1. Se tiene un microprocesador de 5 bits con entrada análoga de -3.3 a 5 [v]. Diseñe el sistema de acondicionamiento y digitalización para la señal: $x(t) = 20\sin(7t - \pi/2) - 3\cos(5t) + 2\cos(10t)$. Presente las simulaciones y gráficas de los procedimientos más representativos en un cuaderno de Python, incluyendo al menos dos períodos de la señal estudiada.

2. Cuál es la señal obtenida en tiempo discreto al utilizar un conversor análogo digital con frecuencia de muestreo de $5kHz$, aplicado a la señal $x(t) = 3\cos(1000\pi t) + 5\sin(2000\pi t) + 10\cos(11000\pi t)$?. Realizar la simulación del proceso de discretización. En caso de que la discretización no sea apropiada, diseñe e implemente un conversor adecuado para la señal estudiada.

3. La distancia media entre dos señales $x_1(t), x_2(t) \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$, se puede expresar a partir de la potencia media:

$$d(x_1, x_2) = \bar{P}_{x_1 - x_2} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_T |x_1(t) - x_2(t)|^2 \, dt.$$

Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$:

$$x_1(t) = A\cos(w_0 t), \quad w_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad T, A \in \mathbb{R}^+$$

$$x_2(t) = \begin{cases} 1 & si \quad 0 \leq t < \frac{T}{4} \\ -1 & si \quad \frac{T}{4} \leq t < \frac{3T}{4} \\ 1 & si \quad \frac{3T}{4} \leq t < T \end{cases}$$

4. Sea $x^{''}(t)$ la segunda derivada de la señal $x(t)$, donde $t \in [t_i, t_f]$. Demuestre que los coeficientes de la serie exponencial de Fourier se pueden calcular según:

$$c_n = \frac{1}{(ti - tf)n^2 w_o^2} \int_{t_i}^{t_f} x^{''}(t) e^{-jnw_o t} dt; \quad n \in \mathbb{Z}.$$

¿Cómo se pueden calcular los coeficientes a_n y b_n desde $x^{''}(t)$ en la serie trigonométrica de Fourier?.

Encuentre el espectro de Fourier, su magnitud, fase, parte real, parte imaginaria y el error relativo de reconstrucción para $n \in \{0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5\}$, a partir de $x^{''}(t)$ para la señal $x(t)$ en la Figura 1 . Compruebe el espectro obtenido con la estimación a partir de $x(t)$ y presente las respectivas simulaciones sobre Python.

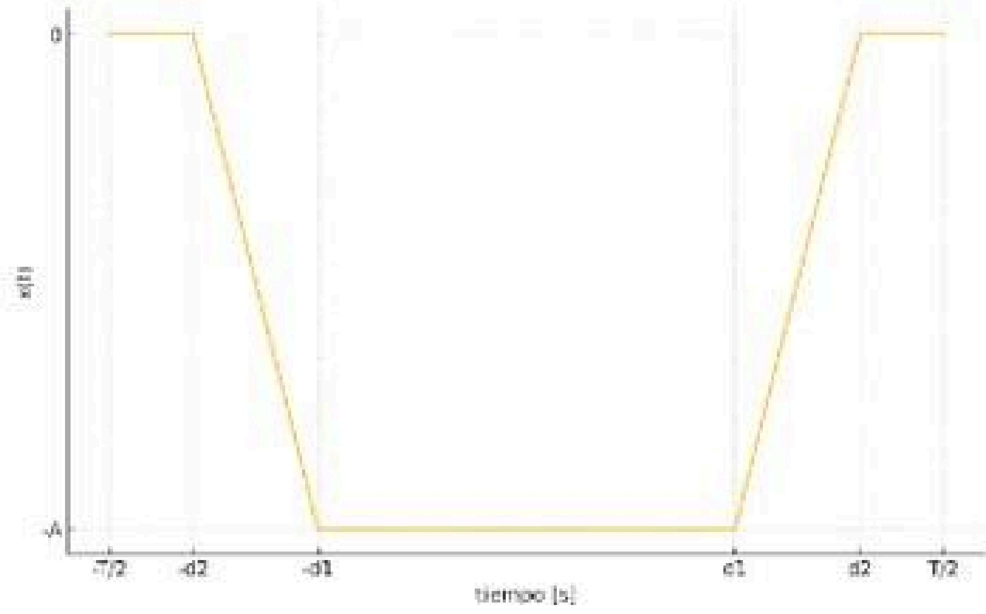

Figura 1: Señal $x(t)$ - ejercicio 4.

Parcial 1 Señales y Sistemas.

(1) $x(t) = 20\sin(\overset{\omega_1}{7}t - \underset{\varphi_1}{\frac{\pi}{2}}) - 3\cos(\overset{\omega_2}{5}t) + 2\cos(\overset{\omega_3}{10}t)$

Analisis de la señal

$\omega_1 = 7 \rightarrow f_1 = 7/2\pi$

$\omega_2 = 5 \rightarrow f_2 = 5/2\pi$

$\omega_3 = 10 \rightarrow f_3 = 10/2\pi$

mcm de las frecuencias $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$

$mcm(5, 7, 10) = 70$

∘ Periodo fundamental en tiempo:

$$T_0 = \frac{2\pi}{MCD(5,7,10)} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$$

Acondicionamiento de la señal

rango de la entrada del microprocesador $(-3.3v, 5.V)$

Determinar extremos o amplitud de la señal original

$X_{min} = min(x(t))$, $X_{max} = max(x(t))$

factor de escalado:

$$factor = \frac{\overset{5V}{max\_entrada} - \overset{-3.3V}{min\_entrada}}{X_{max} - X_{min}}$$

offset = $min\_input - factor \cdot x_{min}$

Acondicionamiento =

$X_{acon}(t) = factor \cdot x(t) + offset$

Digitalizacion =

bits = 5

niveles de cuantizacion $= 2^5 = 32$

espacio entre nivel

$$\Delta = \frac{max\_entrada - min\_entrada}{2^5 - 1} = \frac{5-(-3.3)}{31} \approx 0.2677V$$

(2) $x(t) = 3\cos(\overbrace{1000\pi t}^{1}) + 5\sin(\overbrace{2000\pi t}^{2}) + 10\cos(\overbrace{11000\pi t}^{3})$

$w = 2\pi f \rightarrow f = w/2\pi$

1 $f_1 = \frac{1000\cancel{\pi}}{2\cancel{\pi}} = 500\ Hz$

$f_2 = \frac{2000\cancel{\pi}}{2\cancel{\pi}} = 1000\ Hz$

$f_3 = \frac{11000\pi}{2\pi} = 5500\ Hz \rightarrow f_{max}$

teorema de Nyquist

$f_s > 2f_{max}$

frecuencia de muestreo

$f_{max} = 5500\ Hz \rightarrow f_s > 1100\ Hz$

entonces $f_s = 5\ KHz \rightarrow$ es insuficiente

Para la componente de 5500 Hz

$f_a = |f_3 - f_s| = |5500 - 5000| = 500\ Hz$

esta significa que la componente de alta frecuenca 5500 Hz aparecerá en una componente de baja frecuencia 500 Hz

Discretizacion:

$t = nT = \frac{n}{f_s}$

$$X[n] = X(nT) = 3\cos\left(1000\pi \frac{n}{5000}\right) + 5\sin\left(2000\pi \frac{n}{5000}\right)$$

$$+ 10\cos\left(11000\pi \frac{n}{5000}\right)$$

$$X[n] = X(nT) = 3\cos\left(\pi \frac{n}{5}\right) + 5\sin\left(2\pi \frac{n}{5}\right) + 10\cos\left(11\pi \frac{n}{5}\right)$$

$$10\cos\left(11\pi \frac{n}{5}\right) = 10\cos\left(2\pi n + \pi \frac{n}{5}\right)$$ → se reescribio utilizando periodicidad

$$X[n] = 13\cos\left(\pi \frac{n}{5}\right) + 5\sin\left(2\pi \frac{n}{5}\right)$$

muestreo adecuado 22 KHz → f_s

$f_s > 2 f_{max}$

22000 Hz > 11000 Hz → Se cumple por lo tanto es una frecuencia de muestreo adecuada

Señal discretizada =

$$X[n] = 3\cos\left(1000\pi \frac{n}{22000}\right) + 5\sin\left(2000\pi \frac{n}{22000}\right) + 10\cos\left(11000\pi \frac{n}{22000}\right)$$

$$X[n] = 3\cos\left(\pi \frac{n}{22}\right) + 5\sin\left(\pi \frac{n}{11}\right) + 10\cos\left(\pi \frac{n}{2}\right)$$

3.

$$d(x_1, x_2) = \bar{P}_{x_1 - x_2} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{T} |x_1(t) - x_2(t)|^2 \, dt$$

Distancia media entre señales

$$d(x_1 - x_2) = \sqrt{\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |x_1(t) - x_2(t)|^2 \, dt}$$

$$d(x_1, x_2) = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T |x_1(t) - x_2(t)|^2 dt}$$

Señales dadas

$x_1(t) = A\cos(w_0 t)$, $\quad w_0 = \frac{2\pi}{T} \quad A \in \mathbb{R}^+$

$$x_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < T/4 \\ -1 & \text{si } T/4 \leq t < 3T/4 \\ 1 & \text{si } 3T/4 \leq t < T \end{cases}$$

Calculo de distancia

$$d(x_1, x_2)^2 = \frac{1}{T}\int_0^T (x_1(t) - x_2(t))^2 dt$$

Intervalo $t \in [0, T/4)$

$X(t) = 1$

$$(x_1(t) - x_2(t))^2 = (A\cos(w_0 t) - 1)^2 = A^2\cos^2(w_0 t) - 2A\cos(w_0 t) + 1$$

$$I_1 = \int_0^{T/4} (A\cos(w_0 t) - 1)^2 dt$$

Intervalo $t \in [T/4, 3T/4)$

$X(t) = -1$

$$(x_1(t) - x_2(t))^2 = (A\cos(w_0 t) + 1)^2 = A^2\cos^2(w_0 t) + 2A\cos(w_0 t) + 1$$

$$I_2 = \int_{T/4}^{3T/4} (A\cos(w_0 t) - 1)^2 dt$$

intervalo $t \in [3T/4, T)$

$x(t) = 1$

$$I_3 = \int_{3T/4}^{T} (A\cos(\omega_0 t) - 1)^2 dt$$

Ahora se suman las integrales

$$\cos^2(\omega_0 t) = \frac{1 + \cos(2\omega_0 t)}{2}$$

$$\int_0^T (x_1(t) - x_2(t))^2 dt = I_1 + I_2 + I_3$$

$$\int_0^{T/4} (A\cos(\omega_0 t) - 1)^2 dt + \int_{T/4}^{3T/4} (A\cos(\omega_0 t) + 1)^2 dt + \int_{3T/4}^{T} (A\cos(\omega_0 t) - 1)^2 dt$$

$$= \frac{T}{8\pi}(-8A + \pi(A^2+2)) + \frac{T}{4\pi}(-8A + \pi(A^2+2)) + \frac{T}{8\pi}(-8A + \pi(A^2+2))$$

$$= \left(\frac{T}{8\pi} + \frac{T}{4\pi} + \frac{T}{8\pi}\right)(-8A + \pi(A^2+2)) = \frac{T}{2\pi}(-8A + \pi(A^2+2))$$

$$= \frac{1}{T} I_1 + I_2 + I_3 = \frac{1}{2\pi}(-8A + \pi(A^2+2)) = \frac{A^2}{2} - \frac{4A}{\pi} + 1$$

entonces

$$\frac{1}{T}\int_0^{\pi} (x_1(t) - x_2(t))^2 dt = \frac{A^2}{2} - \frac{4A}{\pi} + 1$$

$$d(x_1, x_2) = \sqrt{\frac{A^2}{2} - \frac{4A}{\pi} + 1}$$

$$C_n = \frac{1}{(t_f - t_i)^2 (jnW_0)^2} \int_{t_1}^{t_f} x''(t) e^{-jnW_0 t} dt$$

Simplificamos con $j^2 = -1$

$$C_n = \frac{1}{(t_f - t_i) n^2 W_0^2} \int_{t_s}^{t_f} x''(t) e^{-jnW_0 t} dt$$

Ahora hacemos la relacion con la serie trigonometrica
tenemos la expresion general de $x(t)$:

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nW_0 t) + b_n \sin(nW_0 t)]$$

Primera derivada

$$x'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [-a_n nW_0 \sin(nW_0 t) + b_n nW_0 \cos(nW_0 t)]$$

Segunda derivada

$$x''(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [-a_n (nW_0)^2 \cos(nW_0 t) - b_n (nW_0)^2 \sin(nW_0 t)]$$

Ahora sacamos la ortogonalidad por los coeficientes a_n y b_n:

- Para a_n

$$a_n = \frac{-2}{T n^2 W_0^2} \int_{t_1}^{t_f} x''(t) \cos(nW_0 t) dt$$

• Para b_n

$$b_n = \frac{-2}{T n^2 W_0^2} \int_{ti}^{tf} x''(t) \sin(n W_0 t) dt$$

Ahora vamos a encontrar el espectro de fourier, su magnitud y el error relativo para $n \in (0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5$ a partir de $x''(t)$

Tenemos la formula general para C_n

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jnW_0 t}$$

$x''(t)$ se representa como:

$$x''(t) = A[(\delta(t) + d_2) - \delta(t - d_1) - \delta(t - d_1) + \delta(t - d_2)]$$

Sostituimos $x''(t)$ en la integral

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A[(\delta(t) + d_2) - \delta(t + d_1) - \delta(t - d_1) + \delta(t - d_2)] e^{-jnW_0 t} dt$$

Evaluamos la integral

$$C_n = \frac{A}{T} [e^{-jnW_0 d_2} - e^{-jnW_0 d_1} - e^{jnW_0 d_1} + e^{jnW_0 d_2}]$$

$$C_n = \frac{A}{T} [(e^{-jnW_0 d_2} + e^{jnW_0 d_2}) - (e^{-jnW_0 d_1} + e^{jnW_0 d_1})]$$

$$\rightarrow e^{-jnW_0 d} + e^{jnW_0 d} = 2\cos(nW_0 d)$$

$$C_n = \frac{2A}{T}\left[\cos(nW_0 d_2) - \cos(nW_0 d_1)\right]$$

Sustituimos los factores de escala

$$C_n = \frac{2A}{Tn^2W_0^2}\left[\cos(nW_0 d_2) - \cos(nW_0 d_1)\right]$$

Para $n = 0$

$$C_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,dt$$

Sustituimos $x(t)$ con su representacion en terminos de delta

$$C_0 = \frac{1}{T}\left[A(d_2+d_1) - A(d_2-d_1) + A(d_1+d_2) - A(d_1-d_2)\right]$$

$$C_0 = \frac{1}{T}\,2A(d_1+d_2)$$

$$C_0 = \frac{4Ad_1}{T}$$

Calculamos la magnitud de C_n

$$|C_n| = \left|\frac{2A}{Tn^2W_0^2}\left[\cos(nW_0 d_2) - \cos(nW_0 d_1)\right]\right|$$

Calculamos el error relativo

la potencia total de la señal es

$$P_x = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$$

representacion con deltas

$$P_x = \frac{1}{T}\left[A^2(d_2^2 + d_1^2) + \dots\right]$$

Usando los coeficientes C_n

$$P_x^{(N)} = \sum_{n=-N}^{N} |C_n|^2$$

$$\frac{|P_x - P_x^{(N)}|}{P_x} = \text{error relativo}$$