

泊松过程

- 问题：例如：Internet WWW 服务器的访问次数与文件吞吐量
 - ◆ 模型、分布特征、统计特性？
- 讨论内容：
 - ◆ 计数过程
 - ◆ 泊松过程的基本概念
 - ◆ 泊松过程的统计特征
 - ◆ 泊松分布的几个问题
 - ◆ 非齐次泊松过程
 - ◆ 泊松过程的和、差
 - ◆ 复合泊松过程
 - ◆ 泊松过程举例

1 基本概念

1.1 独立增量过程和正交增量过程

定义：独立增量过程，

随机过程 $\{\xi(t), t \in T\}$ ，在 T 上任选 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ n 个点，随机过程的增量

$\xi(t_2) - \xi(t_1), \xi(t_4) - \xi(t_3), \cdots, \xi(t_n) - \xi(t_{n-1})$ 是相互统计独立的，则称这类

随机过程是独立增量过程。

定理：

独立增量过程一定是马尔可夫过程。

定义：正交增量过程，

设有二阶矩过程 $\{\xi(t), t \in T\}$ ，并设 $t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4$ ， $t_1, t_2, t_3, t_4 \in T$ 有

$E\{[\xi(t_2) - \xi(t_1)][\xi(t_4) - \xi(t_3)]^* \} = 0$ ，则称该过程为正交增量过程。

定理：

独立增量过程，若满足 $E\{\xi(t)\} = 0$ ， $E\{|\xi(t)|^2\} \leq \infty$ ，则该过程也是一个正交增量过程。

定义：齐次独立增量过程，

如果独立增量过程的增量仅与时间差有关，而与时间本身无关，则称它为齐次独立增量过程。

1.2 计数过程

定义，在 $(0, t)$ 内出现事件 A 的总数所组成的过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 称为计数过程。

计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 满足下列条件：

1. $N(t) \geq 0$;
2. $N(t)$ 是一个正整数;
3. 如果有两个时刻 s, t , 且 $s < t$, 则 $N(s) < N(t)$;
4. 如果有两个时刻 s, t , 且 $s < t$, 则 $N(t) - N(s)$ 代表时间间隔 (s, t) 内事件 A 出现的次数。

独立增量计数过程

在不相交的时间间隔内出现事件 A 的次数是相互统计独立的。

平稳（齐次）增量计数过程

在时间间隔 $(t, t+s)$ 内出现事件 A 的次数 $[N(t+s) - N(t)]$ 仅与 s 有关而与 t 无关。

1.3 泊松过程的基本概念

定义，设有一个计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 满足下列假设，称为泊松过程，

1. 在 $t=0$ 时, $N(t)=0$;
2. 该过程是独立增量计数过程;
3. 该过程是平稳增量计数过程;
4. 在 $(t, t+\Delta t)$ 内出现一个事件的概率为 $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$, λ 为一常数, 在 $(t, t+\Delta t)$ 内出现两个或两个以上事件的概率为 $o(\Delta t)$, 即 $P\{N(t+\Delta t) - N(t) > 1\} = o(\Delta t)$

2 泊松过程的分布特征

令 $P_n(t) = P[N(t) - N(0) = n]$ 表示在间隔 t 的时间内发生 n 次事件的概率。

对于泊松过程，在 $(0, t+\Delta t)$ 内不出现事件，等价于在 $(0, t)$ 间隔内不出现事件以及在 $(t, t+\Delta t)$ 间隔内不出现事件；根据泊松过程的特征 4，在 $(t, t+\Delta t)$ 内不出现事件的概率为：

$1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)$ ；根据泊松过程的独立增量特性，在 $(0, t)$ 与 $(t, t+\Delta t)$ 间隔内出现事件次数是相互统计独立的，因而：

$$P_0(t + \Delta t) = P_0(t)P_0(\Delta t)$$

即： $P_0(t + \Delta t) = P_0(t)(1 - \lambda \Delta t) + o(\Delta t)$

同理，在 $(0, t+\Delta t)$ 内出现事件 n 次事件，等价于在 $(0, t)$ 间隔内出现 n 次事件、在 $(t, t+\Delta t)$

间隔内不出现事件，或者在(0,t)间隔内出现 n-1 次事件、在(t,t+Δt)间隔内出现 1 次事件，
或者在(t,t+Δt)间隔内不出现事件，或者在(0,t)间隔内出现 k<(n-1)次事件、在(t,t+Δt)间隔
内出现 2 次或两次以上的事件；利用泊松过程的特征 4、泊松过程的独立增量特性、以
及全概率公式，得：

$$P_n(t + \Delta t) = P_n(t)P_0(\Delta t) + P_{n-1}(t)P_1(\Delta t) + \sum_{k=0}^{n-2} P_k(t)P_{n-k}(\Delta t), \quad n \geq 1$$

$$\text{即： } P_n(t + \Delta t) = P_n(t)(1 - \lambda \Delta t) + P_{n-1}(t)\lambda \Delta t + o(\Delta t), \quad n \geq 1$$

整理上述两式，可得泊松过程递推微分方程：

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} P_0(t) &= -\lambda P_0(t) \\ \frac{d}{dt} P_n(t) &= -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t), \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

泊松过程递推微分方程的解，

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}$$

$$P_1(t) = \lambda t \cdot e^{-\lambda t}$$

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

因此：泊松过程的概率分布律为：

$$P\{N(t_0 + t) - N(t_0) = n\} = P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

泊松分布的母函数为：

$$\Psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} z^n = e^{-\lambda t(1-z)}$$

对于给定的时刻 s、t，且 s<t，t = s + Δt，以及相应的 N(s)、N(t)，转移概率分布为，

$$\begin{aligned} P\{N(t) = n + k / N(s) = k\} \\ &= P\{N(t) - N(s) = n / N(s) = k\} \\ &= P\{N(s + \Delta t) - N(s) = n\} \\ &= P_n(\Delta t) = \frac{(\lambda \cdot \Delta t)^n}{n!} e^{-\lambda \cdot \Delta t} \end{aligned}$$

3. 泊松分布的统计特征

均值：

$$\begin{aligned} E\{N(t)\} &= \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P\{N(t) = n\} \\ E\{N(t)\} &= \left[\frac{d}{dz} \Phi(z) \right]_{z=1} \\ E\{N(t)\} &= \sum_{n=0}^{\infty} n P\{N(t) = n\} = \sum_{n=0}^{\infty} n P\{N(t) = n\} \cdot z^n \Big|_{z=1} \\ &= \frac{d}{dz} \left[\sum_{n=0}^{\infty} P\{N(t) = n\} \cdot z^n \right]_{z=1} = \left[\frac{d}{dz} \Phi(z) \right]_{z=1} \\ &= \left[\frac{d}{dz} e^{-\lambda t(1-z)} \right]_{z=1} = \lambda t \end{aligned}$$

$$E\{N(t)\} = \lambda t$$

方差：

$$\begin{aligned} E\{[N(t)]^2\} &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P\{N(t) = k\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P(N(t) = k) \cdot z^k \Big|_{z=1} \\ &= z \frac{d}{dz} z \frac{d}{dz} \left[\sum_{k=0}^{\infty} P(N(t) = k) \cdot z^k \right]_{z=1} \\ &= \left[z \frac{d}{dz} z \frac{d}{dz} \Phi(z) \right]_{z=1} = \left[z \frac{d}{dz} z \frac{d}{dz} e^{-\lambda t(1-z)} \right]_{z=1} \\ &= z \frac{d}{dz} \left[z \lambda t e^{-\lambda t(1-z)} \right]_{z=1} = \left[z \lambda t e^{-\lambda t(1-z)} + z^2 (\lambda t)^2 e^{-\lambda t(1-z)} \right]_{z=1} \\ &= \lambda t + (\lambda t)^2 \end{aligned}$$

$$D\{N(t)\} = E\{[N(t)]^2\} - [E\{N(t)\}]^2 = \lambda t$$

自相关函数

$$R(t_1, t_2) = E\{N(t_1)N(t_2)\}$$

假设 $t_1 < t_2$ ，有

$$\begin{aligned}
E\{N(t_1)N(t_2)\} &= E\{N(t_1)N(t_1) + N(t_1)[N(t_2) - N(t_1)]\} \\
&= E\{N(t_1)N(t_1)\} + E\{N(t_1)\} \cdot E\{[N(t_2) - N(t_1)]\} \\
&= \lambda t_1 + (\lambda t_1)^2 + \lambda t_1 \cdot \lambda (t_2 - t_1) \\
&= \lambda t_1 + \lambda t_1 \cdot \lambda t_2
\end{aligned}$$

若 $t_1 > t_2$, 则有:

$$E\{N(t_1)N(t_2)\} = \lambda t_2 + \lambda t_1 \cdot \lambda t_2$$

总结起来有

$$R(t_1, t_2) = \begin{cases} \lambda t_2 + \lambda^2 t_1 t_2 & t_1 \geq t_2 \\ \lambda t_1 + \lambda^2 t_1 t_2 & t_1 \leq t_2 \end{cases}$$

或: $R(t_1, t_2) = \lambda \cdot \min[t_1, t_2] + \lambda t_1 \cdot \lambda t_2$

自协方差函数

$$\begin{aligned}
C(t_1, t_2) &= E\{[N(t_1) - \mu(t_1)][N(t_2) - \mu(t_2)]\} \\
&= E\{N(t_1)N(t_2)\} - \mu(t_1)\mu(t_2) \\
&= \lambda \min(t_1, t_2) \\
&= \lambda t_1 U(t_2 - t_1) + \lambda t_2 U(t_1 - t_2)
\end{aligned}$$

4. 泊松分布的几个问题

4.1 第一个事件到达时间的概率密度

泊松过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 的第一个事件到达时间 T , T 落在 $(\tau, d\tau)$ 内的概率:

泊松过程第 1 个事件在时刻 $(\tau, d\tau)$ 发生, 而在 $(0, \tau)$ 时间内不发生事件的概率:

$$\begin{aligned}
P\{\tau < T < (\tau + d\tau)\} &= P\{[N(\tau + d\tau) - N(\tau)] = 1\} \cdot P\{[N(\tau) - N(0)] = 0\} \\
&= \lambda \cdot d\tau \cdot e^{-\lambda \tau}
\end{aligned}$$

故, 泊松过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 的第一个事件到达时间 T 的概率密度

$$f(\tau) = \lambda \cdot e^{-\lambda \tau}$$

4.2 第 n 个事件到达时间 t 的概率密度

泊松过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 的第 n 个事件到达时间 T_n , T_n 落在 $(\tau, d\tau)$ 内的概率:

泊松过程第 n 个事件在时刻 $(\tau, d\tau)$ 发生，而在 $(0, \tau)$ 时间内发生 $(n-1)$ 事件的概率：

$$\begin{aligned} P\{\tau < T_n < (\tau + d\tau)\} &= P\{[N(\tau + d\tau) - N(\tau)] = 1\} \cdot P\{[N(\tau) - N(0)] = n - 1\} \\ &= \lambda \cdot d\tau \cdot \frac{(\lambda\tau)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda\tau} \end{aligned}$$

泊松过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 的第 n 个事件到达时间 T_n 的概率密度分布：

$$f(\tau) = \lambda \cdot \frac{(\lambda\tau)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda\tau}$$

4.3 时间间隔 $(0, t)$ 内发生一个事件，事件发生时间的概率密度

泊松过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 在 $(0, t)$ 内有一个事件出现，事件到达时间 S 的概率分布

$$\begin{aligned} P\{S < s / N(t) = 1\} &= P\{N(s) = 1 / N(t) = 1\}, \quad (s < t) \\ &= \frac{P\{N(s) = 1\} \cdot P\{N(t) = N(s)\}}{P\{N(t) = 1\}} \\ &= \frac{\lambda s e^{-\lambda s} \cdot e^{-\lambda(t-s)}}{\lambda t e^{-\lambda t}} = \frac{s}{t} \end{aligned}$$

则 S 的概率密度是 $1/t$ 。

结论：如果已知在 $(0, t)$ 内发生 n 次事件，则 n 次事件的发生时间是 n 个独立同分布的随机变量的顺序序列，每一随机变量均匀分布于 $(0, t)$ 内。

4.4 时间间隔 $(0, t_2)$ 内发生 n 个事件时， $(0, t_1 < t_2)$ 内发生 k 次事件的概率

考虑条件概率， $P[N(t_1) = k | N(t_2) = n]$ ， $t_1 \leq t_2, k = 0, 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} P\{N(t_1) = k | N(t_2) = n\} &= \frac{P\{N(t_1) = k, N(t_2) = n\}}{P\{N(t_2) = n\}} \\ &= \frac{P\{N(t_1) = k, N(t_2 - t_1) = n - k\}}{P\{N(t_2) = n\}} \\ &= \frac{e^{-\lambda t_1} (\lambda t_1)^k}{k!} \frac{e^{-\lambda(t_2 - t_1)} (\lambda(t_2 - t_1))^{n-k}}{(n-k)!} \frac{n!}{e^{-\lambda t_2} (\lambda t_2)^n} \\ &= \binom{n}{k} \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^k \left(1 - \frac{t_1}{t_2}\right)^{n-k} \end{aligned}$$

结论：条件概率服从二项式分布

4.5 第一个过程的第一个事件先于第二个过程的第一个事件的概率

有两个相互独立的泊松过程 $\{N_1(t), t \geq 0\}$ 及 $\{N_2(t), t \geq 0\}$ ，它们在单位时间内出现事件的平均数分别是 λ_1, λ_2 ，设 x, y 分别是两个过程出现第一次事件的时刻，求第一个过程的第一个事件先于第二个过程的第一个事件的概率，即 $P\{x < y\}$ ，

解：首先考虑第一个过程第 1 个事件在时刻 $(x+dx)$ 发生，而第二个过程在 $(0, x)$ 时间内不发生任何事件的概率密度，再考虑 x 从 0 到 ∞ 的积分。

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} dx \lambda_1 \cdot e^{-\lambda_1 x} \cdot e^{-\lambda_2 x} \\ &= \frac{\lambda_1}{(\lambda_1 + \lambda_2)} \cdot \int_0^{\infty} dx \cdot (\lambda_1 + \lambda_2) e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)x} \\ &= \frac{\lambda_1}{(\lambda_1 + \lambda_2)}. \end{aligned}$$

4.6 第一个过程的第 k 个事件先于第二个过程的第一个事件的概率

有两个相互独立的泊松过程 $\{N_1(t), t \geq 0\}$ 及 $\{N_2(t), t \geq 0\}$ ，它们在单位时间内出现事件的平均数分别是 λ_1, λ_2 ，设 t_{1k}, t_{21} 分别是两个过程出现第 k 次事件的时刻，求第一个过程的第 k 个事件先于第二个过程的第一个事件的概率，即 $\Pr\{t_{1k} < t_{21}\}$ 。

首先考虑第一个过程第 k 个事件在时刻 $(x+dx)$ 发生，而第二个过程在 $(0, x)$ 时间内不发生任何事件的概率密度，再考虑 x 从 0 到 ∞ 的积分。

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} dx \lambda_1 \cdot \frac{(\lambda_1 x)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda_1 x} \cdot e^{-\lambda_2 x} \\ &= \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^k (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \int_0^{\infty} dx \cdot \frac{[(\lambda_1 + \lambda_2)x]^{k-1}}{(k-1)!} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)x} \\ &= \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^k \end{aligned}$$

5 非齐次泊松过程

定义，计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 满足下列条件，称它为非齐次泊松过程，

1. 在 $t=0$ 时， $N(t)=0$ ；
2. 该过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是独立增量计数过程；
3. $P\{N(t+\Delta t) - N(t) > 1\} = 0(\Delta t)$ ；

$$4. \quad P\{N(t+\Delta t) - N(t)=1\}=\lambda(t) \Delta t + o(\Delta t)。$$

非齐次泊松过程的概率分布：

$$P\{N(t_0+t) - N(t_0) = n\} = \frac{[m(t_0+t) - m(t_0)]^n}{n!} e^{-[m(t_0+t) - m(t_0)]}$$

其中，

$$m(t) = \int_0^t \lambda(s) ds$$

6 泊松过程的和、差

泊松过程的和

如果 $N_1(t)$, $N_2(t)$ 是参数分别为 λ_1 , λ_2 的独立泊松过程，则他们的和 $N_1(t) + N_2(t)$ 是参数为 $(\lambda_1 + \lambda_2)$ 的泊松过程

泊松过程的差

如果 $N_1(t)$, $N_2(t)$ 是参数分别为 λ_1 , λ_2 的独立泊松过程，则他们的差 $y(t) = N_1(t) - N_2(t)$ 取值为 n 的概率是，

$$\begin{aligned} P\{y(t) = n\} &= \sum_{k=0}^{\infty} P\{N_1(t) = n+k\} P\{N_2(t) = k\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda_1 t} \frac{(\lambda_1 t)^{n+k}}{(n+k)!} e^{-\lambda_2 t} \frac{(\lambda_2 t)^k}{k!} \\ &= e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{n/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} t)^{n+2k}}{k!(n+k)!} \\ &= e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{n/2} I_{|n|}(2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} t) \end{aligned}$$

其中 $I_{|n|}(2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} t)$ 是 n 阶修正贝塞尔函数。泊松过程的差的均值和方差是，

$$E\{y(t)\} = (\lambda_1 - \lambda_2)t \quad \text{Var}\{y(t)\} = (\lambda_1 + \lambda_2)t。$$

两个独立泊松过程的差不是泊松过程。

7 复合泊松过程

定义：

设有泊松过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 和一族独立同分布的随机变量 $\{Y_n\}, n=1, 2, 3, \dots$ 且 $\{N(t), t \geq 0\}$

和 $\{Y_n\}$ 也是相互统计独立的。随机过程 $x(t) = \sum_{n=0}^{N(t)} Y_n$ 称为复合泊松过程。若 $Y_n=1$,

则复合泊松过程就是普通的泊松过程。

在任意时刻复合泊松过程 $x(t)$ 的矩生成函数是

$$\begin{aligned}\Phi_x(z) &= E[z^{x(t)}] = E\left\{E[z^{x(t)} | N(t) = k]\right\} \\ &= E\left\{E\left[z^{\sum_{i=1}^k Y_i} | N(t) = k\right]\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} E\left[z^{\sum_{i=1}^k Y_i} | N(t) = k\right] P(N(t) = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} E\left[\prod_{i=1}^k z^{Y_i}\right] P(N(t) = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\prod_{i=1}^k E[z^{Y_i}]\right] P(N(t) = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\prod_{i=1}^k \phi_y(z)\right] \cdot e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} [\phi_y(z)]^k e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda t [1 - \phi_y(z)]}\end{aligned}$$

复合泊松过程的均值:

$$\begin{aligned}E\{x(t)\} &= \Phi'_x(z) \big|_{z=1} \\ &= \left[e^{-\lambda t [1 - \phi_y(z)]} \right]' \big|_{z=1} \\ &= \lambda t \phi'_y(z) \big|_{z=1} \\ &= \lambda t E\{Y\}\end{aligned}$$

复合泊松过程的方差:

$$\begin{aligned}E\{x^2(t)\} &= \Phi''_x(z) \big|_{z=1} + \Phi^1_x(z) \big|_{z=1} \\ D\{x(t)\} &= E\{x^2(t)\} - [E\{x(t)\}]^2 \\ &= \Phi''_x(z) \big|_{z=1} + \Phi^1_x(z) \big|_{z=1} - [\Phi^1_x(z) \big|_{z=1}]^2 \\ &= \lambda t [\phi''_y(z) + \phi'_y(z)] \big|_{z=1} \\ &= \lambda t E\{Y^2\}\end{aligned}$$

复合泊松过程举例。

8 泊松过程举例

例 1 非齐次泊松过程,

一酒店, 每日 8 点开始营业, 从早 8:00 到 11:00 平均顾客到达率线性增加, 在 8:00 顾客平均到达率为 5 人/小时, 11:00 到达率最高峰 20 人/小时, 从上午 11:00 到下午 1:00 平均顾客到达率不变, 为 20 人/小时。从下午 1:00 到 5:00 顾客到达率线性下降, 到下午 5:00 顾客到达率为 12 人/小时。假设不相交叠的时间间隔内到达商店的顾客数是相互统计独立的, 问在上午 8:30—9:30 间无顾客到达商店的概率是多少? 在这段时间内到达商店顾客数学期望是多少?

解:

到达率函数:

进行时间变换, 8 点到下午 5 点对应 0-9


$$\lambda(t) = \begin{cases} 5 + 5t, & 0 \leq t \leq 3 \\ 20, & 3 \leq t \leq 5 \\ 20 - 2(t - 5), & 5 \leq t \leq 9 \end{cases}$$

该过程是一个非齐次泊松过程。

8 点半到 9 点半

$$\begin{aligned} m(1.5) - m(0.5) &= \int_{0.5}^{1.5} \lambda(t) dt \\ &= \int_{0.5}^{1.5} (5 + 5t) dt \\ &= 10 \end{aligned}$$

8 点半到 9 点半

无顾客到达的概率是 $e^{m(1.5)-m(0.5)}$ 

平均顾客到达数为 $m(1.5) - m(0.5) = 10$

例 2 复合泊松过程,

设移民到某地区的户数是一泊松过程, 平均每周有两户定居, 即 $\lambda = 2$ 。如果每户的人口是一个随机变量, 一户 4 人的概率是 $1/6$, 一户 3 人的概率是 $1/3$, 一户 2 人的的概率是 $1/3$, 一户 1 人的概率是 $1/6$ 。并设每户的人口数是相互独立的随机变量。求在五周内移民到该地区的人口数的数学期望及其方差。

解：

设 Y_n 代表第 n 户的人口数， $X(t)$ 代表总的人口数

$$X(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} Y_n$$

考虑到

$$E\{Y_n\} = 4 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{2}$$

$$E\{Y_n^2\} = 4^2 \times \frac{1}{6} + 3^2 \times \frac{1}{3} + 2^2 \times \frac{1}{3} + 1^2 \times \frac{1}{6} = \frac{43}{6}$$

根据前面利用矩生成函数得到的特征值得表示：

$X(t)$ 的均值为：

$$E\{x(t)\} = \lambda t E\{Y\} = 2 \times 5 \times \frac{5}{2} = 25$$

$X(t)$ 的方差为：

$$D\{x(t)\} = \lambda t E\{Y^2\} = 2 \times 5 \times \frac{43}{6} = \frac{215}{3}$$