Tecnológico de Monterrey
Campus Hidalgo

Proyecto final

Erhart Fabian Castillo Castellanos A01274089
Kevin Israel Guzmán Jiménez A01275139
Fernando Garrido Del Valle A01273241
José Angel Olvera López A01275136

Probabilidad y estadística
Ronald Richard Jiménez

6 de mayo del 2019

Índice

1. Primer ejercicio

Un fabricante de automóviles se preocupa por una falla en el mecanismo de freno de un modelo específico. En raras ocasiones la falla puede causar una catástrofe al manejarlo a alta velocidad. La distribución del número de automóviles por año que experimentará la catástrofe es una variable aleatoria de Poisson con λ= 5.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que, a lo sumo, 3 automóviles por año de ese modelo específico sufran una catástrofe?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que más de un automóvil por año experimente una catástrofe?[1]

1.1. Antecedentes

La función de densidad de probabilidad para x es:

$$P\left(x\right) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \tag{1}$$

1.2. Procedimiento

a) Determinaremos la probabilidad de que al menos tres carros experimenten una catástrofe:

$$P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) \tag{2}$$

$$= p(0; 5) + p(1; 5) + p(2; 5) + p(3; 5) \tag{3}$$

$$= \frac{e^{-5}(5)^0}{0!} + \frac{e^{-5}(5)^0}{1!} + \frac{e^{-5}(5)^0}{2!} + \frac{e^{-5}(5)^0}{3!} \tag{4}$$

$$= 0.006738 + 0.03369 + 0.084224 + 0.140374 \tag{5}$$

$$=\mathbf{0.2650} \tag{6}$$

b) Ya que no se puede calcular probabilidades $P(X \geq x)$, solamente $P(X \leq x)$ y asumiendo que la probabilidad total del evento es 1 entonces:

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) \tag{7}$$

$$= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \tag{8}$$

$$= 1 - p(0; 5) + p(1; 5) \tag{9}$$

$$= 1 - \frac{e^{-5}(5)^0}{0!} - \frac{e^{-5}(5)^1}{1!} \tag{10}$$

$$= 1 - 0.006738 - 0.03369 \tag{11}$$

$$=\mathbf{0.9596} \tag{12}$$

2. Segundo ejercicio

Denote con p(y) la función de probabilidad asociada con una variable aleatoria de Poisson con media λ.
a) Demuestre que la relación entre probabilidades sucesivas satisface la igualdad $\frac{p(y)}{p(y-1)} = \frac{\lambda}{y}$, para $y = 1, 2, \ldots$
b) ¿Para qué valores de y es $p(y) > p(y-1)$?
c) Observe que el resultado del inciso a implica que las probabilidades de Poisson aumentan por un tiempo cuando y aumenta y disminuyen de ahí en adelante. Demuestre que $p(y)$ es maximizada cuando $y =$ al máximo entero menor o igual que λ.[2]

2.1. Antecedentes

La función de densidad de probabilidad para y es:

$$P\left(X=y\right)=p(y)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{y}}{y!} \tag{13}$$

2.2. Procedimientos

a) Sustituyendo y con $y-1$:

$$P\left(X=y-1\right)=p(y-1)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{y-1}}{(y-1)!} \tag{14}$$

La razón entre las ecuaciones (13) y (14) es:

$$\frac{p(y)}{p(y-1)}=\frac{\frac{e^{-\lambda}\lambda^{y}}{y!}}{\frac{e^{-\lambda}\lambda^{y-1}}{(y-1)!}} \tag{15}$$

Simplificando la ecuación (15) se obtiene:

$$\frac{p(y)}{p(y-1)}=\frac{\frac{\lambda}{y}}{\frac{1}{1}}=\frac{\lambda}{\mathbf{y}} \tag{16}$$

b) Se puede decir que $p(y)>p(y-1)$ sucede cuando:

$$\frac{p(y)}{p(y-1)}>0 \tag{17}$$

Usando la ecuación (16):

$$\frac{\lambda}{y}>0 \tag{18}$$

Al ser $y>0$, se obtiene:

$$\lambda>y \tag{19}$$

Entonces los valores de y menores que λ satisfacen la desigualdad.

c) Sabemos que $p(y)$ incrementa si $p(y)\geq p(y-1)$ y $p(y-1)<p(y)$, entonces la posición cuando el incremento pasa al decremento se cumple cuando:

$$\frac{p(y)}{p(y-1)}\geq 0 \;\; y \;\; \frac{p(y+1)}{p(y)}<0 \tag{20}$$

Usando la ecuación (16):

$$\frac{\lambda}{y}\geq 0 \;\; y \;\; \frac{\lambda}{y+1}<0 \tag{21}$$

Entonces se obtiene:

$$y\leq\lambda \;\; y \;\; (y+1)>\lambda \tag{22}$$

Entonces y es el mayor entero menor o igual que λ.

3. Tercer ejercicio

Supóngase que se conoce que normalmente el 10 % de la producción en un proceso de producción está defectuosa. Un inspector de calidad extrae una muestra de 50 piezas terminadas y las inspecciona. Este inspector desea saber cual es la probabilidad de que en el lote de 50 hayan
a) Exactamente tres (3) piezas con defectos.
b) A lo más dos (2) piezas defectuosas.
c) Más de tres (3) piezas con defectos. [3]

3.1. Antecedentes

La función de densidad de probabilidad es:

$$b(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \tag{23}$$

3.2. Procedimientos

En este caso el numero de muestra seria 50

$$n = 50 \tag{24}$$

Y la probabilidad de éxito

$$p = 0.10 \tag{25}$$

a) Por lo cual la formula en el inciso "a" quedaría así

$$p(x = 3) = b(3; 50, 0.10) = \binom{50}{0.10} p^3 (1 - 0.10)^{50-0.10} \tag{26}$$

Por lo tanto

$$b(3; 50, 0.10) = 0.1385651 \tag{27}$$

b) En el inciso "b" se esta pidiendo de forma acumulativa por lo cual

$$p(x \leq 2) = b(x \leq 2; 50, 0.10) = p(0) + p(1) + p(2) \tag{28}$$

$$p(0) = 0.005153775 \tag{29}$$

$$p(1) = 0.02863208 \tag{30}$$

$$p(2) = 0.0779429 \tag{31}$$

Por lo tanto

$$p(x \leq 2) = 0.005153775 + 0.02863208 + 0.0779429 \tag{32}$$

$$p(x \leq 2) = 0.1117288 \tag{33}$$

c) En el inciso "c" al pedir x $\geq$ 3 se representa de la siguiente forma

$$p(x > 3) = b(x > 3; 50, 0.10) = 1 - p(x \leq 3) \tag{34}$$

Lo que es igual a

$$p(x > 3) = 1 - [p(0) + p(1) + p(2) + p(3)] \tag{35}$$

Por lo tanto

$$p(x > 3) = 1 - [0.005153775 + 0.02863208 + 0.0779429 + 0.1385651] \tag{36}$$

$$p(x > 3) = 1 - [0.2502939] \tag{37}$$

$$p(x > 3) = 0.7497061 \tag{38}$$

4. Cuarto ejercicio

Un experto en la materia sabe que el precio de una determinada vivienda está comprendido entre 220 y 232 miles de euros; también sabe que el precio al cual será más probablemente vendida se encuentra en torno a los 224 miles de euros. Suponiendo que la variable aleatoria X, que representa el valor de mercado de la vivienda, tiene la función de densidad:

$$f(x) = K(x-220)^p(232-x)^q \tag{39}$$

se pide:

- Encontrar los valores de p y q tales que $p+q=3$.
- Determinar el valor de K.
- Calcular el valor esperado de X.[4]

4.1. Procedimiento

a)

$$lnf(x) = ln\ K + p\ ln(x-220) + q\ ln(232-x) \tag{40}$$

Derivando respecto a x e igualando a 0 se tiene:

$$\frac{dlnf\ (x)}{dx} = \frac{p}{x-220} - \frac{q}{232-x} \tag{41}$$

Por tanto,

$$\frac{p}{x-220} - \frac{q}{232-x} = 0 \Leftrightarrow \frac{p}{4} - \frac{q}{8} = 0 \Leftrightarrow q = 2p \tag{42}$$

Si ahora se tiene en cuenta que $p+q=3$, podemos determinar los valores p y q resolviendo el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{q=2p} \\ \text{p+q=3} \end{array} \right\}$$

Cuya solución es $p=1$ y $q=2$.
b) Sustituidos p y q por sus valores calculados en el apartado a) se tiene que:

$$\int_{220}^{232} f(x) = K \int_{220}^{232} (x-220)(232-x)^2\ dx = 1 \tag{43}$$

Por tanto:

$$K = \frac{1}{\int_{220}^{232} (x-220)(232-x)^2\ dx} \tag{44}$$

Por otra parte:

$$(x-220)(232-x)^2 = (x-220)(x^2-464x+53824) = x^3-684x^2+155944x-11841280 \tag{45}$$

Con lo cual:

$$\int_{220}^{232} (x-220)(232-x)^2 dx = \int_{220}^{232} (x^3-684x^2+155904x-11841280)dx \tag{46}$$

$$= \left(\frac{232^4}{4} - \frac{684\cdot 232^3}{3} + \frac{155904\cdot 232^2}{2} - 11841280\cdot 232\right) \tag{47}$$

$$-\Big(\frac{220^4}{4}-\frac{684\cdot 220^3}{3}+\frac{155904\cdot 220^2}{2}-11841280\cdot 220\Big)=1728 \tag{48}$$

Por tanto, $K=\frac{1}{1728}$
c) $E(x)=$

$$\frac{1}{1728}\int_{220}^{232} x(x^3-684x^2+155904x-11841280)dx \tag{49}$$

$$=\frac{1}{1728}\Big(\frac{232^5}{5}-\frac{684\cdot 232^4}{4}+\frac{155904\cdot 232^3}{3}-\frac{11841280\cdot 232^2}{2}\Big) \tag{50}$$

$$-\frac{1}{1728}\Big(\frac{220^5}{5}-\frac{684\cdot 220^4}{4}+\frac{155904\cdot 220^3}{3}-\frac{11841280\cdot 220^2}{2}\Big)=224.8 \tag{51}$$

5. Quinto ejercicio

Verifique que $Var(x)=\frac{\alpha}{\lambda^2}$; Cuando x es una variable aleatoria con distribución gamma con parámetros α y λ.[5]

5.1. Antecedentes

Función Gamma:

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx \tag{52}$$

Una propiedad de la función Gamma, cuando $\alpha>1$:

$$\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1) \tag{53}$$

Función de densidad de probabilidad Gamma con parámetros α y λ cuando $x\geq 0$, 0 de lo contrario:

$$f(x)=\frac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \tag{54}$$

La media de una variable aleatoria con distribución Gamma es:

$$E(X)=\frac{\alpha}{\lambda} \tag{55}$$

5.2. Procedimientos

La varianza se calcula con $E(X^2)-E(X)^2$, como $E(X)$ ya es conocido, solo nos resta calcular $E(X^2)$, la cual viene dada por:

$$E(X^2)=\int_0^\infty x^2 f(x)dx \tag{56}$$

$$=\int_0^\infty x^2\frac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}dx \tag{57}$$

$$=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty x^{\alpha+1}e^{-\lambda x}dx \tag{58}$$

Para resolver la integral anterior se realiza la sustitución: $v = \lambda x$ y $dv = \lambda dx$

$$= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \frac{v^{\alpha+1}}{\lambda^{\alpha+1}} e^{-v} \frac{dv}{\lambda} \tag{59}$$

$$= \frac{\lambda^\alpha}{\lambda^{\alpha+2}\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty v^{\alpha+1} e^{-v} dv \tag{60}$$

Sustituyendo la integral por la función Gamma antes mencionada:

$$= \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\lambda^2\Gamma(\alpha)} \tag{61}$$

Haciendo uso de la propiedad de la función Gamma mencionada en los antecedentes de este ejercicio:

$$\Gamma(\alpha+2) = (\alpha+1)\Gamma(\alpha+1) = (\alpha+1)\alpha\Gamma(\alpha) \tag{62}$$

Por lo tanto:

$$E(X^2) = \frac{(\alpha+1)\alpha}{\lambda^2} \tag{63}$$

Tomando el valor de $E(X)$ dado en los antecedentes, se encuentra que:

$$Var(X) = \frac{(\alpha+1)\alpha}{\lambda^2} - \frac{\alpha^2}{\lambda^2} \tag{64}$$

$$= \frac{\alpha^2+\alpha}{\lambda^2} - \frac{\alpha^2}{\lambda^2} \tag{65}$$

$$= \frac{\alpha}{\lambda^2} \tag{66}$$

Referencias

[1] Walpole Ronald, Myers Raymons, Myers Sharon, and Ye Keying. *Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias*, page 165. Pearson Educación, 2012.

[2] Weckerly Dennis, Mendenhall William, and Scheaffer Richard. *Estadística matemática con aplicaciones*, pages 137–138. CENGAGE Learning, 2010.

[3] Marcos Moya Navarro y Natalia Robles Obando. *Probabilidad y estadística: un enfoque teórico-práctico*, pages 186–188. Instituto Tecnológico de Costa Rica, 2010.

[4] Federico Palacios González. *Ejercicios resueltos de inferencia estadística y del modelo lineal simple*, pages 5–7. Delta Publicaciones, 2004.

[5] Sheldon Ross. *A first course in probability*, page 228. Pearson, 2011.