利用 LSM 對於永續可贖回債券之評價

評價標的

- 標的名稱 : P06 台壽 1
- 發行價格 : NT $ 100 (平價發行)
- 規則 :
  - 票面利率為 3.45%，10 年後調升為 4.45%
  - 發行 10 年後，每年付息日可決定是否以本金贖回
- 發行日期 : 2017/06/21
- 到期日 : 無到期日

評價方法與過程

A. 利率模擬

假設短期利率符合單因子 Hull White 模型，依照其定義，可知短期利率之隨機過程如下 :

$$dr(t) = [\,\theta(t) - k * r(t)\,]dt + \sigma dW(t)$$

參數&變數解釋 :

$r(t)$: 短期利率

k: 回歸速度，代表利率復歸長期水準之速度

$\theta(t)$: 短期利率之長期平均水準

σ : 短期利率之波動度

$dW(t)$: 維納過程

欲使用上述模型進行蒙地卡羅模擬，需要將$\theta(t)$藉由市場公債到期殖利率校準出市場遠期利率並得出，公式如下 :

$$f(0,t) = R(0,t) + t * \frac{\partial R(0,t)}{\partial t}$$

$$\theta(t) = \frac{\partial f(0,t)}{\partial t} + k * f(0,t) + \frac{\sigma^2[1-\exp(-kt)]}{2k}$$

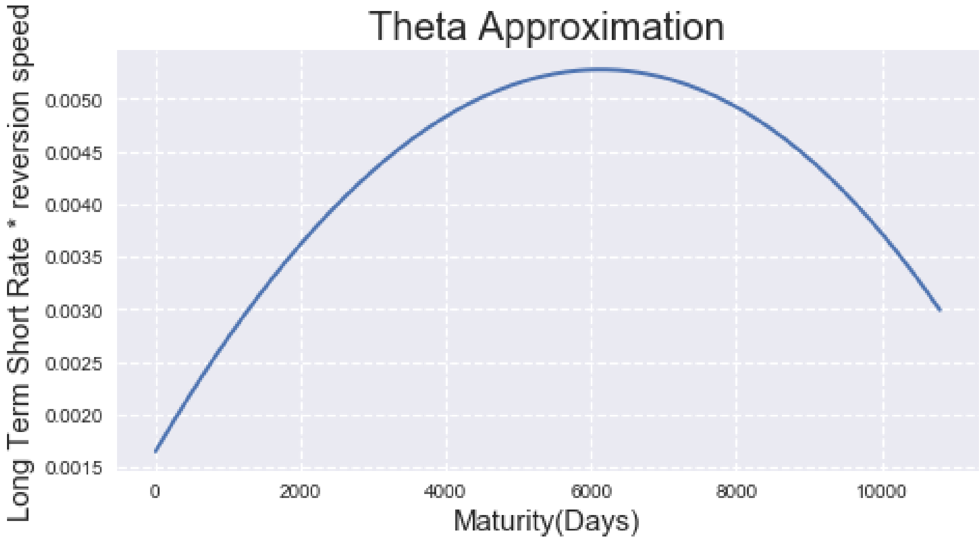
但由於公債到期殖利率曲線若使用插值法進行近似，不只處理上較為麻煩，且易發生結果不合理之狀況，因此在此簡易假設殖利率曲線服從以時間為變數的 Polynomial Regression :

$$R(0,t) = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \beta_3 t^3$$

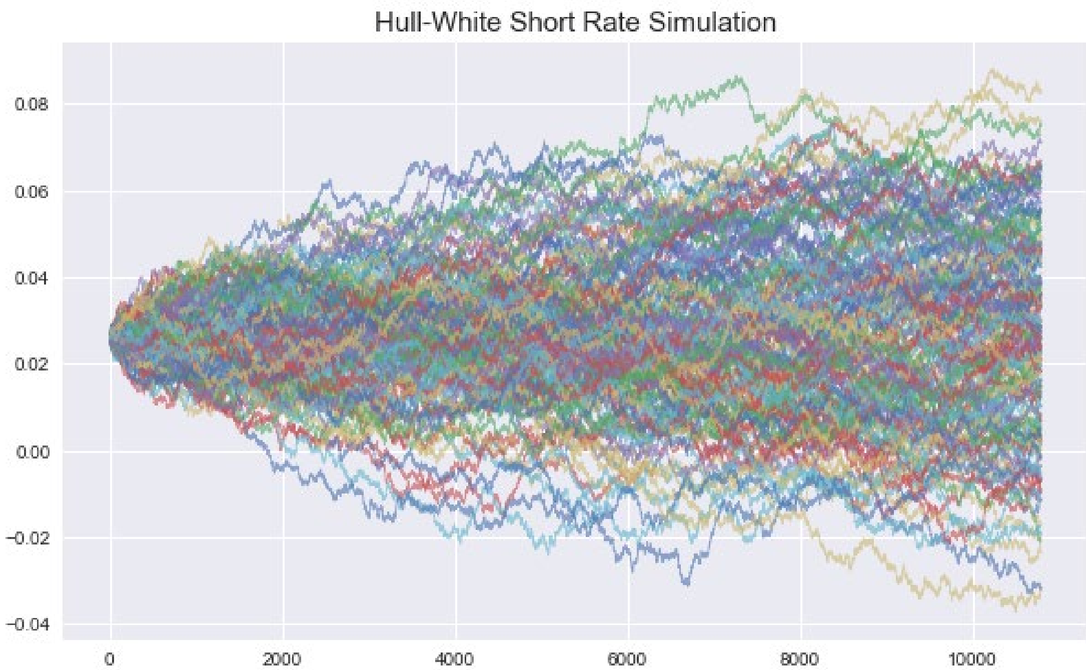
因此$\theta(t)$可以轉換為下式：

$$\theta(t)=\beta_0 k+2\beta_1(1+tk)+3\beta_2 t(2+tk)+4\beta_3 t^2(3+tk)+\frac{\sigma^2[1-\exp(-kt)]}{2k}$$

$\theta(t)$之近似結果



Hull White 利率模擬路徑



B. 違約機率估計

其中，λ之估計，利用該債券之 AA 評等對應之風險利率值與無風險利率之差

$$\exp\{(-r+\text{信用利差})*T\}=\{PD*(1-LGD)+(1-PD)*1\}*\exp(-rT)$$

$$PD=\frac{\{1-\exp(-\text{到期年限}*\text{信用利差})\}}{\text{可回收率}}$$

在可回收率為50%之假設下，利用 MSE 之 loss function，即可求出對應的理論違約參數 $\lambda = 0.00764393 \ldots 0$

C. LSM(最小平方蒙地卡羅法)

由於債券若具可贖回權利，相當於一般債券與美式選擇權之結合。因此採用 LSM 結合前述模擬出利率進行評價。下列為各條利率路徑對應單位時間之價值公式：

$$V(t) = coupon + \mathrm{e}^{-r(t+\Delta)\Delta}[\mathrm{e}^{-\lambda\Delta}V(t+\Delta) + \left(1-\mathrm{e}^{-\lambda\Delta}\right)\delta F]$$

變數解釋：

coupon：票面利率

Δ：時間間隔單位

$V(t)$：該時點對應價格

λ：違約估計參數

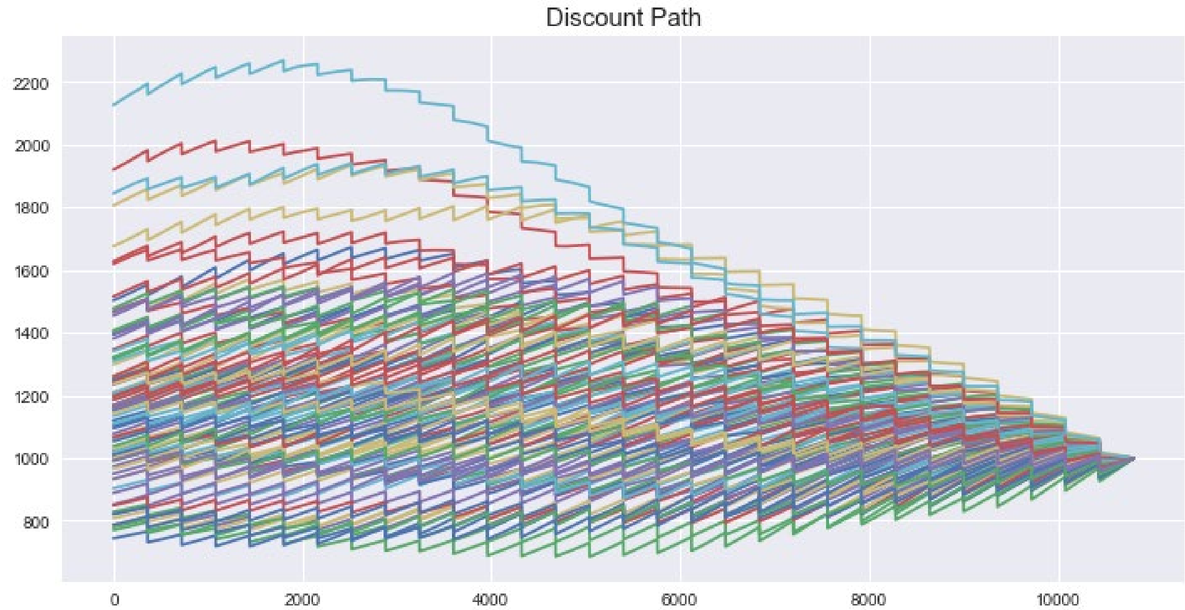
δ：若違約可回收之比率

F：面額

LSM 重點摘要：

當每次折現至可贖回之時間點，則需取出所有位於價內之債券價值，進行一次 2 次項的 Polynomial Regression，計算出債券之期望值，並與每條路徑之價格做比對，若期望價值>贖回價格，則以贖回價格取代之；若期望價值<贖回價格，則繼續正常折現

下圖為 LSM 方法下，折現之各路徑結果，只取 15 條

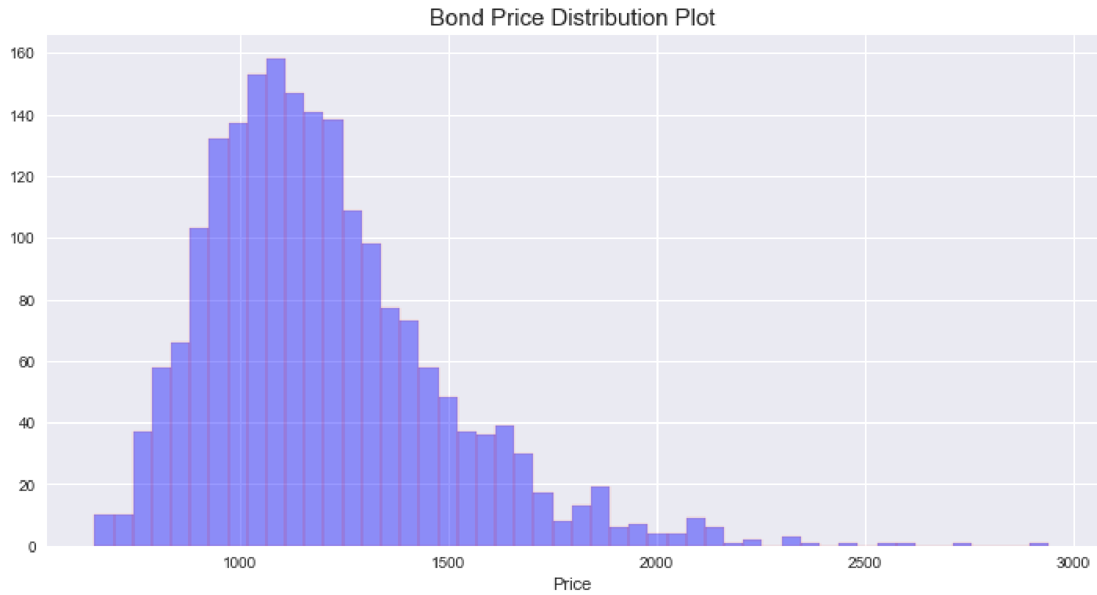


評價結果

在不考慮除信用風險以外的因素下，利用 LSM 求得之債券價格為：

平均數：1197.83456

中位數 : 1150.63559
價格分布標準差 : 284.83291



若要給出解釋，為何即便已考慮信用風險，債券依然溢價之原因，可將流動性利差因子納入考量。利用函數 fsolve 逼近求解得出流動性利差為 0.00988，則此時債券之評價結果將為平價發行。