

6.4. Introducción al Análisis de Series Temporales

Traducción: Rolando Lemus Gómez

Los métodos de series de tiempo toman en cuenta la estructura interna posible en los datos

Los datos de series de tiempo a menudo arriban cuando se monitorean procesos industriales o se rastrean métricas de las compañías comerciales. La diferencia esencial entre modelación de datos vía métodos de series temporales o usando los métodos de monitoreo de procesos es la siguiente:

El análisis de series temporales considera el hecho que los datos tomados en el tiempo tienen una estructura interna (tal como autocorrelación, tendencia o variación estacional) que debería ser considerada.

Esta sección dará un breve visión global de algunas de las técnicas usadas más ampliamente en el rico y rápidamente campo creciente del análisis y modelación de series temporales.

Contenidos de esta sección

Las áreas cubiertas son:

1. Definiciones, aplicaciones y técnicas
2. ¿Qué son las Técnicas de Medias Móviles y Suavizado?
 1. Media Móvil Simple
 2. Media Móvil Centrada
3. ¿Qué es el Suavizado Exponencial?
 1. Suavizado Exponencial Simple
 2. Pronóstico con Suavizado Exponencial Simple
 3. Suavizado Exponencial Doble
 4. Pronóstico con Suavizado Exponencial Doble
 5. Suavizado Exponencial Triple
 6. Ejemplo de Suavizado Exponencial Triple
 7. Resumen de Suavizado Exponencial

6.4.1. Definiciones, Aplicaciones y Técnicas

Definición

Definición de Series Temporales: Una secuencia ordenada de valores de una variable en intervalos de tiempo igualmente espaciados.

Las series temporales ocurren frecuentemente cuando miramos datos industriales

Aplicaciones: El uso de las series temporales es doble:

- Obtener un entendimiento de las fuerzas subyacentes y estructura que produce los datos observados.
- Ajustar un modelo y proceder a pronosticar, monitorear e incluso retroalimentar y mejorar el control.

El análisis de series temporales es usado en muchas aplicaciones tales como:

- Pronósticos Económicos
- Pronósticos de Ventas
- Análisis Presupuestario
- Análisis de Inventario de Mercados
- Proyecciones de Rendimiento
- Control y Calidad de Procesos
- Estudios de Inventarios
- Proyecciones de Carga de Trabajo
- Estudios de Utilidad
- Análisis de Censos

Y muchas, muchas más...

Hay muchos métodos usados para modelar y pronosticar series temporales

Técnicas: El ajuste de modelos de series temporales puede ser una tarea ambiciosa. Hay muchos métodos de ajuste de modelos incluyendo los siguientes:

- [Modelos Box-Jenkins ARIMA](#)
- [Modelos Multivariantes Box-Jenkins](#)
- [Suavizado Exponencial Holt-Winters \(simple, doble, triple\)](#)

Las preferencias y aplicaciones de los usuarios decidirán la selección de la técnica apropiada. Más allá del dominio e intención de los autores de este manual de cubrir todos estos métodos. La visión presentada aquí comenzará

mirando algunas técnicas básicas de suavizado:

- Métodos de Promedios
- Técnicas de Suavizado Exponencial.

6.4.2. ¿Qué son las Técnicas Medias Móviles o Suavizado?

El suavizado de datos remueve variaciones aleatorias y muestra las componentes tendencias y ciclo

Inherente en la recolección de datos tomados en el tiempo está alguna forma de variación aleatoria. Existen métodos para reducir el efecto debido a variación aleatoria. Una técnica usada a menudo en la industria es el “suavizado”. Esta técnica, cuando es aplicada apropiadamente, revela más claramente las componentes subyacentes de tendencia, estacional y cíclica.

Hay dos grupos distintos de métodos de suavizado

- Métodos de Promedios
- Métodos de Suavizado Exponencial

Tomar el promedio es la manera más simple de suavizar los datos

Primero investigaremos algunos métodos de promedios, tales como el promedio “simple” de todos los datos pasados.

Un gerente de un almacén quiere conocer cuántas unidades entrega un típico proveedor en \$1000. El/ella toma una muestra de 12 proveedores, aleatoriamente, obteniendo los resultados siguiente:

Proveedor	Cantidad	Proveedor	Cantidad
1	9	7	11
2	8	8	7
3	9	9	13
4	12	10	9
5	9	11	11
6	12	12	10

Proveedor	Cantidad	Proveedor	Cantidad
1	9	7	11
2	8	8	7
3	9	9	13
4	12	10	9
5	9	11	11
6	12	12	10

La media o promedio calculada de los datos = 10. El gerente decide usar esta como la estimación para el gasto de un proveedor típico.

¿Es esta una buena o mala estimación?

El error cuadrático medio es una manera de juzgar que tan bueno es el modelo

Calculamos el "error cuadrático medio":

- El "error" = cantidad verdadera gastada menos la cantidad estimada.
- El "cuadrado del error" es el error de arriba, al cuadrado.
- El "SSE" es la suma de los errores al cuadrado.
- El "MSE" es la media de de los errores al cuadrado.

MSE resulta para el ejemplo

Los resultados son:

Error y Errores al Cuadrado

La estimación = 10

	Proveedor \$	Error	Error Cuadrado
1	9	-1	1
2	8	-2	4
3	9	-1	1
4	12	2	4
5	9	-1	1
6	12	2	4
7	11	1	1
8	7	-3	9
9	13	3	9
10	9	-1	1
11	11	1	1
12	10	0	0

El SSE = 36 y el MSE = $36/12 = 3$.

Tabla resultados MSE para el ejemplo usando estimaciones diferentes

¿Así que tan Buena fue la estimación de la cantidad gastada para cada proveedor? Comparemos la estimación (10) con las estimaciones siguientes: 7, 9, y 12. Eso es, estimamos que cada proveedor gastaría \$7, o \$9 o \$12.

Efectuando los mismos cálculos llegamos a:

Estimación 7	9	10	12	
SSE	144	48	36	84
MSE	12	4	3	7

El estimador con el más pequeño MSE es el mejor. Puede demostrarse matemáticamente que el estimador que minimiza la MSE para un conjunto de datos aleatorios es la media.

La tabla muestra los errores al cuadrado para la media de los datos de la muestra

Luego examinaremos la media para ver que tan bien predice el ingreso neto en el tiempo.

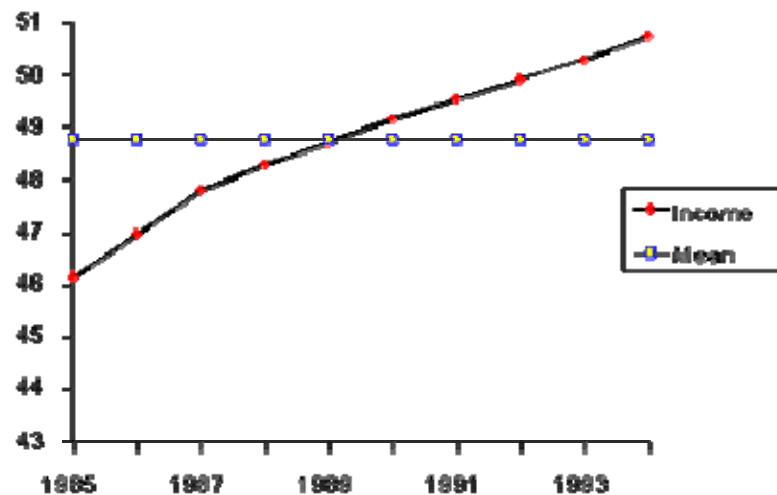
La tabla siguiente da el ingreso antes del impuesto de un fabricante de PC entre 1985 y 1994.

Año	\$ (millones)	Media	Error	Error Cuadrado
1985	46.163	48.776	-2.613	6.828
1986	46.998	48.776	-1.778	3.161
1987	47.816	48.776	-0.960	0.922
1988	48.311	48.776	-0.465	0.216
1989	48.758	48.776	-0.018	0.000
1990	49.164	48.776	0.388	0.151
1991	49.548	48.776	0.772	0.596
1992	48.915	48.776	1.139	1.297
1993	50.315	48.776	1.539	2.369
1994	50.768	48.776	1.992	3.968

El MSE = 1.9508.

La media no es un buen estimador cuando hay tendencias

La pregunta que surge: ¿podemos usar la media para pronosticar el ingreso si sospechamos una tendencia? Observando el gráfico de abajo se muestra claramente que no deberíamos hacer esto.



*El promedio
pondera
todas las
observaciones
pasadas
igualmente*

En resumen, declaramos eso

1. La media “simple” o promedio de todas las observaciones pasadas es solamente una estimación para pronosticar cuando no hay tendencias. Si hay tendencias, usar diferentes estimaciones que tomen en consideración la tendencia.
2. La media “pondera” todas las observaciones pasadas igualmente. Por ejemplo, la media de los valores 3, 4, 5 es 4. Sabemos, por supuesto, que un promedio es calculada al agregar todas los valores y dividir la suma por el número de valores. Otra manera de calcular la media es agregar cada valor dividido por el número de valores, o

$$3/3 + 4/3 + 5/3 = 1 + 1.3333 + 1.6667 = 4.$$

El multiplicador $1/3$ es llamado ponderación. En general:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \left(\frac{1}{n}\right) x_1 + \left(\frac{1}{n}\right) x_2 + \dots + \left(\frac{1}{n}\right) x_n$$

Las $\left(\frac{1}{n}\right)$ son las ponderaciones y por supuesto ellas suman 1.

6.4.2.1. Promedio Móvil Simple

Tomar un promedio móvil es un proceso de suavizado

Una manera alternativa para resumir los datos pasados es calcular la media de conjuntos sucesivos más pequeños de números de datos pasados como sigue:

Reclamando el conjunto de números 9, 8, 9, 12, 9, 12, 11, 7, 13, 9, 11, 10 los cuales fueron la cantidad dólares de [12 proveedores](#) seleccionados aleatoriamente. Denotemos M el conjunto, el tamaño del conjunto más pequeño es igual a 3. Luego el promedio de los 3 primeros números es: $(9 + 8 + 9) / 3 = 8.667$.

Esto es llamado “suavizado” (i.e., alguna forma de promedio). Este proceso de suavizado es continuado avanzando un periodo y calculando el promedio siguiente de tres números, eliminando el primer número.

Ejemplo de promedio móvil

La tabla siguiente resume el proceso, el cual es referido como Promedio Móvil. La expresión general para el promedio móvil es

$$M_t = [X_t + X_{t-1} + \dots + X_{t-N+1}] / N$$

Resultados de Promedio Móvil

	Proveedores \$	MA	Error Cuadrado del Error
1	9		
2	8		
3	9	8.667	0.333 0.111
4	12	9.667	2.333 5.444
5	9	10.000	-1.000 1.000
6	12	11.000	1.000 1.000
7	11	10.667	0.333 0.111
8	7	10.000	-3.000 9.000
9	13	10.333	2.667 7.111
10	9	9.667	-0.667 0.444
11	11	11.000	0 0
12	10	10.000	0 0

El MSE = 2.018 comparado a 3 en el caso previo.

6.4.2.2. Promedio Móvil Centrado

Cuando calculamos un promedio móvil corriente, colocar el promedio en el periodo de tiempo medio hace sentido

En el [ejemplo previo](#) calculamos el promedio de los primeros tres periodos de tiempo y es colocado al lado del periodo 3. Deberíamos colocar el promedio en medio del intervalo de tiempo de tres periodos, es decir, al lado del periodo 2. Esto trabaja bien con periodos de tiempo impares, pero no es bueno para periodos de tiempo par. Así ¿dónde colocaríamos la primera media móvil cuando $M = 4$?

Técnicamente, los promedios móviles caería en $t = 2.5, 3.5, \dots$

Para evitar este problema suavizamos las medias móviles usando $M = 2$. **Luego suavizamos los valores suavizados!**

Si promediamos un número par de términos, necesitamos suavizar los valores suavizados

La siguiente tabla muestra los resultados usando $M = 4$.

Pasos Provisionales			
Periodo Valor MA Centrada			
1	9		
1.5			
2	8		
2.5		9.5	
3	9		9.5
3.5		9.5	
4	12		10.0
4.5		10.5	
5	9		10.750
5.5		11.0	
6	12		
6.5			
7	9		

Tabla final

Esta es la tabla final:

Periodo Valor MA Centrada

1	9	
2	8	
3	9	9.5
4	12	10.0
5	9	10.75
6	12	
7	11	

Doble Promedio Móvil para un Proceso de Tendencia Lineal

Los promedios móviles todavía son no hábiles para manejar tendencias significativas cuando se hacen pronósticos

Desafortunadamente, ni la media de todos los datos ni el promedio móvil de los más recientes M valores, cuando son usados como pronósticos para el siguiente periodo, pueden cubrir con una tendencia significativa.

Allí existe una variación sobre el procedimiento MA que a menudo no es un trabajo mejor de tendencia manejable. Es llamada Doble Promedio Móvil para un Proceso de Tendencia Lineal. Calcula unos segundos promedios móviles de los promedios móviles originales, usando los mismos valores de M . Tan pronto como ambos promedios móviles simple y doble estan disponibles, una rutina de cálculo usa estos promedios para calcular un intercepto y pendiente, y luego pronostica uno o más periodos hacia adelante.

6.4.3. ¿Qué es Suavizado Exponencial?

Esquemas de suavizado Exponencial ponderan las observaciones pasadas usando decrecimiento exponencial

Este es un esquema muy popular para producir una serie temporal suavizada. Mientras que en los Promedios Móviles Simples las observaciones pasadas son ponderadas igualmente, el Suavizado Exponencial asigna ponderaciones exponenciales decrecientes como la observación envejece.

En otras palabras, a las observaciones recientes son dadas más ponderación relativamente en pronósticos que las observaciones más viejas.

En el caso de los promedios móviles, las ponderaciones asignadas a las observaciones son las mismas y son iguales a $1/N$. En el suavizado exponencial, sin embargo, hay uno o más *parámetros de suavizado* a ser determinados (o estimados) y estas selecciones determinan las ponderaciones asignadas a las observaciones.

Suavizado Exponencial [Simple](#), [doble](#) y [triple](#) será descrito en esta sección.

6.4.3.1. Suavizado Exponencial Simple

El suavizado exponencial simple pondera las observaciones pasadas con ponderaciones decrecientes exponencialmente para pronosticar valores futuros

Este esquema de suavizado comienza por colocar S_2 a y_1 , donde S_t posiciona para la observación suavizada or EWMA, y “ y ” posiciona para la observación original. El subíndice se refiere a los periodos de tiempo, 1, 2, ..., n . Para el tercer periodo, $S_3 = \alpha y_2 + (1-\alpha) S_2$; y así sucesivamente. No hay S_1 ; la serie suavizada comienza con la versión suavizada de la segunda observación.

Para cualquier periodo de tiempo t , el valor suavizado S_t es encontrado al calcular

$$S_t = \alpha y_{t-1} + (1-\alpha) S_{t-1} \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad t \geq 3$$

Esta es la *ecuación básica del suavizado exponencial* y la constante o parámetro α es llamada la constante de suavizado.

Nota: Hay una aproximación alternativa para el suavizado exponencial que reemplaza y_{t-1} en la ecuación básica con y_t , la observación actual. Esa formulación, debida a Roberts (1959), es descrita en la sección sobre [cuadros de control EWMA](#). La formulación aquí sigue Hunter (1986).

Poniendo el primer EWMA

El primer pronóstico es muy importante

El EWMA inicial juega un papel importante en el cálculo de todos los EWMA subsecuentes. Poniendo S_2 a y_1 es un método de inicialización. Otra manera es ponerlo al objetivo del proceso.

Todavía otra posibilidad sería promediar las primeras cuatro o cinco observaciones.

Y puede ser mostrado que el más pequeño valor de α , el más importante es la selección del EWMA inicial. El usuario sería sabio al probar unos métodos, (asumiendo que el software los tiene disponible) antes de finalizar la situación.

¿Por qué es llamado "Exponencial"?

Extender Ecuación básica

Expandiendo la ecuación básica pero sustituyendo primero para S_{t-1} en la ecuación básica para obtener

$$\begin{aligned} S_t &= \alpha y_{t-1} + (1-\alpha) [\alpha y_{t-2} + (1-\alpha) S_{t-2}] \\ &= \alpha y_{t-1} + \alpha(1-\alpha) y_{t-2} + (1-\alpha)^2 S_{t-2} \end{aligned}$$

Resumir fórmula para la ecuación básica

Al sustituir para S_{t-2} , luego para S_{t-3} , y etc., hasta que alcanzamos S_2 (el cual es justamente y_1), puede ser mostrado que la ecuación expandida puede ser escrita como:

$$S_t = \alpha \sum_{i=1}^{t-1} (1-\alpha)^{i-1} y_{t-i} + (1-\alpha)^{t-1} S_2, t \geq 2$$

Ecuación expandida para S_5

Por ejemplo, la ecuación expandida para el valor suavizado S_5 es:

$$S_5 = \alpha [(1-\alpha)^0 y_{5-1} + (1-\alpha)^1 y_{5-2} + (1-\alpha)^2 y_{5-3}] + (1-\alpha)^3 S_2$$

Ilustrar la conducta exponencial

Esto ilustra la conducta exponencial. Las ponderaciones, $\alpha(1-\alpha)^t$ decrecen geométricamente, y su suma es la unidad como se muestra abajo, usando una propiedad de series geométricas:

$$\alpha \sum_{t=0}^{\infty} (1-\alpha)^t = \alpha \left[\frac{1-(1-\alpha)^t}{1-(1-\alpha)} \right] = 1-(1-\alpha)^t$$

Procedente de la fórmula vemos que el término de la sumatoria muestra que la contribución del valor suavizado S_t llega ser menos en cada periodo de tiempo consecutivo.

Ejemplo para $\alpha = .3$

Sea $\alpha = .3$. Observar que las ponderaciones $\alpha(1-\alpha)^t$ decrecen exponencialmente (geométricamente) con el tiempo.

Valor ponderación

última	y_1	.2100
	y_2	.1470
	y_3	.1029
	y_4	.0720

¿Cuál es el valor “mejor” para α ?

¿Cómo seleccionar el parámetro de ponderación?

La velocidad con la cual las respuestas más viejas son amortiguadas (suavizadas) es una función del valor de α . Cuando α esta cercana a 1, la amortiguación es rápida y cuando esta cercana a 0, la amortiguación es lenta. Esto es ilustrado en la tabla de abajo:

-----> hacia las observaciones pasadas

α	$(1-\alpha)$	$(1-\alpha)^2$	$(1-\alpha)^3$	$(1-\alpha)^4$
.9	.1	.01	.001	.0001
.5	.5	.25	.125	.0625
.1	.9	.81	.729	.6561

Se selecciona el valor mejor para α de tal manera resulte en el MSE más pequeño.

Ejemplo

Ilustremos este principio con un ejemplo. Considerar el siguiente conjunto de datos consistiendo de 12 observaciones tomadas en el tiempo:

Tiempo	y_t	$S(\alpha = .1)$	Error	Cuadrado del Error
1	71			
2	70	71	-1.00	1.00
3	69	70.9	-1.90	3.61
4	68	70.71	-2.71	7.34
5	64	70.44	-6.44	41.47
6	65	69.80	-4.80	23.04
7	72	69.32	2.68	7.18
8	78	69.58	8.42	70.90
9	75	70.43	4.57	20.88
10	75	70.88	4.12	16.97
11	75	71.29	3.71	13.76
12	70	71.67	-1.67	2.79

La suma de los cuadrados de los errores (SSE) = 208.94. La media de los cuadrados de los errores (MSE) es la SSE /11 = 19.0.

Calcular para diferentes valores de α

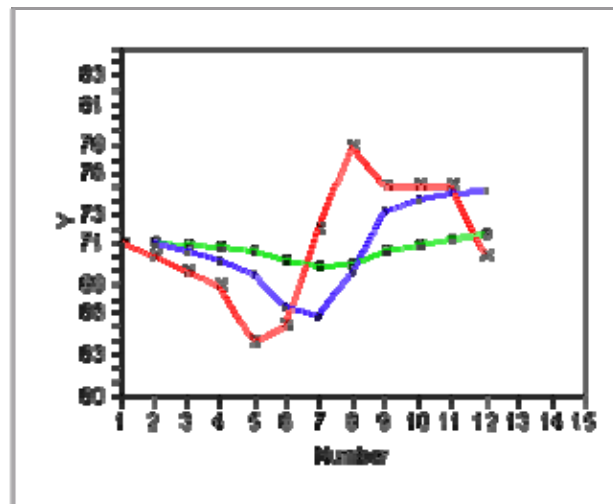
La MSE fue otra vez calculada para $\alpha = .5$ y resultó ser 16.29, así en este caso preferiríamos un α de .5. ¿Se puede mejorar? Aplicaríamos el método de prueba ensayo y error. Esto es un procedimiento interactivo comenzando con rango de α entre .1 y .9. Determinamos la selección inicial mejor para α y luego investigamos entre $\alpha - \Delta$ y $\alpha + \Delta$. Repetiríamos esto tal vez una o más veces para encontrar el mejor α con 3 lugares decimales.

Optimización no lineal puede ser usada

Pero hay métodos de investigación mejores, tales como el procedimiento Marquardt. Este es una optimización no lineal que minimiza la suma de cuadrados de los residuales. En general, la mayoría de programas de software estadístico bien diseñados deben ser capaces de encontrar el valor de α que minimiza el MSE.

gráfica de la
muestra
presenta
datos
suavizados
para 2
valores de α

Exponential Smoothing: Original and Smoothed Values



Y - Original Y - alpha = .1 - alpha = .5

6.4.3.3. Suavizado Exponencial Doble

El suavizado exponencial doble usa dos parámetros y es mejor al manejar tendencias

Como fue [observado previamente](#), el Suavizado Simple no es excelente en seguir los datos cuando hay una tendencia. Esta situación puede ser mejorada introduciendo una segunda ecuación con una segunda constante, γ , la cual debe ser seleccionada en conjunción con α .

Aquí están las dos ecuaciones asociadas con el Suavizado Exponencial Doble:

$$\begin{aligned} S_t &= \alpha y_t + (1 - \alpha) (S_{t-1} + b_{t-1}) & 0 \leq \alpha \leq 1 \\ b_t &= \gamma (S_t - S_{t-1}) + (1 - \gamma) b_{t-1} & 0 \leq \gamma \leq 1 \end{aligned}$$

Notar que el valor actual de la serie es usado para calcular su valor suavizado reemplazado en el suavizado exponencial doble.

Valores Iniciales

Métodos Diferentes para seleccionar los valores iniciales

Como en el caso del suavizado simple, hay una variedad de esquemas para colocar los valores iniciales para S_t y b_t en el suavizado doble.

S_1 es en general puesto a y_1 . Aquí hay tres sugerencias para b_1 :

$$b_1 = y_2 - y_1$$

$$b_1 = [(y_2 - y_1) + (y_3 - y_2) + (y_4 - y_3)]/3$$

$$b_1 = (y_n - y_1)/(n - 1)$$

Comentarios

Significación de las ecuaciones de suavizado

La primera ecuación de suavizado ajusta S_t directamente para la tendencia del periodo previo, b_{t-1} , agregándola al último valor suavizado, S_{t-1} . Esto ayuda a eliminar el rezago y trae S_t a la base apropiada del valor actual.

La segunda ecuación de suavizado entonces actualiza la

tendencia la tendencia, la cual es expresada como la diferencia entre los dos últimos valores. La ecuación es similar a la forma básica de suavizado simple, pero aquí aplicada a la actualización de la tendencia.

Las técnicas de optimización pueden ser usadas

Los valores para α y γ pueden ser obtenidos vía técnicas de optimización no lineal, tales como el Algoritmo Marquardt.

6.4.3.4. Pronóstico con Suavizado Exponencial Doble (LASP)

Fórmula de Pronósticos

El pronóstico de un periodo hacia adelante viene dada por:

$$F_{t+1} = S_t + b_t$$

El pronóstico de m periodos hacia adelante viene dado por:

$$F_{t+m} = S_t + mb_t$$

Ejemplo

Ejemplo

Considerar una vez más el conjunto de datos:

6.4, 5.6, 7.8, 8.8, 11, 11.6, 16.7, 15.3, 21.6, 22.4.

Ahora ajustamos un modelo de suavizado doble con $\alpha = .3623$ y $\gamma = 1.0$. Estas son las estimaciones que resultan en el MSE más bajo posible cuando comparamos la serie original a un pronóstico de un paso hacia adelante en el tiempo (puesto que esta versión de suavizado exponencial doble usa el valor actual de la serie para calcular un valor suavizado, la serie suavizada no puede ser usada para determinar un α con mínimo MSE). Los valores de inicio seleccionados son $S_1 = y_1 = 6.4$ y $b_1 = ((y_2 - y_1) + (y_3 - y_2) + (y_4 - y_3))/3 = 0.8$.

Por motivo de comparación también ajustamos un modelo de suavizado simple con $\alpha = 0.977$ (este resulta del MSE más bajo para el suavizado exponencial simple).

El MSE para el suavizado doble es 3.7024.

El MSE para el suavizado simple es 8.8867.

Pronósticos

Los resultados suavizados para el ejemplo son are:

que resultan
para el
ejemplo

Datos Doble		Simple
6.4	6.4	
5.6	6.6 (pronóstico = 7.2)	6.4
7.8	7.2 (pronóstico = 6.8)	5.6
8.8	8.1 (pronóstico = 7.8)	7.8
11.0	9.8 (pronóstico = 9.1)	8.8
11.6	11.5 (pronóstico = 11.4)	10.9
16.7	14.5 (pronóstico = 13.2)	11.6
15.3	16.7 (pronóstico = 17.4)	16.6
21.6	19.9 (pronóstico = 18.9)	15.3
22.4	22.8 (pronóstico = 23.1)	21.5

Comparación de Pronósticos

La tabla
presenta los
pronósticos
de suavizado
exponencial
simple y
doble

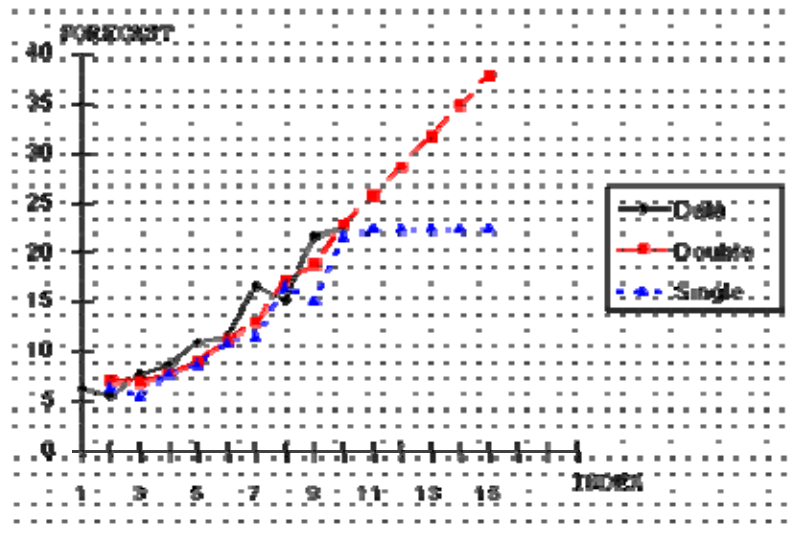
Para ver cómo cada método predice los valores futuros, calculamos los cinco primeros pronósticos de las últimas observaciones como sigue:

Periodo Simple Doble

11	22.4	25.8
12	22.4	28.7
13	22.4	31.7
14	22.4	34.6
15	22.4	37.6

Comparando
los gráficos
de
pronósticos
de suavizado
exponencial
simple y
doble

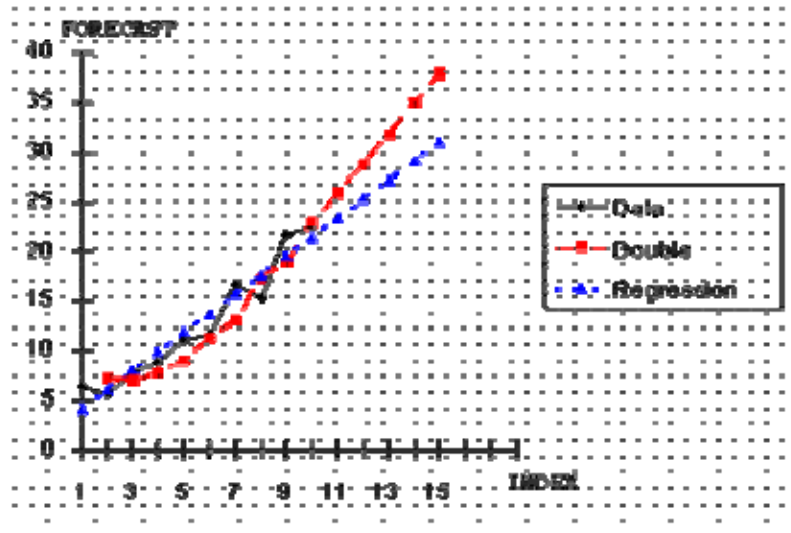
Una gráfica de estos resultados (usando los valores pronosticados de suavizado doble) es muy ilustrativo.



Esta gráfica indica que el suavizado doble sigue los datos mucho más cerca que el suavizado simple. Por otra parte, para pronósticos de suavizado simple no puede hacer que mejore la proyección de una línea recta horizontal, lo cual no es muy probable que ocurra en la realidad. Así en este caso el suavizado doble es preferido.

Gráfica de comparación de pronósticos de suavizado exponencial doble y regresión

Finalmente, comparemos el suavizado doble y la regresión lineal:



Esta es una imagen interesante. Ambas técnicas siguen los datos en forma similar, pero la regresión lineal es más conservadora. Es decir, hay un incremento más bajo que con el suavizado doble.

*La selección
de la técnica
depende del
pronosticador*

La selección de la técnica depende del pronosticador. Si es deseado retratar el crecimiento del proceso de una manera más agresiva, entonces uno selecciona el suavizado doble. En otro caso, la regresión puede ser preferible. Debería notarse que en regresión lineal el “tiempo” funciona como es la variable independiente.



6.4.3.5. Suavizado Exponencial Triple

¿Qué sucede si los datos presentan tendencia y estacionalidad?

Para manejar estacionalidad, tenemos que agregar un tercer parámetro

En este caso el suavizado doble no trabajará. Introducimos ahora una tercera ecuación para cuidarnos de la estacionalidad (algunas veces llamada periodicidad). La resultante de poner las ecuaciones es llamado el método "Holt-Winters" (HW) debido a los nombres de los inventores.

Las ecuaciones básicas para su método son dadas por:

$$\begin{aligned} S_t &= \alpha \frac{y_t}{I_{t-L}} + (1-\alpha)(S_{t-1} + b_{t-1}) & \text{OVERALL SMOOTHING} \\ b_t &= \gamma(S_t - S_{t-1}) + (1-\gamma)b_{t-1} & \text{TREND SMOOTHING} \\ I_t &= \beta \frac{y_t}{S_t} + (1-\beta)I_{t-L} & \text{SEASONAL SMOOTHING} \\ \hat{r}_{t+m} &= (S_t + mb_t) I_{t-L+m} & \text{FORECAST} \end{aligned}$$

Donde

- y es la observación
- S es la observación suavizada
- b es el factor de tendencia
- I es el índice de estacionalidad
- F es el pronóstico en m periodos hacia adelante
- t es un índice denotando un periodo de tiempo

α , β , y γ son las constantes deben ser estimadas de tal manera que el MSE de los errores es minimizado. Esto es mejor dejarlo a un buen software estadístico.

Necesidad de estacionalidad completa

Para inicializar el método HW necesitamos al menos unos datos de estación completa para determinar estimaciones iniciales de los índices estacionales I_{t-L} .

L periodos en una estación

Unos datos de estación completa consiste de L periodos. Y necesitamos estimar el factor de la tendencia de un periodo al siguiente. Para lograr esto, es aconsejable usar dos estaciones completas; eso es, $2L$ periodos.

Valores iniciales para el factor de tendencia

Cómo conseguir estimaciones iniciales para los parámetros de tendencia y estacionalidad

La formula general para estimar la tendencia inicial esta dada por

$$b = \frac{1}{L} \left(\frac{y_{L+1} - y_1}{L} + \frac{y_{L+2} - y_2}{L} + \dots + \frac{y_{L+L} - y_L}{L} \right)$$

Valores iniciales para los índices estacionales

Como veremos en el ejemplo, trabajamos con los datos que consisten de 6 años con 4 periodos (eso es, 4 trimestres) por año. Entonces

Paso 1: calcular promedios anuales

Paso 1: Calcular el promedio de cada uno de los 6 años

$$A_p = \sum_{t=1}^4 y_t \quad p = 1, 2, \dots, 6$$

Paso 2: dividir por promedios anuales

Paso 2: Dividir las observaciones por el promedio anual apropiado

1	2	3	4	5	6
y_1/A_1	y_5/A_2	y_9/A_3	y_{13}/A_4	y_{17}/A_5	y_{21}/A_6
y_2/A_1	y_6/A_2	y_{10}/A_3	y_{14}/A_4	y_{18}/A_5	y_{22}/A_6
y_3/A_1	y_7/A_2	y_{11}/A_3	y_{15}/A_4	y_{19}/A_5	y_{23}/A_6
y_4/A_1	y_8/A_2	y_{12}/A_3	y_{16}/A_4	y_{20}/A_5	y_{24}/A_6

Paso 3: formar índices estacionales

Paso 3: Ahora los índices estacionales están formados por el cálculo del promedio de cada fila. Luego los índices estacionales iniciales (simbólicamente) son:

$$I_1 = (y_1/A_1 + y_5/A_2 + y_9/A_3 + y_{13}/A_4 + y_{17}/A_5 + y_{21}/A_6)/6$$

$$I_2 = (y_2/A_1 + y_6/A_2 + y_{10}/A_3 + y_{14}/A_4 + y_{18}/A_5 + y_{22}/A_6)/6$$

$$I_3 = (y_3/A_1 + y_7/A_2 + y_{11}/A_3 + y_{15}/A_4 + y_{19}/A_5 + y_{23}/A_6)/6$$

$$I_4 = (y_4/A_1 + y_8/A_2 + y_{12}/A_3 + y_{16}/A_4 + y_{20}/A_5 + y_{24}/A_6)/6$$

Ahora conocemos el algebra detrás del cálculo de las estimaciones iniciales.


La siguiente página contiene un ejemplo de suavizado exponencial triple.

El caso de coeficientes cero

*Coeficientes
cero para los
parámetros de
tendencia y
estacionalidad*

Algunas veces sucede que un programa computacional para el suavizado exponencial triple da la salida final de coeficiente para tendencia ($\hat{\alpha}$) o estacionalidad ($\hat{\beta}$) de cero. O peor, ambos son resultados cero!

¿Indica esto que no hay tendencia y/o no estacionalidad?

¡Por supuesto que no! Solamente significa que los valores iniciales para tendencia y/o estacionalidad fueron correctos en el ro. Ninguna actualización era necesaria para llegar al MSE más bajo posible. Debemos inspeccionar las fórmulas de actualización para verificar esto.

6.4.3.6. Ejemplo de Suavizado Exponencial Triple

*Ejemplo
comparando
suavizado
exponencial
simple, doble y
triple*

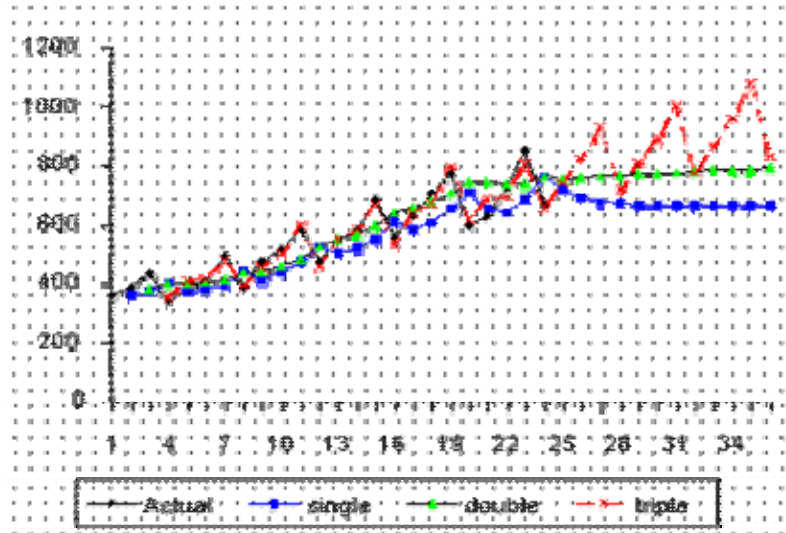
Este ejemplo presenta comparaciones de suavizado exponencial simple, doble y triple para un conjunto de datos.

El conjunto de datos siguiente representa 24 observaciones. Estos son seis años de datos trimestrales (cada año = 4 trimestres).

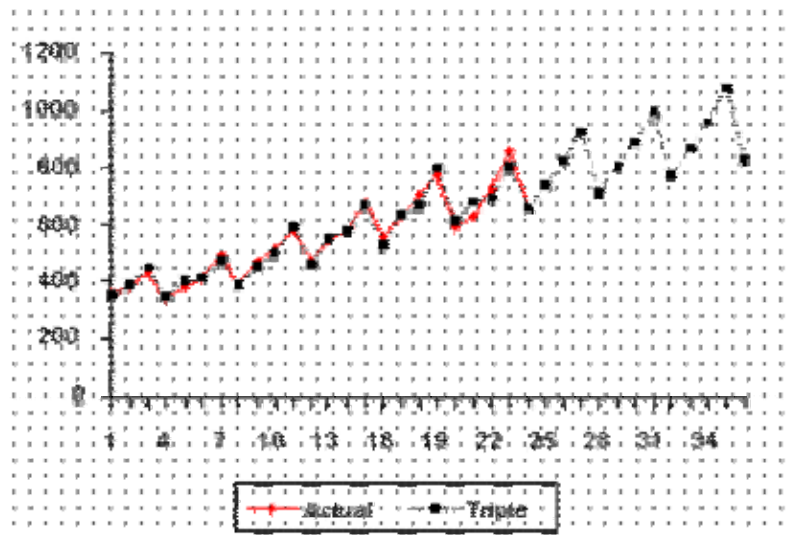
*La tabla
presenta los
datos para el
ejemplo*

Trimestre Periodo Ventas				Trimestre Periodo Ventas			
90	1	1	362	93	1	13	544
	2	2	385		2	14	582
	3	3	432		3	15	681
	4	4	341		4	16	557
91	1	5	382	94	1	17	628
	2	6	409		2	18	707
	3	7	498		3	19	773
	4	8	387		4	20	592
92	1	9	473	95	1	21	627
	2	10	513		2	22	725
	3	11	582		3	23	854
	4	12	474		4	24	661

Gráfica de
datos con
pronósticos
exponenciales
simple, doble y
triple



Serie Temporal Actual con pronósticos



Gráfica de
datos con
pronósticos
exponenciales
triple

Comparaciones
de los MSE

Comparaciones de los MSE			
MSE de	MSE de		
	α	γ	β
tendencia	6906	.4694	
estacionalidad	5054	.1086	1.000
	936	1.000	1.000
	520	.7556	0.000
			.9837

Los coeficientes actualizados fueron seleccionados por un

programa de computación de tal manera que el MSE para cada uno de los métodos fue minimizado.

Ejemplo de cálculo de la Tendencia Inicial

*Cálculo de la
tendencia
inicial*

El conjunto de datos consiste de datos de ventas trimestrales. La estación es un año y puesto que hay 4 trimestres por año, $L = 4$. Usando la fórmula obtenemos:

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{4} \left[\frac{25-21}{4} \right] + \left[\frac{25-22}{4} \right] + \left[\frac{27-23}{4} \right] + \left[\frac{28-24}{4} \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{352-362}{4} \right] + \left[\frac{409-385}{4} \right] + \left[\frac{408-432}{4} \right] + \left[\frac{387-341}{4} \right] \\ &= \frac{5+6+16.5+11.5}{4} = 9.75 \end{aligned}$$

Ejemplo de cálculo de los Índices Estacionales Iniciales

*Tabla de
índices
estacionales
iniciales*

	1	2	3	4	5	6
1	362	382	473	544	628	627
2	385	409	513	582	707	725
3	432	498	582	681	773	854
4	341	387	474	557	592	661
\bar{X}	380	419	510.5	591	675	716.75

En este ejemplo usamos los 6 años completos de datos. Otro esquema puede usar solamente 3, o algún otro número de años. Hay también un número de maneras de calcular las estimaciones iniciales.

6.4.3.7. Resumen Suavizado Exponencial

Resumen

El suavizado exponencial ha comprobado ser una técnica útil

El suavizado exponencial ha comprobado a través de los años ser muy útil en muchas situaciones de pronósticos. Fue sugerido primero por C.C. Holt en 1957 y fue significativo para ser usado en series temporales no estacionales que no muestran tendencia. El ofreció un procedimiento más tarde (1958) que maneja tendencias. Winters (1965) generalizó el método para incluir estacionalidad, de ahí el nombre "Método Holt-Winters".

Holt-Winters tienen 3 ecuaciones de actualización

El Método Holt-Winters tiene 3 ecuaciones actualizadas, cada una con una constante que va de 0 a 1. Las ecuaciones están pensadas para dar más ponderación a las observaciones recientes y menos ponderación a las observaciones más allá en el pasado.

Estas ponderaciones están decreciendo geométricamente a una razón constante.

El procedimiento HW puede hacerse totalmente automático por software de usuario amigable.