EECS2020_HW1

108032053 陳凱揚

1. 正弦波函數（週期變化、A、f_0、ϕ）

(a) 在公式方面，$x(t)$為週期函數，因此$x(t) = x(t + T_0) = x(t + 1/f_0)$，而在程式作圖部分，如下圖 1-1，先將其分別作圖，觀察其波形變化，再將$x(t)$與$x(t + 1/f_0)$進行疊圖後，可發現其完全重合，最後再將此兩函數相減並作圖，可知$x(t) - x(t + 1/f_0) = 0$，因此我們可得此兩函數完全相同。

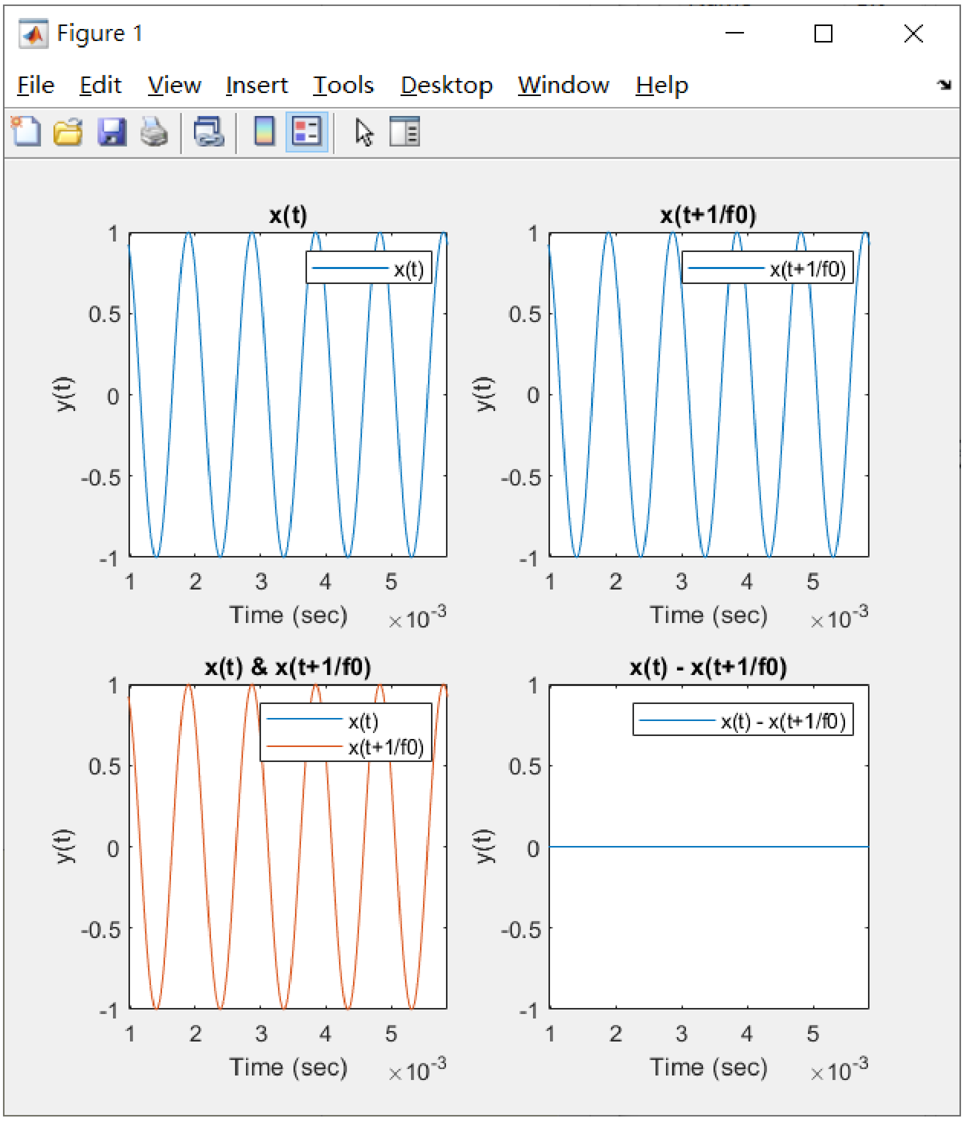

圖 1-1

(b) 如下圖 1-2 所示，當$A = 1$時的振幅大於$A = 0.25$時，而圖形其他性質皆相同。在將波形轉為聲音輸出後，我們可發現其差異為音量大小，當A值越大，音量越大，當A值越小，音量則越小，因此可知A的大小與聲音的強度呈正相關。

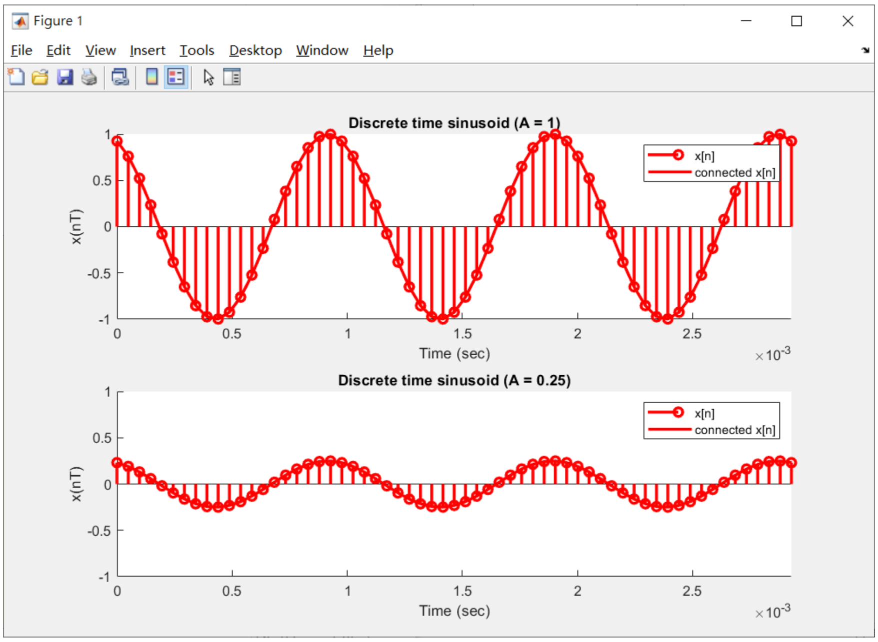

圖 1-2

(c) 如下圖 1-3 所示，我們可發現f_0的改變，使得波形的頻率也會隨之變化。在將波形轉為聲音輸出後，我們可發現其差異為音高的高低，當f_0值越大時，音高越高，當f_0值越小時，音高越低，因此可知f_0的大小與音高的高低呈正相關。

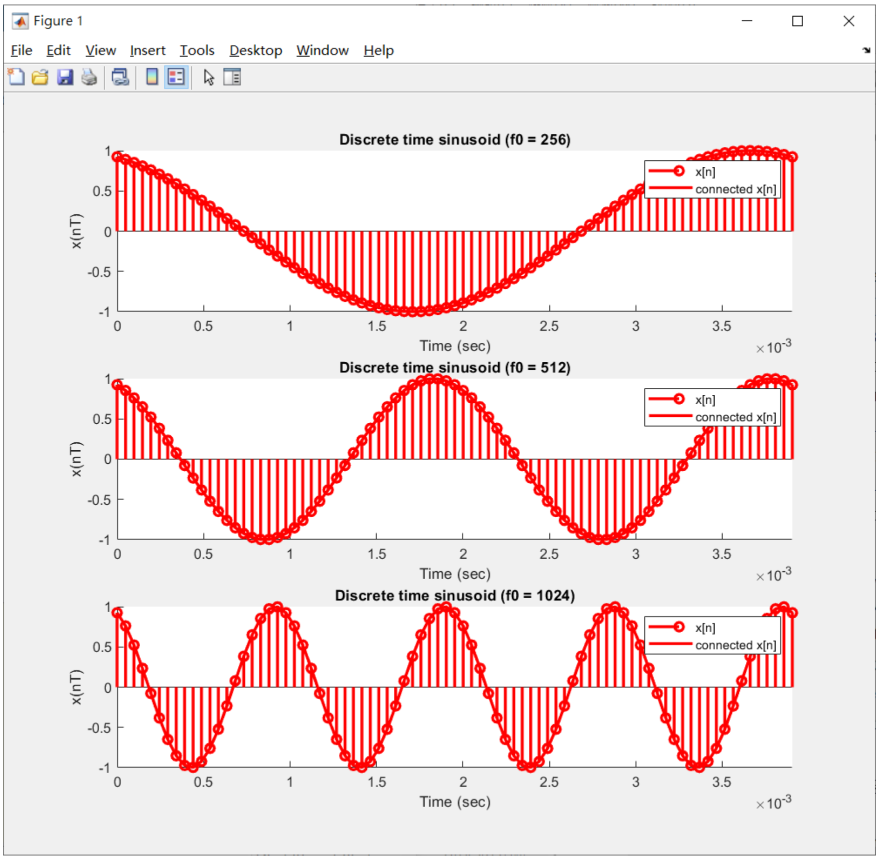

圖 1-3

(d) 如下圖 1-4 所示，不同的ϕ值所作出的波形圖，互相為以 x 軸為方向作平移後的結果，也就是以不同的位置作為波形的起點，因此將波形轉為聲音輸出後，聲音聽起來皆會相同。此外，因不同的ϕ值即為 x 軸為方向作平移的結果（對時間 t 作平移），所以此種 transformation 為 time shift，透過以下的數學計算可得出$\Delta\phi$與Δt的關係：

$$令x_1(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \phi_1), x_2(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \phi_2)$$
$$且x_2(t) = x_1(t - t_0), \Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$$
$$\begin{aligned} &x_2(t) \\ &= x_1(t - t_0) \\ &= A\cos(2\pi f_0 (t - t_0) + \phi_1) \\ &= A\cos(2\pi f_0 t + (\phi_1 - 2\pi f_0 t_0)) \\ &= A\cos(2\pi f_0 t + \phi_2) \\ &\rightarrow \phi_2 = \phi_1 - 2\pi f_0 t_0 \quad \rightarrow \Delta\phi = -2\pi f_0 t_0 \end{aligned}$$

因此，當$\Delta\phi > 0$，$t_0 < 0$，此 transformation 為 time advance，當$\Delta\phi < 0$，$t_0 > 0$，此 transformation 為 time delay。又因正弦波函數週期為 2π，因此$\Delta\phi \in [-\pi, \pi]$，當$\Delta\phi$值超出此範圍，必存在$k \in [-\pi, \pi]$，使得$x_2(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \phi_1 + \Delta\phi) = A\cos(2\pi f_0 t + \phi_1 + k)$。

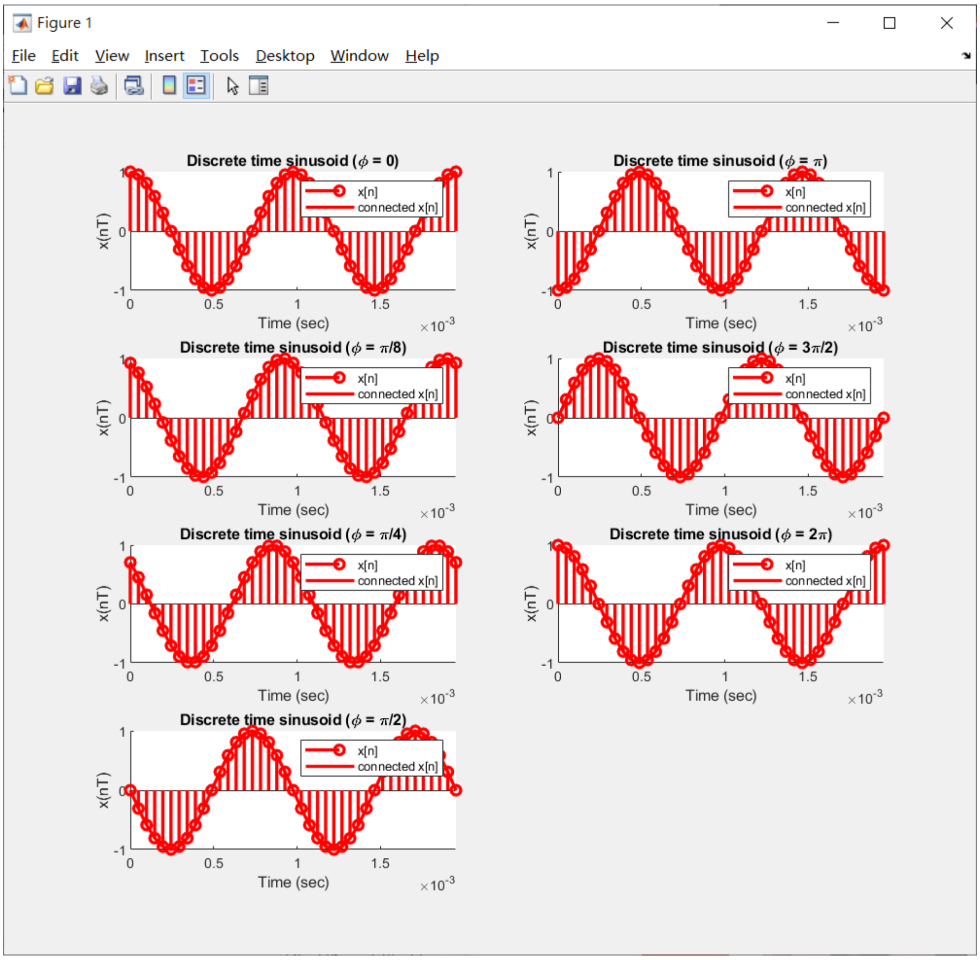

圖 1-4

2. 正弦波函數（$fsRatio$）

(a) 以$fsRatio = 20$為標準（正確聲音），逐漸減少其值，並分別將波形之聲音輸出聆聽後，且以下圖 2-1 作為驗證。

(1) 當$fsRatio = 4, 2$時與標準的音高相同，是正確的聲音，但聲音強度稍弱了一點，以波形圖來看的話，頻率相同，但其 fs 較小，間隔較長時間才有下一個訊號，可能使得聲音聽起來相對單薄，可用於解釋聲音強度稍弱的原因。

(2) 當$fsRatio = 2.5, 2.2$時的聲音相當接近標準，但音高略有不同，以波形圖來看的話，波形很類似，但頻率並不相同，這也解釋了我們的聆聽結果。

(3) 當$fsRatio = 1.8, 1.4, 1.2$時能清楚的聽出音高的差異很大，以波形圖來看的話，其頻率相差很大，這也是為什麼可以清楚的分辨出音高的差異。

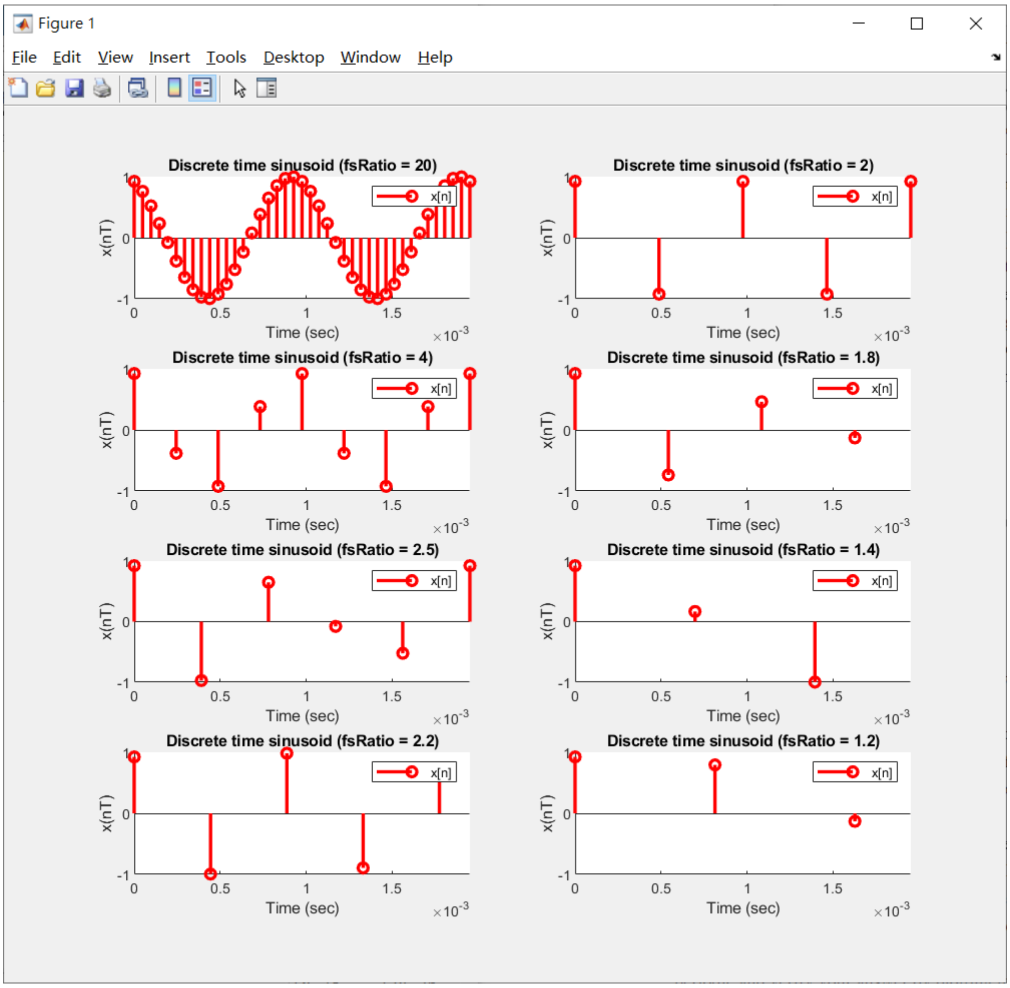

圖 2-1

(b) 主要影響我們是否聽見正確聲音的條件為聲音的頻率f_0，因為頻率會導致聲音的音高改變，音高相同的聲音，聽出來的感覺就會相同。而在實驗過程中，我們發現能聽到正確聲音之最小的$fsRatio = 2$，這是由於$f_s = f_0 * fsRatio$，且要表示出一個正弦波，至少必須有上下震盪的過程，也代表在一個週期內，最少需要兩個數據才能表示出震盪過程，因此取樣頻率f_s最小需為波頻率f_0的兩倍，才能在一個週期內，取樣兩個數據，表示出一個正弦波。

此外，若要使 DT 訊號頻率與 CT 訊號頻率相同，即保持聲音之音高不變、聲音能夠從 CT 訊號轉為 DT 訊號，再由 DT 訊號轉為 CT 訊號後，保持原有的正確訊息，則當取樣了$x(nT)$，必須同時取樣$x(nT + 1/f_0)$，即$1/f_s * k = 1/f_0, (k \in Z) \to k = f_s/f_0 = fsRatio$，因此當$fsRatio$為整數時，此取樣頻率$f_s$為波頻率$f_0$的整數倍，聲音訊號即能在轉換後仍保持著正確的訊息，否則，當$fsRatio$不為整數時，訊號頻率會在轉換中改變，使得最後輸出聲音失真。

(c) 我們可以透過以下計算得知$fsRatio$值與訊號是否具有週期性的關係：

$$令x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \phi) \to x(nT) = A\cos(2\pi f_0 nT + \phi)$$

$$\to x[n] = A\cos\left(\frac{2\pi f_0}{f_s}n + \phi\right) = A\cos\left(\frac{2\pi}{fsRatio}n + \phi\right)$$

$$x[n+N] = A\cos\left(\frac{2\pi}{fsRatio}(n+N) + \phi\right)$$

$$= A\cos\left(\frac{2\pi}{fsRatio}n + \frac{2\pi}{fsRatio}N + \phi\right)$$

$$if \quad \frac{2\pi}{fsRatio}N = 2\pi k, (k \in Z), \to 式(1)$$

$$\to = A\cos\left(\frac{2\pi}{fsRatio}n + 2\pi k + \phi\right)$$

$$= \cos\left(\frac{2\pi}{fsRatio}n + \phi\right) = x[n]$$

$$\to x[n]\ is\ a\ periodic\ signals, where\ N\ is\ the\ period.$$

$$式(1) \to fsRatio = \frac{N}{k}, (N \in N, k \in Z, \to fsRatio \in R)$$

因此，當$fsRatio$為有理數時，$x[n]$具有週期性，否則，當$fsRatio$為無理數時，則$x[n]$不具有週期性，下圖 2-2 分別以$fsRatio = \sqrt{2}, \pi$此兩個無理數為例，也能看出其波形不具有週期性。

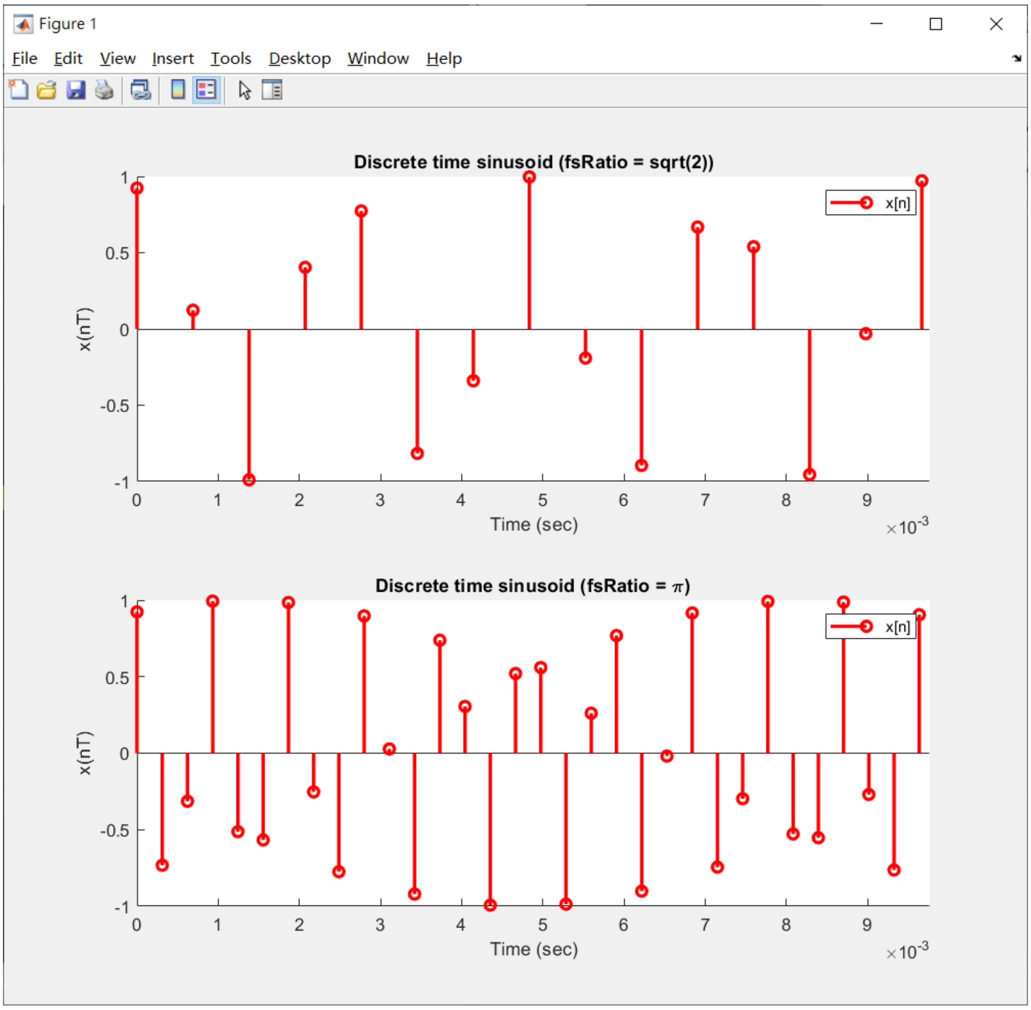

圖 2-2

3. Causal、Linear and Time Invariant System

(a)
```
for m = 1:M,
    y(m,:) = x(m, 2:end) - x(m,1:end-1);
end
```

The 1D system $\rightarrow y(t) = x(t+1) - x(t), where\ 1 \le t \le n-1, t \in N$

$\rightarrow |y(t)| = |x(t+1) - x(t)|, where\ 1 \le t \le n-1, t \in N$

(1) Causal

由於輸出$y(t)$中牽涉到了未來的輸入$x(t+1)$，因此$y(t)$不是一個 Causal system；而$|y(t)|$同樣也與$x(t+1)$有關，則$|y(t)|$也不是一個 Causal system。

(2) Linear

$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = x_1(t+1) - x_1(t)$

$x_2(t) \rightarrow y_2(t) = x_2(t+1) - x_2(t)$

$x_3(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$

$\rightarrow y_3(t) = x_3(t+1) - x_3(t)$

$= \left(ax_1(t+1) + bx_2(t+1)\right) - (ax_1(t) + bx_2(t))$

$= a\left(x_1(t+1) - x_1(t)\right) + b(x_2(t+1) - x_2(t))$

$= ay_1(t) + by_2(t)$

$\rightarrow y(t)$是一個Linear system

$x_1(t) \rightarrow |y_1(t)| = |x_1(t+1) - x_1(t)|$

$x_2(t) \rightarrow |y_2(t)| = |x_2(t+1) - x_2(t)|$

$x_3(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$

$\rightarrow |y_3(t)| = |x_3(t+1) - x_3(t)|$

$= |\left(ax_1(t+1) + bx_2(t+1)\right) - (ax_1(t) + bx_2(t))|$

$= |ay_1(t) + by_2(t)|$

下圖3-1為在所有不同情況下（a, y_1, b, y_2的正負號及$|ay_1|$和$|by_2|$的大小所組成之32種組合），判斷$|ay_1(t) + by_2(t)|$是否等於$a|y_1(t)| + b|y_2(t)|$，可發現在大部分情況下都為不等於，因此$|y(t)|$不是一個Linear system。

C:\Users\user\Desktop\kk.exe

<table>
<tr><th>a</th><th>y1</th><th>b</th><th>y2</th><th>large term</th><th>answer</th></tr>
<tr><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td>|ay1|</td><td>Not Equal</td></tr>
<tr><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td>|by2|</td><td>Not Equal</td></tr>
<tr><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td>+</td><td>|ay1|</td><td>Not Equal</td></tr>
<tr><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td>+</td><td>|by2|</td><td>Not Equal</td></tr>
<tr><td>-</td><td>+</td><td>-</td><td>-</td><td>|ay1|</td><td>Not Equal</td></tr>
<tr><td>-</td><td>+</td><td>-</td><td>-</td><td>|by2|</td><td>Not Equal</td></tr>
<tr><td>-</td><td>+</td><td>-</td><td>+</td><td>|ay1|</td><td>Not Equal</td></tr>
<tr><td>-</td><td>+</td><td>-</td><td>+</td><td>|by2|</td><td>Not Equal</td></tr>
<tr><td>-</td><td>-</td><td>+</td><td>-</td><td>|ay1|</td><td>Not Equal</td></tr>
<tr><td>-</td><td>-</td><td>+</td><td>-</td><td>|by2|</td><td>Equal</td></tr>
<tr><td>-</td><td>-</td><td>+</td><td>+</td><td>|ay1|</td><td>Not Equal</td></tr>
<tr><td>-</td><td>-</td><td>+</td><td>+</td><td>|by2|</td><td>Not Equal</td></tr>
<tr><td>-</td><td>+</td><td>+</td><td>-</td><td>|ay1|</td><td>Not Equal</td></tr>
<tr><td>-</td><td>+</td><td>+</td><td>-</td><td>|by2|</td><td>Not Equal</td></tr>
<tr><td>-</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>|ay1|</td><td>Not Equal</td></tr>
<tr><td>-</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>|by2|</td><td>Equal</td></tr>
<tr><td>+</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td>|ay1|</td><td>Equal</td></tr>
<tr><td>+</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td>|by2|</td><td>Not Equal</td></tr>
<tr><td>+</td><td>-</td><td>-</td><td>+</td><td>|ay1|</td><td>Not Equal</td></tr>
<tr><td>+</td><td>-</td><td>-</td><td>+</td><td>|by2|</td><td>Not Equal</td></tr>
<tr><td>+</td><td>+</td><td>-</td><td>-</td><td>|ay1|</td><td>Not Equal</td></tr>
<tr><td>+</td><td>+</td><td>-</td><td>-</td><td>|by2|</td><td>Not Equal</td></tr>
<tr><td>+</td><td>+</td><td>-</td><td>+</td><td>|ay1|</td><td>Equal</td></tr>
<tr><td>+</td><td>+</td><td>-</td><td>+</td><td>|by2|</td><td>Not Equal</td></tr>
<tr><td>+</td><td>-</td><td>+</td><td>-</td><td>|ay1|</td><td>Equal</td></tr>
<tr><td>+</td><td>-</td><td>+</td><td>-</td><td>|by2|</td><td>Equal</td></tr>
<tr><td>+</td><td>-</td><td>+</td><td>+</td><td>|ay1|</td><td>Not Equal</td></tr>
<tr><td>+</td><td>-</td><td>+</td><td>+</td><td>|by2|</td><td>Not Equal</td></tr>
<tr><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>-</td><td>|ay1|</td><td>Not Equal</td></tr>
<tr><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>-</td><td>|by2|</td><td>Not Equal</td></tr>
<tr><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>|ay1|</td><td>Equal</td></tr>
<tr><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>|by2|</td><td>Equal</td></tr>
</table>

圖 3-1

(3) Time Invariant

$x_1(t) \to y_1(t) = x_1(t+1) - x_1(t)$

$x_2(t) = x_1(t - t_0)$

$\to y_2(t) = x_2(t+1) - x_2(t)$

$= x_1(t - t_0 + 1) - x_1(t - t_0)$

$= y_1(t - t_0)$

$\to y(t)$是一個Time invariant system

$x_1(t) \to |y_1(t)| = |x_1(t+1) - x_1(t)|$

$x_2(t) = x_1(t - t_0)$

$\to y_2(t) = |x_2(t+1) - x_2(t)|$

$= |x_1(t - t_0 + 1) - x_1(t - t_0)|$

$= |y_1(t - t_0)|$

$\to |y(t)|$是一個Time invariant system

(4) 系統意義

此系統的操作為將相鄰的兩個像素點相減後輸出為一個點，因此每一列都會缺少最後一個相素。當相鄰的兩個像素顏色很接近的話，相減結果會接近於0，則所有顏色很接近的區域最後都會輸出成相近的顏色，而當相鄰兩個像素顏色相差較大時（輪廓交界處），相減後即輸出與鄰近區域差異較大的顏色，使輸入圖片轉變為如浮雕的輸出圖片。

此外，由於相減結果可能是正值，也可能是負值，使得輸出結果之輪廓線有黑有白，底色為灰色，如下圖3-2。我們可在相減後取絕對值，即可統一輪廓線為白色，而底色則變為黑色，如下圖3-3。

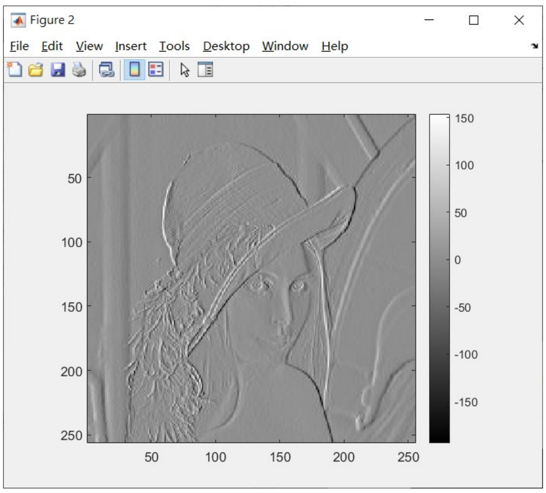

圖 3-2

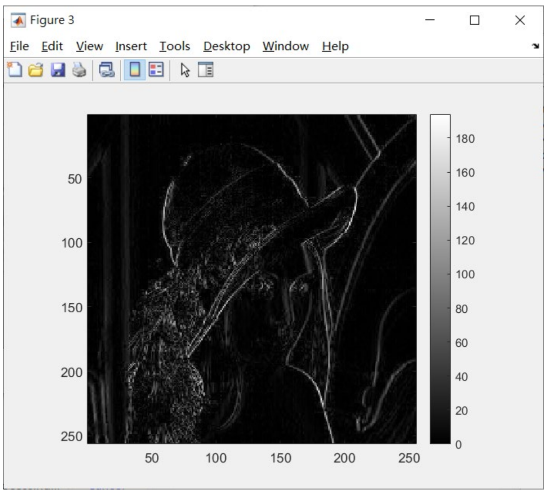

圖 3-3

(b)
```
for m = 1:M,
    for n = 3:N-2
        y(m,n) = sum(x(m, n-2:n+2))/5;
    end
end
```

The 1D system ↓

$$y(t) = \frac{x(t-2) + x(t-1) + x(t) + x(t+1) + x(t+2)}{5}$$

$$, where\ 3 \le t \le n-2, t \in N$$

(1) Causal

由於輸出$y(t)$中牽涉到了未來的輸入$x(t+1)$和$x(t+2)$，因此$y(t)$不是一個Causal system。

(2) Linear

$$x_1(t) \to y_1(t) = \frac{x_1(t-2) + x_1(t-1) + x_1(t) + x_1(t+1) + x_1(t+2)}{5}$$

$$x_2(t) \to y_2(t) = \frac{x_2(t-2) + x_2(t-1) + x_2(t) + x_2(t+1) + x_2(t+2)}{5}$$

$$x_3(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$$

$$\to y_3(t) = \frac{x_3(t-2) + x_3(t-1) + x_3(t) + x_3(t+1) + x_3(t+2)}{5}$$

$$= \frac{\big(ax_1(t-2) + bx_2(t-2)\big) + \big(ax_1(t-1) + bx_2(t-1)\big)}{5} +$$

$$\frac{\big(ax_1(t) + bx_2(t)\big) + \big(ax_1(t+1) + bx_2(t+1)\big)}{5} +$$

$$\frac{\big(ax_1(t+2) + bx_2(t+2)\big)}{5}$$

$$= a(\frac{x_1(t-2) + x_1(t-1) + x_1(t) + x_1(t+1) + x_1(t+2)}{5}) +$$

$$b(\frac{x_2(t-2) + x_2(t-1) + x_2(t) + x_2(t+1) + x_2(t+2)}{5})$$

$$= ay_1(t) + by_2(t)$$

$\to y(t)$是一個Linear system

(3) Time Invariant

$$x_1(t) \to y_1(t) = \frac{x_1(t-2)+x_1(t-1)+x_1(t)+x_1(t+1)+x_1(t+2)}{5}$$

$$x_2(t) = x_1(t-t_0)$$

$$\to y_2(t) = \frac{x_2(t-2)+x_2(t-1)+x_2(t)+x_2(t+1)+x_2(t+2)}{5}$$

$$= \frac{x_1(t-t_0-2)+x_1(t-t_0-1)+x_1(t-t_0)}{5} +$$

$$\frac{x_1(t-t_0+1)+x_1(t-t_0+2)}{5}$$

$$= y_1(t-t_0)$$

$\to y(t)$是一個Time invariant system

(4) 系統意義

此系統的操作為將鄰近之五個像素點（左邊兩點、自己一點、右邊兩點）之值作算術平均值作為輸出，因此每列的最前兩點與最後兩點會缺乏數值（即為0，呈現黑色）。由於將鄰近的像素點作平均當作輸出，因此比起原圖（如下圖3-4），輸出的圖片（如下圖3-5）會稍加模糊，但大致影像特徵皆相同，而兩側有兩條因缺乏數據所形成的兩條細長黑線。

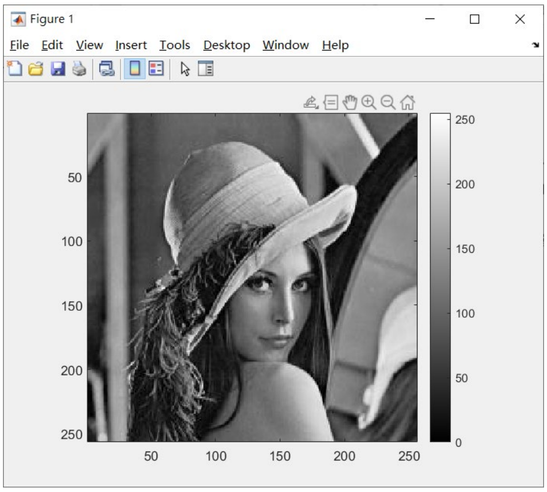

圖 3-4

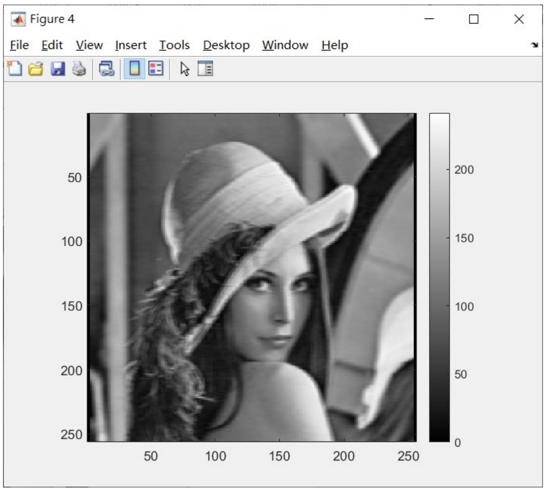

圖 3-5

(5) Remodel it into Causal system

由於此系統的功能為將鄰近五個像素點之平均輸出，因此我們可以透過Time shift的平移，得到相同功能且Causality的系統（因為此系統為Time invariant system，因此平移後的輸出結果不會改變）。為了避免$y(t)$中包含了$x(t+\tau), where\ \tau > 0$，可將$y(t)$作Time shift：

取$t_0 = 2,$

則$y_{new}(t) = y(t - t_0)$

$$= \frac{x(t-t_0-2) + x(t-t_0-1) + x(t-t_0)}{5} + \frac{x(t-t_0+1) + x(t-t_0+2)}{5}$$

$$= \frac{x(t-4) + x(t-3) + x(t-2) + x(t-1) + x(t)}{5}$$

$, where\ 5 \le t \le n, t \in N$

經過此轉換後的新輸出圖片，如下圖3-6，向右平移了兩個像素點，使每列的前四點缺乏數據而呈現黑色。而此時$y_{new}(t)$未包含任何未來輸入，因此即為一個Causal system，以下包含了實作之程式碼。

```
for m = 1:M,
    for n = 5:N
        y(m,n) = sum(x(m, n-4:n))/5;
    end
end
```

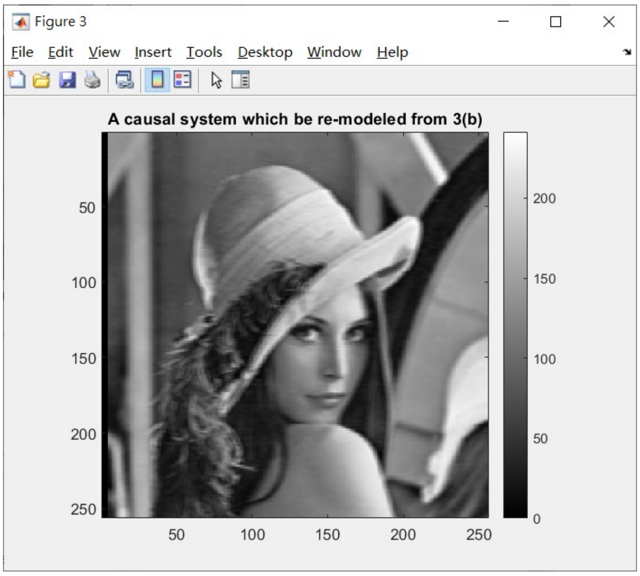

圖 3-6

(c)
```
y1 = (x + fliplr(x))/2;
y2 = (x - fliplr(x))/2;
x_new = y1 + y2;
```
fliplr(x)將矩陣 x 左右顛倒，因此可將以上程式碼轉換為如下數學式：

$$y_1(t) = \big(x(t) + x(n+1-t)\big)/2\,, where\ 1 \le t \le n, t \in N$$
$$y_2(t) = \big(x(t) - x(n+1-t)\big)/2\,, where\ 1 \le t \le n, t \in N$$
$$x_{new} = y_1(t) + y_2(t)$$
$$= \big(x(t) + x(n+1-t)\big)/2 + \big(x(t) - x(n+1-t)\big)/2$$
$$= x(t), where\ \ 1 \le t \le n, t \in N$$

我們可以發現$y_1(t)$和$y_2(t)$與偶函數、奇函數相當類似，只要分別將其作 Time advance transformation，即可轉為偶函數、奇函數。因此我們只要將圖片的中心線視為縱軸，$y_1(t)$即為一個偶函數，其輸出如圖 3-7 為左右對稱的圖片，而$y_2(t)$即為一個奇函數，其輸出如圖 3-8，當左半部之像素點為黑色，對應之右半部像素點即為白色，深淺也會對應著 colorbar。最後，此奇函數訊號和偶函數訊號總和後的輸出訊號恰好為原圖，如圖 3-9 所示，此操作為將$x(t)$作 Even-odd decomposition，將原始訊號分解成一個奇函數訊號及一個偶函數訊號，這種作法有助於我們處理複雜訊號。

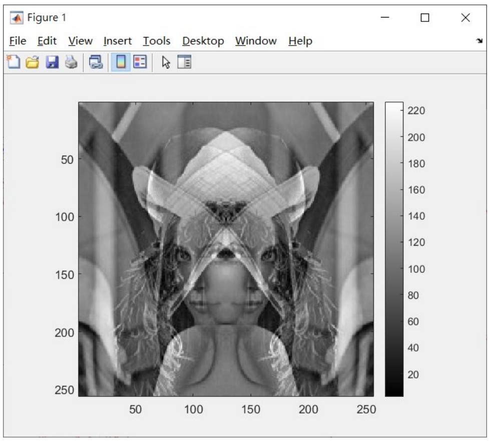

圖 3-7

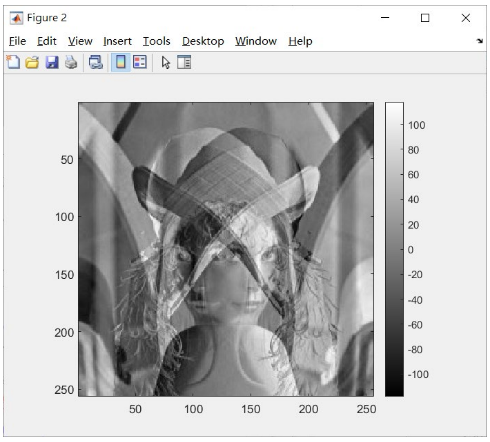

圖 3-8

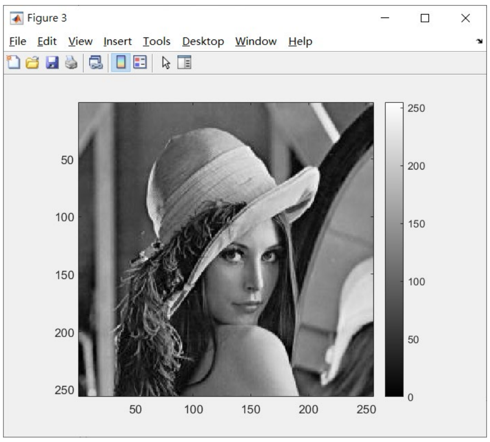

圖 3-9