Variable Compleja & Transformadas (Matemáticas II)
Departamento de Matemática Aplicada y Estadística

E.T.S. Ingeniería Industrial ▷ UPCT
Grado en Ingeniería Electrónica Industrial y Automática

Guión resumen del tema 6

Ecuaciones en derivadas parciales. Resolución aproximada mediante el método de las diferencias finitas

1. Clasificación

Una ecuación diferencial en la que aparecen dos o más variables independientes se llama **ecuación derivadas parciales** (edp). En una ecuación en derivadas parciales, la incógnita es una función $u : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$; $(x, t) \mapsto u(x, t)$ que suele modelar algún fenómeno con origen en la Física (temperatura, vibración, elasticidad,... etc.). Estudiaremos ecuaciones en derivadas parciales con la siguiente estructura:

$$au_{xx}(x,t) + bu_{xt}(x,t) + cu_{tt}(x,t) = F\left(x, t, u, u_x, u_t\right); \tag{1}$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ y F es una función que depende de x, t, u y derivadas primeras de u. Identificaremos x con una variable espacial y t como variable temporal. Si la ecuación no depende del tiempo se denomina estacionaria y, en este caso, la función $u = u(x, y)$ depende de las variables espaciales x, y.

$\boxed{\approx}$ Si $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación (1) se llama **hiperbólica**.

$\boxed{\odot}$ Si $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación (1)se llama **parabólica**.

$\boxed{\blacksquare}$ Si $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación (1) se llama **elíptica**.

Como prototipos de los casos anteriores consideraremos las siguientes edp's.

$\boxed{\approx}$ Como ejemplo de una ecuación hiperbólica consideramos el modelo unidimensional de una cuerda vibrante de longitud L. El desplazamiento vertical de la cuerda en la posición $x \in (0, L)$ en un instante de tiempo $t > 0$ viene dado por la solución $u(x, t)$ de la **ecuación de ondas**:

$$\rho u_{tt}(x,t) = Tu_{xx}(x,t); \quad (x,t) \in (0, L) \times (0, +\infty).$$

La constante ρ es la masa de la cuerda por unidad de longitud y T es la tensión de la cuerda. La ecuación se reformula como

$$u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t); \quad (x,t) \in (0, L) \times (0, +\infty). \tag{2}$$

La posición y velocidad inicial vienen dadas por:

$$
\begin{aligned}
u(x,0) &= f(x) \quad \text{para} \quad 0 \le t < +\infty, \\
u_t(x,0) &= g(x) \quad \text{para} \quad 0 \le x < L.
\end{aligned}
$$

Los valores de desplazamiento vertical en los extremos de la cuerda son nulos, es decir:

$$
\begin{aligned}
u(0,t) &= 0 \quad \text{para} \quad 0 \le t < +\infty, \\
u(L,t) &= 0 \quad \text{para} \quad 0 \le t < +\infty.
\end{aligned}
$$

$\boxed{\odot}$ Como ejemplo de ecuación parabólica consideramos el modelo uni-dimensional del flujo de calor en un alambre aislado de longitud L. La **ecuación del calor**, que nos da la temperatura $u(x,t)$ en la posición x del alambre y en el instante t, es

$$\kappa u_{xx}(x,t) = \sigma \rho u_t(x,t) \quad (x,t) \in [0,L) \times (0,+\infty).$$

La constante κ es el coeficiente de conductividad térmica, σ es el calor específico y ρ es la densidad del material. La ecuación anterior se suele reformular como

$$u_t(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t) \quad (x,t) \in [0,L) \times (0,+\infty). \tag{3}$$

La distribución inicial de temperaturas es

$$u(x,0) = f(x) \quad \text{para} \quad 0 \le x \le L.$$

La condición de contorno en los extremos del alambre es

$$
\begin{aligned}
u(0,t) = g_1(t) \quad \text{para} \quad 0 \le t < +\infty, \\
u(L,t) = g_2(t) \quad \text{para} \quad 0 \le t < +\infty.
\end{aligned}
$$

$\boxed{\blacksquare}$ u es la función potencial, que puede representar el régimen estacionario de un potencial electrostático o el régimen estacionario de la distribución de temperatura en una región del plano de forma rectangular. Estas situaciones se modelan mediante la **ecuación de Laplace** sobre el rectángulo:

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0; \quad (x,y) \in (0,a) \times (0,b). \tag{4}$$

La ecuación anterior se suele escribir en términos del operador de Laplace:

$$\Delta u(x,y) = 0; \quad (x,y) \in (0,a) \times (0,b).$$

Las condiciones de contorno sobre cada lado del rectángulo se definen mediante unas funciones conocidas f_1, f_2, f_3 y f_4:

$$
\begin{aligned}
u(x,0) &= f_1(x) \quad x \in [0,a], \\
u(x,b) &= f_2(x) \quad x \in [0,a], \\
u(0,y) &= f_3(y) \quad y \in [0,b], \\
u(a,y) &= f_4(y) \quad y \in [0,b].
\end{aligned}
$$

En algunos casos es posible resolver de manera **exacta** las ecuaciones en derivadas parciales descritas haciendo uso de desarrollos de Fourier y el método de separación de variables. La solución exacta resulta también útil a la hora de comprobar la eficacia de un método de solución aproximado o numérico. En este tema se presenta el método numérico más sencillo para resolver edp's.

2. El método de las diferencias finitas. Consideraciones generales

El **teorema de Taylor** establece que si u es una función de una variable, x, con derivadas finitas y continuas y $h > 0$, entonces se tiene:

$$\begin{aligned} u(x+h) &= u(x) + hu^{'}(x) + \frac{h^2}{2!}u^{''}(x) + \frac{h^3}{3!}u^{'''}(x) + O(h^4) \\ u(x-h) &= u(x) - hu^{'}(x) + \frac{h^2}{2!}u^{''}(x) - \frac{h^3}{3!}u^{'''}(x) + O(h^4), \end{aligned}$$

donde $O(h^4)$ denota a términos que contienen potencias de h^n, con $n \geq 4$. Al sumar las dos expresiones anteriores se obtiene

$$u(x+h) - u(x-h) = 2u(x) + h^2u^{''}(x) + O(h^4).$$

Si asumimos que los términos $O(h^4)$ son pequeños, entonces se tiene la siguiente aproximación de $u^{''}(x)$. Esta aproximación es de orden h^2:

$$u^{''}(x) \backsimeq \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}. \tag{5}$$

Análogamente, restando las ecuaciones de la expansión Taylor con términos $O(h^3)$, se obtiene una aproximación de $u^{'}(x)$ que es de orden h^2:

$$u^{'}(x) \backsimeq \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h}. \tag{6}$$

La expresión (6) indica que una aproximación de la pendiente de la recta tangente a u en $(x, u(x))$ se puede construir mediante la pendiente de la recta que une los puntos $(x-h, u(x-h))$ y $(x+h, u(x+h))$. La aproximación (6) se conoce como **aproximación por diferencia central**. Si se aproxima $u^{'}(x)$ mediante la pendiente de la recta que une los puntos $(x-h, u(x-h))$ y $(x, u(x))$ se obtiene la **aproximación por diferencias progresivas**:

$$u^{'}(x) \backsimeq \frac{u(x) - u(x-h)}{h}. \tag{7}$$

Si se aproxima $u^{'}(x)$ mediante la pendiente de la recta que une los puntos $(x, u(x))$ y $(x+h, u(x+h))$ se obtiene la **aproximación por diferencias regresivas**:

$$u^{'}(x) \backsimeq \frac{u(x+h) - u(x)}{h}. \tag{8}$$

Si u es una función de dos variables, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, sufiencientemente regular, entonces pueden obtenerse expresiones análogas a las anteriores para aproximar las derivadas parciales de u de primer y segundo orden. En esas expresiones, h denota el paso para la variable x y $k > 0$ denota el paso para la variable y. Con idea de simplificar la escritura, si $x_i \in \mathbb{R}$, se suele denotar $x_i - h$ como x_{i-1} y $x_i + h$ como x_{i-1}. Análogamente, si $y_j \in \mathbb{R}$, se suele denotar $y_j - k$ como y_{j-1} y $y_j + k$ como y_{j-1} y también $u(x_i, y_j)$ se denota mediante $u_{i,j}$.
Se define una partición uniforme en el plano de la siguiente forma:

$$\{(x_i, y_j) \in \mathbb{R}^2;\ x_i = ih,\ y_j = jk;\ i \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{Z}\}.$$

Con esta notación, y teniendo en cuenta las expresiones (5), (6), (7), (8), obtenemos que:

$$\begin{aligned}
u_{xx}(x_i, y_j) &\backsimeq \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}, \\
u_{yy}(x_i, y_j) &\backsimeq \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2}, \\
u_x(x_i, y_j) &\backsimeq \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h}, \quad \text{(diferencia central)} \\
u_y(x_i, y_j) &\backsimeq \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2k}, \quad \text{(diferencia central)} \\
u_x(x_i, y_j) &\backsimeq \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h}, \quad \text{(diferencia progresiva)} \\
u_y(x_i, y_j) &\backsimeq \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{k}, \quad \text{(diferencia progresiva)} \\
u_x(x_i, y_j) &\backsimeq \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h}, \quad \text{(diferencia regresiva)} \\
u_y(x_i, y_j) &\backsimeq \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k}, \quad \text{(diferencia regresiva).}
\end{aligned} \tag{9}$$

El método de las diferencias finitas para la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias y ecuaciones en derivadas parciales consiste en transformar las ecuaciones de partida por ecuaciones en diferencias mediante la sustitución de las derivadas por las correspondientes aproximaciones de (9).

2.1. Método de las diferencias finitas para la ecuación de ondas

La ecuación (2) se considera formulada en los intervalos $x \in (0, L)$ y $t \in (0, b)$, donde $b \in \mathbb{R}$. Se define una partición uniforme del rectángulo $(0, L) \times (0, b)$. La partición es

$$\{x_i, t_j) \in \mathbb{R}^2;\, x_i = ih,\, t_j = (j-1)k;\, i = 1, 2, \cdots n, j = 1, 2, \cdots m\}$$

y se cumple que $t_1 = 0$. Si se sustituye en (2) las derivadas por las aproximaciones, se tiene la siguiente ecuación en diferencias:

$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} = c^2 \left(\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} \right).$$

Si se denota $r = \dfrac{ck}{h}$, entonces la ecuación anterior queda

$$u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1} = r^2(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}).$$

Tras reordenar los términos, obtenemos una expresión que permite calcular los valores de u en la fila $j+1$-ésima a partir de los valores sobre las dos filas anteriores:

$$u_{i,j+1} = (2 - 2r^2)u_{i,j} + r^2(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - u_{i,j-1}; \quad (i = 2, 3, \cdots, n-1). \tag{10}$$

Las condiciones iniciales del problema nos hacen conocer la solución para $t = t_1 = 0$, pues $u(x_i, 0) = f(x_i)$. Por tanto $u_{i,1}$ es conocido. Los valores de $u_{i,2}$ son necesarios para comenzar a aplicar (10). A partir de la condición $u_t(x_i, 0) = g_i$ se puede obtener una aproximación de $u(x_i, t_2)$ que se toma como $u_{i,2}$. Si f es derivable, entonces $u_{i,2} = f_i + kg_i$, $i = 2, 3, \cdots, n-1$. Si f es dos veces derivables, entonces $u_{x,x}(x, 0) = f''(x)$ y es posible usar la fórmula de Taylor de orden 2 para obtener

$$u_{i,2} = (1 - r^2)\, f_i + k\, g_i + \frac{r^2}{2}(f_{i+1} + f_{i-1}); \quad (i = 2, 3, \cdots, n-1).$$

Nota: Si el error cometido en una etapa de los cálculos no se amplifica en las etapas posteriores, entonces se dice que el método es **estable**. Para garantizar la estabilidad de la fórmula (10) es necesario que $r \leq 1$. Existen otros esquemas más complejos, llamados implícitos, que no precisan restricciones sobre r para garantizar la estabilidad.

2.2. Método de las diferencias finitas para la ecuación del calor

Consideraremos la ecuación introducida en (3) en el caso particular en el la temperatura del alambre sea constante en los extremos, i.e., $g_1(t) = c_1, g_2(t) = c_2,$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. También se considera $t \in [0, b]$, con $b \in \mathbb{R}$ y una partición uniforme de $[0, L] \times [0, b]$ con $t_1 = 0$:

$$\{x_i, t_j) \in \mathbb{R}^2;\ x_i = ih,\ t_j = (j-1)k;\ i = 1, 2, \cdots n, j = 1, 2, \cdots m\}.$$

La ecuación (3) se transforma en una nueva ecuación en diferencias al sustituir las derivadas correspondientes por las expresiones de (9). Si se sustituye u_t por la expresión de diferencias regresivas, se obtiene:

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = c^2 \left(\frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} \right).$$

Por comodidad, tomaremos $r = c^2 k/h^2$ en la ecuación anterior. Al reordenar un poco los términos, se obtiene lo que se conoce como ecuación en diferencias progresivas explícita, que permite calcular los valores de $u_{i,j+1}$ a partir de los de la fila anterior:

$$u_{i,j+1} = (1 - 2r)u_{i,j} + r(u_{i-1,j} + u_{i+1,j}). \tag{11}$$

Para comenzar a aplicar la expresión anterior, es necesario conocer $u_{i,1}$, y este dato se tiene directamente de la condición inicial: $u(x_i, 0) = f(x_i)$.

Observaciones:

- La fórmula de diferencias progresivas (11) es estable si, y solo si, $0 \leq r \leq \frac{1}{2}$. Esto significa que el tamaño del paso k debe cumplir $k \leq \frac{h^2}{2c^2}$.
- La precisión de la ecuación en diferencias progresivas (11) es de orden $O(k) + O(h^2)$. Como el término $O(k)$ tiende a cero linealmente, de nuevo tenemos que es necesario considerar k pequeño para obtener buenas aproximaciones.

2.3. Método de las diferencias finitas para la ecuación de Laplace

La ecuación (4) está definida en el rectángulo $[a, b]$. En este caso se considera una partición uniforme del rectángulo con $h = k$, es decir $a = nh$ y $b = mh$. Así la partición se define mediante $(n-1)(m-1)$ cuadrados de lado h. A partir de (9), si $h = k$, el operador de Laplace se puede aproximar por la expresión

$$\Delta u(x_i, y_j) \backsimeq \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j}}{h^2}.$$

Por tanto, la versión discreta de la ecuación (4) es

$$u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} = 0. \tag{12}$$

Las condiciones de contorno sobre la frontera del rectángulo permiten conocer los valores sobre los puntos de la malla siguientes:

$$\begin{aligned} u_{i,1} &= f_1(x_i) \quad i = 2, \cdots, n-1, \\ u_{i,m} &= f_2(x_i) \quad i = 2, \cdots, n-1, \\ u_{1,j} &= f_3(y_j) \quad j = 2, \cdots, m-1, \\ u_{n,j} &= f_4(y_j) \quad j = 2, \cdots, m-1. \end{aligned}$$

Al aplicar la expresión (12) en cada uno de los puntos de la malla que pertenecen al interior del rectángulo, se obtiene un sistema lineal de $(n-2)$ ecuaciones con $(n-2)$ incógnitas. La solución de este sistema es única y proporciona las aproximaciones de la solución exacta $u(x, y)$ sobre los puntos de la malla interiores al rectángulo.