Proceso de Ortogonalización de Gram-Schmidt

Oscar David Guzmán Barrera
20122167027
Análisis Funcional
Luis Oriol Mora Valbuena

Solución

Se realizara el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt, con el producto interno definido por:

$$\langle f, g\rangle := \int_{-1}^{1} f(t)g(t)t^2 dt$$

al conjunto de funciones $\left\{1, t, t^2, t^3, t^4, ...\right\}$. Realizamos este proceso de la siguiente manera:

- Definimos a $\mu_1 = 1$, entonces hallamos

$$\begin{aligned}\|\mu_1\|^2 &= \int_{-1}^{1} t^2 dt = \frac{t^3}{3}\Big|_{-1}^{1}\\ \|\mu_1\|^2 &= \frac{1}{3} - (-\frac{1}{3}) = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

asi encontramos que $\|\mu_1\| = \sqrt{\frac{2}{3}}$ y encontramos que nuestro elemento para la base esta dado como:

$$e_1 = \frac{\mu_1}{\|\mu_1\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

- Definimos a $\mu_2 = t - \langle t, e_1\rangle e_1$, entonces hallamos el producto interno como sigue

$$\begin{aligned}\langle t, e_1\rangle &= \int_{-1}^{1} t\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) t^2 dt = \sqrt{\frac{3}{2}}\int_{-1}^{1} tt^2 dt\\ &= \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\frac{t^4}{4}\Big|_{-1}^{1}\\ &= 0\end{aligned}$$

encontramos que $\mu_2 = t$ y su norma esta dada por

$$\begin{aligned}\|\mu_2\|^2 &= \int_{-1}^{1} (t)^2 t^2 dt = \frac{t^5}{5}\Big|_{-1}^{1}\\ \|\mu_2\|^2 &= \frac{1}{5} - \left(-\frac{1}{5}\right)\\ \|\mu_2\|^2 &= \frac{2}{5}\end{aligned}$$

asi encontramos que $\|\mu_2\| = \sqrt{\frac{2}{5}}$ y encontramos que nuestro elemento para la base esta dado como:

$$e_2 = \frac{\mu_2}{\|\mu_2\|} = \frac{t}{\sqrt{\frac{2}{5}}} = \frac{t\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$$

- Definimos a $\mu_3 = t^2 - \left\langle t^2, e_2 \right\rangle e_2 - \left\langle t^2, e_1 \right\rangle e_1$, entonces hallamos los productos internos:

$$\left\langle t^2, e_2 \right\rangle = \int_{-1}^{1} t^2 \left(\frac{t\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \right) t^2 dt = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \left(\frac{t^6}{6} \Big|_{-1}^{1} \right) = 0$$
$$\left\langle t^2, e_1 \right\rangle = \int_{-1}^{1} t^2 \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \right) t^2 dt = \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\frac{t^5}{5} \Big|_{-1}^{1} \right) = \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\frac{2}{5} \right)$$

de lo anterior encontramos que $\mu_3 = t^2 - \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\frac{2}{5}\right) \sqrt{\frac{3}{2}} = t^2 - \frac{3}{5}$ y su norma esta dada por

$$\|\mu_3\|^2 = \int_{-1}^{1} \left(t^2 - \frac{3}{5} \right)^2 t^2 dt = \frac{8}{175}$$

con lo cual podemos definir el otro elemento de la base como

$$e_3 = \frac{\mu_3}{\|\mu_3\|} = \frac{t^2 - \frac{3}{5}}{\sqrt{\frac{8}{175}}} = \frac{\sqrt{14}(5t^2 - 3)}{4}$$

- Para t^3, tenemos que

$$\mu_4 = t^3 - \left\langle t^3, e_3 \right\rangle e_3 - \left\langle t^3, e_2 \right\rangle e_2 - \left\langle t^3, e_1 \right\rangle e_1$$

así los productos internos están dados como

$$\left\langle t^3, e_3 \right\rangle = \int_{-1}^{1} t^3 \left(\frac{\sqrt{14}(5t^2 - 3)}{4} \right) t^2 dt = 0$$
$$\left\langle t^3, e_2 \right\rangle = \int_{-1}^{1} t^3 \left(\sqrt{\frac{5}{2}} t \right) t^2 dt = \frac{\sqrt{10}}{7}$$
$$\left\langle t^3, e_1 \right\rangle = \int_{-1}^{1} t^3 \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \right) t^2 dt = 0$$

con esto tenemos que $\mu_4 = t^3 - \frac{\sqrt{10}}{7} \left(\frac{\sqrt{5}t}{\sqrt{2}} \right) = t^3 - \frac{5t}{7}$ y su norma esta dada como

$$\|\mu_4\|^2 = \int_{-1}^{1} \left(t^3 - \frac{5t}{7} \right)^2 t^2 dt = \frac{8}{441}$$

por lo tanto el elemento de la base e_4 esta dado como

$$e_4 = \frac{\mu_4}{\|\mu_4\|} = \frac{t^3 - \frac{5t}{7}}{\sqrt{\frac{8}{441}}} = \frac{3\sqrt{2}(7t^3 - 5t)}{4}$$

- Para nuestro ultimo elemento t^4 tenemos que

$$\mu_5 = t^4 - \left\langle t^4, e_4 \right\rangle e_4 - \left\langle t^4, e_3 \right\rangle e_3 - \left\langle t^4, e_2 \right\rangle e_2 - \left\langle t^4, e_1 \right\rangle e_1$$

y sus respectivos productos internos están dados como

$$
\begin{aligned}
\left\langle t^4, e_4 \right\rangle &= \int_{-1}^{1} t^4 \left(\frac{3\sqrt{2}(7t^3-5t)}{4} \right) t^2 dt = 0 \\
\left\langle t^4, e_3 \right\rangle &= \int_{-1}^{1} t^4 \left(\frac{\sqrt{14}(5t^2-3)}{4} \right) t^2 dt = \frac{4\sqrt{2}}{9\sqrt{7}} \\
\left\langle t^4, e_2 \right\rangle &= \int_{-1}^{1} t^4 \left(\sqrt{\frac{5}{2}} t \right) t^2 dt = 0 \\
\left\langle t^4, e_1 \right\rangle &= \int_{-1}^{1} t^4 \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \right) t^2 dt = \frac{\sqrt{6}}{7}
\end{aligned}
$$

de lo anterior encontramos que $\mu_5 = t^4 - \frac{4\sqrt{2}}{9\sqrt{7}} \left(\frac{\sqrt{14}(5t^2-3)}{4} \right) - \frac{\sqrt{6}}{7} \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \right) = t^4 - \frac{2(5t^2-3)}{9} - \frac{3}{7}$ y su norma esta dada por

$$
\|\mu_5\|^2 = \int_{-1}^{1} \left(t^4 - \frac{2(5t^2-3)}{9} - \frac{3}{7} \right)^2 t^2 dt = \frac{128}{43659}
$$

y nuestro ultimo elemento de la base esta dado como:

$$
e_5 = \frac{\mu_5}{\|\mu_5\|} = \frac{t^4 - \frac{2(5t^2-3)}{9} - \frac{3}{7}}{\sqrt{\frac{128}{43659}}} = \frac{\sqrt{22}(63t^4 - 70t^2 + 15)}{16}
$$

De esta manera tenemos que para nuestra base inicial $\left\{1, t, t^2, t^3, t^4\right\}$, hallamos la base orto-normal por el proceso ortogonalización de Gram-Schmidt, esta es $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, donde cada uno esta definido por:

$$
\begin{aligned}
e_1 &= \sqrt{\frac{3}{2}} \\
e_2 &= \frac{t\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \\
e_3 &= \frac{\sqrt{14}(5t^2-3)}{4} \\
e_4 &= \frac{3\sqrt{2}(7t^3-5t)}{4} \\
e_5 &= \frac{\sqrt{22}(63t^4-70t^2+15)}{16}
\end{aligned}
$$

Las graficas de estas funciones esta dada por