

Móvimiento armónico Simple/ Presentación de Gráficas de Superposición Usando Numpy y Matplotlib

Kevin Andrés Forero Guaitero - 20181020120

Estudiante de Ingeniería de Sistemas

Supervisado por: ARJUNA CASTRILLÓN CAMACHO.

Resumen: Este trabajo estudia la superposición de ondas sinusoidales y el efecto de variar su amplitud, frecuencia angular y ángulo de desfase. Se utiliza un programa propio desarrollado en Python para generar gráficas de las ondas superpuestas y las figuras de Lissajous correspondientes. La amplitud de la onda resultante es la suma algebraica punto a punto de las amplitudes de las ondas base. La frecuencia angular de la onda resultante es la frecuencia angular más baja de las ondas base. El ángulo de desfase de la onda resultante depende de la relación entre las amplitudes y las frecuencias angulares de las ondas base. La forma de la figura de Lissajous depende de la interacción entre las amplitudes, las frecuencias angulares y los ángulos de desfase de las ondas base.

Palabras clave: Superposición de ondas, Ondas sinusoidales, Amplitud, Frecuencia angular, Ángulo de desfase, Figuras de Lissajous.

1 Introducción

Este trabajo presenta un estudio sobre la superposición de ondas sinusoidales, analizando el efecto de la variación de sus parámetros: amplitud, frecuencia angular y ángulo de desfase. Se utiliza un programa propio desarrollado en Python para generar gráficas de las ondas superpuestas y las figuras de Lissajous correspondientes.

2 Variables de entrada para la generación de gráficas

En la siguiente tabla se muestran las variables que se utilizan como entrada en el programa propio desarrollado en Python para la generación de gráficas de ondas:

Table 1: Símbolos de las Variables a Cambiar.

Variables	
A	Amplitud
ω	Frecuencia angular
ϕ	Ángulo de desfase

El objetivo de este trabajo es graficar las ondas de entrada variando cada uno de los parámetros mencionados en la tabla anterior. Se utilizará un programa propio desarrollado en Python para generar las gráficas. El programa tendrá como entrada los valores de las variables A , ω y ϕ , y como salida las gráficas de las ondas correspondientes. Los resultados se presentarán en forma de gráficas. Se analizará la influencia de cada uno de los parámetros en la forma de la onda. Se presentarán las conclusiones del trabajo, incluyendo la interpretación de los resultados obtenidos.

3 Gráfica Base

En esta sección se presentan los valores por defecto de las variables que se utilizarán como referencia para comparar las diferentes gráficas que se generarán en el estudio.

Table 2: Símbolos de las Variables a Cambiar.

Variable	Nombre	Valor
A_1	Amplitud 1	1
A_2	Amplitud 2	1
ω_1	Frecuencia angular 1	1
ω_2	Frecuencia angular 2	1
ϕ_1	Ángulo de desfase 1	0
ϕ_2	Ángulo de desfase 2	0

3.1 Superposición

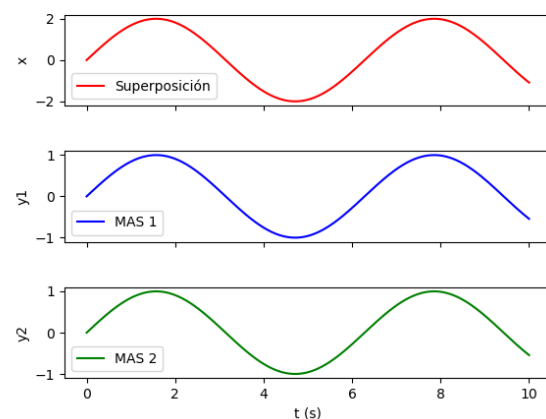


Figure 1: Superposición: En este caso, las dos ondas de entrada son idénticas, por lo tanto se suman cuando se superponen, incrementando así su amplitud.

3.2 Figura de Lissajous

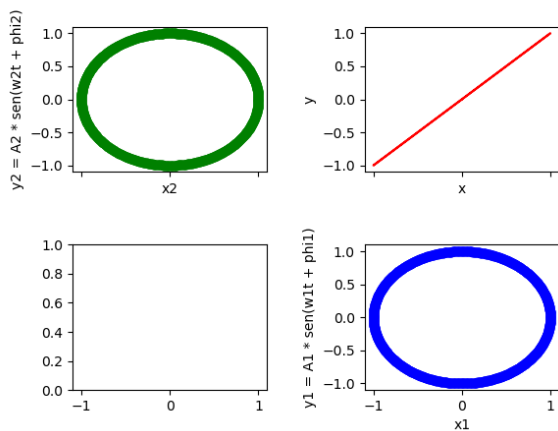


Figure 2: Figura de Lissajous: En este caso, se representa la trayectoria que seguirá una partícula cuando se encuentra sujeta a la superposición de ambas ondas de entrada.

4 Variación de la Amplitud

En esta sección se observará el efecto de las amplitudes en la superposición de ondas, con el objetivo de comprender cómo este parámetro modifica la forma de la onda resultante y la figura de Lissajous.

4.1 Amplitud 1 Mayor

En esta sección se analiza el caso particular donde la amplitud A_1 es mayor que la amplitud A_2 , fijando A_1 en un valor de 10. Se compararán los resultados con la sección de "Gráfica Base" para observar las diferencias en el comportamiento de las ondas y la figura de Lissajous.

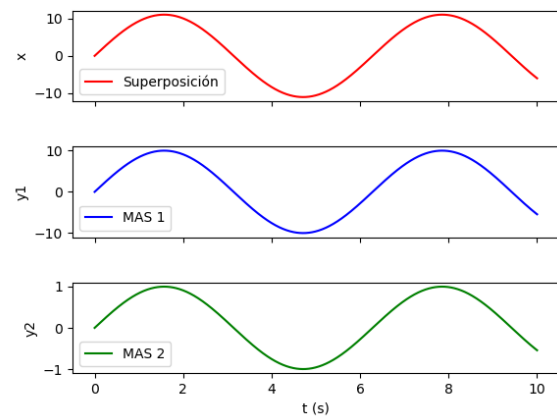


Figure 3: Superposición con $A_1 > A_2$: Aumentó la amplitud de la onda resultante exactamente 11 unidades.

Figura de Lissajous La figura de Lissajous también se ve afectada por la diferencia de amplitudes. En este caso, la forma de la figura se deforma, mostrando una mayor apertura en la dirección de la onda con mayor amplitud.

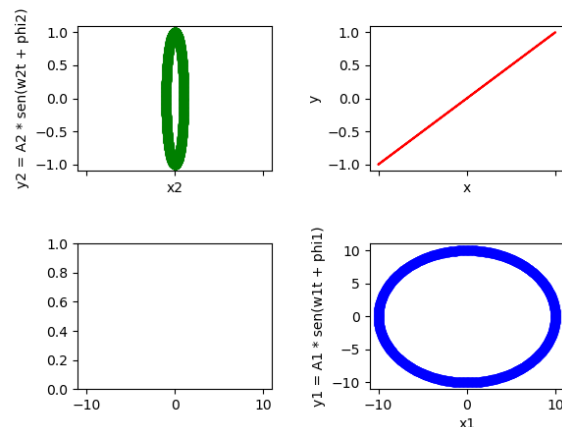


Figure 4: Figura de Lissajous con $A_1 > A_2$: Se aumentó exactamente 10 unidades el valor del eje x del desplazamiento.

Table 3: Símbolos de las Variables a Cambiar.

Variable	Nombre	Valor
A_1	Amplitud 1	10
A_2	Amplitud 2	1
ω_1	Frecuencia angular 1	1
ω_2	Frecuencia angular 2	1
ϕ_1	Ángulo de desfase 1	0
ϕ_2	Ángulo de desfase 2	0

Superposición Paralela En este caso, la onda 1 tiene una amplitud mayor que la onda 2. Esto se observa en la gráfica de superposición, donde la onda resultante se ve desplazada hacia arriba.

4.2 Amplitud 2 Mayor

Table 4: Símbolos de las Variables a Cambiar.

Variable	Nombre	Valor
A_1	Amplitud 1	1
A_2	Amplitud 2	10
ω_1	Frecuencia angular 1	1
ω_2	Frecuencia angular 2	1
ϕ_1	Ángulo de desfase 1	0
ϕ_2	Ángulo de desfase 2	0

Superposición Paralela En este caso, la onda 2 tiene una amplitud mayor que la onda 1. Esto se observa en la gráfica de superposición, donde la onda resultante se ve desplazada hacia arriba.

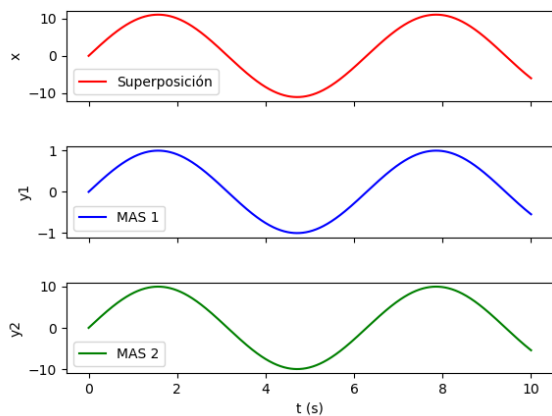


Figure 5: Superposición con $A_2 > A_1$: Se aumentó la amplitud de la onda resultante exactamente 11 unidades.

Figura de Lissajous La figura de Lissajous también se ve afectada por la diferencia de amplitudes. En este caso, la forma de la figura se deforma, mostrando una mayor apertura en la dirección de la onda con mayor amplitud. Esto se debe a la mayor contribución de la onda con mayor amplitud a la superposición de las dos ondas.

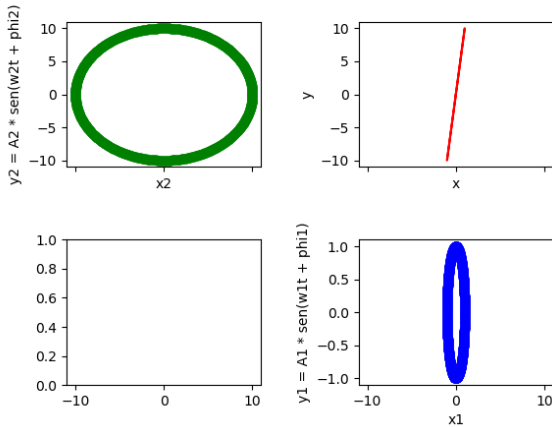


Figure 6: Figura de Lissajous con $A_2 > A_1$: Se aumentó exactamente 10 unidades el valor del eje y del desplazamiento.

4.3 Comentario de Sección

En este apartado se analizó el comportamiento de la onda resultante de la superposición de dos ondas armónicas cuando solo se varían las amplitudes. Se observó que las amplitudes de las ondas base se suman algebraicamente punto a punto para obtener la amplitud de la onda resultante.

Por lo tanto, si la onda resultante tiene un valor específico de amplitud, se puede determinar de antemano que las amplitudes de las ondas base, al sumarse, dan como resultado la amplitud de la onda superpuesta.

5 Variación de la Frecuencia Angular

En esta sección se analiza el efecto de variar la frecuencia angular de las ondas sobre la superposición y la figura de Lissajous. Se considerarán dos casos:

1. Frecuencia Angular 1 Mayor: Se fija $\omega_1 = 2$ y $\omega_2 = 1$, manteniendo las demás variables iguales a la sección "Gráfica Base".
2. Frecuencia Angular 2 Mayor: Se fija $\omega_1 = 1$ y $\omega_2 = 3$, manteniendo las demás variables iguales a la sección "Gráfica Base".

5.1 Frecuencia Angular 1 Mayor

Se fija $\omega_1 = 2$ y $\omega_2 = 1$, manteniendo las demás variables iguales a la sección "Gráfica Base".

Table 5: Símbolos de las Variables a Cambiar.

Variable	Nombre	Valor
A_1	Amplitud 1	1
A_2	Amplitud 2	1
ω_1	Frecuencia angular 1	2
ω_2	Frecuencia angular 2	1
ϕ_1	Ángulo de desfase 1	0
ϕ_2	Ángulo de desfase 2	0

Superposición Paralela En este caso, la onda 1 tiene una velocidad angular mayor que la onda 2. Esto se observa en la gráfica de superposición, donde la onda 1 está con un periodo menor a la 2.

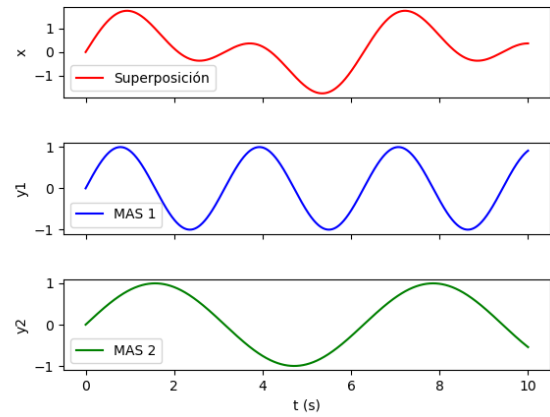


Figure 7: Superposición con $A_2 > A_1$: El periodo de la onda resultante conserva el mismo de la onda 2.

Figura de Lissajous La figura de Lissajous también se ve afectada por la diferencia de velocidades angulares. En este caso, la forma de la figura cambia drásticamente, mostrando una oscilación extra en el eje de mayor velocidad angular, es decir, en el eje x, que está dado por la onda 1.

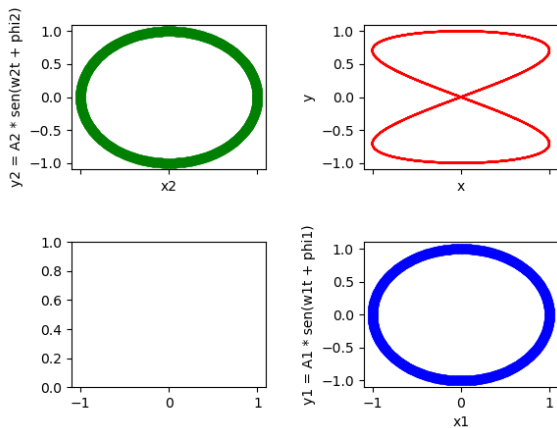


Figure 8: Figura de Lissajous con $\omega_1 = 2\omega_2$: Se formó una nueva figura de lissajous con la onda en el eje x de velocidad angular el doble de la del eje y (2:1).

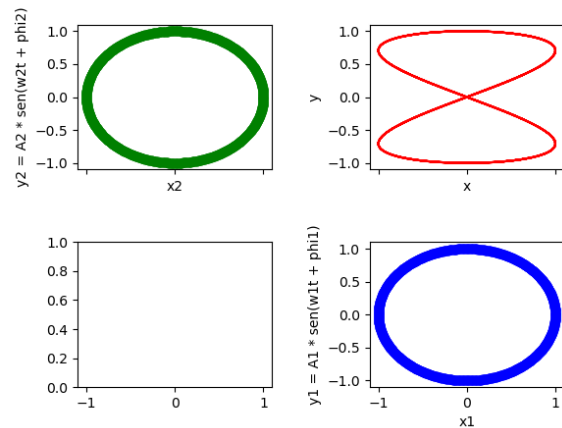


Figure 10: Figura de Lissajous con $\omega_1 = 3\omega_2$: Se formó una nueva figura de lissajous con la onda en el eje y de velocidad angular el triple de la del eje x (1:3).

5.2 Frecuencia Angular 2 Mayor

Se fija $\omega_1 = 1$ y $\omega_2 = 3$, manteniendo las demás variables iguales a la sección "Gráfica Base".

Table 6: Símbolos de las Variables a Cambiar.

Variable	Nombre	Valor
ω_1	Frecuencia angular 1	1
ω_2	Frecuencia angular 2	3

Superposición Paralela En este caso, la onda 2 tiene una velocidad angular mayor que la onda 1. Esto se observa en la gráfica de superposición, donde la onda 2 está con un periodo menor a la 1.

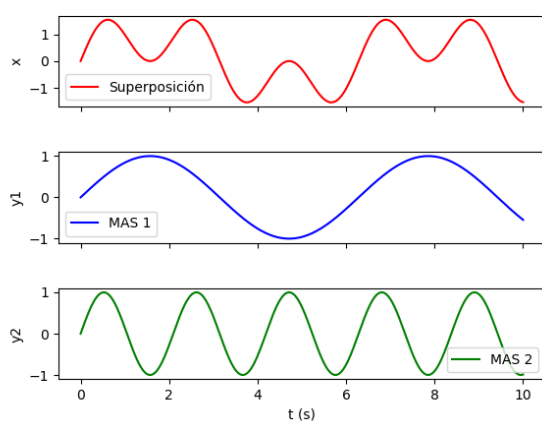


Figure 9: Superposición con $\omega_2 > \omega_1$: El periodo de la onda resultante conserva el mismo de la onda 1, la mayor.

Figura de Lissajous La figura de Lissajous también se ve afectada por la diferencia de velocidades angulares. En este caso, la forma de la figura mostrada no cambia aparentemente con respecto al caso anterior 8.

5.3 Comentario de Sección

En este apartado se analizó el comportamiento de la onda resultante de la superposición de dos ondas armónicas cuando solo se varían las velocidades angulares. Se observó que la onda superpuesta adquiere el periodo mayor de las ondas superpuestas, según sea el caso.

Algo pendiente a observar en la siguiente sección es si la figura de Lissajous choca con el eje según el número que represente su representación, es decir, en el caso de la imagen 10, una figura 3:1. ¿El periodo en x es 3 y en y es 1? Si es así, en la figura deberían verse 3 choques con el eje x. Es posible que, debido a la vista 2D, se estén dibujando encima las líneas. En la siguiente sección se analizará este caso con una rotación para comprobar este comportamiento.

Por lo tanto, si la onda resultante tiene un valor específico de velocidad angular, se puede determinar que existe al menos una onda base con exactamente el mismo periodo.

6 Variación del ángulo de Desfase ϕ

En esta sección se observará el efecto que tiene el ángulo de desfase en la superposición de ondas.

6.1 $\phi_1 > \phi_2$

Con respecto a los parámetros base, cambiará:

Table 7: Símbolos de las Variables a Cambiar.

Variable	Nombre	Valor
ϕ_1	Ángulo de desfase 1	$\theta/2$
ϕ_2	Ángulo de desfase 2	0

Superposición Paralela En este caso, la onda 1 tiene un ángulo de desfase. Esto se observa en la gráfica de superposición, donde, pese a que son las mismas ondas, con los mismos valores de amplitud y velocidad angular, su superposición no da una resultante de amplitud 2. Esto se debe a que, como es una suma de amplitudes punto a punto, el máximo de la onda 1 nunca se suma con el máximo de la onda 2.

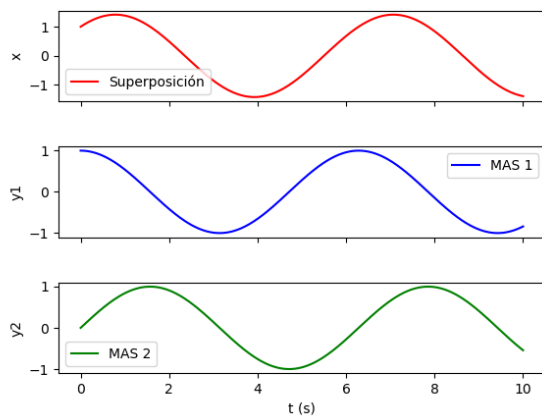


Figure 11: Superposición con $A_2 > A_1$: La onda superpuesta se deforma en su amplitud y despase ϕ , pero conservando el periodo de las ondas superpuestas (El mayor, como vimos en la anterior sección).

Figura de Lissajous La figura de Lissajous también se ve afectada por la diferencia de velocidades angulares. En este caso, la forma de la figura cambia drásticamente, mostrando una oscilación extra en el eje de mayor velocidad angular, es decir, en el eje x, que está dado por la onda 1.

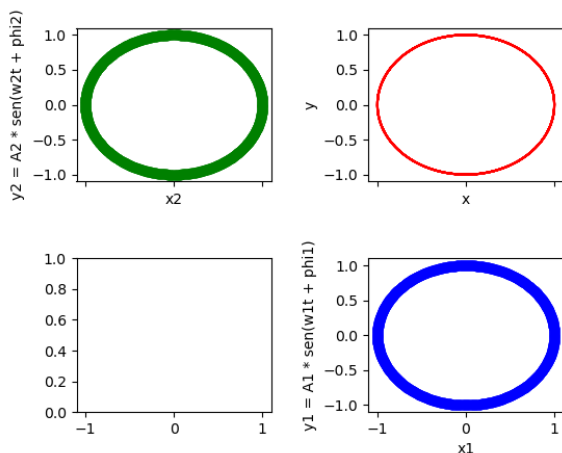


Figure 12: Figura de Lissajous con $\phi_1 = \Theta/2$ y $\phi_2 = 0$: Se formó una nueva figura de lissajous que parece una circunferencia, que en comparación de la línea del caso de la imagen 2 aumenta una dimensión (1:1).

En este caso, con respecto a la gráfica 2, se evidencia que se rota la figura de una circunferencia. Sin embargo, en el caso 2 se veía una línea (estando en el plano), en este se puede interpretar como ver la misma figura pero desde un punto de vista fuera del plano.

6.2 $\phi_1 < \phi_2$

Con respecto a los parámetros del caso exuesto en la figura 10, y con el fin de comprobar la hipótesis propuesta en la sección 6, se cambiará el ángulo de desfase 2:

Table 8: Símbolos de las Variables a Cambiar.

Variable	Nombre	Valor
A_1	Amplitud 1	1
A_2	Amplitud 2	1
ω_1	Frecuencia angular 1	1
ω_2	Frecuencia angular 2	3
ϕ_1	Ángulo de desfase 1	0
ϕ_2	Ángulo de desfase 2	$\phi/2$

Superposición Paralela En este caso, la onda 2 tiene un ángulo de desfase y velocidad angular el triple de la 1. Esto se observa en la gráfica de superposición.

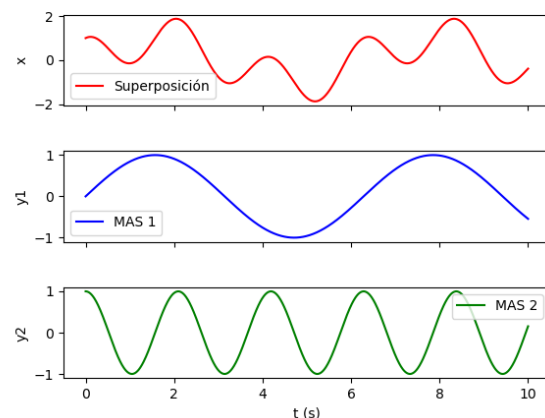


Figure 13: Superposición con $A_2 > A_1$: La onda superpuesta se deforma en su amplitud, pero conservando el periodo de la onda mayor (la primera). Además, se evidencia que se empieza a componer por ondas de amplitud igual a la segunda, cambiando la forma de la misma y cumpliendo que las amplitudes se suman punto a punto.

Figura de Lissajous La figura de Lissajous también se ve afectada por la diferencia de velocidades angulares y el ángulo de desfase. En este caso, la forma de la figura cambia drásticamente, efectivamente como se mencionó en la hipótesis de la sección 5.3. La relación (1 : 3) quiere decir que pasa una vez por el eje x y tres veces por el eje y. También hay que tener en cuenta que el ángulo de desfase ϕ rota la figura de Lissajous y, por ende, es posible que en algún punto, si se proyecta, se dibuje encima de una línea y se vea como si solo pasara una vez.

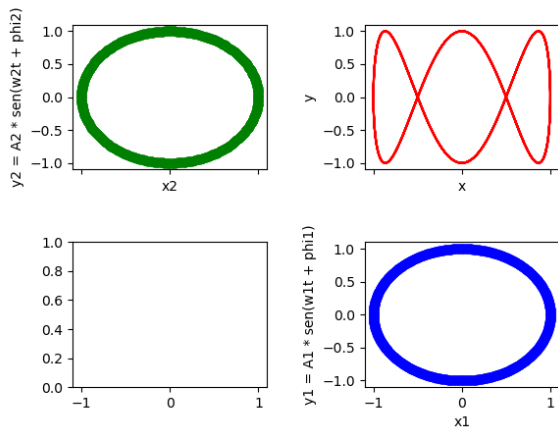


Figure 14: *Figura de Lissajous (1 : 3) con $\phi_2 = 0$: Se formó una nueva figura de Lissajous que, en comparación con la línea del caso de la imagen 10, aumenta una dimensión.*

6.3 Comentario de Sección

En este apartado se analizó el comportamiento de la onda resultante de la superposición de dos ondas armónicas cuando varían los ángulos de desfase. Se observó que la onda superpuesta se deforma en el caso de superposición paralela de manera que se corre la onda, se desfase la onda resultante. En el caso de las figuras de Lissajous se evidenció que el ángulo de desfase "gira la figura" generada por dos ondas paralelas.

7 Conclusiones

En este trabajo se analizó el comportamiento de la onda resultante de la superposición de dos ondas armónicas, variando sus amplitudes, velocidades angulares y ángulos de desfase. Se obtuvieron las siguientes conclusiones:

1. **Amplitud:** La amplitud de la onda resultante es la suma algebraica punto a punto de las amplitudes de las ondas base. Si la amplitud de la onda resultante es conocida, se puede determinar que las amplitudes de las ondas base, al sumarse, dan como resultado la amplitud de la onda superpuesta.
2. **Velocidad angular:** La onda superpuesta adquiere el periodo mayor de las ondas superpuestas. Si la onda resultante tiene un valor específico de velocidad angular, se puede determinar que existe al menos una onda base con exactamente el mismo periodo.
3. **Ángulo de desfase:** La onda superpuesta se deforma en el caso de superposición paralela, corrimiento y desfase de la onda resultante. El ángulo de desfase "gira la figura" de Lissajous generada por dos ondas paralelas.

Investigaciones futuras:

Analizar el comportamiento de la figura de Lissajous con una rotación para comprender mejor la relación entre el ángulo de desfase y la forma de la figura. Estudiar la superposición de ondas con diferentes formas de onda, como ondas cuadradas o triangulares. Analizar el efecto del ruido en la superposición de ondas.

References

- [1] Wikipedia, la enciclopedia libre. (2023, December 2). Principio de superposición de ondas. Retrieved April 8, 2024, from https://es.wikipedia.org/wiki/Principio_de_superposici
- [2] Wikipedia, la enciclopedia libre. (2024, March 27). Curva de Lissajous. Retrieved April 8, 2024, from https://es.wikipedia.org/wiki/Curva_de_Lissajous
- [3] Overleaf. (2024). PBL Report Template. Retrieved April 8, 2024, from <https://www.overleaf.com/latex/templates/pbl-report-template/gppmfgwbjpcp>