Parte II

Algoritmos FFT secuenciales

Capítulo 3

El divide y vencerás Paradigma y dos algoritmos FFT básicos

Como se señaló anteriormente, el cálculo de la DFT implica la multiplicación de una matriz ***METRO*** por un vector***X***, donde la matriz tiene una estructura muy especial. Los algoritmos FFT explotan esa estructura empleando aa*paradigma divide y vencerás*. Los desarrollos de los últimos 30 años han dado lugar a una gran cantidad de variaciones del algoritmo básico; estos son los temas de los capítulos siguientes. Además, el desarrollo de computadoras multiprocesador ha estimulado el desarrollo de algoritmos FFT diseñados específicamente para funcionar bien en tales máquinas. Estos también se consideran en capítulos posteriores de este libro.

El propósito de este capítulo es presentar las ideas principales de los algoritmos FFT. Esto servirá como base y motivación para el material presentado en los capítulos siguientes, donde se consideran numerosos temas relacionados con su implementación eficiente.

Los tres pasos principales del paradigma divide y vencerás son

Paso 1. Dividir el problema en dos o más subproblemas de menor tamaño.

Paso 2. Resuelve cada subproblema*recursivamente*por el mismo algoritmo. Aplicar el límite condición aria para terminar la recursividad cuando los tamaños de los subproblemas son lo suficientemente pequeños.

Paso 3. Obtenga la solución del problema original combinando las soluciones de los subproblemas.

La FFT radix-2 es un algoritmo recursivo que se obtiene al dividir el problema dado (y cada subproblema) en dos subproblemas de la mitad del tamaño. Dentro de este marco, hay dos variantes de FFT de uso común que difieren en la forma en que se definen los dos subproblemas de tamaño medio. Se les conoce como DIT (*diezmar en el tiempo*) FFT y el DIF (*diezmado en frecuencia*) FFT, y se derivan a continuación.

Es intuitivamente aparente que una estrategia de divide y vencerás funcionará mejor cuando*norte* es una potencia de dos, ya que la subdivisión de los problemas en problemas sucesivamente más pequeños puede proceder hasta que su tamaño sea uno. Por supuesto, hay muchas circunstancias en las que no es posible arreglar eso *norte* es una potencia de dos, por lo que los algoritmos deben modificarse en consecuencia. Tales modificaciones se tratan en detalle en capítulos posteriores. Sin embargo, en este capítulo se supone que $norte = 2^{norte}$. Además, dado que el algoritmo involucra la resolución de problemas de diferentes tamaños, es necesario distinguir entre sus respectivos ω's; ω_q se referirá a la ω correspondiente a un problema de tamaño q.

Además, para simplificar la presentación en el resto del libro y evitar el desorden de notación, se han hecho dos ajustes en la notación en la continuación. Primero, el factor $\frac{1}{norte}$ se ha omitido de la consideración en los cálculos. esto obviamente no cambia materialmente el cálculo. Segundo, ω ha sido implícitamente redefinido como ω^{-}, por lo que se puede omitir el superíndice negativo en (1.7). Nuevamente, esto no cambia las cosas de ninguna manera material, pero hace que la presentación sea un poco más clara. Por lo tanto, la ecuación realmente estudiada en el resto de este libro es

$$(3.1)\qquad X_r = \sum_{=0}^{N-1} X\,\omega^{r}\quad r = 0, 1, \ldots, norte-1.$$

Las siguientes identidades que involucran los factores twiddle se usan repetidamente en lo que sigue.

$$(3.2)\qquad (\omega_{norte})^{\frac{norte}{2}} = -1,\ \omega_{\frac{norte}{2}} = \omega^{2}_{norte},\ \omega^{norte}_{norte} = 1.$$

3.1 FFT de diezmado en el tiempo (DIT) de Radix-2

La FFT DIT radix-2 se obtiene reescribiendo primero la ecuación (3.1) como

$$(3.3)\qquad X_r = \sum_{k=0}^{\frac{norte}{2}-1} X_{2k}\,\omega^{r(2k)}_{norte} + \omega^{r}_{norte} \sum_{k=0}^{\frac{norte}{2}-1} X_{2k+1}\,\omega^{r(2k)}_{norte}\quad r = 0, 1, \ldots, norte-1.$$

usando la identidad $\omega_{\frac{norte}{2}} = \omega^{2}_{norte}$ de (3.2), (3.3) se puede escribir como

$$(3.4)\qquad X_r = \sum_{k=0}^{\frac{norte}{2}-1} X_{2k}\,\omega^{rk}_{\frac{norte}{2}} + \omega^{r}_{norte} \sum_{k=0}^{\frac{norte}{2}-1} X_{2k+1}\,\omega^{rk}_{\frac{norte}{2}},\ r = 0, 1, \ldots, norte-1.$$

Desde $\omega^{rk}_{\frac{norte}{2}} = \omega^{(r+\frac{norte}{2})k}_{\frac{norte}{2}}$, es necesario calcular sólo las sumas para $r = 0, 1, \ldots, \frac{norte}{2}-1$. Por lo tanto, cada sumatoria en (3.4) puede interpretarse como una DFT de tamaño $NORTE/2$, el primero que involucra el conjunto indexado par $\{X_{2k}\,/\,k = 0, \ldots, N/2-1\}$, y el segundo que involucra el conjunto indexado impar $\{X_{2k+1}\,/\,k = 0, \ldots, N/2-1\}$. (De ahí el uso del término *diezmar en el tiempo*.) Definición $y_k = X_{2k}$ y $z_k = X_{2k+1}$ en (3.4) produce los dos subproblemas siguientes, cada uno con una forma idéntica a (3.1) con *norte* reemplazado por $NORTE/2$:

$$(3.5)\qquad Y_r = \sum_{k=0}^{\frac{norte}{2}-1} y_k\,\omega^{rk}_{\frac{norte}{2}},\ r = 0, 1, \ldots, N/2-1,$$

y

$$(3.6)\qquad Z_r = \sum_{k=0}^{\frac{norte}{2}-1} z_k\,\omega^{rk}_{\frac{norte}{2}},\ r = 0, 1, \ldots, N/2-1.$$

Después de que estos dos subproblemas se resuelven (recursivamente), la solución al problema original de tamaño *norte* se obtiene usando (3.4). La primera *NORTE/*2 términos están dados por

$$X_r = Y_r + \omega^r_{norte} Z_r, \quad r = 0, 1, \ldots, N/2 - 1, \tag{3.7}$$

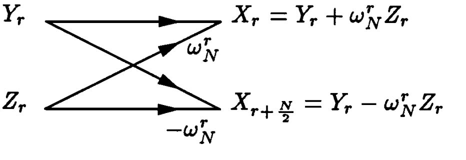
y usando el hecho de que $\omega_{norte}^{\frac{norte}{2}+r} = -\omega^r_{norte}$ y $\omega^{\frac{norte}{2}}_{\frac{norte}{2}} = 1$, los términos restantes están dados por

$$\begin{aligned} X_{r+\frac{norte}{2}} &= \sum_{k=0}^{\frac{norte}{2}-1} y_k \omega_{\frac{norte}{2}}^{\left(r+\frac{norte}{2}\right)k} + \omega_{norte}^{r+\frac{norte}{2}} \sum_{k=0}^{\frac{norte}{2}-1} z_k \omega_{\frac{norte}{2}}^{\left(r+\frac{norte}{2}\right)k} \\ &= \sum_{k=0}^{\frac{norte}{2}-1} y_k \omega_{\frac{norte}{2}}^{rk} - \omega^r_{norte} \sum_{k=0}^{\frac{norte}{2}-1} z_k \omega_{\frac{norte}{2}}^{rk} \\ &= Y_r - \omega^r_{norte} Z_r, \quad r = 0, 1, \ldots, N/2 - 1. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Tenga en cuenta que las ecuaciones (3.7) y (3.8) se pueden aplicar a cualquier problema de tamaño uniforme. Por lo tanto, aunque parecen representar solo el último paso (combinación), se entiende que cuando el tamaño del problema es una potencia de 2, los dos subproblemas definidos por las ecuaciones (3.5) y (3.6) (así como los subproblemas subsiguientes de tamaño ≥ 2) se habrían resuelto exactamente de la misma manera.

El cálculo representado por las ecuaciones (3.7) y (3.8) se conoce comúnmente como una mariposa de Cooley-Tukey en la literatura y se representa con el símbolo de mariposa anotado en Figura 3.1 abajo.

Figura 3.1 El Cooley-Tukey pero



3.1.1 Analizando el costo aritmético

Dejar T(*norte*) sea el costo aritmético de calcular la FFT DIT radix-2 de tamaño *norte*, cual implica que calcular una transformada de tamaño medio usando el mismo algoritmo cuesta $T\left(\frac{norte}{2}\right)$. En Para establecer la ecuación de recurrencia, uno necesita relacionar T(*norte*) a $T\left(\frac{norte}{2}\right)$. De acuerdo a a (3.7) y (3.8), *norte* adiciones complejas y $\frac{norte}{2}$ se necesitan multiplicaciones complejas para completar la transformación, suponiendo que los factores de giro se calculan previamente como se sugiere en la Sección 2.1.

Recuerde que una suma compleja incurre en dos sumas reales de acuerdo con (2.1), y una multiplicación compleja (con resultados intermedios precalculados que involucran las partes real e imaginaria de un factor de giro) incurre en tres multiplicaciones reales y tres sumas reales de acuerdo con (2.4).

Por lo tanto, contando una suma o multiplicación de punto flotante como un fracaso, 2*norte* Floridalas operaciones son incurridas por el *norte* adiciones complejas, y 3*norte* Floridalas operaciones son incurridas por el $\frac{norte}{2}$ complejo multiplicaciones En total, 5*norte* FloridaSe necesitan operaciones para completar la transformación después de los dos subproblemas de tamaño medio se resuelven cada uno a costa de $T\left(\frac{norte}{2}\right)$. En consecuencia, la aritmética costo $T(norte)$ está representado por la siguiente recurrencia.

$$(3.9)\qquad T(norte) = \begin{cases} 2T\left(\frac{norte}{2}\right) + 5norte & \text{si } norte = 2^{norte} \geq 2, \\ 0 & \text{si } norte = 1. \end{cases}$$

Comparando (3.9) con (2.6) y usando (2.7) se obtiene la siguiente expresión para el costo aritmético:

$$(3.10)\qquad T(norte) = 5norte\,\text{registro}_2 n$$

3.2 FFT de diezmado en frecuencia (DIF) Radix-2

Como su nombre lo indica, el algoritmo radix-2 DIF FFT se obtiene mediante *diezmando* la serie de frecuencias de salida en un conjunto indexado par $\{X_{2k} \mid k = 0, \ldots, N/2-1\}$ y un conjunto indexado impar $\{X_{2k+1} \mid k = 0, \ldots, N/2-1\}$. Para definir los dos subproblemas de tamaño medio, la ecuación (3.1) se reescribe como

$$(3.11)\qquad \begin{aligned} X_r &= \sum_{\ell=0}^{\frac{norte}{2}-1} x_\ell\,\omega_{norte}^{r\ell} + \sum_{\ell=\frac{norte}{2}}^{norte-1} x_\ell\,\omega_{norte}^{r\ell} = \sum_{\ell=0}^{\frac{norte}{2}-1} x_\ell\,\omega_{norte}^{r\ell} + \sum_{\ell=0}^{\frac{norte}{2}-1} x_{\ell+\frac{norte}{2}}\,\omega_{norte}^{r\left(\ell+\frac{norte}{2}\right)} \\ &= \sum_{\ell=0}^{\frac{norte}{2}-1} \left(x_\ell + x_{\ell+\frac{norte}{2}}\,\omega_{norte}^{r\frac{norte}{2}} \right) \omega_{norte}^{r\ell}, \quad r = 0, 1, \ldots, norte-1. \end{aligned}$$

Para r incluso, usando (3.2) en (3.11) se obtiene

$$(3.12)\qquad \begin{aligned} X_{2k} &= \sum_{\ell=0}^{\frac{norte}{2}-1} \left(x_\ell + x_{\ell+\frac{norte}{2}}\,\omega_{norte}^{k\,norte} \right) \omega_{norte}^{2k\ell} \\ &= \sum_{\ell=0}^{\frac{norte}{2}-1} \left(x_\ell + x_{\ell+\frac{norte}{2}} \right) \omega_{\frac{norte}{2}}^{k\ell}, \quad k = 0, 1, \ldots, N/2-1. \end{aligned}$$

Definición $Y_k = X_{2k}$ y $y_\ell = x_\ell + x_{\ell+\frac{norte}{2}}$ produce el subproblema de la mitad del tamaño

$$(3.13)\qquad Y_k = \sum_{\ell=0}^{\frac{norte}{2}-1} y_\ell\,\omega_{\frac{norte}{2}}^{k\ell}, \quad k = 0, 1, \ldots, N/2-1.$$

Del mismo modo, para r impar, usando (3.2) en (3.11) se obtiene

$$(3.14)\qquad \begin{aligned} X_{2k+1} &= \sum_{\ell=0}^{\frac{norte}{2}-1} \left(x_\ell + x_{\ell+\frac{norte}{2}}\,\omega_{norte}^{(2k+1)\frac{norte}{2}} \right) \omega_{norte}^{(2k+1)\ell} \\ &= \sum_{\ell=0}^{\frac{norte}{2}-1} \left(\left(x_\ell - x_{\ell+\frac{norte}{2}} \right) \omega_{norte}^{\ell} \right) \omega_{\frac{norte}{2}}^{k\ell}, \quad k = 0, 1, \ldots, N/2-1. \end{aligned}$$

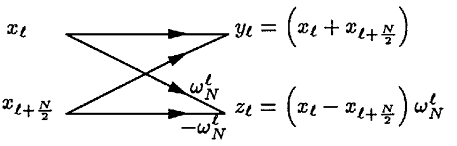
Definición $Z_k = X_{2k+1}$ y $z_\ell = \left(x_\ell - x_{\ell+\frac{norte}{2}} \right) \omega_{norte}^{\ell}$ produce el segundo problema de tamaño medio

$$(3.15)\qquad Z_k = \sum_{\ell=0}^{\frac{norte}{2}-1} z_\ell\,\omega_{\frac{norte}{2}}^{k\ell}, \quad k = 0, 1, \ldots, N/2-1.$$

Tenga en cuenta que porque $X_{2k} = Y_k$ en (3.13) y $X_{2k+1} = Z_k$ en (3.15), no se necesitan más cálculos para obtener la solución de los problemas originales después de resolver los dos subproblemas. Por lo tanto, en la implementación del DIF FFT, la mayor parte del trabajo se realiza durante el *subdivisión* paso, es decir, el establecimiento de subproblemas apropiados, y no hay paso de combinación. En consecuencia, el cálculo de $y = X + X_{+\frac{norte}{2}}$ y $z = (x - x_{+\frac{norte}{2}})\,\omega_{norte}$ completa el primer paso (subdivisión).

El cómputo de y y z en el paso de subdivisión como se definió anteriormente se conoce como la mariposa Gentleman-Sande en la literatura, y se representa con el símbolo de mariposa anotado en Figura 3.2.

Figura 3.2 El Caballero-Sande b



3.2.1 Analizando el costo aritmético

Observe que el cálculo de y y z en el paso de subdivisión requiere $norte$ com-adiciones complejas y $\frac{norte}{2}$ multiplicaciones complejas, que ascienden al mismo costo que el paso de combinación en el algoritmo radix-2 DIT FFT discutido anteriormente, y son el único costo además de resolver los dos subproblemas de tamaño medio a costa de $T\left(\frac{norte}{2}\right)$ cada. En consecuencia, el costo aritmético total de la FFT DIF radix-2 también está representado por la ecuación de recurrencia (3.9), y $T(norte) = 5\,norte\,\text{registro}_2\,norte$ de (3.10).

3.3 Notas y Referencias

La forma básica del DIT (*diezmar en el tiempo*) La FFT presentada en la Sección 3.1 fue utilizada por Cooley y Tukey [33]; la forma básica del DIF (*diezmado en frecuencia*) La FFT presentada en la Sección 3.2 fue encontrada de forma independiente por Gentleman y Sande [47], y Cooley y Stockham según [30].

Un relato interesante de la historia de la transformada rápida de Fourier se puede encontrar en el artículo de Cooley, Lewis y Welch [32]. Una descripción de Gauss y la historia de la FFT se encuentra en un artículo más reciente de Heideman, Johnson y Burrus [52]. En 1995 se publicó una bibliografía de más de 3500 títulos sobre la transformada rápida de Fourier y los algoritmos de convolución [85].