題目敘述

你經營一家報攤專賣一份日報,今天下午你得在報社關門前下訂單,告訴報社你要為明天訂購幾份報紙,隔天清晨你就會收到訂購的報紙並且付款。每份報紙的進貨價格是c元,賣給客人的零售價則是r元。每天會來多少個客人想買報紙是件不確定的事,也就是說單日需求量D是隨機的。根據過往經驗,你估計明天的單日需求量會落在0和N之間,並且符合如下的機率分佈:

$$\Pr(D=i)=p_i$$
 , $i=0,1,\ldots,N_\circ$

意思是說,有0 個人來買報紙的機率是 p_0 、有1 個人來買報紙的機率是 p_1 ,依此類推,最後是賣出N 份報紙的機率是 p_N 。你想要決定你的訂貨量 q^* 去最大化你的期望利潤(expected profit)

$$\pi(q) = r \mathbb{E} \Big[\min\{q, D\} \Big] - cq$$
,

其中 $\min\{q,D\}$ 是明天的銷售量(訂貨量和需求量中比較小的那個數字)、 $\mathbb{E}[\min\{q,D\}]$ 是預期銷售量(也就是銷售量取期 望值)、 $r\mathbb{E}\Big[\min\{q,D\}\Big]$ 是預期銷售收益、cq 則是必須付給報社的進貨成本。這是一個作業管理(operations management)領域的經典存貨問題(inventory problem),因為是很多存貨管理方法的基礎,被特別給予一個名稱叫「報童問題」(newsvendor problem)。

以下我們用一個例子來說明報童問題。假設進貨成本 c=2、零售價格 r=10,而且明天的單日需求量 SDS 符合如下的機率分佈:

i	$\Pr(D=x_i)$
0	0.06
1	0.15
2	0.22
3	0.22
4	0.17
5	0.10
6	0.05
7	0.02
8	0.01

也就是說有6%的機率沒有任何人想買報紙、15%的機率有一個人想要買,依此類推。你有九個可能的訂貨量(其實有無限多個,不過你應該不會想訂超過八份報紙吧?),讓我們來分析其中幾個:

- 1. 如果你不訂貨(q=0),顯然一份報紙也不會賣掉,零收益零成本,明天一定賺0元。
- 2. 如果你訂一份報紙(q=1),有 6% 的機率會賣掉零份(因為沒人想買),這種情況下你會賺 0-2=-2 元;有 94% 的機率會賣掉一份(只要有一個以上的人想買),這種情況下你會賺 10-2=8 元。你的預期利潤是 $(-2)\times0.06+8\times0.94=7.4$ 元。
- 3. 如果你訂兩份報紙(q=2),有 6% 的機率會賣掉零份(因為沒人想買),這種情況下你會賺 0-4=-4元;有 15% 的機率會賣掉一份(如果恰好有一個人想買),這種情況下你會賺 10-4=6元;有 79% 的機率會賣掉兩份(只要有兩個以上的人想買),這種情況下你會賺 20-4=16元。你的預期利潤是 $(-4)\times0.06+6\times0.15+16\times0.79=13.3$ 元。

顯然訂零份或訂一份都不是最好的,因為訂兩份比它們都好。事實上如果你繼續算下去,把 q=3,4,...,8 都算過一遍,會發現訂四份是最佳策略($q^*=4$)。當然如果環境改變(c 和 r 的值或 D 的分佈改變),結果就可能會不同。

在這題中,你將會被給定 $c \cdot r \cdot N \cdot p_0 \cdot p_1$ 直到 p_N 的值,以及一個已經被決定的訂貨量 q。你的任務是計算出此訂貨量 q之下能得到的預期利潤 $\pi(q)$ 無條件捨去到整數位。以上面的例子而言,如果訂貨量是 q=6,則預期利潤將是 17.1 (請自己試著算算看),因此請輸出 17。

題目敘述

在本題中,我們承接第一題的報童問題,但現在我們不想根據給定的一個存貨量去計算預期利潤;我們想要找出能最大化預期利潤的最佳訂貨量 q^* ,以及在此訂貨量之下能得到的預期利潤 $\pi(q^*)$ 無條件捨去到整數位。以第一題的例子而言,就是 4 跟 18(請自己試著算算看)。如果有數個訂貨量會導致一模一樣的預期利潤(是預期利潤一樣,不是無條件捨去之後一樣!),請用比較小的那一個當最佳訂貨量。

輸入輸出格式

讀入這些資料之後,你會計算最佳訂購量 q^* ,以及在此訂購量下的預期利潤無條件捨去到整數 $\lfloor \pi(q^*) \rfloor$,並且在兩者中間用一個空格隔開。