Notas de Investigación de Operaciones

Kevin Alejandro Gutierrez Luna

6 de agosto de 2023

Índice general

1. El método simplex **2**
1.1. Algoritmo . . . 2
1.2. El método de la M . . . 3
1.3. El método de dos fases . . . 3
1.4. Casos especiales . . . 3

2. El problema del Transporte **4**
2.1. Cálculo de la solución inicial . . . 4
2.1.1. Método de Voguel . . . 4
2.2. Prueba de la degeneración . . . 4
2.3. Prueba de optimalidad . . . 5
2.3.1. Método del cruce del Arroyo . . . 5
2.3.2. Método de Modi . . . 5
2.4. Reasignación de unidades (Caso especial, mejorando la solución) . . . 5

3. El problema de asignación **6**
3.1. El método Húngaro . . . 6
3.2. Casos especiales . . . 6
3.2.1. Costos negativos . . . 6
3.2.2. Maximización . . . 6
3.2.3. Asignaciones prohibidas . . . 7
3.2.4. Soluciones óptimas múltiples . . . 7
3.2.5. Problema no balanceado . . . 7

4. Redes **8**
4.1. Método del camino crítico . . . 8
4.2. Conceptos . . . 8
4.3. Consideraciones para realizar el diagrama de actividades . . . 9
4.4. Compresión de la red . . . 9
4.4.1. Consideraciones para la compresión . . . 9

Capítulo 1

El método simplex

Normalización del modelo

Tipo de desigualdad	**Variable a agregar**
$\leq$	$+S$
$\geq$	$-S + A$
$=$	$+A$

1.1. Algoritmo

1. Se rellena la tabla simplex con las columnas C_j (coeficientes de las variables básicas), VB (variables básicas), Sol (la solución a las restricciones), y una columna para cada variable del modelo, de holgura y artificial; y θ (el cociente de columna solución entre el valor de la fila en la columna pivote).

2. Se selecciona la columna pivote. Para maximizar se elige aquella que contenga el valor más positivo en la fila $C_j - Z_j$, y para minimizar se elige la que tenga el valor más negativo.

3. Se selecciona como fila pivote aquella que contenga el menor cociente positivo en la columna θ.

4. Una vez seleccionada la columna y fila pivote, se divide toda la fila entre el pivote (valor que se encuentra en la intersección entre la fila y columna pivote) para convertir el pivote en 1.

5. Se convierten todos los valores en la columna pivote en ceros; esto se hace multiplicando toda la fila pivote por el inverso aditivo del valor en la columna pivote de la fila que se desea eliminar, se suman los valores de ambas filas y se reemplazan en la fila a eliminar.

6. Se calcula la fila Z_j multiplicando los coeficientes en C_j por cada valor en la fila correspondiente y sumando los valores obtenidos para cada columna.

7. Se calcula la fila $C_j - Z_j$ restando los coeficientes de la función objetivo con el valor correspondiente de cada columna.

8. Se realiza la prueba de optimalidad de la solución. Para el caso de maximización se comprueba que todos los valores en la fila $C_j - Z_j$ sean menores o iguales a cero, si esas se ha llegado a la solución final. Para minimización se ha llegado a la solución si todos los valores en la fila $C_j - Z_j$ son mayores o iguales a cero.

1.2. El método de la M

Se completa la función objetivo agregando las variables de holgura S y las variables artificiales A que se utilizaron para convertir las desigualdades en ecuaciones. Se agrega el coeficiente a las variables artificiales; $-M$ para el caso de maximización y $+M$ para minimización.

1.3. El método de dos fases

A diferencia del método de la gran M, para este método se agregan coeficientes de 1 a las variables artificiales y coeficientes de 0 para todas las demás en la función objetivo, por lo tanto solamente puede ser utilizado en modelos con restricciones del tipo $\geq$ o $=$. La primera fase termina cuando ya no aparecen variables artificiales en la solución final. Después se procede con el método simplex tradicional reemplazando los coeficientes 0 de las variables básicas que aparecen en la solución con sus coeficientes originales.

1.4. Casos especiales

- **Soluciones múltiples:** Si $C_j - Z_j = 0$ para cualquier variable que no es solución, entonces existen soluciones óptimas múltiples.
- **Solución no factible (restricciones en conflicto)**: Si la solución final contiene una variable artificial, entonces no existe solución factible y se tienen restricciones en conflicto.
- **Solución no acotada:** En la columna θ todos los cocientes son negativos o infinito.
- **Empate para la variable que sale (Degeneración):** Si dos o mas variables básicas tienen el mismo cociente positivo mínimo se tiene un empate para la variable que sale. En tal caso, se selecciona una variable arbitraria y se continúa con el procedimiento. En algunas ocasiones (aunque raro) esto podría indicar que se tienen problemas.

Capítulo 2

El problema del Transporte

2.1. Cálculo de la solución inicial

2.1.1. Método de Voguel

1. Construir la matriz de transporte con las fábricas en la columnna de la izquierda y las bodegas en las columnas restantes. Se agrega a cada celda el costo de envío de cada fábrica a cada bodega.

2. Verificar si el problema está balanceaado. Si la suma de las capacidades de las bodegas y las fábricas no es igual, agregamos una fila o una columna según donde haga falta, y su capacidaad será la cantidad faltante.

3. Si debemos minimizar calculamos las diferencias entre los elementos más pequeños de cada renglóń y cada columna; si debemos maximizar calculamos las diferencias entre los elementos más grandes en cada renglón y en cada columna.

4. Seleccionamos el renglón o columna con la diferencia más grande, si existe un empate se selecciona el reglón que contenga el costo menor (en caso de minimizar) o el costo mayor (en caso de maximizar). Si el empate persiste se selecciona la celda que pueda recibir más unidades. Si el empate persiste se selecciona cualquiera de las celdas que empataron.

5. En caso de satisfacer por completo la demanda de una columna o un renglón, se cancelan las celdas que hayan quedado vacías en dicha columna o renglón.

6. Se repiten el paso 3 al 5 hasta que ya no haya celdas que rellenar.

2.2. Prueba de la degeneración

Si $R + C - 1 < A$, en donde A es la cantidad de asignaciones en la solución, entonces la solución es degenerada. En tal caso es necesario agregar un valor $\mathcal{E}$ (Epsilon) que nos ayude a calcular los índices de mejoramiento para todas las celdas vacías. Se puede comenzar probando la celda vacía con el costo menor.

2.3. Prueba de optimalidad

2.3.1. Método del cruce del Arroyo

Comenzando a partir de cada celda vacía se intenta construir una trayectoria cerrada saltando horizontalmente y verticalmente hacia otras celdas, no se permiten saltos en diagonal. El índice de mejoramiento de cada celda se calcula sumando el costo de cada celda de la trayectoria alternando signos a partir de la celda vacía donde se comienza. La celda de partida siempre tiene signo positivo.

2.3.2. Método de Modi

- Se calculan los valores de R_i y K_j para cada renglón y cada columna.
- Siempre se comienza con $R_1 = 0$.
- Se calcula el resto de los valores mediante $R_i + K_j = Cij$

Si todos los índices de mejoramiento son positivos o cero (en caso de minimización), entonces hemos llegado a la solución, pero si existe por lo menos un negativo, debemos mover unidades; para el caso de maximización, si todos los valores son negativos o cero, significa que hemos llegado a la solución, pero si hay por lo menos un índice positivo significa que debemos mover unidades.

2.4. Reasignación de unidades (Caso especial, mejorando la solución)

Para el caso de minimización se selecciona la celda con el índice de mejoramiennto más negativo, y para el caso de maximización se busca la que contegna el índice más positivo.

Posteriormente se traza una trayectoria cerrada a partir de la celda seleccionada, como se mostró en el método del cruce del arroyo. Se marcan los signos y se selecciona la celda con signo negativo que contenga la **asignación más pequeña**. Si la solución obtenida es degenerada y una celda perteneciente a la trayectoria trazada contiene el valor Epsilon y un signo negativo no será posible mejorar la solución, por lo tanto debemos buscar otra celda para asignar el valor Epsilon y volver a calcular los índices de mejoramiento.

Capítulo 3

El problema de asignación

Los problemas de asignación forman una subclase del problema de transporte.

3.1. El método Húngaro

1. Elaborar la matriz de costos de oportunidad como si de un problema de transporte se tratase.

2. Verificar y manejar los casos especiales.

3. Una vez manejados los casos especiales, se procede a buscar el elemento más pequeño de cada fila y se resta de cada elemento de la fila.

4. Se repite el paso anterior para los elementos de cada columna.

5. Determine si la solución es óptima intentando cubrir todos los ceros de la matriz utilizando $\max(R, C)$ líneas rectas, si esto es posible hemos llegado a la solución óptima.

6. Si no se ha llegado a la solución óptima buscamos el elemento más pequeño de los no cubiertos por alguna línea, se suma a cada número que se encuentre en la intersección de dos líneas y se resta de todos los números no cubiertos por alguna línea. El resto de los números se mantienen igual. Al terminar, repita el paso anterior.

3.2. Casos especiales

3.2.1. Costos negativos

Se agrega a cada celda un valor igual que el costo más negativo.

3.2.2. Maximización

Se busca el elemento más grande de la matriz de costos y cada uno de los elementos de la matriz se reemplazan por la diferencia entre dicho valor y el costo en cada celda. Después se procede de manera normal con el método Húngaro.

3.2.3. Asignaciones prohibidas

Si existen celdas en donde no podamos realizar asignaciones debido a las restricciones del problema, asignamos a la celda un costo más alto que el mayor de toda la matriz (en caso de maximización) o un costo más bajo que el mínimo de toda la matriz (en caso de minimización), así garantizamos que las celdas que los contienen nunca formarán parte de la solución final.

3.2.4. Soluciones óptimas múltiples

Si en el momento de realizar la asignación para la solución final aparecen opciones múltiples de ceros para asignar existen múltiples soluciones.

3.2.5. Problema no balanceado

Se agrega una fila o columna ficticia, según sea necesario, y su capacidad será la cantidad de unidades faltantes.

Capítulo 4

Redes

4.1. Método del camino crítico

4.2. Conceptos

- Se le llama **camino crítico** a la serie de actividades que indica la duración total del proyecto.
- El **tiempo medio** (M) de una actividad es el tiempo normal que se necesita para la ejecución de las actividades.
- El **tiempo óptimo** (o) de una actividad es el que representa el tiempo mínimo posible sin importar el costo.
- El **tiempo pésimo** (p) de una actividad es un tiempo excepcionalmente grande que pudiera presentarse ocasionalmente como consecuencia de algún percance no previsto.
- El **costo normal** ($\$N$) de una actividad es el coste por realizar la actividad en tiempo estándar.
- El **coto límite** ($\$L$) de una actividad es el costo por realizar la actividad a tiempo óptimo.
- El **tiempo estándar** (t) de una actividad es

$$t = \frac{o + 4M + p}{6}$$

- La **pendiente** (m) de una actividad es

$$m = \frac{L - N}{t - o}$$

4.3. Consideraciones para realizar el diagrama de actividades

- Si una actividad es secuencia de múltiples actividades, se coloca a continuación de la activididad que se encuentre más adelantada.
- Actividades con $t = 0$ se representan con una línea vertical.

4.4. Compresión de la red

Una vez realizado el diagrama de la red de actividades podemos comenzar con la compresión de las actividades. Ya que el tiempo total del proyecto depende del tiempo que toma la ruta crítica, procederemos a intentar comprimir las actividades que pertenecen a ella, tomando como base el tiempo estándar de cada actividd.

Se comienza calculando el tiempo estándar y la pendiente de cada actividad.

4.4.1. Consideraciones para la compresión

- Las actividades donde $t = o$ no se pueden comprimir.
- Solo es posible comprimir hasta $t - o$ días una actividad, sí y solo sí $t > o$.
- La compresión máxima que se puede realizar para una red de n actividades está dada por:

  $$\sum_{i=1}^{n} o_i$$

  donde o_i es el tiempo óptimo de la i-ésima actividad.
- Si en alguna iteración la red tiene más de un ruta crítica, será necesario comprimir por lo menos una actividad en cada una de ellas.
- Si es posible comprimir más de una actividad en la ruta crítica se elige aquella cuya m se mínima.