Parcial 2 señales y sistemas Kevin Loaiza

① Para el sistema masa-resorte-amortiguador se busca la función de transferencia. La función de transferencia es la relación entre la salida y la entrada, que en este caso son fuerzas. Esto se modela por medio de la segunda ley de Newton.

Para ello se deben identificar las fuerzas que actúan sobre la masa:

- Fuerza externa (Entrada) = $F_E(t)$: actúa en dirección positiva de y
- Fuerza del resorte = Se opone al desplazamiento y sigue la ley de Hooke $F_k(t) = -k\,y(t)$
- Fuerza del amortiguador = Se opone a la velocidad y está descrito por $F_c(t) = -c\dfrac{dy(t)}{dt}$

Se sabe por la segunda ley de Newton que se tiene

$\sum F = m\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}$ y reemplazando las fuerzas se tiene que:

$$F_E(t) + F_k(t) + F_c(t) = m\frac{d^2y(t)}{dt^2}$$

$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2} + c\frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = F_E(t)$$

ahora se aplica la transformada de laplace asumiendo condiciones iniciales cero ($y(0)=0$; $y'(0)=0$)

$$\mathcal{L}\left\{m\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right\} = ms^2Y(s) \;;\; \mathcal{L}\left\{c\frac{dy(t)}{dt}\right\} = csY(s)$$

$$\mathcal{L}\{ky(t)\}\; kY(s) \;;\; \mathcal{L}\{F_E(t)\} = F_E(s)$$

Al reemplazar

$$ms^2Y(s) + csY(s) + kY(s) = F_E(s)$$

Para la funcion de transferencia se busca.

$$H(s)=\frac{Y(s)}{F_E(s)} \rightarrow Y(s)\left[ms^2+cs+K\right]=F_E(s)$$

$$\frac{Y(s)}{F_E(s)}=\frac{1}{ms^2+cs+K}=H(s) \quad \therefore a_0=K,\ a_1=c\ ;\ a_2=m$$

llevando $H(s)$ en su forma canonica $\left(H(s)=\frac{K\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}\right)$

$$H(s)=\frac{1/m}{s^2+\frac{c}{m}s+\frac{K}{m}} \rightarrow \omega_n^2=\frac{K}{m}$$

$$K\omega_n^2=\frac{1}{m} \rightarrow K\frac{K}{m}=\frac{1}{m} \rightarrow K=\frac{1}{K}$$

$$\xi=\frac{c}{m}\frac{1}{2\omega_n} \rightarrow \xi=\frac{c}{2m\sqrt{\frac{K}{m}}} \rightarrow \xi=\frac{c}{2\sqrt{Km}}$$

Ahora se hace el mismo analisis para la red electrica
se realiza LVK en las 2 mallas

– malla 1 = $V_i(t)-L\frac{di_1(t)}{dt}-V_c(t)=0 \qquad \therefore V_c(t)=\frac{1}{C}\int i_c(t)dt$

$$\therefore i_c(t)=i_1(t)-i_2(t)$$

$$\rightarrow V_i(t)=L\frac{di_1(t)}{dt}+\frac{1}{C}\int\left[i_1(t)-i_2(t)\right]dt$$

– malla 2 = $V_c(t)-Ri_2(t)=0$

$$\rightarrow \frac{1}{C}\int\left[i_1(t)-i_2(t)\right]dt=Ri_2(t)$$

Se tiene la salida del sistema esta dada por la tension en el resistor ($V_0(t)=Ri_2(t)$)

Se aplica la transformada de Laplace a todo lo anterior (condiciones iniciales en cero):

$$\mathcal{L}\{\text{malla } 1\} = \mathcal{L}\left\{ v_i(t) = L\frac{d\,i_1(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int [i_1(t) - i_2(t)]dt \right\}$$

$$\rightarrow V_i(s) = sL\,I_1(s) + \frac{1}{sC}[I_1(s) - I_2(s)] \quad (\text{malla } 1)$$

$$\mathcal{L}\{\text{malla } 2\} = \mathcal{L}\left\{ \frac{1}{C}\int [i_1(t) - i_2(t)]dt = R\,i_2(t) \right\}$$

$$\rightarrow \frac{1}{sC}[I_1(s) - I_2(s)] = R I_2(s) \quad (\text{malla } 2)$$

$$\mathcal{L}\{V_o(t)\} = \mathcal{L}\{R\,i_2(t)\} = R I_2(s) = V_o(s) \rightarrow I_2(s) = \frac{V_o(s)}{R}$$

De la ecuacion de la malla 2 se despeja $I_1(s)$

$$I_1(s) - I_2(s) = sCR\,I_2(s)$$

$$\rightarrow I_1(s) = I_2(s)(1 + sCR)$$

Se sustituye este resultado en la ecuacion de la malla 1:

$$V_i(s) = sL[I_2(s)(1 + sCR)] + \frac{1}{sC}[I_2(s)(1+sCR) - I_2(s)]$$

$$V_i(s) = I_2(s)\left[sL(1 + sCR) + \frac{1}{sC}sCR\right]$$

$$\rightarrow V_i(s) = I_2(s)[sL + s^2LCR + R]$$

Se sustituye $I_2(s) = \frac{V_o(s)}{R} \rightarrow V_i(s) = \left(\frac{V_o(s)}{R}\right)[s^2LCR + sL + R]$

Se busca la funcion de transferencia $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$

$$\rightarrow \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = H(s) = \frac{R}{s^2LCR + sL + R} \quad \therefore a_0 = R \;;\; a_1 = L \;;\; a_2 = LCR$$

Se lleva a su forma canonica

$$H(s) = \frac{R/LCR}{s^2 + \frac{L}{LCR}s + \frac{R}{LCR}}$$

$$\rightarrow H(s) = \frac{1/LC}{s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}} \rightarrow \omega_n^2 = \frac{1}{LC} ; K = \frac{1}{a_0} = \frac{1}{R}$$

$$\xi = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0 a_2}} \rightarrow \xi = \frac{L}{2\sqrt{LCR^2}}$$

$$= \frac{L}{2R\sqrt{LC}}$$

Entonces la equivalencia entre el sistema electrico y el mecanico se da al comparar la forma canonica de cada funcion de transferencia:

$$\frac{K}{m} \cong \frac{1}{LC} \quad ; \quad \frac{C}{m} \cong \frac{1}{RC}$$

Estas equivalencias implican que

- $m \cong 1$ (masa analoga a la inductancia)
- $C \cong R$ (coeficiente de amortiguamiento analogo del resistor)
- $K \cong \frac{1}{C}$ (Constante del resorte analogo a la capacitancia)

(2) El objetivo de la modulacion en banda lateral unica (SSB) es transmitir una señal de informacion $m(t)$ de la manera mas eficiente posible. Esta modulacion parte de la modulacion de amplitud con doble banda lateral y portadora suprimida (DSB-SC), cuya expresion en el tiempo es=

$S_{DSB}(t) = m(t)\cos(2\pi W_c t)$ Donde W_c es la frecuencia de la portadora

Al aplicar la transformada de fourier:

$$S_{DSB}(w) = \frac{1}{2}\left[M(w - w_c) + M(w + w_c)\right]$$

Esta ecuación revela la redundancia al tener el espectro del mensaje $M(w)$ duplicado centrado en $+w_c$ (Banda superior - USB) y en $-w_c$ (Banda inferior - LSB). Ambas bandas tienen la misma información entonces la modulación SSB elimina esta redundancia al transmitir solo una de las dos bandas logrando reducir el ancho de banda necesario y concentrar la potencia de transmicion en la información útil.

- Filtrado en el dominio de la frecuencia:

Este metodo es un enfoque teorico que aprovecha la FT para la creación de filtros perfectos que tienen una utilidad en la simulación y el entendimiento conceptual

A. Proceso de modulacion:

1. Transformacion del dominio de la frecuencia: $M(w) = \mathcal{F}\{m(t)\}$

2. Generación del espectro de la doble banda lateral (DSB): $S_{DSB}(w) = \frac{1}{2}[M(w-w_c) + M(w+w_c)]$

3. Diseño de una mascara de filtrado $H(w)$ que define las frecuencias que se conservan (1) y las que se eliminan (0)

3.1 Para USB se usa un filtro pasa altas y elimina todo debajo de w_c:

$$H_{USB}(w) = 1 - [u(w+w_c) - u(w-w_c)] = u(w-w_c) + u(-w-w_c)$$

Esta funcion vale 1 para $|w| > w_c$ y 0 en cualquier otro caso

3.2 Para LSB se usa un filtro pasa bajas y elimina todo encima de w_c:

$$H_{LSB}(w) = u(w+w_c) - u(w-w_c)$$

Esta funcion vale 1 para $|w| < w_c$ y 0 en lo contrario

4. Aplicación del filtro: Se filtra el espectro del DSB por medio del siguiente diagrama

$$S_{DSB}(\omega) \rightarrow \boxed{H(\omega)} \xrightarrow{S_{SSB}(\omega)}$$

Que matematicamente es = $S_{SSB}(\omega) = S_{DSB}(\omega)\, H(\omega)$ y este espectro contiene unicamente la banda lateral deseada

5. Retorno al dominio del tiempo = se aplica $S_{SSB}(t) = \mathcal{F}^{-1}\{S_{SSB}(\omega)\}$ para regresar al dominio del tiempo

B. proceso de Demodulacion

1. multiplicacion coherente: $S_{SSB}(t)$ se multiplica por la portadora local $2\cos(2\pi\omega_c t)$

$$v(t) = S_{SSB}(t) \cdot 2\cos(2\pi\omega_c t)$$

Usando la identidad de Euler ($2\cos(\theta) = e^{j\theta} + e^{-j\theta}$) nos muestra que en el dominio de la frecuencia ocurre un doble desplazamiento:

$$V(\omega) = \mathcal{F}\{v(t)\} = S_{SSB}(\omega - \omega_c) + S_{SSB}(\omega + \omega_c)$$

Esta operacion traslada el espectro de la banda lateral recibida a dos nuevas posiciones: Una copia de banda base (centrada en 0 Hz) que es el mensaje original y en alta frecuencia (centrada en $\pm 2\omega_c$)

2. Filtrado pasa bajas ideal = se busca aislar la componente en banda base, teniendo un ancho de banda del mensaje W, el filtro se define como =

$$H_{LPF}(\omega) = \mathrm{rect}_{\omega}\left(\frac{\omega}{2W}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\omega| \leq W \\ 0 & \text{si } |\omega| > W \end{cases}$$

En la practica se suele usar una frecuencia de corte ligeramente mayor a W

3. Recuperacion del espectro del mensaje = se filtra el espectro de tal forma que =

$$V(w) \longrightarrow \boxed{H_{LPF}(w)} \xrightarrow{M_{demod}(w)}$$

matematicamente = $M_{demod}(w) = V(w)\, H_{LPF}(w)$

4. Retorno al dominio del tiempo: $F^{-1}\{M_{demod}(w)\} = m_{demod}(t)$

- Filtrado en el dominio de tiempo (Filtros IIR):

Este metodo simula la implementacion de un sistemas SSB con componentes analogicos o sus equivalentes digitales directos (filtros IIR / FIR)

A: Proceso de modulacion =

1. Generacion de la DSB: Identico al metodo anterior

$$S_{DSB}(t) = m(t)\, 2\cos(2\pi W_c t)$$

2. Diseño de filtro pasa bandas (BPF) realizable = Debido a que las dos bandas laterales son adyacentes, con una separacion idealmente nula en W_c, el filtro debe tener una pendiente muy pronunciada para separar las bandas.

En este caso se utilizan filtros de respuesta funcional infinita (IIR) de orden alto como los Butterworth o chevyshev.

La funcion de transferencia de un filtro IIR digital es:

$$H(jw) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jkw}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k e^{-jkw}}$$

con a_k y b_k como los coeficientes del filtro

Un N mayor produce una pendiente más pronunciada

Esta funcion de transferencia en terminos de la transformada Z puede ser:

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

y este modelo es muy utilizado para los filtros digitales

3. Se filtra la señal $S_{DSB}(t)$ por el filtro digital diseñado. en el dominio del tiempo, esto corresponde a una convolucion pero al ser un sistema digital se calcula mediante la ecuacion en diferencias:

$$S_{SSB}[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k S_{DSB}[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k S_{SSB}[n-k]$$

Esta operacion la realiza la funcion filter de la libreria scipy.

El resultado es una aproximacion de la señal SSB ideal pero se filtrara una pequeña porcion de la banda no deseada.

B. Proceso de demodulacion.

El proceso es similar al anterior pero con filtros IIR

1. Multiplicacion coherente: $v(t) = S_{SSB}(t)\, 2\cos(2\pi w_c t)$ y como antes se genera una componente en banda base y otra en $\pm 2w_c$

2. Diseñado y aplicacion de un LPF realizable: Debido a que 0 Hz y $2w_c$ no estan extremadamente cerca, el orden del filtro no tiene que ser tan alto.

Se diseña el filtro IIR con el modelo anterior y se le ponen las frecuencias de corte tal que: $w_{corte} > W$ y $w_{corte} \ll 2w_c$

3. Recuperacion del mensaje: esto se logra mediante la convolucion que en tiempo discreto es la ecuacion de diferencias entre $v(t)$ y el filtro, dandonos lo siguiente

$$m_{demod}[n] = \sum_{k=0}^{M} b_{LPF_k}\, v[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_{LPF_k}\, m_{demod}[n-k]$$