# EECS2020_HW3

108032053 陳凱揚

1. Try to be familiar with the properties of the implemented CTFT

（a） 由於$\cos(2\pi F_0 t) = \frac{1}{2}(e^{j2\pi F_0 t} + e^{-j2\pi F_0 t})$，因此透過公式計算出的$X(F) = \delta(F \pm F_0)$，而程式所計算的 magnitude spectrum 如下圖 1-1 所示，雖然樣子大致相似，但他不是一個完美的$delta\ function$，這是由於我們所使用的$x(t)$不是一個完美的週期函數，其實際上為一個$cosine$乘上一個$rectangular\ function$，如圖 1-2 所示，

$$x(t) = (consine)\ \mathrm{x}\ (rectangular\ \ function)$$
$$\rightarrow X(F) = \delta(F \pm F_0) * sinc\ function$$
$$\rightarrow X(F) = two\ sinc\ function\ at \pm F_0$$

此結果即為圖 1-1 的樣子。

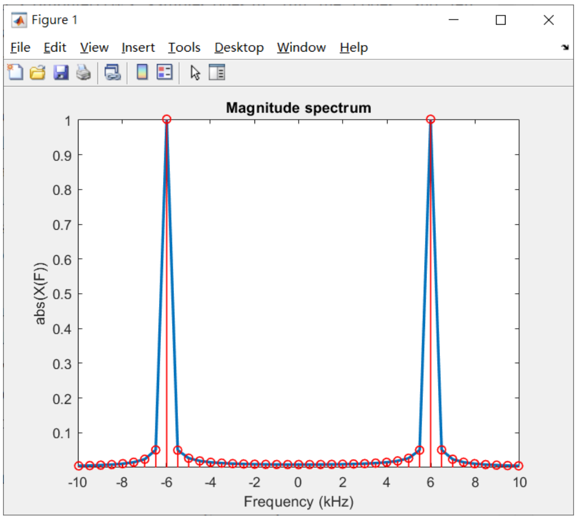


圖 1-1

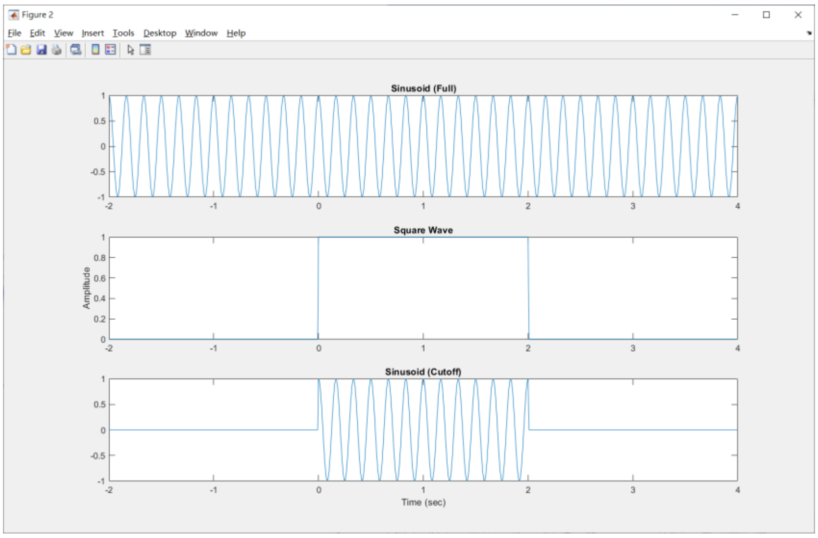


圖 1-2

（b） 此程式的執行步驟先將$x(t)$進行取樣取得$x[n]$，再以$x[n]$一點一點計算$X(F)$，即為取樣$X(F)$，因此在 time domain 和 frequency domain 皆為 discrete，則我們程式所做的即為 DTFS，這是由於我們無法以電腦計算無限點，只能透過取樣獲得有限點作為計算來近似出 CTFT。以下為我們的近似過程：

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt$$

$$\rightarrow X(j2\pi\mathrm{F}) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi\mathrm{F}t}dt$$

$$\rightarrow X(\mathrm{F}) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi\mathrm{F}t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t)dt\,, where\ y(t) = e^{-j2\pi\mathrm{F}t}$$

$$x(t) = x(nt) \rightarrow x[n], y(t) = y(nt) \rightarrow y[n]$$

$$X(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t)dt \approx \sum_{-\infty}^{\infty} x(nT)y(nT)T \approx T\sum_{-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-j2\pi FnT}$$

$$F \rightarrow F_k = k * dF, dF = \frac{Fs}{N}$$

$$\rightarrow X(F) = T\sum_{-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-j2\pi k\frac{Fs}{N}nT} \rightarrow X[k] = T\sum_{0}^{N-1} x[n]e^{-\frac{j2\pi k}{N}n}$$

而 DTFS 為 $a_k = \frac{1}{N}\sum_0^{N-1} x[n]e^{-\frac{j2\pi k}{N}n}$，可看出兩者一致。

（c） 下圖 1-3 上為我們的程式所執行的結果，中為以$X = fft(x)$計算之結果，下為修正$X = fft(x)$，使其結果與我們的程式相同，用來加快程式效率。經過觀察可發現$X = fft(x)$所做的為 DFT，且取樣範圍為$[0, Fs]$，而我們的程式取樣範圍為$[-Fs/2\,, Fs/2]$，因此我們可用$fftshift()$函數來將取樣範圍平移$Fs/2$，再透過乘上$T = 1/Fs$，將 DFT 轉換為 DTFT，完整步驟為$X = T * fftshift(fft(x))$。以下分別為我們程式及$fft()$所對應之公式，可看出其只相差一個$T = 1/Fs$。

Sample code：$X[k] = T\sum_0^{N-1} x[n]e^{-\frac{j2\pi k}{N}n}$

$fft()$：$X[k] = \sum_0^{N-1} x[n]e^{-\frac{j2\pi k}{N}n}$

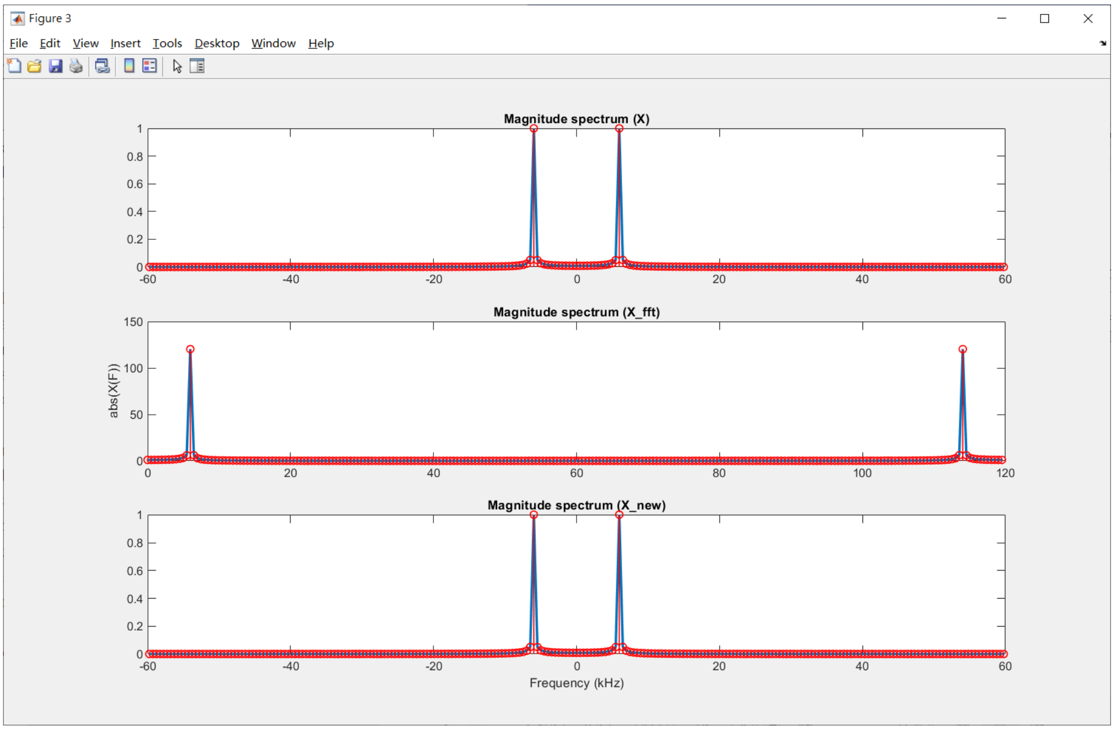


圖 1-3

（d） 為了得到更平滑曲線的 magnitude spectrum，代表我們必須增加在 frequency domain 的取樣點，也就是降低$dF$，而$dF = Fs/N$，在 time domain 的$Fs$不變的情況下，我們必須增加$N$值。為了不使 magnitude spectrum 改變，我們在 time domain 上插入 0 來增加$N$，即為 zero padding，如下圖 1-4 所示，而其所做出之 magnitude spectrum，如下圖 1-5 所示。此外，此平滑的 magnitude spectrum 更接近於我們想獲得的 CTFT spectrum，更清楚表現出了我們在（a）小題所做出的結果，應為兩個 sinc function，分別位於$\pm F_0$。

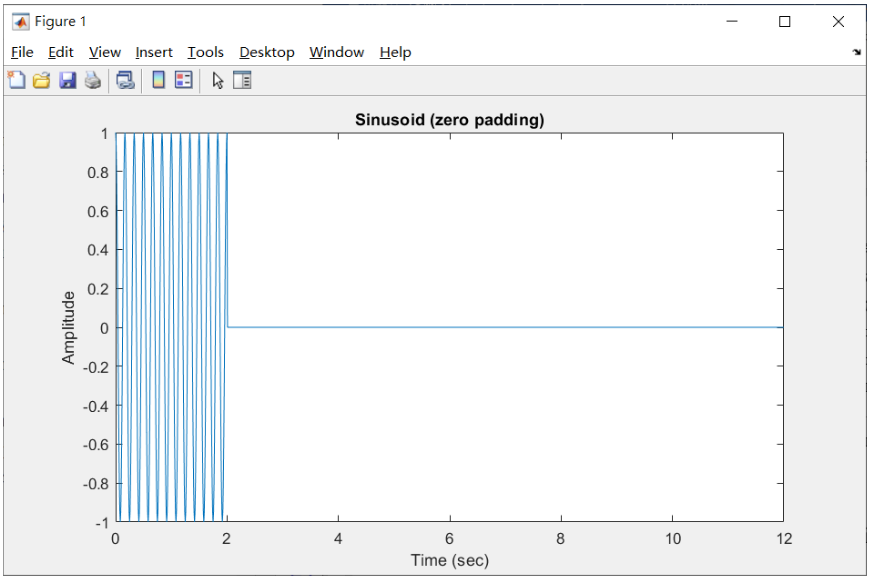


圖 1-4

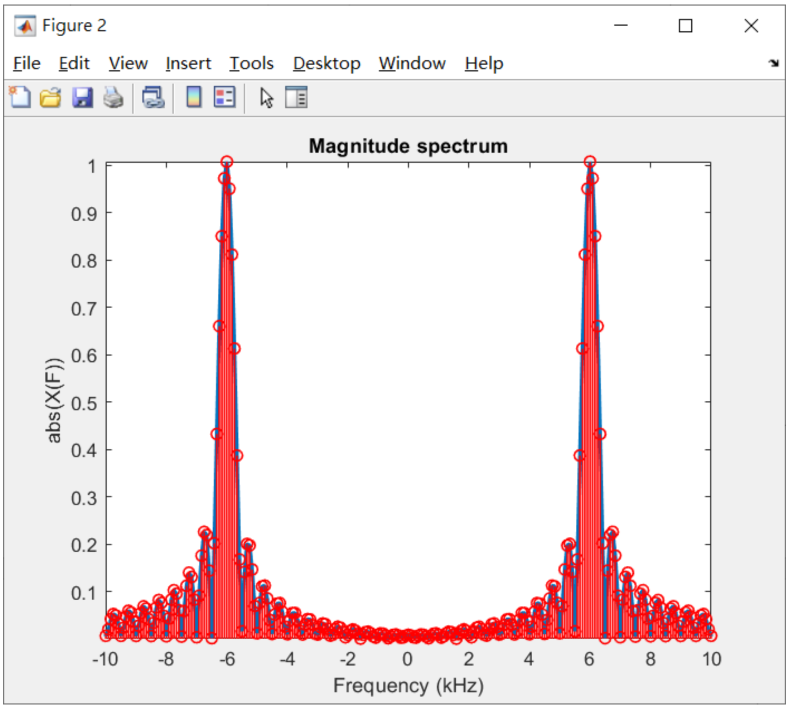


圖 1-5

（e） 下圖 1-6 為取樣範圍為$[-Fs/2,\ Fs/2]$的 magnitude spectrum，下圖 1-7、圖 1-8 分別將取樣範圍改變為$[-Fs,\ Fs]$、$[-2Fs,\ 2Fs]$，可以發現圖形具有週期性，以頻率$F$為 x 軸時，週期為$Fs$，若以標準化頻率$f$為 x 軸時，週期則為$Fs/Fs=1$。這是由於我們在 time domain 的資料為 discrete，則將其轉換為 frequency domain 後，會具有週期性，且其週期為$Fs$。

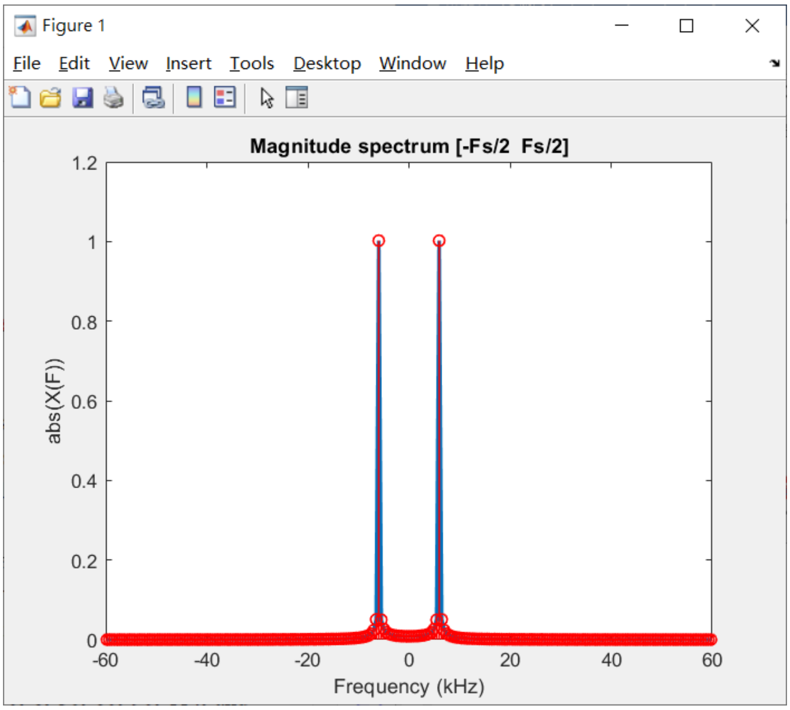


圖 1-6

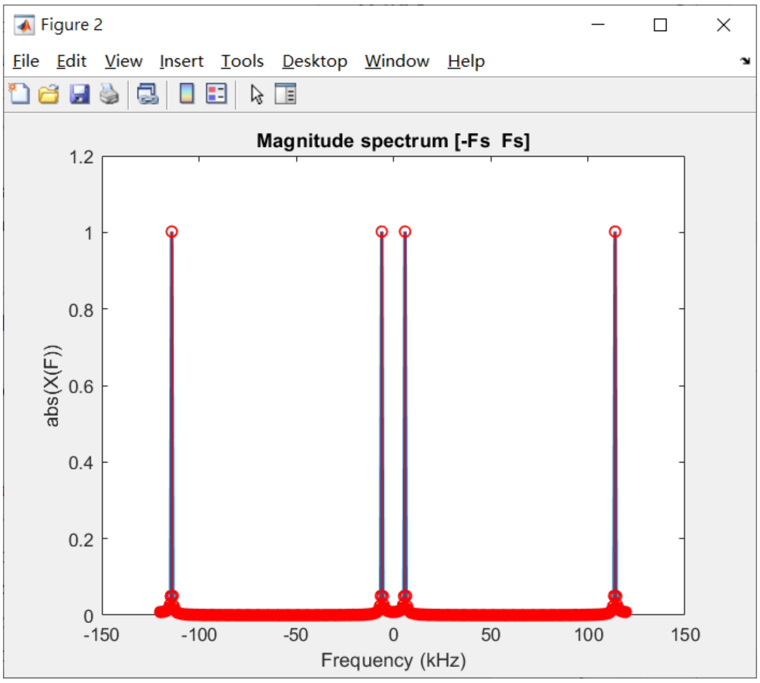


圖 1-7

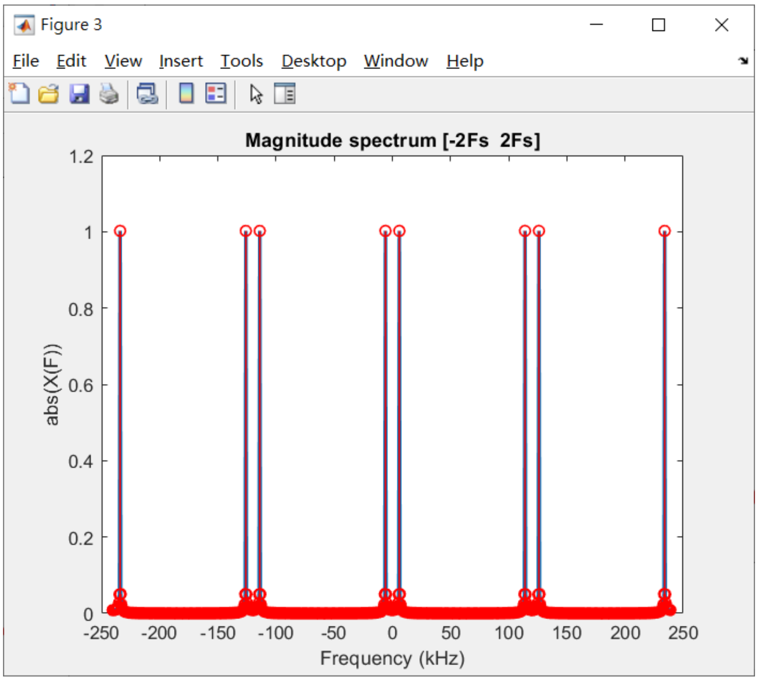


圖 1-8

（f） 下圖 1-9~圖 1-15 分別為$F_0 = 0, 6, 30, 60, 90, 114, 120kHz$所產生之 magnitude spectrum，可發現當$F_0$由 0 遞增至 60 時，time domain 震盪越來越大，而$abs(X(F))$的最大值由$k * Fs,\ k \in Z, (\dots, 0, 120, \dots)$逐漸往$(k + 1/2) * Fs, k \in Z, (\dots, -60, 60, \dots)$，但當$F_0$超過$Fs/2 = 60$時，frequency domain 的圖形會產生混疊，使其原始資訊無法保存下來，無法得知原始的頻率。若以標準化頻率來看的話，所能保持資訊的最高頻率為$\frac{\frac{Fs}{2}}{Fs} = 0.5$。

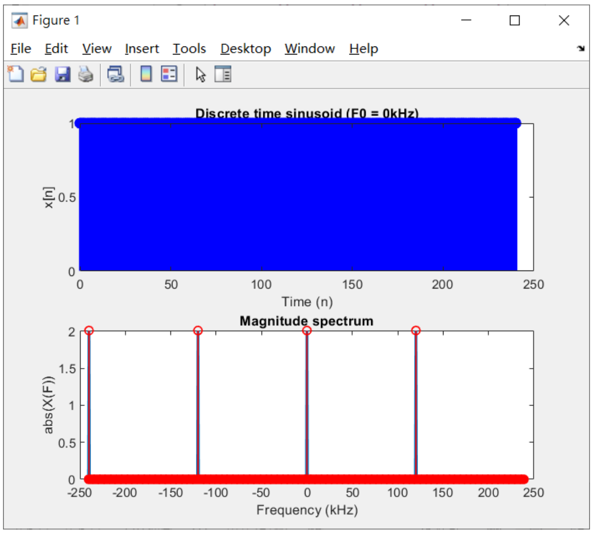


圖 1-9

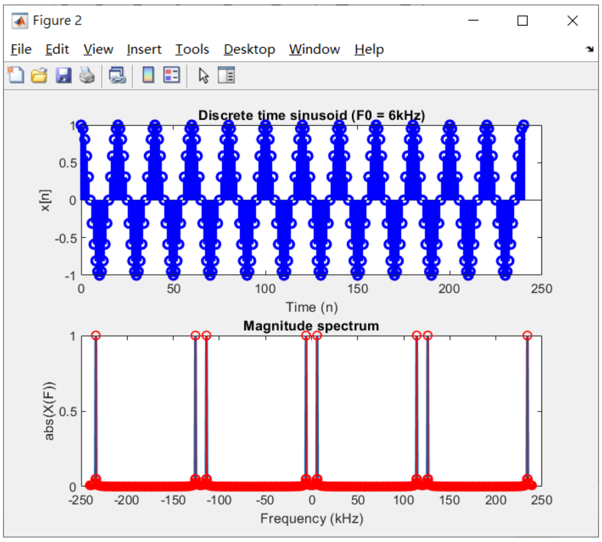


圖 1-10

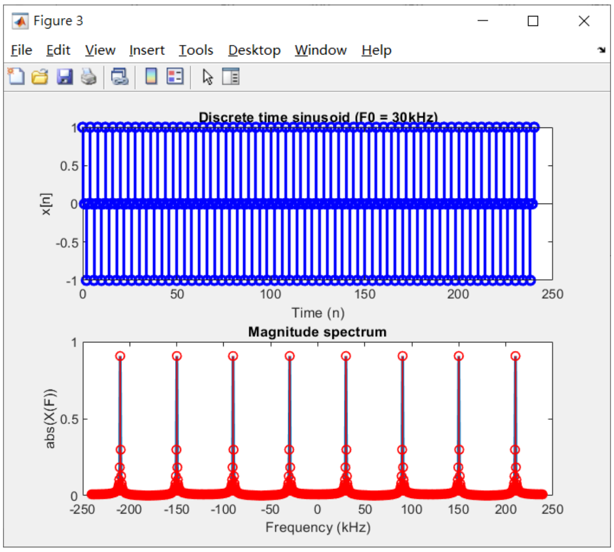


圖 1-11

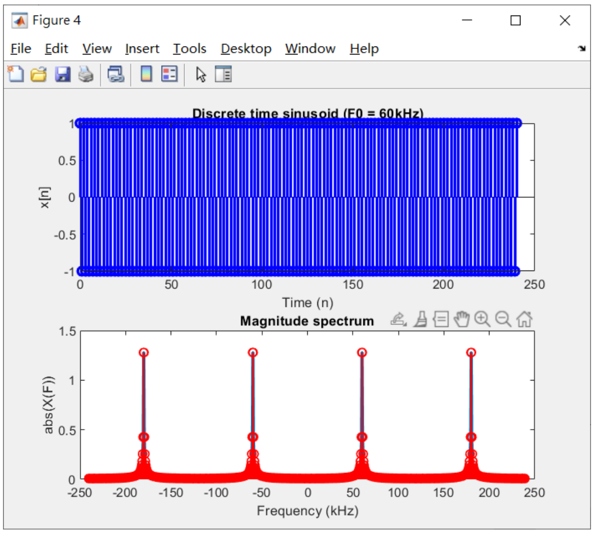


圖 1-12

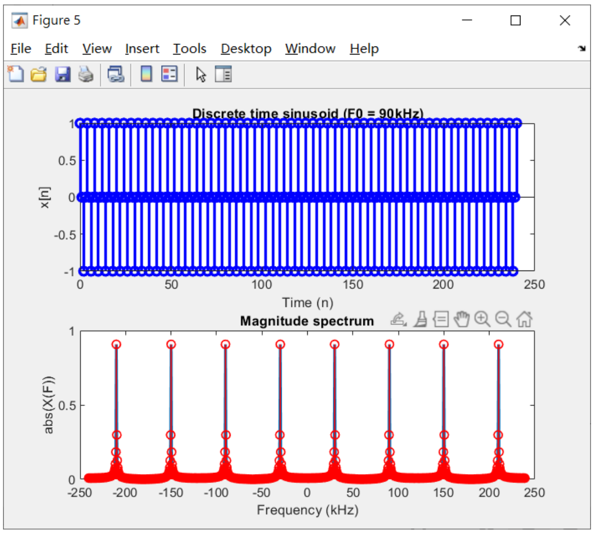


圖 1-13

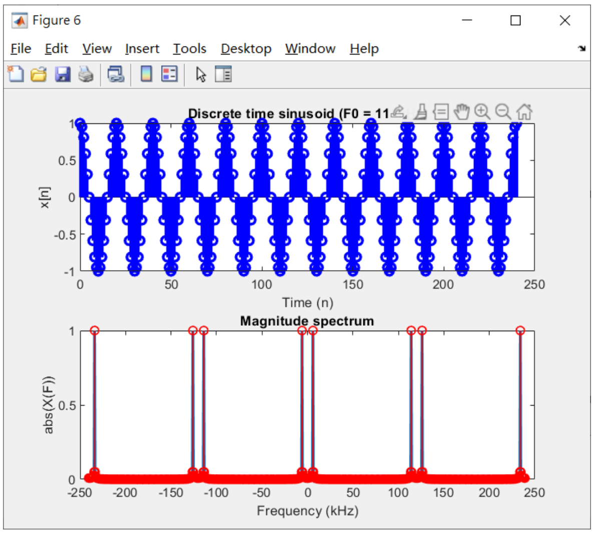


圖 1-14

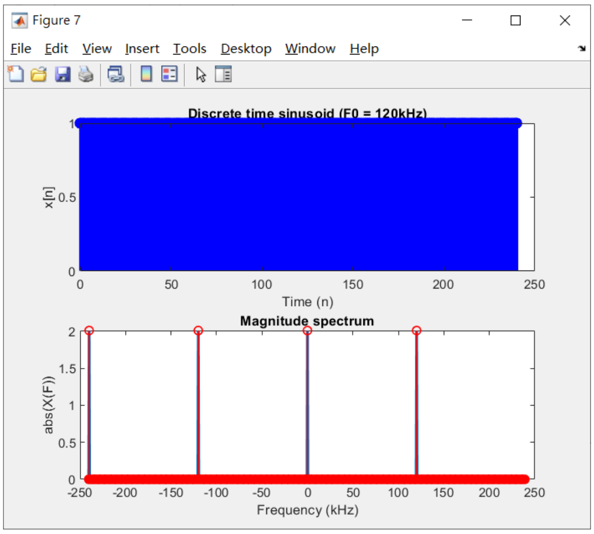

圖 1-15

（g） 由以上的實驗可以發現，若要使 CTFT 正確地保留且以程式實做出來，則頻率$F_0$的範圍需為$[-Fs/2, Fs/2]$，這也符合了 sampling theorem，取樣頻率$Fs$必須大於 2 倍的頻率$F_0$，使 frequency domain 的圖形不產生混疊，才能使保存下來的資訊不失真。

## 2. Apply the implemented CTFT for realistic signal analysis, system design and implementation

（a） 透過 Part1 的方法分別對 ECG 訊號的一個心跳週期（擷取點 6610~點 8064）和完整訊號作 Fourier analysis，其結果如下圖 2-1、圖 2-2，可看出圖 2-1 的 magnitude spectrum 比起圖 2-2 較為清楚，且由於每個心跳週期的波型皆大致類似，因此圖 2-1 的 magnitude spectrum 就能提供我們所需的資訊，所以我們將會選擇較清楚的一個心跳週期的 magnitude spectrum，而不是較為雜亂的完整訊號，作為設計電路的訊號。此時可由 magnitude spectrum 的主要頻率來決定 pre-amplifier 的頻寬，以圖 2-1 的 magnitude spectrum 觀察來看，其應為一個 low-pass filter，主要頻率大致落在$-100Hz$~$100Hz$區間，則其 cutoff frequency 應為$100Hz$左右，若我們設計的 cutoff frequency 為$100Hz$，為了符合 sampling theorem，此時 ADC 的 sampling rate 應至少為$200Hz$。

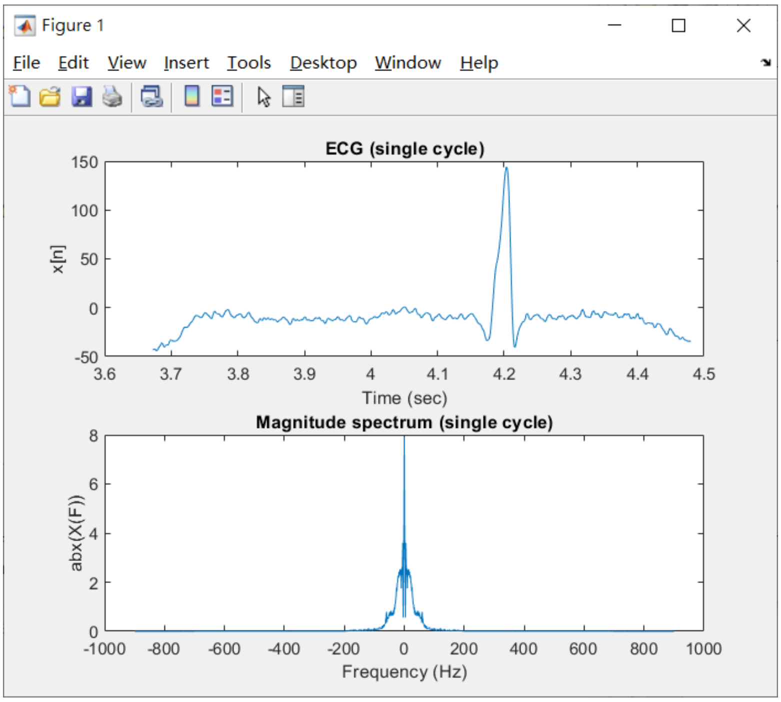


圖 2-1

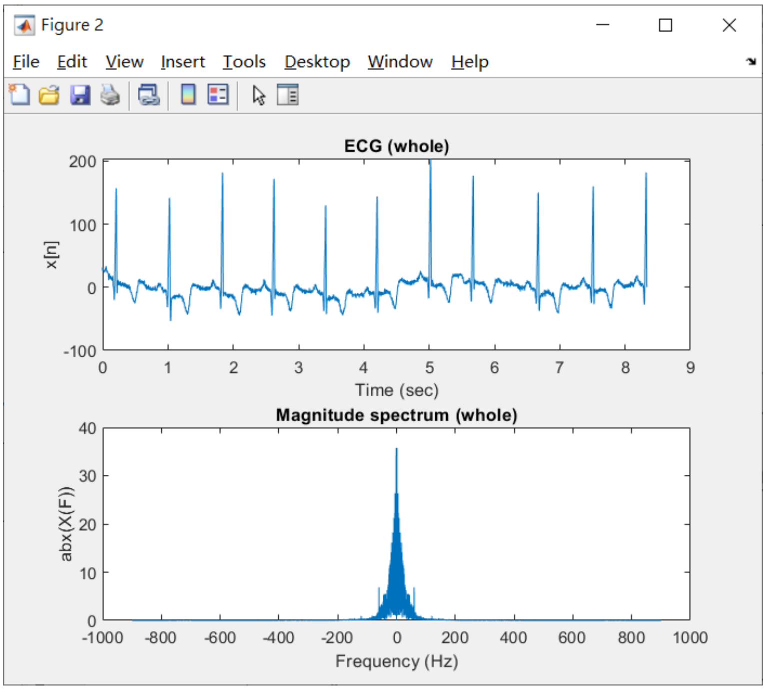


圖 2-2

(b) 為了比較此兩種 magnitude spectrum 的差異，下圖 2-3 為放大後以及疊圖後的樣子，可發現其趨勢大致相同，但完整訊號的 spectrum 多了很多震盪，這是由於完整訊號可以被視為一個心跳週期訊號 convolve 一個 impulse train，如下圖 2-4 所示，然而每個心跳週期的波形都有著些微差異，這使得每個 spectrum 也有著些許差異，疊加起來後就會產生出看似很雜亂、很多震盪的 spectrum。

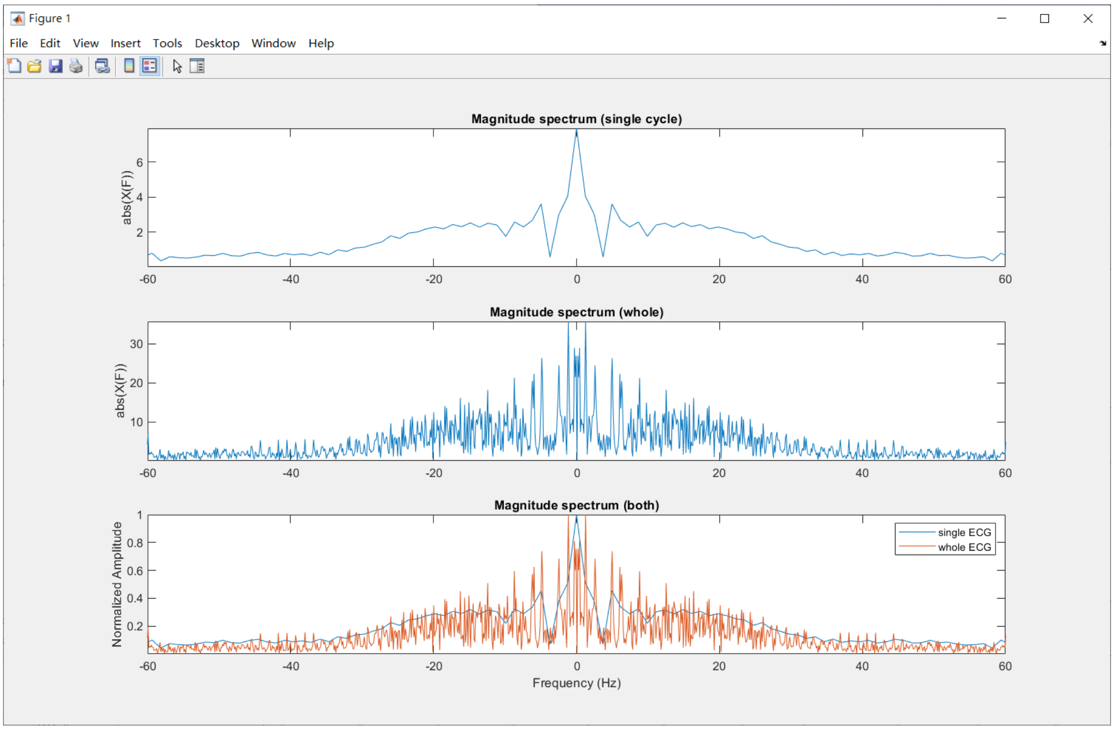


圖 2-3

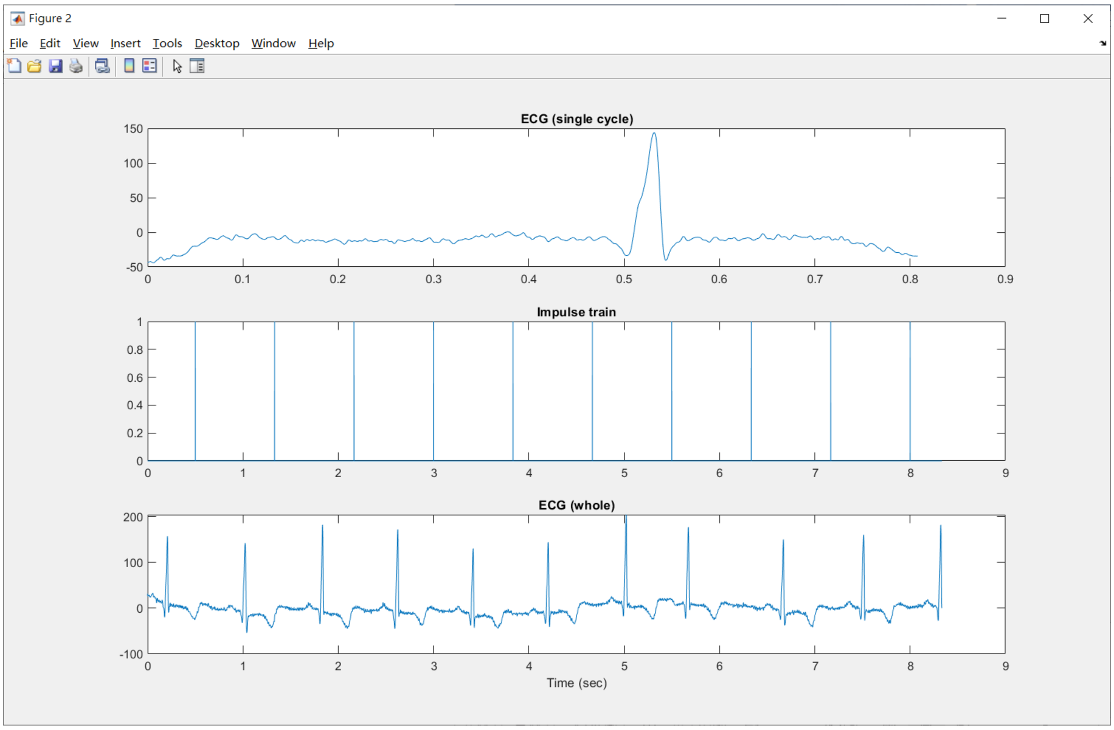


圖 2-4

（c） 為了得知心跳的頻率，我們應觀察含有完整訊號所產生之 spectrum，下圖 2-5 即為放大後的結果，發現最大值大約位於$\pm 1.2Hz$左右，推論其應該代表著心率，因為在 time domain 的波形中，最明顯的頻率即為心率，其每隔一個心跳週期，就會產生一個極值，則此頻率應在 spectrum

中有著最大值，而我們可以看出此訊號約在8.2秒裡產生了10個心跳，心率約為$10/8.2 \approx 1.2Hz$，也驗證了我們的想法。此外，於圖 2-3 中，我們可以發現單一心跳週期的 spectrum 在$\pm 1.2Hz$的地方，並沒有特別的極值，也就是說這是完整訊號所提供的額外資訊，代表著心跳頻率。

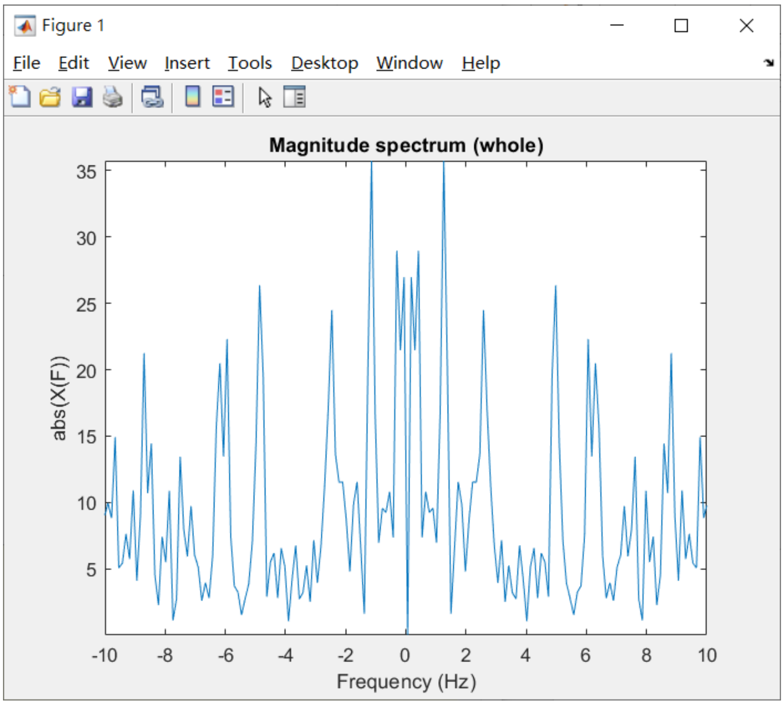


圖 2-5

（d） 透過 moving average filter 所轉換的 CTFT 特性，我們可以知道當$x(t) = 1, |t| < T_1$，則其$X(j\omega)$的 zero-crossing 位置在$k * \frac{\pi}{T_1}, k \in Z$上，將$x$軸換成頻率$F$的話，則 zero-crossing 位置在$k * \frac{1}{2T_1}, k \in Z$上。因此為了消除在60、120、180 … $Hz$的雜訊，可知所設計之 filter 的$T_1$需符合以下關係式：$\frac{1}{2T_1} = 60$，則$T_1 = \frac{1}{120}$，且此 sinc function 的最大值應為$2T_1 = \frac{1}{60}$。為了在程式上實作此 filter，我們以 ECG 訊號的$Fs$將$T_1$做轉換，可知$N_1 = Fs * T_1 = 1800 * \frac{1}{120} = 15$，則數值為1的長度$N = 30$，而為了使訊號在通過 filter 後的振幅維持相近比例，我將$X(j\omega)$的最大值設計為1，也就是將此 filter 再乘上60，實作之程式碼如下：

```
N = 30;
h = [ones(1, N) zeros(1, Npoint_single-N)]*60;
H = T*fftshift(fft(h));
mag_H = abs(H);
```

其 magnitude spectrum 如下圖 2-6 所示，透過圖 2-7 的放大可看出其在頻率為60的倍數時的值為0。接著我們將先前一個心跳週期的訊號通過此 filter 後，其在 time domain 上的前後變化圖如圖 2-8 所示，可看出訊號變得較為平滑，而 frequency domain 上的前後變化圖如圖 2-9 所示，可看出除了在頻率$\pm 60, \pm 120Hz$位置上的訊號被消除掉了，其他資訊皆保持相同。另外，在圖 2-10 的疊圖分析上，也可以明顯看出我們設計出的 filter 正確的幫助我們消除掉了在頻率$\pm 60, \pm 120 \ldots Hz$的雜訊。

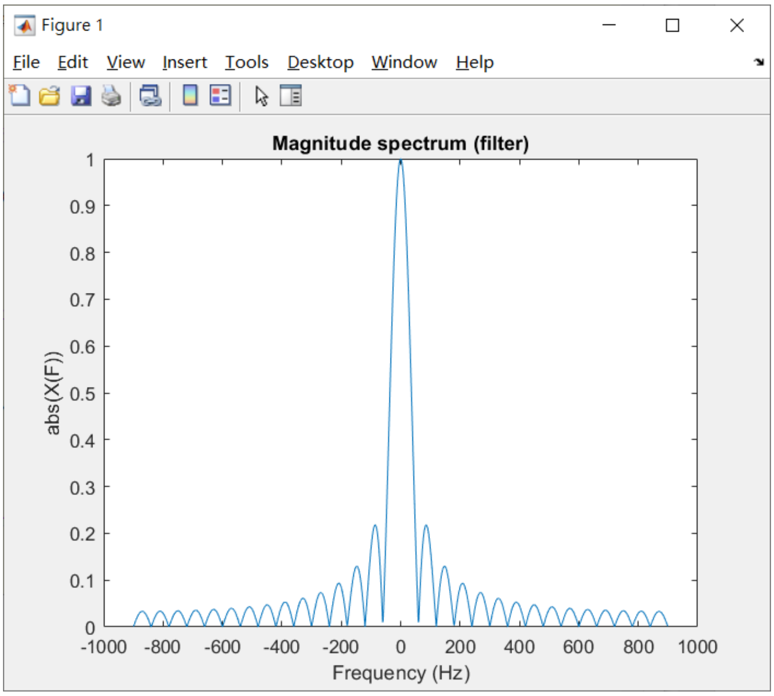


圖 2-6

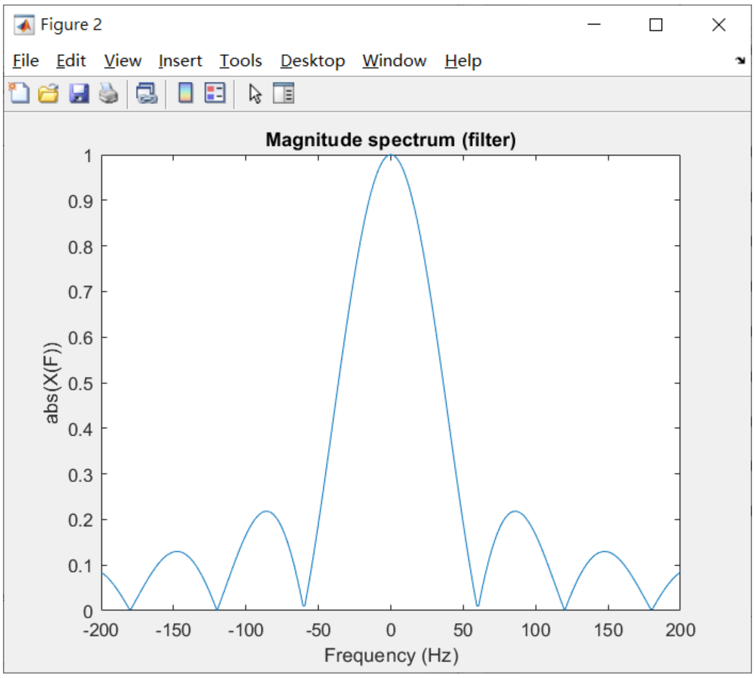


圖 2-7

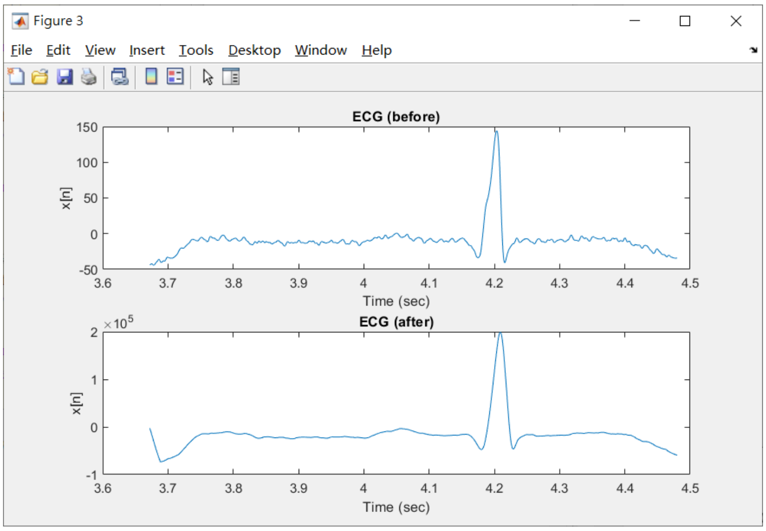
Figure 3
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
ECG (before)
x[n]
150
100
50
0
-50
3.6
3.7
3.8
3.9
4
4.1
4.2
4.3
4.4
4.5
Time (sec)
ECG (after)
×10^5
2
1
0
-1
Time (sec)

圖 2-8

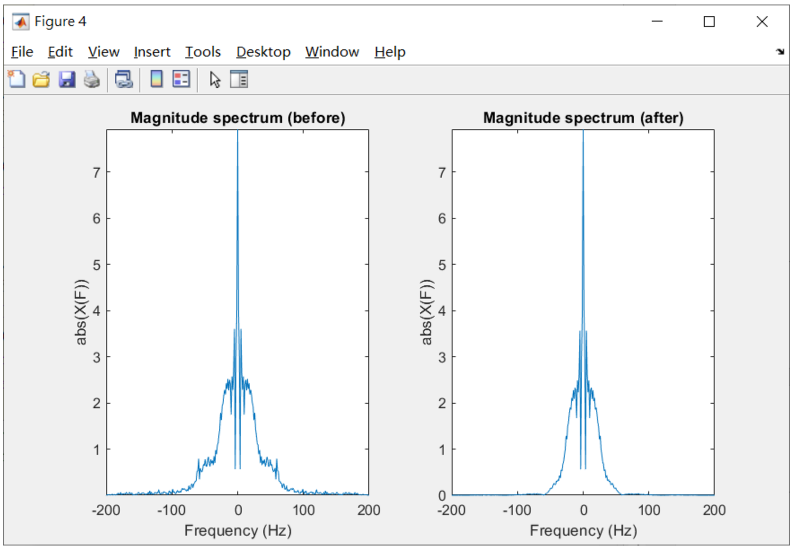
Figure 4
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
Magnitude spectrum (before)
Magnitude spectrum (after)
abs(X(F))
7
6
5
4
3
2
1
0
-200
-100
0
100
200
Frequency (Hz)

圖 2-9

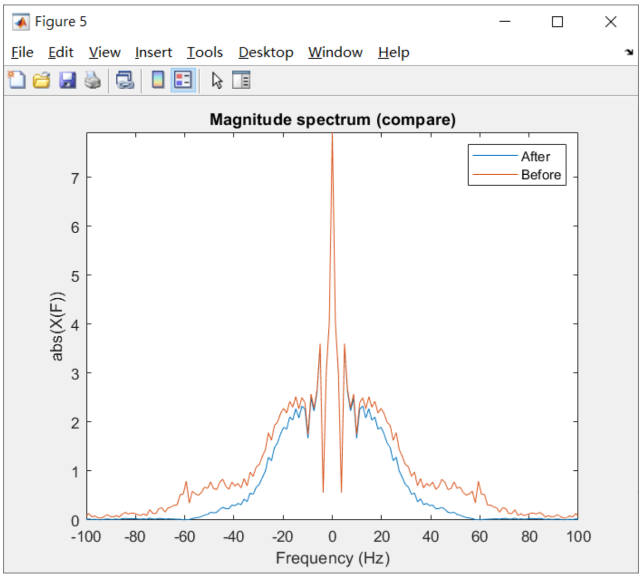
Figure 5
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
Magnitude spectrum (compare)
After
Before
abs(X(F))
-100
-80
-60
-40
-20
0
20
40
60
80
100
Frequency (Hz)

圖 2-10

（e） 根據 HW2 的資訊，我們可知$y = ay[n-D] + x[n], a = 0.7, D = 819$

$$F\{y\} = F\{ay[n-D] + x[n]\}$$

$$\rightarrow Y(e^{j\omega}) = a(e^{-j\omega})^{D} Y(e^{j\omega}) + X(e^{j\omega})$$

$$\rightarrow \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega D}}$$

$$\rightarrow H(F) = \frac{1}{1 - ae^{-j2\pi FD}}$$

由此公式計算後並作圖可得如下圖 2-11 的 magnitude spectrum，放大後如下圖 2-12 所示。

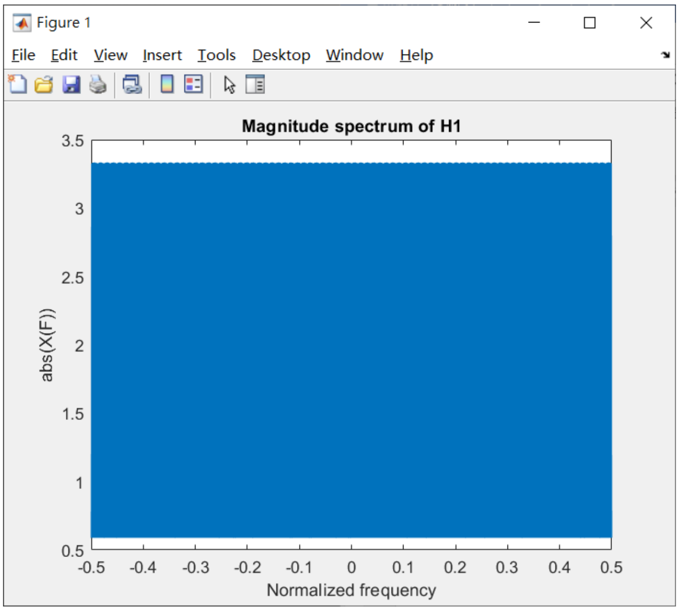


圖 2-11

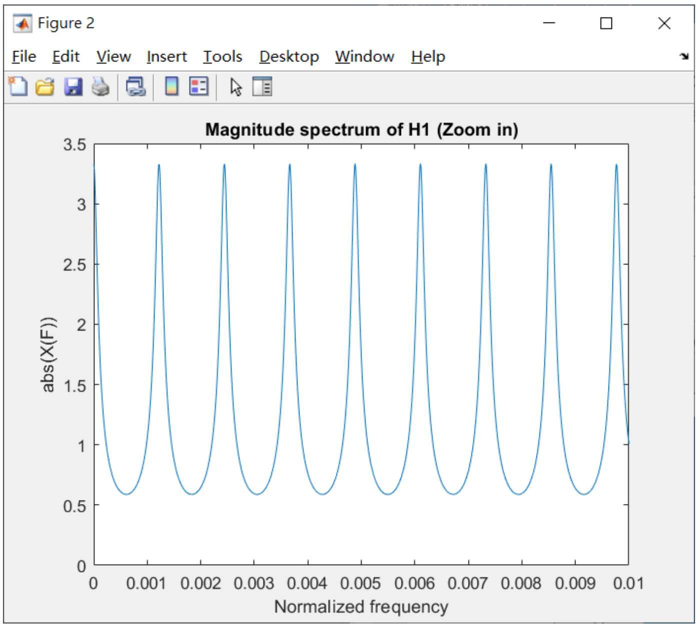


圖 2-12

此外，根據$H(e^{j\omega})=\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$，我們也可由輸出和輸入的數據，分別將其進行 fourier analysis 再相除，即可得到 frequency response，其作圖後如下圖 2-13，放大後的樣子如下圖 2-14。

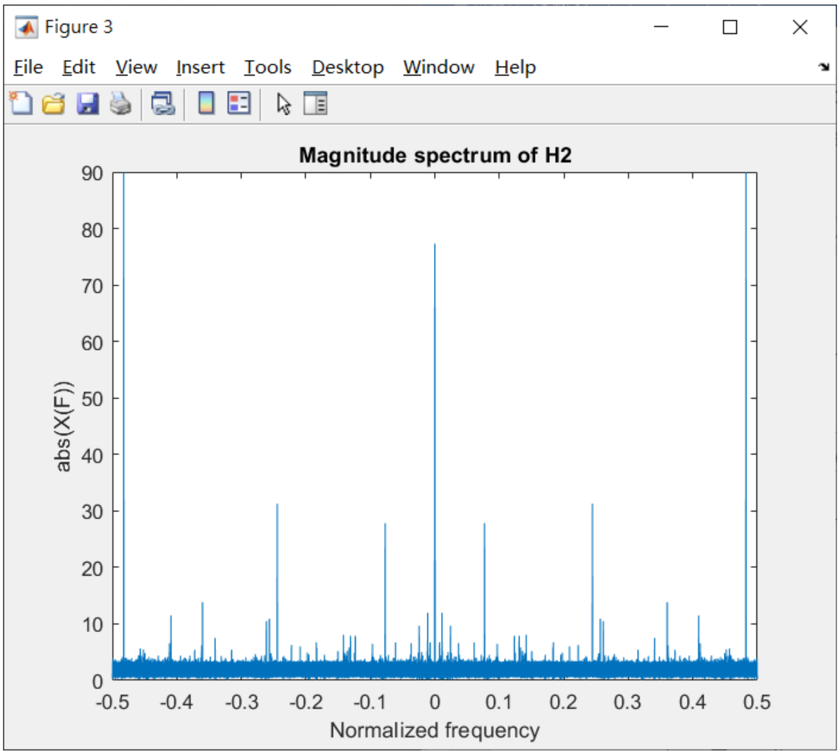


圖 2-13

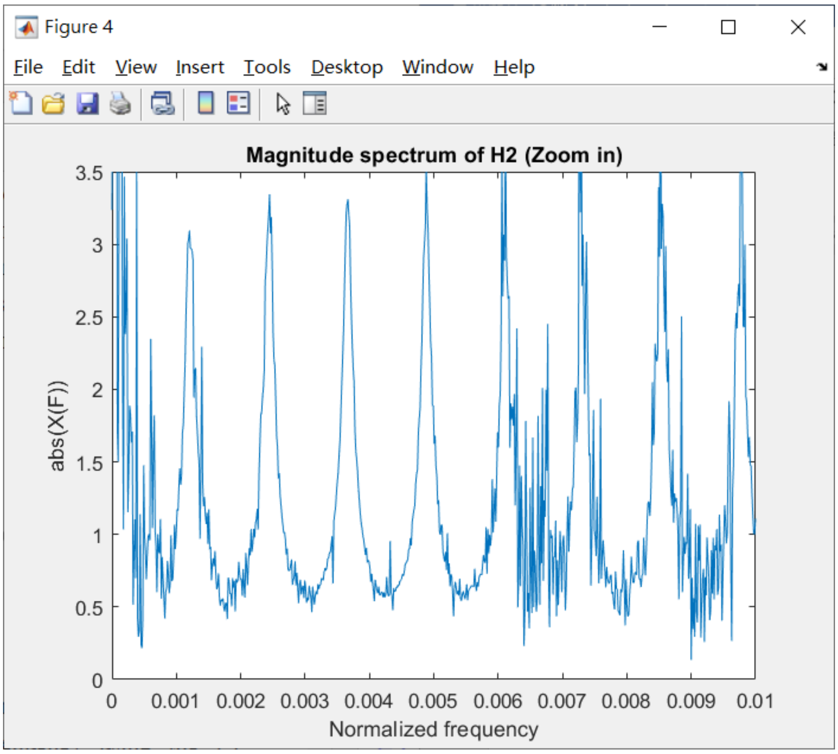


圖 2-14

為了瞭解此兩種計算 frequency response 的方法的差異，我們將其進行疊圖分析，如下圖 2-15 所示，可發現兩種方式大致上相似，但第二種方法在某些地方會出現異常大的值，推斷應為某些$X(F)$的值趨近於0所造成，使得$H(F)$的值趨近於無限大，而在第一種方法的公式推導並不會發生這種問題。下圖 2-16 則為放大後的結果，可看出其波形也大致相似，但第二種方法的波形較為雜亂，應為測量上的些許誤差所造成的。

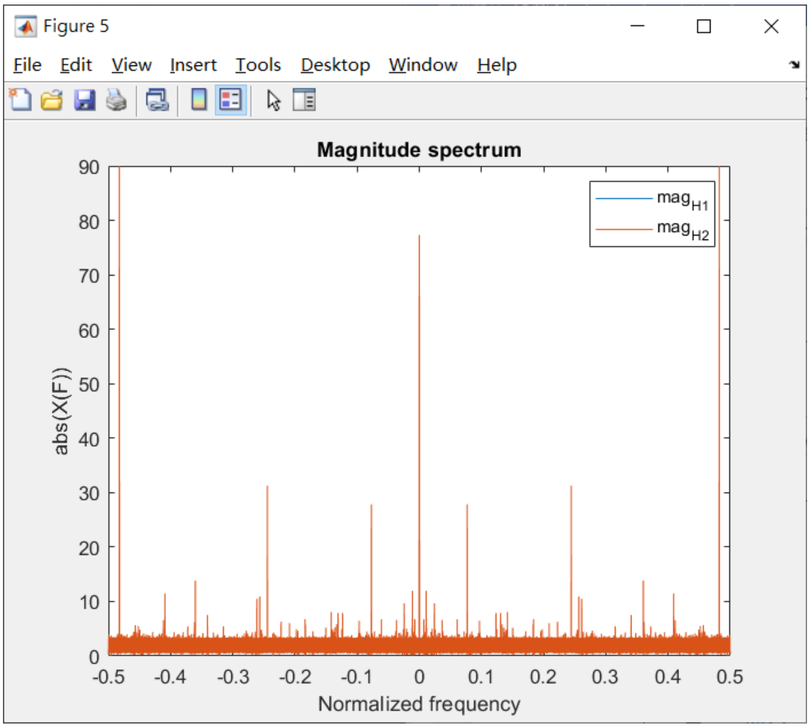


圖 2-15

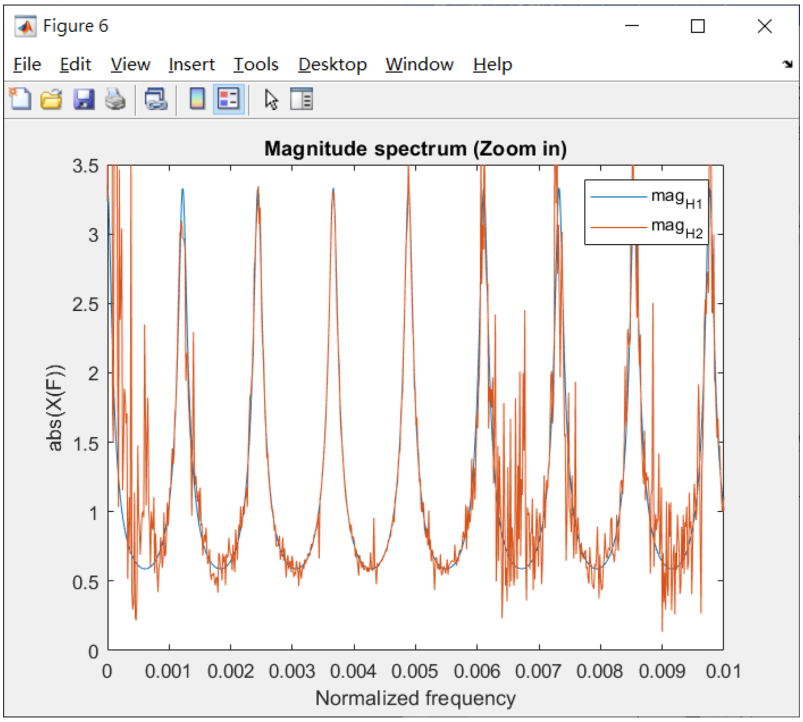


圖 2-16

最後，由圖 2-12、圖 2-14、圖 2-16，這些放大後的 spectrum 皆可看出其波形具有週期性的變化，每隔一個週期就會出現在一個極大值，使得此波形看起來像是梳子一樣，這也是$y = ay[n-D] + x[n]$這個系統為什麼稱為”Comb” reverberator 的原因。

Bonus：由於 ECG 訊號的$Fs = 1800$，為了消除在$60$、$120$、$180 \ldots Hz$的雜訊，我們將 comb reverberator 的$D$值設為$30$，並將$mag_H$上下顛倒後再透過平移將極小值位移至$0$處，實作之程式碼如下：

```
a = 0.7;
D = 30;
Fs = 1800;
Npoint = length(ECG_new);
dF = 1/Npoint;
f_axis = ((1:1:Npoint)-(Npoint+1)/2)*dF;
H = ones(1, Npoint)./(1-a*exp(-sqrt(-1)*2*pi*f_axis*D));
mag_H = 0.5*(-abs(H)+3.3);
pha_H = angle(H);
```

並分別將其 magnitude spectrum 和 phase spectrum 作圖，如下圖 2-17、圖 2-18 所示，可看出此 filter 可消去$60$、$120 \ldots Hz$的雜訊，且其 phase spectrum 為非線性的，而先前的 moving average filter 的 phase spectrum 則為線性的。

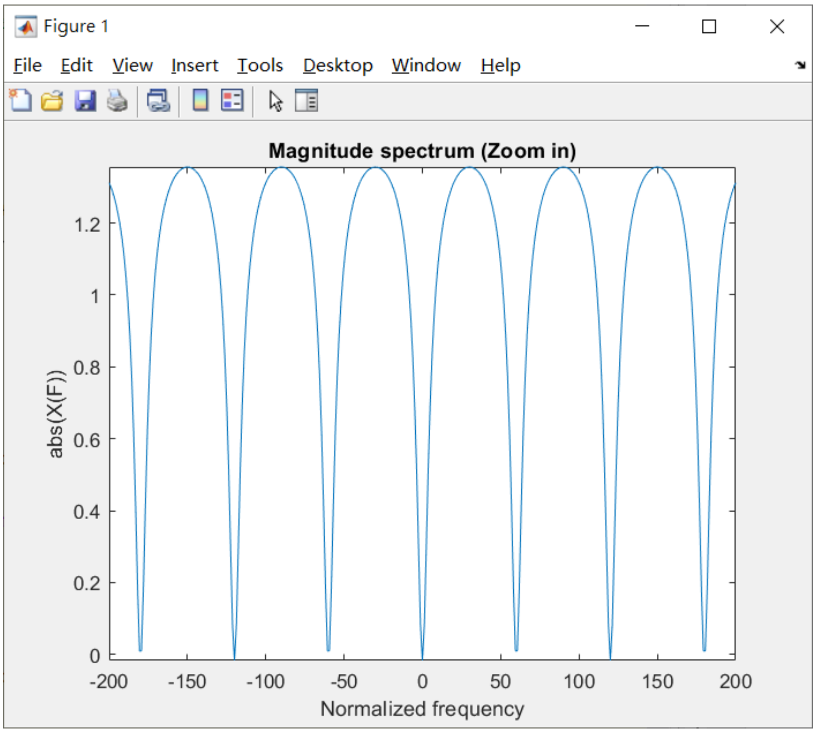


圖 2-17

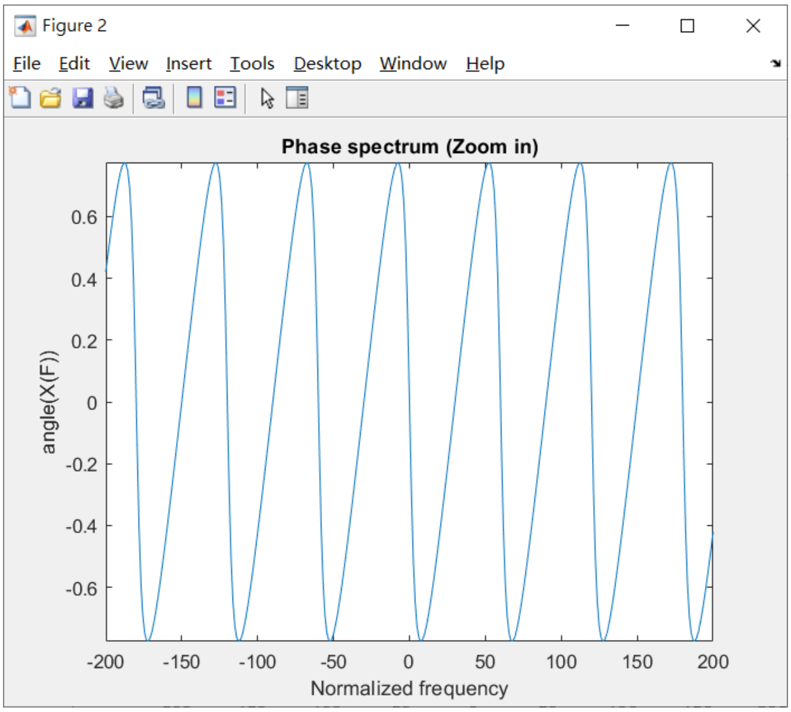


圖 2-18

將 ECG 訊號通過此 filter 後的 magnitude spectrum 並與原先的 spectrum 做比較如下圖 2-19 所示，其會出現的問題為在消去雜訊時，同時也消去了0$Hz$附近的訊號。此外，也將此結果與先前利用 moving average filter 消除雜訊後的 spectrum 做比較，如下圖 2-20 所示，可發現非線性與線性的 filter 所造成的差異應為：非線性的 spectrum 的振盪會較大，在靠近0$Hz$位置的值會相對較大，而線性的 spectrum 則較平順的維持原始 spectrum 的資訊。

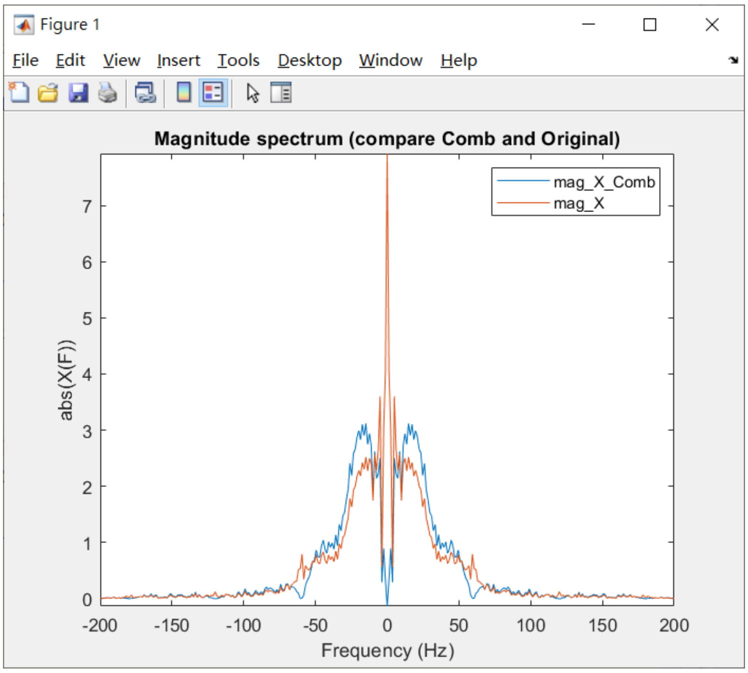


圖 2-19

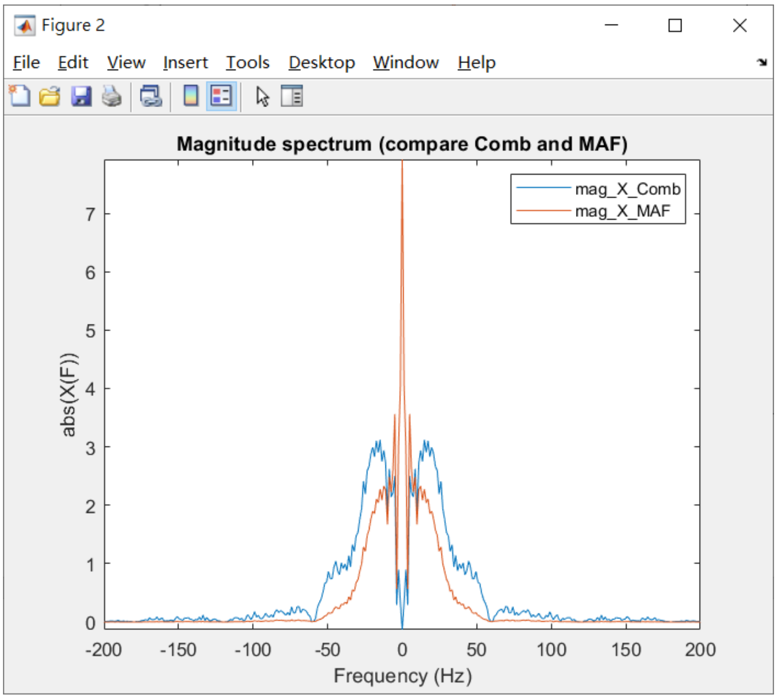
Figure 2
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
Magnitude spectrum (compare Comb and MAF)
mag_X_Comb
mag_X_MAF
abs(X(F))
0
1
2
3
4
5
6
7
-200
-150
-100
-50
0
50
100
150
200
Frequency (Hz)

圖 2-20