第2章 连续时间信号的傅里叶分析

- 2.1 信号正交分解的数学原理
- 2.2 傅里叶级数与连续时间周期信号的频谱
- 2.3 傅里叶变换与连续时间非周期信号的频谱

第2章 连续时间信号的傅里叶分析

2.1 信号正交分解的数学原理

本节内容参考：
郑君里等《信号与系统》（第二版）
上册 第六章 信号的矢量空间分析

2.1.1 线性空间（Linear Space）

在泛函分析（Functional Analysis）的理论中，将具有某种数学结构的集合（Set）称为空间（Space）。

线性空间（Linear Space）的定义：设X为非空集合，如果在X中定义了下列两种运算：

（1）加法（叠加性）：

对于任意两个元素$x,y\in X$，对应存在一个元素$u\in X$，称u是x与y的和（加法），记作$u=x+y$，满足下列条件（或称为运算法则）：

①$x+y=y+x$（定义加法交换律）

②$(x+y)+z=x+(y+z)$（定义加法结合律）

③ 在集合X中存在元素0，使得对于任意元素$x\in X$，有$x+0=x$成立，则称元素0为零元素，简称零。（定义零元素）

④对于任意元素$x\in X$，存在元素$x'\in X$，使得$x+x'=0$成立，则称元素x'为元素x的负元素。通常将x'记作-x，简称零。（定义负元素）

（2）数乘（齐次性）：
对于任意元素$x \in X$及任意实数$\alpha \in R$（也可以是复数），对应存在一个元素$v \in X$，称v是x与α的积（数乘），记作$v=\alpha x$，满足下列条件（或称为运算法则）：

⑤$1x=x$，$0x=0$（定义数乘1和数乘0）

⑥$\alpha(\beta x)=\alpha\beta x$（定义数乘结合律），其中$\alpha,\beta \in R$

⑦$(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$（定义数乘分配律），其中$\alpha,\beta \in R$

⑧$\alpha(x+y)=\alpha x+\beta y$（定义数乘分配律），其中$x+y \in X$

则称非空集合X为（实的或复的）线性空间（Linear Space）。如果将线性空间X中的元素x称为向量，则线性空间也称为向量空间。

说明：定义线性空间概念的目的，就是要在集合中引入线性运算。简单地说，引入线性运算的空间，就是线性空间。

例1：连续时间信号（函数）空间Lp[a,b]是线性空间。
连续时间信号（函数）空间Lp[a,b]又称为p幂可积的函数空间。
设x(t)是闭区间[a,b]上的连续时间信号（函数），Lp[a,b]的定义为：

$$L^p[a,b] = \left\{ x(t) \middle| \int_a^b |x(t)|^p \, dt < +\infty \right\}, p \geq 1$$

根据线性空间的定义可以证明，Lp[a,b]是线性空间。

例2：离散时间信号（序列）空间lp是线性空间。
离散时间信号（序列）空间lp又称为p幂可和的数列空间，其定义为：

$$l^p = \left\{ x(n) \middle| \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < +\infty \right\}, p \geq 1$$

根据线性空间的定义可以证明，lp是线性空间。

2.1.2线性赋范空间（Normed Linear Space）

线性赋范空间（Normed Linear Space）的定义：设X为（实的或复的）线性空间，对于X中的任意元素$x\in X$，如果都有一个确定的非负实数$\|x\|$与其对应，并且满足下列条件：

（1）对于任意元素$x\in X$，$\|x\|\geq 0$；当且仅当$x=0$时，$\|x\|=0$。（正定性）

（2）对于任意元素$x\in X$和任意实数$\alpha\in R$（也可以是复数），$\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|$。（数乘，即齐次性）

（3）对于任意两个元素$x,y\in X$，$\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$。（三角形不等式）

则称非负实数$\|x\|$为元素x的范数（Norm），并称线性空间X为线性赋范空间（Normed Linear Space）。

说明：范数的概念是矢量长度概念的推广，是对线性空间中的元素自身特性的一种度量方法。范数可以表示线性空间中任意一点到原点的距离。范数$\|x\|$可以简写为$\|\cdot\|$。

例1：连续时间信号（函数）空间Lp[a,b]的范数定义。
将Lp[a,b] 空间的p阶范数定义为：

$$\|\bullet\|_p = \|x\|_p = \left(\int_a^b |x(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}, p \geq 1, x(t) \in L^p[a, b]$$

根据范数的定义可以证明，上述定义满足范数定义的三个条件，所以Lp[a,b]是线性赋范空间。

当p=1时称为1阶范数，表示信号的强度：$\|\bullet\|_1 = \|x\|_1 = \int_a^b |x(t)| dt$

当p=2时称为2阶范数，表示信号的能量：$\|\bullet\|_2 = \|x\|_2 = \sqrt{\int_a^b |x(t)|^2 dt}$

2阶范数的平方等于信号的能量：$\|\bullet\|_2^{\,2} = \|x\|_2^{\,2} = \int_a^b |x(t)|^2 dt$

例2：离散时间信号（序列）空间lp的范数定义。

将lp空间的p阶范数定义为：

$$\|\bullet\|_p = \|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p \right)^{\frac{1}{p}}, p \geq 1, x(n) \in l^p$$

根据范数的定义可以证明，上述定义满足范数定义的三个条件，所以lp是线性赋范空间。

当p=1时称为1阶范数，表示信号的强度：$\|\bullet\|_1 = \|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|$

当p=2时称为2阶范数，表示信号的能量：$\|\bullet\|_2 = \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^2}$

2阶范数的平方等于信号的能量：$\|\bullet\|_2^{\ 2} = \|x\|_2^{\ 2} = \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^2$

定义了不同的范数之后，即可构造不同的线性赋范空间。在信号分析的理论研究中，通常构造如下的线性赋范空间：

（1）如果信号的强度为有限值，即1阶范数 $\left\|\bullet\right\|_1 = \left\|x\right\|_1 < \infty$

构造连续时间信号空间： $L^1[a,b] = \left\{x(t) \middle\| \left\|x\right\|_1 < \infty\right\}$

构造离散时间信号空间： $l^1 = \left\{x(n) \middle\| \left\|x\right\|_1 < \infty\right\}$

（2）如果信号的能量为有限值，即2阶范数 $\left\|\bullet\right\|_2 = \left\|x\right\|_2 < \infty$

构造连续时间信号空间： $L^2[a,b] = \left\{x(t) \middle\| \left\|x\right\|_2 < \infty\right\}$

构造离散时间信号空间： $l^2 = \left\{x(n) \middle\| \left\|x\right\|_2 < \infty\right\}$

2.1.3 内积空间（Inner Product Space）

内积空间（Inner Product Space）的定义：设X为复数域C上的线性空间，如果从X到C中定义一个确定的函数$\langle x,y \rangle$，使得对于X中的任意元素$x,y,z\in X$，满足下列条件：

（1）$\langle x,y\rangle=\langle y,x\rangle^*$，其中$\langle y,x\rangle^*$为$\langle y,x\rangle$的共轭复数。（对称性）

（2）对于任意复数$\alpha,\beta\in C$，有$\langle \alpha x+\beta y,z\rangle=\alpha\langle x,z\rangle+\beta\langle y,z\rangle$成立。（线性）

（3）$\langle x,x\rangle\geq 0$；当且仅当$x=0$时，$\langle x,x\rangle=0$。（正定性）

则称函数$\langle x,y\rangle$为线性空间X中两个元素的内积（Inner Product），并称线性空间X为内积空间（Inner Product Space）。

说明：内积的概念是不同矢量之间相互关系概念的推广，是对线性空间中不同元素关联程度的一种度量方法。内积可以表示线性空间中不同矢量之间的夹角。内积$\langle x,y\rangle$可以简写为$\langle \cdot,\cdot \rangle$。

推论1：由上述定义中的（1）和（2）可以得到：
（4）$<x,\alpha y+\beta z>=\alpha^*<x,y>+\beta^*<x,z>$，其中$\alpha^*,\beta^*$为$\alpha,\beta$的共轭复数。

推论2：如果X为实数域R上的线性空间，则上述4个条件简化为：

（1）$<x,y>=<y,x>$

（2）$<\alpha x+\beta y,z>=\alpha<x,z>+\beta<y,z>$

（3）$<x,x>\geq 0$；当且仅当$x=0$时，$<x,x>=0$

（4）$<x,\alpha y+\beta z>=\alpha<x,y>+\beta<x,z>$

例1：连续时间信号（函数）空间Lp[a,b]的内积定义。
将Lp[a,b] 空间中两个元素的内积定义为：

$$\langle \bullet,\bullet \rangle = \langle x, y \rangle = \int_a^b x(t) y^*(t) dt$$

根据内积的定义可以证明，上述定义满足内积定义的三个条件，所以Lp[a,b]是内积空间。
下面计算元素x与其自身的内积<x,x>，其值等于信号的能量：

$$\langle x, x \rangle = \int_a^b x(t) x^*(t) dt = \int_a^b \left| x(t) \right|^2 dt$$

而2阶范数的平方也等于信号的能量： $\left\| \bullet \right\|_2^{\ 2} = \left\| x \right\|_2^{\ 2} = \int_a^b \left| x(t) \right|^2 dt$

所以，元素与其自身的内积等于2阶范数的平方：

$$\langle x, x \rangle = \left\| x \right\|_2^{\ 2}$$

例2：离散时间信号（序列）空间lp的内积定义。
将lp空间中两个元素的内积定义为：

$$\langle \bullet,\bullet \rangle = \langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x(n) y^{*}(n)$$

根据内积的定义可以证明，上述定义满足内积定义的三个条件，所以lp是内积空间。
下面计算元素x与其自身的内积<x,x>，其值等于信号的能量：

$$\langle x, x \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x(n) x^{*}(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left| x(n) \right|^{2}$$

而2阶范数的平方也等于信号的能量：$\left\| \bullet \right\|_{2}^{2} = \left\| x \right\|_{2}^{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left| x(n) \right|^{2}$

所以，元素与其自身的内积等于2阶范数的平方：

$$\langle x, x \rangle = \left\| x \right\|_{2}^{2}$$

2.1.4 正交函数系（Orthogonal Functions）

正交函数系（Orthogonal Functions）的定义：在内积空间中（包括连续空间L和离散空间l），

（1）如果两个函数$\varphi 1$与$\varphi 2$的内积为零，即$<\varphi 1,\varphi 2>=0$，则称此两个函数是正交的（Orthogonal），或称此两个函数构成正交函数（Orthogonal Functions）。

（2）如果函数系$\varphi 1$，$\varphi 2$，…，φn，…中的任意两个函数相互正交，即有$<\varphi i,\varphi j>=0(i\neq j)$成立，则称此函数系为正交函数系（Set of Orthogonal Functions）。

（3）如果该正交函数系还满足$<\varphi i,\varphi j>=1(i=j)$，即函数的能量等于1，则称此函数系为标准正交函数系（Normalized Set of Orthogonal Functions）。

（4）在上述标准正交函数系中，如果不存在某个函数ψ与函数φn正交，即$<\psi,\varphi n>=0$不成立，则称此函数系为完备的标准正交函数系（Complete and Normalized Set of Orthogonal Functions）。

2.1.5 正交分解定理（Orthogonal Decomposition）

（1）广义傅里叶级数（Generalized Fourier Series）展开定理：在内积空间中，如果给定一个完备的标准正交函数系{φn}，则该内积空间中的任何一个函数x都可以按照这个完备的标准正交函数系中的函数φn来展开成级数：

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n$$

即可以采用完备的标准正交函数系中的各个函数分量的线性组合来表示函数x。这种表示方法被称为函数的广义傅里叶级数展开式（Generalized Fourier Series Representation）。其中系数an被称为广义傅里叶系数（Generalized Fourier Coefficient），等于函数x与该完备的标准正交函数系中的函数φn的内积，即

$$a_n = \langle x, \varphi_n \rangle$$

（2）帕塞瓦尔定理（Parseval's Theorem）：

在上述广义傅里叶级数展开式中，有以下等式成立。

此式称为帕塞瓦尔等式（Parseval's Equation）。

此规律称为帕塞瓦尔定理（Parseval's Theorem）。

$$\|x\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

①帕塞瓦尔等式的物理意义：能量守恒。

帕塞瓦尔等式右边是能量的定义。而等式左边是2阶范数的平方，等于函数的能量，即

$$\|x\|_2^2 = \int_a^b |x(t)|^2 dt \quad \text{或} \quad \|x\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^2$$

所以，帕塞瓦尔等式表示，正交分解具有能量守恒的性质。

②帕塞瓦尔等式的数学意义：范数不变。

根据2阶范数的定义，可得 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \|a\|_2^2$

代入帕塞瓦尔等式，可得 $\|x\|_2^2 = \|a\|_2^2$ 从而可得 $\|x\|_2 = \|a\|_2$

此式说明，正交分解具有范数不变的性质。

结论：能量守恒与范数不变是等价的。在物理上称为能量守恒，在数学上称为范数不变。此结论揭示了傅里叶分析技术的本质。