

数字图像处理第六次作业

图像复原

姓名：朱可

班级：自动化 63 班

学号：2160504082

提交日期：2019 年 4 月 2 日

摘要

本次实验基于 MATLAB，实现对图像的加噪、运动模糊、复原等操作，比较不同滤波复原方式的优劣。任务一先给图像加高斯噪声，利用公式 $G(u,v) = H(u,v)F(u,v) + N(u,v)$ 和高斯随机变量 z 的 PDF，然后分别编写函数，用几种均值滤波器和统计排序滤波器对图像进行恢复，并比较效果；任务二利用脉冲(椒盐)噪声的 PDF；任务三基于正交性原理等推导维纳滤波器模型，并产生运动模糊和高斯噪声，再进行约束最小二乘方滤波。

题目要求:

1. 在测试图像上产生高斯噪声 lena 图-需能指定均值和方差；并用多种滤波器恢复图像，分析各自优缺点；
2. 在测试图像 lena 图加入椒盐噪声（椒和盐噪声密度均是 0.1）；用学过的滤波器恢复图像；在使用反谐波分析 Q 大于 0 和小于 0 的作用；
3. 推导维纳滤波器并实现下边要求；
 - (a) 实现模糊滤波器如方程 Eq. (5.6-11).
 - (b) 模糊 lena 图像：45 度方向， $T=1$ ；
 - (c) 再模糊的 lena 图像中增加高斯噪声，均值=0，方差=10 pixels 以产生模糊图像；
 - (d) 分别利用方程 Eq. (5.8-6)和(5.9-4)，恢复图像；并分析算法的优缺点.

一、加入高斯噪声并复原

1.1 问题分析及实现原理

1.1.1 高斯噪声

高斯噪声是指它的概率密度函数服从高斯分布（即正态分布）的一类噪声。常见的高斯噪声包括起伏噪声、宇宙噪声、热噪声和散粒噪声等等。除常用抑制噪声的方法外，对高斯噪声的抑制方法常常采用数理统计方法。

在数字图像中的高斯噪声的主要来源出现在采集期间。由于不良照明和/或高温引起的传感器噪声。在数字图像处理中，可以使用空间滤波器来降低高斯噪声，但是当对图像进行平滑时，结果可能导致精细缩放的图像边缘和细节的模糊，因为它们也对应于被阻挡的高频。用于噪声去除的常规空间滤波技术包括：平均（卷积）滤波，中值滤波和高斯平滑。

高斯分布，也称正态分布，又称常态分布，记为 $N(\mu, \sigma^2)$ ，其中 μ , σ^2 为分布的参数，分别为高斯分布的期望和方差。当有确定值时， $p(x)$ 也就确定了，特别当 $\mu=0$, $\sigma^2=1$ 时， X 的分布为标准正态分布：

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(z-\bar{z})^2/2\sigma^2}$$

1.1.2 复原图像——均值滤波器

1.算术均值滤波器

这是最简单的均值滤波器。令 S_0 表示中心在点 (x, y) 处、大小为 $m \times n$ 的矩形子图像窗口(邻域)的一组坐标。算术均值滤波器在 S 定义的区域中计算被污染图像 $g(x, y)$ 的平均值。在点 (x, y) 处复原图像 f 的值，就是简单地使用 S 定义的区域中的像素计算出的算术均值，即：

$$\hat{f}(x, y) = \frac{1}{mn} \sum_{(s,t) \in S_{xy}} g(s, t)$$

这个操作可以使用大小为 mn 的一个空间滤波器来实现，其所有的系数均为其值的 $1/mn$ 。均值滤波平滑一幅图像中的局部变化，虽然模糊了结果，但降低了噪声。

2.几何均值滤波器

使用几何均值滤波器复原的一幅图像由如下表达式给出：

$$\hat{f}(x, y) = \left[\prod_{(s,t) \in S_{xy}} g(x, y) \right]^{\frac{1}{mn}}$$

其中，每个复原的像素由子图像窗口中像素的乘积的 $1/mn$ 次幂给出。几何均值滤波器实现的平滑可与算术均值滤波器相比，但这种处理中丢失的图像细节更少。

3.谐波均值滤波器

谐波均值滤波操作由如下表达式给出：

$$\hat{f}(x, y) = \frac{mn}{\sum_{(s,t) \in S_{xy}} \frac{1}{g(s, t)}}$$

谐波均值滤波器对于盐粒噪声效果较好，但不适用于胡椒噪声。它善于处理像高斯噪声那样的其他噪声。

4.逆谐波均值滤波器

逆谐波均值滤波器基于如下表达式产生一幅复原的图像：

$$\hat{f}(x, y) = \frac{\sum_{(s,t) \in S_{xy}} g(s, t)^{Q+1}}{\sum_{(s,t) \in S_{xy}} g(s, t)^Q}$$

其中 Q 称为滤波器的阶数。这种滤波器适合减少或在实际中消除椒盐噪声的影响。当 Q 值为正时, 该滤波器消除胡椒噪声; 当 Q 值为负时, 该滤波器消除盐粒噪声。但它不能同时消除这两种噪声。注意, 当 $Q=0$ 时, 逆谐波均值滤波器简化为算术均值滤波器; 而当 $Q=-1$ 时, 则为谐波均值滤波器。

1.2 实现的结果

用高斯噪声分别取不同的均值和方差得到的结果如图 1 所示:



图 1 使用指定的均值和方差得到的结果

选取均值为 0, 方差为 0.01 的高斯噪声后的图像, 然后用四种不同的滤波器进行滤波, 得到的结果如图 2 所示:



图 2 用四种滤波器对噪声后的图像进行滤波后的结果

1.3 结果分析

由运行结果可知，四种均值滤波方式均可对高斯噪声实现衰减，但在恢复效果上存在细微的差别。首先总体来说，算术滤波器从直观上来对噪声的抑制效果较好，但是和几何均值滤波器和谐波均值滤波器比较起来，算术均值滤波器恢复图像的对比度不够高。几何均值滤波器和谐波均值滤波器虽然恢复图像后使得图像的对比度更明显了，但是在图像的细微之处会出现一些黑点，即细节处理不到位。二逆谐波均值滤波器则一定程度上使得图像变得更加模糊了，但细节上面却比几何均值滤波器和谐波均值滤波器要好。尽管四种滤波器对噪声的衰减都起到了作用，但几何均值并未像算术均值那样使图像变得模糊。

二、加入椒盐噪声并复原

2.1 问题分析及实现原理

2.1.1 椒盐噪声

椒盐噪声也称为脉冲噪声，是图像中经常见到的一种噪声，它是一种随机出现的白点或者黑点，可能是亮的区域有黑色像素或是在暗的区域有白色像素（或是两者皆有）。盐和胡椒噪声的成因可能是影像讯号受到突如其来的强烈干扰而产生、类比数位转换器或位元传输错误等。例如失效的感应器导致像素值为最小值，饱和的感应器导致像素值为最大值

2.1.2 复原图像的滤波器

1.谐波均值滤波器

谐波均值滤波操作由如下表达式给出：

$$\hat{f}(x, y) = \frac{mn}{\sum_{(s, t) \in S_{xy}} \frac{1}{g(s, t)}}$$

谐波均值滤波器对于盐粒噪声效果较好,但不适用于胡椒噪声。它善于处理像高斯噪声那样的其他噪声。

2.逆谐波均值滤波器

逆谐波均值滤波器基于如下表达式产生一幅复原的图像:

$$\hat{f}(x, y) = \frac{\sum_{(s, t) \in S_{xy}} g(s, t)^{Q+1}}{\sum_{(s, t) \in S_{xy}} g(s, t)^Q}$$

其中 Q 称为滤波器的阶数。这种滤波器适合减少或在实际中消除椒盐噪声的影响。当 Q 值为正时,该滤波器消除胡椒噪声;当 Q 值为负时,该滤波器消除盐粒噪声。但它不能同时消除这两种噪声。注意,当 Q=0 时,逆谐波均值滤波器简化为算术均值滤波器;而当 Q=-1 时,则为谐波均值滤波器。

3.中值滤波器

中值滤波器使用目标像素邻域像素中值替代中间像素的值,即:

$$\hat{f}(x, y) = \text{median}_{(s, t) \in S_{xy}} \{g(s, t)\}$$

中值滤波器是最常用的一种统计排序滤波器,它采用非线性方法,在平滑脉冲噪声方面非常有效,同时可以保护图像尖锐的边缘,使之不被模糊。具体实现时,可以利用直方图来避免大量排序操作以减少计算复杂度。

4.最大值和最小值滤波器

二者分别以目标像素邻域内最大灰度值和最小灰度值替代目标像素值,分别用于发现图像中的亮点和暗点,当然也分别适合处理胡椒噪声和盐粒噪声。

5.中点滤波器

中点滤波器简单地计算滤波器包围区域中最大值和最小值之间的中点，即：

$$\hat{f}(x, y) = \frac{1}{2} \left[\max_{(s, t) \in S_{xy}} \{g(s, t)\} + \min_{(s, t) \in S_{xy}} \{g(s, t)\} \right]$$

这种滤波器结合了统计排序和求平均，它对于随机分布噪声工作得最好，如高斯噪声或均噪声。

2.2 实现的结果

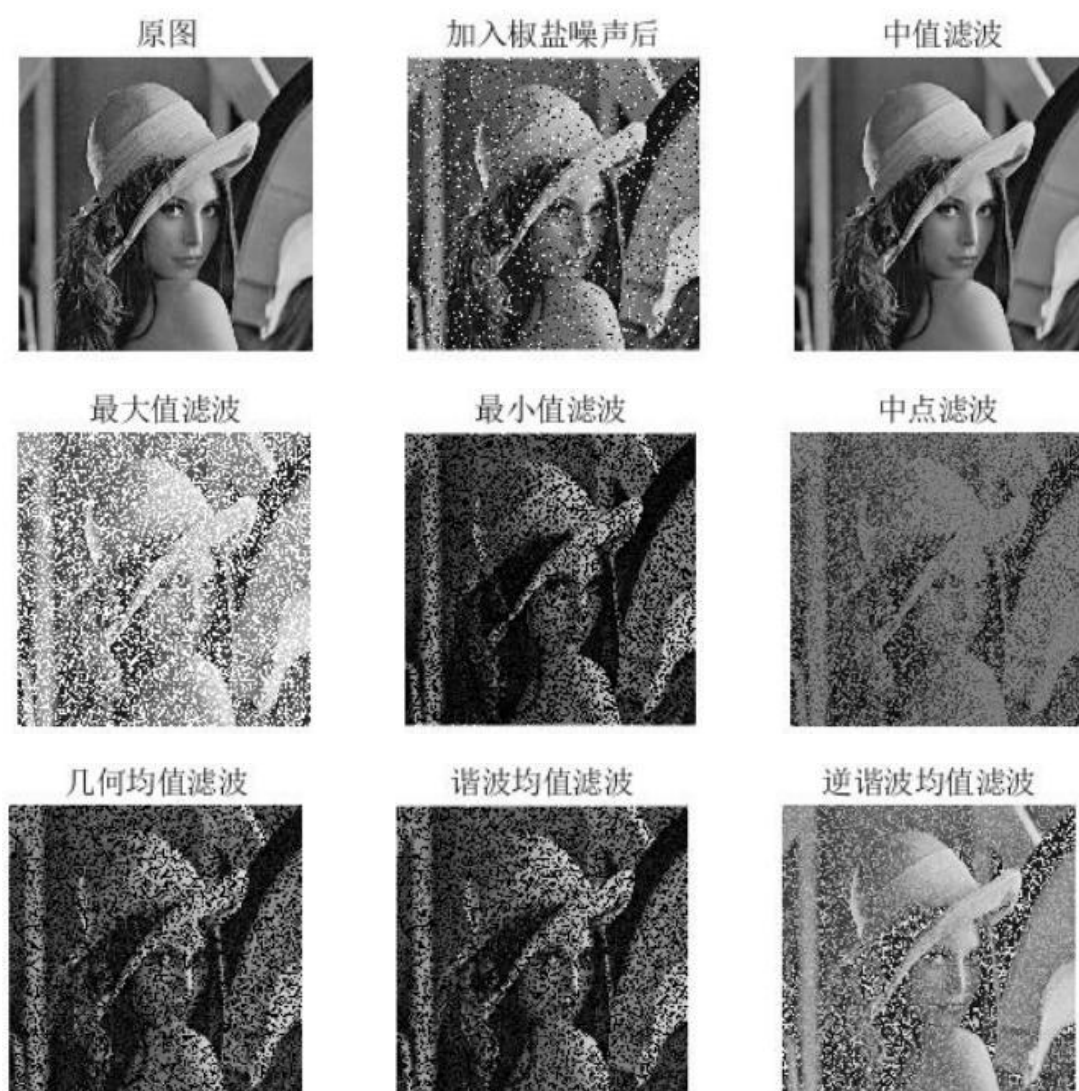


图 3 使用学过的滤波器进行滤波得到的结果

通过比较发现，中值滤波对噪声的抑制作用最好，其他类型的滤波器有些对噪声

有一定的抑制作用，有些对噪声却有着不好的促进作用，故效果不够明显。

下面使用不同的 Q 的逆谐波滤波器进行滤波得到的结果：



图 4 使用不同的 Q 的逆谐波滤波器滤波得到的图像

2.3 结果分析

$Q > 0$ 时，由于椒噪声小，所以滤波后噪点处取值和周围值更接近，有利于消除椒噪声，但增强了盐噪声。反之， $Q < 0$ 时，有利于消除盐噪声，却会增强椒噪声。因此，反谐波滤波器更适合处理单一噪声。此外，谐波滤波器并不适合椒盐噪声的去除，效果反而更差。

三、维纳滤波器

3.1 实验原理

1. 维纳滤波器的推导

维纳滤波又称最小均方误差滤波，即其以最小均方误差作为误差度量。该算法建立在图像和噪声都是随机变量的基础上，目标是找到未污染图像的一个估计使得均方误差最小，即令：

$$e^2 = E\{(f - \hat{f})^2\}$$

基本假设是：噪声和原图像均为均值为 0 的平稳随机过程，且二者不相关。推导过程中将多次运用这个假设条件。

设退化图像为：

$$g(x, y) = h(x, y) * f(x, y) + \eta(x, y)$$

原图像的估计值为：

$$\hat{f}(x, y) = w(x, y) * g(x, y)$$

先考虑一种简单的情况，即：

$$g(x, y) = f(x, y) + \eta(x, y)$$

误差函数：

$$e(x, y) = f(x, y) - \hat{f}(x, y)$$

根据正交原理，即使均方误差最小，误差必须与量测正交，即有：

$$E[e(n_1, n_2)g^*(m_1, m_2)] = 0$$

联立上面几个式子整理得到：

$$E[f(n_1, n_2)g^*(m_1, m_2)] = E[(w(n_1, n_2) * g(n_1, n_2))g^*(m_1, m_2)]$$

上式右侧卷积展开：

$$E[f(n_1, n_2)g^*(m_1, m_2)] = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} w(k_1, k_2)E[g(k_1 - n_1, k_2 - n_2)g^*(m_1, m_2)]$$

根据假设条件，平稳随机过程的自相关函数和互相关函数均不依赖于参数取值，而只和参数增量有关，即：

$$E[f(n_1, n_2)g^*(m_1, m_2)] = R_{fg}(n_1, n_2, m_1, m_2) = R_{fg}(n_1 - m_1, n_2 - m_2)$$

$$E[g(n_1, n_2)g^*(m_1, m_2)] = R_g(n_1, n_2, m_1, m_2) = R_g(n_1 - m_1, n_2 - m_2)$$

再代入前面的式子，并替换变量

得到：

$$R_{fg}(n_1, n_2) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} w(k_1, k_2) R_g(n_1 - k_1, n_2 - k_2)$$

$$R_{fg}(n_1, n_2) = w(n_1, n_2) * R_g(n_1, n_2)$$

由平稳随机过程的自相关函数的傅里叶变化为其谱密度，而平稳相关的随机过程的互相关函数的傅里叶变化为其互谱密度，对上式两边作傅里叶变换，得到：

$$S_{fg}(w_1, w_2) = W(w_1, w_2) S_g(w_1, w_2)$$

根据假设条件，原图像与噪声不相关，且二者均值为 0，且原图像和噪声的均值均为 0，因此有：

$$E[f(n_1, n_2) \eta^*(m_1, m_2)] = E[f(n_1, n_2)] E[\eta^*(m_1, m_2)] = 0$$

$$R_{fg}(n_1, n_2) = E[f(n_1, n_2) \times (f(n_1, n_2) + \eta^*(m_1, m_2))] = R_f(n_1, n_2)$$

$$R_g(n_1, n_2) = E[(f(n_1, n_2) + \eta^*(m_1, m_2))(f(n_1, n_2) + \eta^*(m_1, m_2))] = R_f(n_1, n_2)$$

对上两式左端和右端作傅里叶变化并代入前面的式子，整理可得：

$$W(w_1, w_2) = \frac{S_f(w_1, w_2)}{S_f(w_1, w_2) + S_\eta(w_1, w_2)}$$

考虑最初的一般情况，得到一般的维纳滤波器的表示：

$$W(w_1, w_2) = \frac{\hat{F}(w_1, w_2)}{G(w_1, w_2)} = \frac{W'(w_1, w_2)}{H(w_1, w_2)}$$

整理代入前面式子可得：

$$W(w_1, w_2) = \frac{1}{H(w_1, w_2)} \frac{|H(w_1, w_2)|^2}{|H(w_1, w_2)|^2 + S_\eta(w_1, w_2)/S_f(w_1, w_2)}$$

在频域采样便得到维纳滤波器的表达式：

$$\hat{F}(u, v) = \left[\frac{1}{H(u, v)} \frac{|H(u, v)|^2}{|H(u, v)|^2 + S_\eta(u, v)/S_f(u, v)} \right] G(u, v)$$

2. 约束最小二乘方滤波

对于约束最小二乘方滤波，期望是找一个最小准则函数 C，定义如下：

$$C = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} [\nabla^2 f(x, y)]^2$$

其约束为:

$$\|g - H\hat{f}\|^2 = \|\eta\|^2$$

这个最佳问题在频率域中的解决由下面的表达式给出:

$$\hat{F}(u, v) = \left[\frac{H^*(u, v)}{|H(u, v)|^2 + \gamma |P(u, v)|^2} \right] G(u, v)$$

其中, γ 是一个参数, 必须对它进行调整以满足约束条件, $p(u, v)$ 是函数:

$$P(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

适当填充 0 之后的傅里叶变换。

3.2 实现的结果

3.2.1 加噪声以及运动模糊

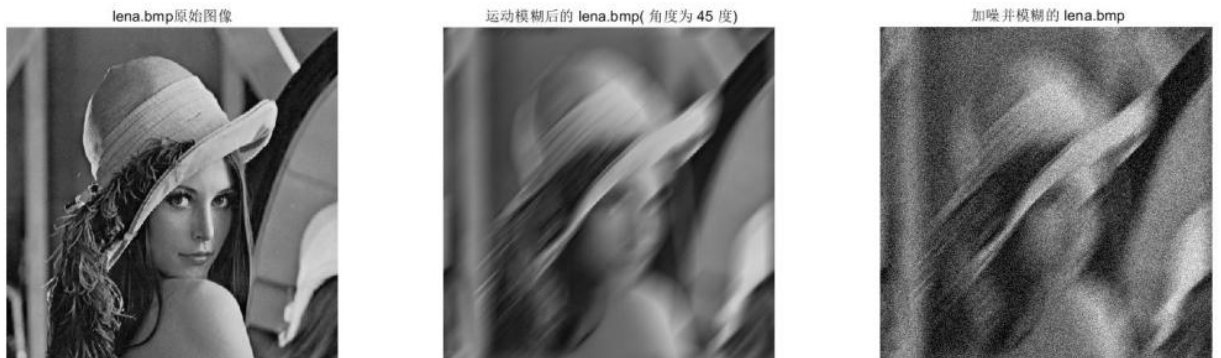


图 5 运动模糊以及加入噪声并模糊后的图像

3.2.2 运用维纳滤波器进行恢复

在设计维纳滤波器时, 发现 K 值的取值对效果有极大影响。经过实验, 对于自己编写的维纳滤波器, $K=0.002$ 效果最好。

运用不同 K 值的维纳滤波器进行滤波后的结果：

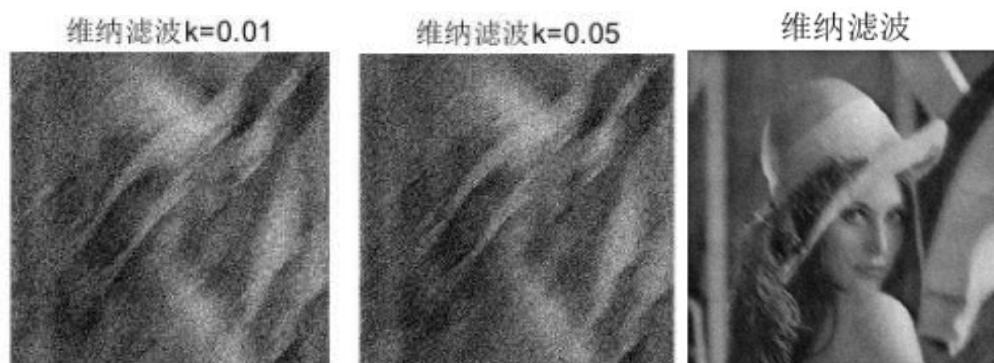


图 6 运用 $K=0.01, 0.05$ 以及 $K=0.002$ 进行维纳滤波的结果

3.2.3 运用最小二乘滤波器进行恢复

设计最小二乘滤波器时，从 0.2 开始，以 0.001 步长寻找最佳参数。

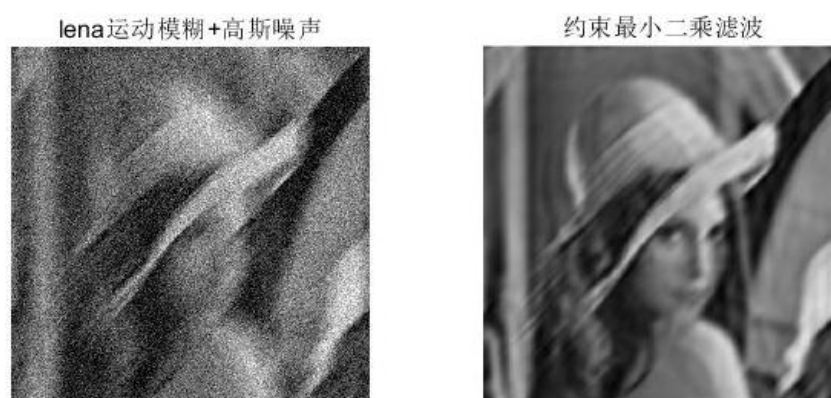


图 7 最小二乘法滤波器恢复的结果

3.3 结果分析

综合以上实验结果可以发现，最小二乘滤波方法效果更好一些，除噪效果更明显。而维纳滤波对噪声的处理效果欠佳。这是因为这里使用常数 K 替代了功率谱比，这一近似往往并不准确。在实验过程中也参考了 MATLAB 自带的加噪、维纳滤波、最小二乘滤波的函数，发现最小二乘滤波远自己设计的滤波器效果更好一些，在参数的选取上还需进一步研究。

四、参考文献

- [1] 冈萨雷斯. 数字图像处理(第三版)[M]. 北京: 电子工业出版社, 2017.
- [2] 冈萨雷斯. 数字图像处理(MATLAB 版)(第二版)[M]. 北京: 电子工业出版社, 2014
- [3]CSDN 博客:<https://blog.csdn.net/bluecol/article/details/46242355>