Laboratorio de Métodos Numéricos - Primer cuatrimestre 2010
Trabajo Práctico Número 1: "Perdidos" en el Pacífico

Dados dos números $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$, la *recurrencia de Müller* es la sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ definida por

$$x_{n+1} = 108 - \frac{815 - 1500/x_{n-1}}{x_n}, \qquad n \geq 1. \tag{1}$$

Esta sucesión tiende a un límite L, es decir, $\lim_{n\to\infty} x_n = L$ y se puede diseñar un algoritmo sencillo para determinar empíricamente este valor de L en función de los valores iniciales x_0 y x_1: computar x_n para $n \geq 1$ y detener el cómputo cuando $|x_n - x_{n-1}| < \epsilon$, donde $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ es una tolerancia especificada de antemano. El objetivo del trabajo práctico es analizar la efectividad de este procedimiento.

Para realizar este análisis, es interesante observar que se puede encontrar una fórmula cerrada para x_n. Para esto, definimos $x_n = y_{n+1}/y_n$ y hacemos este cambio de variables en (1), obteniendo

$$y_{n+2} = 108y_{n+1} - 815y_n + 1500y_{n-1}$$

para $n \geq 1$. Esta recurrencia lineal se puede resolver por medio de su polinomio característico $p(z) = z^3 - 108z^2 + 815z - 1500 = (z-3)(z-5)(z-100)$, generando la fórmula cerrada

$$x_n = \frac{\alpha 3^{n+1} + \beta 5^{n+1} + \gamma 100^{n+1}}{\alpha 3^n + \beta 5^n + \gamma 100^n}$$

para $n \geq 0$, donde α, β y γ son constantes que se deben ajustar de acuerdo con los valores iniciales x_0 y x_1. Por ejemplo, $\alpha = \beta = 1$ y $\gamma = 0$ generan los valores iniciales $x_0 = 4$ y $x_1 = 4.25$. De esta forma se puede obtener analíticamente el límite exacto de la sucesión, para compararlo con el límite obtenido empíricamente.

El trabajo práctico consiste en implementar la recurrencia de Müller con aritmética de punto flotante sobre distintos entornos (por ejemplo, en distintos compiladores de C usando `float` y `double`, en planillas de cálculo, software matemático, etc.) para analizar el comportamiento del método empírico en cada uno de estos entornos. Sobre la base de las implementaciones realizadas, se piden los siguientes experimentos obligatorios:

1. Graficar el límite exacto en función de x_0 y x_1. ¿Cómo se comporta este límite en función de los valores iniciales?
2. Comparar la aproximación del límite del método empírico contra el valor analítico obtenido en el experimento anterior. ¿Cómo se comporta este valor hallado experimentalmente? ¿Existen combinaciones de valores iniciales para los cuales el método empírico tenga problemas? En caso afirmativo, ¿se pueden caracterizar estos puntos y explicar por qué se producen estos efectos?

Los invitamos a que realicen todos los experimentos adicionales que sean necesarios para analizar y explicar convenientemente los efectos observados. El informe debe contener los resultados de todos los experimentos realizados, en un formato adecuado para su visualización y análisis.

Fecha de entrega: 16 de abril de 2010