 0 & R_{\xi\xi}(0) \end{pmatrix}$$

其中 τ =$t_1$-$t_2$，

计算上述协方差矩阵的行列式：

$$|\mathbf{B}|=\begin{vmatrix} R_{\xi\xi}(0) & 0 & R_{x_cx_c}(\tau) & -R_{x_cx_s}(\tau) \\ 0 & R_{\xi\xi}(0) & R_{x_cx_s}(\tau) & R_{x_cx_c}(\tau) \\ R_{x_cx_c}(\tau) & R_{x_cx_s}(\tau) & R_{\xi\xi}(0) & 0 \\ -R_{x_cx_s}(\tau) & R_{x_cx_c}(\tau) & 0 & R_{\xi\xi}(0) \end{vmatrix}$$
$$=[R_{\xi\xi}{}^2(0)-R_{x_cx_c}{}^2(\tau)-R_{x_cx_s}{}^2(\tau)]^2$$

计算协方差矩阵的代数子行列式：

$$\begin{aligned}|\mathbf{B}_{11}|=|\mathbf{B}_{22}|=|\mathbf{B}_{33}|=|\mathbf{B}_{44}|\\ &=R_{\xi\xi}(0)[R_{\xi\xi}{}^2(0)-R_{x_cx_c}{}^2(\tau)-R_{x_cx_s}{}^2(\tau)]\\ &=R_{\xi\xi}(0)|\mathbf{B}|^{1/2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\mathbf{B}_{12}|=|\mathbf{B}_{21}|=|\mathbf{B}_{34}|=|\mathbf{B}_{43}|\\ &=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\mathbf{B}_{13}|=|\mathbf{B}_{31}|=|\mathbf{B}_{24}|=|\mathbf{B}_{42}|\\ &=-R_{x_cx_s}(\tau)[R_{\xi\xi}{}^2(0)-R_{x_cx_c}{}^2(\tau)-R_{x_cx_s}{}^2(\tau)]\\ &=-R_{x_cx_s}(\tau)|\mathbf{B}|^{1/2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\mathbf{B}_{14}|=|\mathbf{B}_{41}|=|\mathbf{B}_{23}|=|\mathbf{B}_{32}|\\ &=R_{x_cx_c}(\tau)[R_{\xi\xi}{}^2(0)-R_{x_cx_c}{}^2(\tau)-R_{x_cx_s}{}^2(\tau)]\\ &=R_{x_cx_c}{}^2(\tau)|\mathbf{B}|^{1/2}\end{aligned}$$

计算协方差矩阵的逆矩阵：

$$\mathbf{B}^{-1}=\frac{1}{|\mathbf{B}|}\begin{pmatrix} |\mathbf{B}_{11}| & |\mathbf{B}_{12}| & |\mathbf{B}_{13}| & |\mathbf{B}_{14}| \\ |\mathbf{B}_{21}| & |\mathbf{B}_{22}| & |\mathbf{B}_{23}| & |\mathbf{B}_{24}| \\ |\mathbf{B}_{31}| & |\mathbf{B}_{32}| & |\mathbf{B}_{33}| & |\mathbf{B}_{34}| \\ |\mathbf{B}_{41}| & |\mathbf{B}_{42}| & |\mathbf{B}_{43}| & |\mathbf{B}_{44}| \end{pmatrix}$$

## 2.2 两个时刻同相分量和正交分量的联合概率密度函数

考虑到两个时刻同相分量和正交分量的均值都是零，并利用前面得到的同相分量和正交分量的协方差矩阵、它的逆矩阵、它的行列式，可以得到两个时刻同相分量和正交分量的联合概率密度函数：

$$
\begin{aligned}
& f[x_c(t_1), x_s(t_1), x_c(t_2), x_s(t_2)] \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2 |\mathbf{B}|^{1/2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2|\mathbf{B}|^{1/2}} R_{\xi\xi}(0)\left(x_c{}^2(t_1) + x_s{}^2(t_1) + x_c{}^2(t_2) + x_s{}^2(t_2)\right) \right. \\
&\qquad - \frac{1}{2|\mathbf{B}|^{1/2}} 2R_{x_c x_c}(\tau)\left(x_c(t_1)x_c(t_2) + x_s(t_1)x_s(t_2)\right) \\
&\qquad \left. + \frac{1}{2|\mathbf{B}|^{1/2}} 2R_{x_c x_s}(\tau)\left(x_c(t_1)x_s(t_2) + x_s(t_1)x_c(t_2)\right) \Big] \right\}
\end{aligned}
$$

## 2.3 两个时刻包络和相位的联合概率密度函数

考虑到两个时刻同相分量和正交分量到包络分量和相位分量的变换，

$$
\begin{aligned}
x_c(t_1) &= V(t_1) \cdot \cos\phi(t_1) \\
x_s(t_1) &= V(t_1) \cdot \sin\phi(t_1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_c(t_2) &= V(t_2) \cdot \cos\phi(t_2) \\
x_s(t_2) &= V(t_2) \cdot \sin\phi(t_2)
\end{aligned}
$$

上述变换的雅可比行列式，

$$
\begin{aligned}
J &= \frac{\partial\left(x_c(t_1), x_s(t_1), x_c(t_2), x_s(t_2)\right)}{\partial\left(V(t_1), \phi(t_1), V(t_2), \phi(t_2)\right)} \\
&= \begin{vmatrix}
\cos\phi(t_1) & -V(t_1)\sin\phi(t_1) & 0 & 0 \\
-\sin\phi(t_1) & -V(t_1)\cos\phi(t_1) & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cos\phi(t_2) & -V(t_2)\sin\phi(t_2) \\
0 & 0 & -\sin\phi(t_2) & -V(t_2)\cos\phi(t_2)
\end{vmatrix} \\
&= V(t_1) \cdot V(t_2)
\end{aligned}
$$

两个时刻包络和相位的联合概率密度函数

$$
\begin{aligned}
&f[V(t_1),V(t_2),\phi(t_1),\phi(t_2)] \\
&\quad = J\cdot\frac{1}{(2\pi)^2\left|\mathbf{B}\right|^{1/2}}\exp\Bigg\{-\frac{1}{2\left|\mathbf{B}\right|^{1/2}}R_{\xi\xi}(0)\left(x_c{}^2(t_1)+x_s{}^2(t_1)+x_c{}^2(t_2)+x_s{}^2(t_2)\right) \\
&\qquad\qquad -\frac{1}{2\left|\mathbf{B}\right|^{1/2}}2R_{x_cx_c}(\tau)\left(x_c(t_1)x_c(t_2)+x_s(t_1)x_s(t_2)\right) \\
&\qquad\qquad +\frac{1}{2\left|\mathbf{B}\right|^{1/2}}2R_{x_cx_s}(\tau)\left(x_c(t_1)x_s(t_2)+x_s(t_1)x_c(t_2)\right)\Bigg]\Bigg\} \\
&\quad = \frac{1}{(2\pi)^2\left|\mathbf{B}\right|^{1/2}}V(t_1)V(t_2)\exp\Bigg\{-\frac{1}{2\left|\mathbf{B}\right|^{1/2}}R_{\xi\xi}(0)\left(V^2(t_1)+V^2(t_2)\right) \\
&\qquad\qquad -\frac{1}{\left|\mathbf{B}\right|^{1/2}}R_{x_cx_c}(\tau)V(t_1)V(t_2)\cos\left(\phi(t_1)-\phi(t_2)\right) \\
&\qquad\qquad +\frac{1}{\left|\mathbf{B}\right|^{1/2}}R_{x_cx_s}(\tau)V(t_1)V(t_2)\sin\left(\phi(t_1)-\phi(t_2)\right)\Bigg]\Bigg\}
\end{aligned}
$$

## 2.4 两个时刻包络的联合边缘分布

两个时刻包络的联合边缘分布是对两个时刻包络和相位联合概率密度函数的相位积分：

$$
\begin{aligned}
&f[V(t_1),V(t_2)] \\
&\quad = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f[V(t_1),V(t_2),\phi(t_1),\phi(t_2)]d\phi(t_1)d\phi(t_2) \\
&\quad = \frac{V(t_1)V(t_2)}{(2\pi)^2\left|\mathbf{B}\right|^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\left|\mathbf{B}\right|^{1/2}}R_{\xi\xi}(0)\left(V^2(t_1)+V^2(t_2)\right)\right\} \\
&\qquad \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp\Bigg\{-\frac{1}{\left|\mathbf{B}\right|^{1/2}}V(t_1)V(t_2)R_{x_cx_c}(\tau)\cos\left(\phi(t_1)-\phi(t_2)\right) \\
&\qquad -\frac{1}{\left|\mathbf{B}\right|^{1/2}}V(t_1)V(t_2)R_{x_cx_s}(\tau)\sin\left(\phi(t_1)-\phi(t_2)\right)\Bigg\}d\phi(t_1)d\phi(t_2)
\end{aligned}
$$

为了进行积分作变量代换，

$$\alpha=\phi(t_1)-\phi(t_2)$$

$$
\begin{aligned}
&R_{x_cx_c}(\tau)\cos\left(\phi(t_1)-\phi(t_2)\right)+R_{x_cx_s}(\tau)\sin\left(\phi(t_1)-\phi(t_2)\right)\\
&\qquad=R_{x_cx_c}(\tau)\cos\alpha+R_{x_cx_s}(\tau)\sin\alpha\\
&\qquad=\left[R_{x_cx_c}{}^2(\tau)+R_{x_cx_s}{}^2(\tau)\right]^{1/2}\cos(\alpha-\theta)\\
&R_{x_cx_c}(\tau)=\left[R_{x_cx_c}{}^2(\tau)+R_{x_cx_s}{}^2(\tau)\right]^{1/2}\cos\theta\\
&R_{x_cx_s}(\tau)=\left[R_{x_cx_c}{}^2(\tau)+R_{x_cx_s}{}^2(\tau)\right]^{1/2}\sin\theta
\end{aligned}
$$

对于下述积分，有

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp\left\{-\frac{1}{|\mathbf{B}|^{1/2}}V(t_1)V(t_2)R_{x_cx_c}(\tau)\cos\left(\phi(t_1)-\phi(t_2)\right)\right.\\
&\qquad\qquad\left.-\frac{1}{|\mathbf{B}|^{1/2}}V(t_1)V(t_2)R_{x_cx_s}(\tau)\sin\left(\phi(t_1)-\phi(t_2)\right)\right\}d\phi(t_1)d\phi(t_2)\\
&=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_{\phi(t_1)}^{\phi(t_1)+2\pi}\exp\left\{-\frac{V(t_1)V(t_2)\left[R_{x_cx_c}{}^2(\tau)+R_{x_cx_s}{}^2(\tau)\right]^{1/2}}{|\mathbf{B}|^{1/2}}\cos\left(\alpha-\theta\right)\right\}d\alpha\cdot d\phi(t_1)\\
&=I_0\left\{\frac{V(t_1)V(t_2)\left[R_{x_cx_c}{}^2(\tau)+R_{x_cx_s}{}^2(\tau)\right]^{1/2}}{|\mathbf{B}|^{1/2}}\right\}
\end{aligned}
$$

两个时刻包络的联合边缘分布概率密度函数，

$$
\begin{aligned}
&f[V(t_1),V(t_2)]\\
&\qquad=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}f[V(t_1),V(t_2),\phi(t_1),\phi(t_2)]d\phi(t_1)d\phi(t_2)\\
&\qquad=\frac{V(t_1)V(t_2)}{|\mathbf{B}|^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2|\mathbf{B}|^{1/2}}R_{\xi\xi}(0)\left(V^2(t_1)+V^2(t_2)\right)\right\}\\
&\qquad\qquad I_0\left\{\frac{V(t_1)V(t_2)\left[R_{x_cx_c}{}^2(\tau)+R_{x_cx_s}{}^2(\tau)\right]^{1/2}}{|\mathbf{B}|^{1/2}}\right\}
\end{aligned}
$$

其中$V(t_1)\ge 0,V(t_2)\ge 0$。

## 2.5 两个相距无穷远时刻的包络联合边缘分布

如果两个时刻相距无穷远，不同时刻同相分量和正交分量的相关函数趋于零，有

$$|\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} R_{\xi\xi}(0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{\xi\xi}(0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{\xi\xi}(0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{\xi\xi}(0) \end{vmatrix}$$
$$= R_{\xi\xi}{}^4(0)$$

$$I_0\left\{\frac{V(t_1)V(t_2)\left[R_{x_cx_c}{}^2(\tau)+R_{x_cx_s}{}^2(\tau)\right]^{1/2}}{|\mathbf{B}|^{1/2}}\right\} = I_0\{0\} = 1$$

两个相距无穷远时刻的包络联合概率密度函数是：

$$f[V(t_1),V(t_2)]$$
$$= \frac{V(t_1)V(t_2)}{R_{\xi\xi}{}^2(0)}\exp\left\{-\frac{1}{2R_{\xi\xi}{}^2(0)}R_{\xi\xi}(0)\left(V^2(t_1)+V^2(t_2)\right)\right\}$$
$$= \frac{V(t_1)V(t_2)}{\sigma_\xi^4}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_\xi^2}\left(V^2(t_1)+V^2(t_2)\right)\right\}$$
$$= \frac{V(t_1)}{\sigma_\xi^2}\exp\left\{-\frac{V^2(t_1)}{2\sigma_\xi^2}\right\}\cdot\frac{V(t_2)}{\sigma_\xi^2}\exp\left\{-\frac{V^2(t_2)}{2\sigma_\xi^2}\right\}$$
$$= f[V(t_1)]\cdot f[V(t_2)]$$

两个相距无穷远时刻的包络分布是统计独立的。

## 2.6 一个时刻包络的边缘分布

利用两个时刻的包络联合边缘分布，有

$$f[V(t_1)] = \int_0^\infty f[V(t_1),V(t_2)]\cdot dV(t_2)$$
$$= \frac{V(t_1)}{|\mathbf{B}|^{1/2}}\exp\left\{-\frac{R_{\xi\xi}(0)V^2(t_1)}{2|\mathbf{B}|^{1/2}}\right\}\cdot\int_0^\infty V(t_2)\exp\left\{-\frac{R_{\xi\xi}(0)V^2(t_2)}{2|\mathbf{B}|^{1/2}}\right\}\cdot$$
$$I_0\left\{\frac{V(t_1)V(t_2)\left[R_{x_cx_c}{}^2(\tau)+R_{x_cx_s}{}^2(\tau)\right]^{1/2}}{|\mathbf{B}|^{1/2}}\right\}dV(t_2)$$

利用积分公式

$$\int_0^\infty tJ_0(at)\exp(-ht^2)dt = \frac{1}{2h}\exp(\frac{a^2}{4h})$$

考虑积分

$$\int_0^\infty V(t_2)\exp\left\{-\frac{R_{\xi\xi}(0)V^2(t_2)}{2|\mathbf{B}|^{1/2}}\right\}\cdot I_0\left\{\frac{V(t_1)V(t_2)\left[R_{x_cx_c}{}^2(\tau)+R_{x_cx_s}{}^2(\tau)\right]^{1/2}}{|\mathbf{B}|^{1/2}}\right\}dV(t_2)$$

$$=\frac{1}{2\frac{R_{\xi\xi}(0)}{2|\mathbf{B}|^{1/2}}}\exp\left\{-\frac{\left(j\frac{V(t_1)\left[R_{x_cx_c}{}^2(\tau)+R_{x_cx_s}{}^2(\tau)\right]^{1/2}}{|\mathbf{B}|^{1/2}}\right)^2}{4\frac{R_{\xi\xi}(0)}{2|\mathbf{B}|^{1/2}}}\right\}$$

$$=\frac{|\mathbf{B}|^{1/2}}{R_{\xi\xi}(0)}\exp\left\{\frac{V^2(t_1)\left[R_{x_cx_c}{}^2(\tau)+R_{x_cx_s}{}^2(\tau)\right]}{2|\mathbf{B}|^{1/2}R_{\xi\xi}(0)}\right\}$$

一个时刻包络的边缘分布，是

$$f[V(t_1)]=\int_0^\infty f[V(t_1),V(t_2)]\cdot dV(t_2)$$

$$=\frac{V(t_1)}{|\mathbf{B}|^{1/2}}\exp\left\{-\frac{R_{\xi\xi}(0)V^2(t_1)}{2|\mathbf{B}|^{1/2}}\right\}\cdot\frac{|\mathbf{B}|^{1/2}}{R_{\xi\xi}(0)}\exp\left\{\frac{V^2(t_1)\left[R_{x_cx_c}{}^2(\tau)+R_{x_cx_s}{}^2(\tau)\right]}{2|\mathbf{B}|^{1/2}R_{\xi\xi}(0)}\right\}$$

$$=\frac{V(t_1)}{R_{\xi\xi}(0)}\exp\left\{-\frac{V^2(t_1)\left[R_{\xi\xi}(0)-R_{x_cx_c}{}^2(\tau)-R_{x_cx_s}{}^2(\tau)\right]}{2|\mathbf{B}|^{1/2}R_{\xi\xi}(0)}\right\}$$

$$=\frac{V(t_1)}{R_{\xi\xi}(0)}\exp\left\{-\frac{V^2(t_1)}{R_{\xi\xi}(0)}\right\}$$

$$=\frac{V(t_1)}{\sigma_\xi^2}\exp\left\{-\frac{V^2(t_1)}{\sigma_\xi^2}\right\}$$

## 2.7 两个时刻相位的联合边缘分布

两个时刻的相位联合边缘分布是对两个时刻包络和相位联合概率密度函数的包络积分：

$$f[\phi(t_1),\phi(t_2)]=\int_0^\infty\int_0^\infty f[V(t_1),V(t_2),\phi(t_1),\phi(t_2)]\cdot dV(t_1)dV(t_2)$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^2\quad|\mathbf{B}|^{1/2}}\int_0^\infty\int_0^\infty V(t_1)dV(t_2)\cdot$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2|\mathbf{B}|^{1/2}}R_{\xi\xi}(0)\left(V^2(t_1)+V^2(t_2)-2\beta V(t_1)V(t_2)\right)\right\}dV(t_1)dV(t_2)$$

其中

$$\beta=\left[R_{x_cx_c}(\tau)\cos\left(\phi(t_1)-\phi(t_2)\right)+R_{x_cx_s}(\tau)\sin\left(\phi(t_1)-\phi(t_2)\right)\right]\frac{1}{R_{\xi\xi}(0)}$$

考虑积分

$$J=\int_0^\infty\int_0^\infty\exp\left\{-\frac{u^2+v^2-2xuv}{2}\right\}dudv$$

$$\frac{d}{dx}J=\int_0^\infty\int_0^\infty uv\cdot\exp\left\{-\frac{u^2+v^2-2xuv}{2}\right\}dudv$$

计算 J 作变量代换

$$u=\frac{r\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\theta\right)}{\sin\alpha},v=\frac{r\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)}{\sin\alpha}$$

$$\cos\alpha=x$$

$$u^2+v^2-2xuv$$

$$=\frac{r^2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}+\theta\right)+r^2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)}{\sin^2\alpha}-\frac{2r^2\cos\alpha\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\theta\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)}{\sin^2\alpha}$$

变量代换的雅可比行列式

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(r,\theta)}=\frac{1}{\sin^2\alpha}\begin{vmatrix}\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\theta\right) & -r\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\theta\right)\\ \cos\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right) & r\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)\end{vmatrix}$$

$$=\frac{r}{\sin\alpha}$$

计算 J 的积分

$$J=\int_0^{\infty}\int_{-\frac{\pi-\alpha}{2}}^{\frac{\pi-\alpha}{2}}\exp\{-r^2/2\}\frac{r}{\sin\alpha}drd\theta$$

$$=\frac{\pi-\alpha}{\sin\alpha}$$

$$=\frac{\pi/2-\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$$

计算$\frac{d}{dx}J$

$$\frac{d}{dx}J=\frac{d}{dx}\frac{\pi/2-\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{1-x^2}+x(\pi/2+\sin^{-1}x)}{(1-x^2)^{3/2}}$$

利用上述结果有

$$f[\phi(t_1),\phi(t_2)]$$

$$=\frac{|\mathbf{B}|^{1/2}}{(2\pi)^2\sigma_\xi^4}\left[\frac{(1-\beta^2)^{1/2}+\beta(\pi/2+\sin^{-1}\beta)}{(1-\beta^2)^{3/2}}\right]$$

$$0\le\phi(t_1),\phi(t_2)\le 2\pi$$

其中，

$$\beta=\left[R_{x_cx_c}(\tau)\cos\left(\phi(t_1)-\phi(t_2)\right)+R_{x_cx_s}(\tau)\sin\left(\phi(t_1)-\phi(t_2)\right)\right]\frac{1}{R_{\xi\xi}(0)}$$

$$=\frac{1}{R_{\xi\xi}(0)}\left[R_{x_cx_c}{}^2(\tau)+R_{x_cx_s}{}^2(\tau)\right]^{1/2}\cos\left(\phi(t_1)-\phi(t_2)-\phi\right)$$

$$tg\phi=R_{x_cx_s}(\tau)\big/R_{x_cx_c}(\tau)$$

两个时刻相位和两个时刻包络的分布不是统计独立的：

比较两个时刻包络和相位的联合概率密度、一个时刻包络和相位的联合概率密度、两个时刻包络的概率密度、两个时刻相位的概率密度，可以确认两个时刻相位分布是不独立的，两个时刻包络的分布是不独立的。