Name, Vorname Matrikelnummer	HOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2	Sommersemester 2022
Studiengänge: SWB/TIB/IEP	
Prüfungsnummer: IT 105 20 03 und 105 20 13	Zeit: 90 Minuten
Dozenten: Jürgen Koch und Karsten Runge	Punkte: 54

Hilfsmittel: Manuskript
Literatur
Taschenrechner Casio FX-87DE Plus / Casio FX-87DE Plus 2nd edition

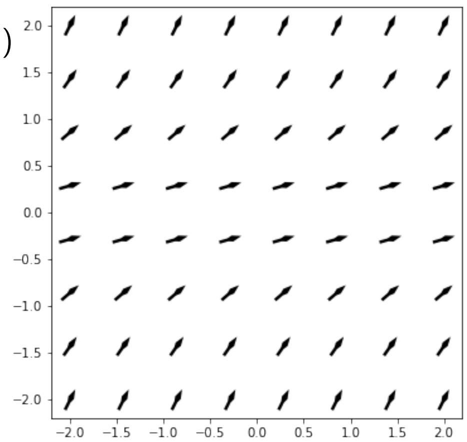
Hinweise: **Bearbeiten Sie die Aufgaben ausschließlich auf diesen Prüfungsblättern.**
Begründen Sie alle Lösungsschritte.

Aufgabe 1 (11 Punkte) Hinweis: Alle Teilaufgaben können unabhängig voneinander bearbeitet werden.

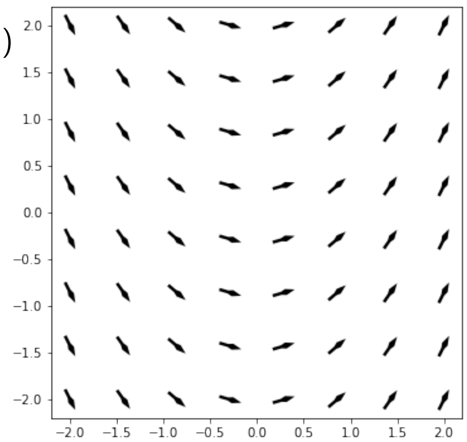
a) Ordnen Sie den Differenzialgleichungen die Richtungsfelder zu:

(A) $y' = y$ (B) $y' = x$ (C) $y' = |y|$ (D) $y' = |x|$

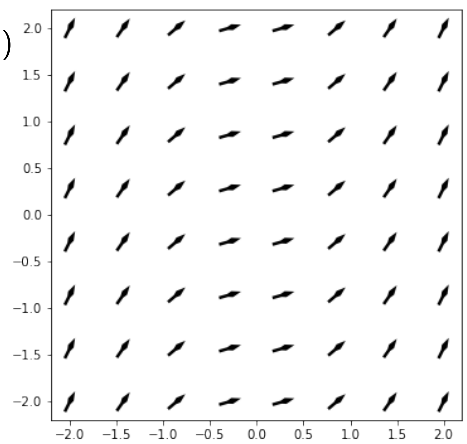
(C)



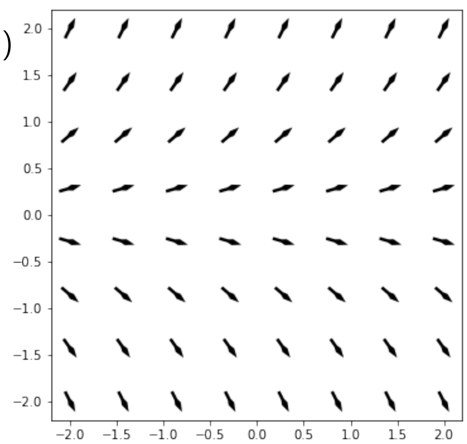
(B)



(D)



(A)



b) Welche Differenzialgleichung ist linear? Bitte kreuzen Sie den entsprechenden Eintrag an:

$x\,y' + y = x^2$	☒ linear	☐ nicht linear
$x\,y' + y = y^2$	☐ linear	☒ nicht linear
$y\,y' + y = x^2$	☐ linear	☒ nicht linear
$x^2\,y' + y = x^2$	☒ linear	☐ nicht linear

c) Geben Sie eine Differenzialgleichung an, die die allgemeine Lösung

$$x(t) = C_1\,\mathrm{e}^{3\,t} + C_2\,\mathrm{e}^{-7\,t}, \quad C_1, C_2, \in \mathbb{R},$$

besitzt.

Ansatz:

→ mit SVNP lösen:

$\lambda_1 = 3 \;,\; \lambda_2 = -7$

① SVNP:

$(\lambda - 3)(\lambda + 7) = 0$

$= \lambda^2 + 7\lambda - 3\lambda - 21$

$= \lambda^2 + 4\lambda - 21 = 0$

② umschreiben in DGL:

$y'' + 4y' - 21y = 0$

d) Bei welchen Störfunktionen r tritt bei der Differenzialgleichung

$$y'' + y' = r(x)$$ $\lambda^2 + \lambda = 0 \quad \lambda(1+0) = 0 \quad \rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1$

Resonanz auf? Bitte kreuzen Sie den entsprechenden Eintrag an:

$r(x) = \mathrm{e}^x$	☐ Resonanz	☒ keine Resonanz
$r(x) = \mathrm{e}^{-x}$	☒ Resonanz	☐ keine Resonanz
$r(x) = 1$	☒ Resonanz	☐ keine Resonanz
$r(x) = x$	☒ Resonanz	☐ keine Resonanz

e) Der Van-der-Pol-Oszillator mit Amplitude F und Kreisfrequenz ω wird durch die Differenzialgleichung

$$\ddot{x} - \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} + x = F\,\sin(\omega\,t), \quad \varepsilon > 0$$

beschrieben. Stellen Sie diese Differenzialgleichung mithilfe von Zustandsvariablen durch ein äquivalentes System von Differenzialgleichungen erster Ordnung dar.

$z_1 = x, \quad z_2 = z'$

$z_1' = z_2$

$z_2 = F\sin(\omega t) + (\varepsilon - z_1^2 \varepsilon) \cdot z_2 - z_1$

$z_2 = \varepsilon(1 - z_1^2) z_2 - z_1 + F\sin(\omega t)$

Aufgabe 2 (8 Punkte) Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$y' - 2\,x\,y^2 = 0, \quad y(1) = -\frac{1}{2}.$$

a) Ist die Differenzialgleichung linear?

b) Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems.

c) Ermitteln Sie einen Näherungswert $\tilde{y}_1$ für die Lösung des Anfangswertproblems an der Stelle $x = 1.1$, indem Sie einen Schritt mit dem Euler-Polygonzugverfahren mit der Schrittweite $h = 0.1$ durchführen. Wie weit weicht der Näherungswert $\tilde{y}_1$ von der exakten Lösung ab?

a) die Differenzialgleichung ist nicht linear, da y^2 vorkommt

① $y = \frac{dy}{dx}$ setzen und trennen der Variablen:

$$\frac{dy}{dx} - 2xy^2 = 0 \quad | \cdot dx \quad | + 2xy^2$$

$$dy = 2xy^2 \cdot dx \quad | : y^2$$

$$\frac{1}{y^2}\,dy = 2x \cdot dx$$

② integrieren:

$$\int \frac{1}{y^2}\,dy = \int 2x \cdot dx$$

$$-\frac{1}{y} = x^2 + C$$ ← konstante C nicht vergessen

$$y = -\frac{1}{x^2 + C}$$

③ Anfangswertproblem einsetzen $y(1) = -\frac{1}{2}$:

$$-\frac{1}{2} = -\frac{1}{1^2 + c} \quad | \cdot (1 + c)$$

$$-\frac{1}{2}(1 + c) = -1$$

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}c = -1 \quad | + \frac{1}{2} \quad | : (-\frac{1}{2})$$

$$c = 1$$

④ Aufstellen Formel mit Anfangswertproblem:

$$y = \frac{-1}{x^2 + 1}$$

c) Euler Polygonzugverfahren:

→ Schritt von $x_0 = 1$ nach $x_1 = 1.1$ mit Schrittweite $h = 0.1$ ← Aufschreiben für Verständnis

$x_0 = 1$, $y_0 = -\frac{1}{2}$, $x_1 = 1.1$, $h = 0.1$

$\boxed{\tilde{y}_{n+1} = \tilde{y}_n + h \cdot f(x_n, y_n)}$ $\boxed{x_1 = x_0 + h}$

① Schritte berechnen:

→ $y' - 2xy^2 = 0$ nun umgestellt werden zu: ← hier wird Originalgleichung verwendet, nicht umgestellt!

→ $y' = 2xy^2$

↳ jetzt kann man für $\boxed{f(x_0, y_0) = 2xy^2}$ ← $f(x_0, y_0)$ bezieht sich einfach nur darauf, noch nichts einsetzen!

$\boxed{\tilde{y}_{n+1} = y_n + h \cdot 2xy^2}$ ← das ist nun die Formel in die man immer einsetzen kann

$\tilde{y}_1 = -\frac{1}{2} + 0.1 \cdot 2 \cdot \underbrace{1}_{x_0 = 1} \cdot \underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)}_{y_0 = -\frac{1}{2}}^2 = -0{,}45$

② Abweichung:

exakte Lösung an der Stelle wo Schritt gemacht wurde also an $x_1 = 1.1$ und nicht an $x_0 = 1$!!

exakte Lösung aus AWP: $y(\overbrace{1.1}) = \frac{-1}{(1{,}1)^2 + 1} = -\frac{100}{221}$

$y(1.1) - \tilde{y}_1 = -\frac{100}{221} - (-0{,}45) = -0{,}0025$

3. allgemeine Lösung, keine Resonanz

Name, Vorname	Matrikelnummer	HOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2		Sommersemester 2022
Studiengänge: SWB/TIB/IEP		Seite: 6 von 12

Aufgabe 3 (8 Punkte) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$\ddot{x} - 6\,\dot{x} + 25\,x = 32\,\mathrm{e}^{3\,t}\,.$$

Bei Aufgabe 3 immer auf Resonanz achten

1. charakteristische Gleichung und Eigenwerte:

$\lambda^2 - 6\lambda + 25 = 0$

MNF:

$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{6 \pm \sqrt{36-4\cdot 25}}{2} = \frac{6 \pm 8i}{2} = 3 \pm 4i$

↳ $\lambda_1 = 3+4i$, $\lambda_2 = 3-4i$

2. homogene Lösung:

$\boxed{x_h = C_1 e^{\lambda t} + C_2 e^{\lambda t}}$ ← homogen komplex

$\boxed{x_h = e^{\alpha t} \cdot (C_1 \cdot \cos(\beta t) + C_2 \cdot \sin(\beta t))}$ ← homogen Reel

↳ $x_h = C_1 e^{3+4it} + C_2 e^{3-4it}$ ← hier kann man frei wählen, da nicht explizit nach komplexer oder reeller gefragt

3. entsprechende Partikuläre Lösung wählen:

Schleife über alle Linearkombinationen / Superposition — BESTIMMUNG DER PARTIKULÄREN LÖSUNG

Zugeordneter EW	Störfunktion	Ansatz für partikuläre Lösung
$\tilde{\lambda} = 0$	Polynom vom Grad m: $r(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$	$\tilde{y}_p(x) = A_0 + A_1 x + \ldots + A_m x^m$
$\tilde{\lambda} = k$	Exponentialfunktion: $r(x) = ae^{kx}$	$\tilde{y}_p(x) = Ae^{kx}$
$\tilde{\lambda} = \pm\omega i$	Harmonische Schwingung: $r(x) = a_1\cos(\omega x) + a_2\sin(\omega x)$	$\tilde{y}_p(x) = A_1\cos(\omega x) + A_2\sin(\omega x)$
$\tilde{\lambda} = k \pm \omega i$	Gedämpfte harmonische Schwingung: $r(x) = \mathrm{e}^{kx}(a_1\cos(\omega x) + a_2\sin(\omega x))$	$\tilde{y}_2(x) = \mathrm{e}^{kx}(A_1\cos(\omega x) + A_2\sin(\omega x))$

↳ $\boxed{r(x) = 32e^{3t}}$ → entspricht Exponentialfunktion, also $\boxed{\tilde{x}_p(x) = Ae^{kt}}$

→ Der Eigenwert der homogenen Lösung enthält zwar $k=3$, jedoch zusätzlich auch noch $\pm 4i$, weshalb keine Resonanz herrscht!!

↳ deshalb ganz normal ohne Resonanz $\tilde{x}_p(x) = Ae^{kt}$!

↳ $x_p = Ae^{3t}$

④ ableitungen von x_p bilden x_p', x_p'' einsetzen in ursprüngliche Gleichung:

$x_p = Ae^{3t}$

$x'_p = 3Ae^{3t}$ ← es ist nicht $3tAe^{3t}$!! nur der Koeffizient kommt nach unten (als vgl. anders wäre es bei $t \cdot e^{3t}$: 1. Ableitung: $3te^{3t} + e^{3t}$, 2. Abl.: $9te^{3t} + 6e^{3t}$)

$x''_p = 9Ae^{3t}$

einsetzen in $x'' - 6x' + 25x = 32e^{3t}$

$\Leftrightarrow 9Ae^{3t} - 6(3Ae^{3t}) + 25(Ae^{3t}) = 32e^{3t}$

⑤ Auflösen nach A: ← Koeffizientenvergleich hier nicht notwendig, da ja nur eine Variable A

$9Ae^{3t} - 6(3Ae^{3t}) + 25(Ae^{3t}) = 32e^{3t}$

$9Ae^{3t} - 18Ae^{3t} + 25Ae^{3t} = 32e^{3t}$

$16Ae^{3t} = 32e^{3t} \quad | : 16e^{3t}$

$A = 2$

⑤ aufstellen der allgemeinen Lösung:

$x(t) = x_h + x_p = C_1 \cdot e^{3+4i} + C_2 \cdot e^{3-4i} + 2e^{3t}$ ← komplex

($x(t) = x_h + x_p = C_1 e^{3t} \cos(4t) + C_2 e^{3t} \sin(4t) + 2e^{3t}$ reelle Lösung) (hier wäre beides möglich)

Aufgabe 4 (9 Punkte) Gegeben ist das Differenzengleichungssystem

$$\begin{aligned} 2\,x_{k+1} &= 2\,x_k + y_k, \\ 2\,y_{k+1} &= 2\,x_k + 3\,y_k, \end{aligned} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

a) Berechnen Sie die allgemeine Lösung des Differenzengleichungssystems.

b) Ist das Differenzengleichungssystem asymptotisch stabil?

① Matrix aufstellen:

$$\begin{pmatrix} 2x_{k+1} \\ 2y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} \quad | : 2$$

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}$$

② Eigenwerte berechnen $A - \lambda \cdot I$:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{2}-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left(\frac{3}{2}-\lambda\right) - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - \lambda - \frac{3}{2}\lambda + \lambda^2 - \frac{1}{2} = \lambda^2 - \frac{5}{2}\lambda + 1$$

MNF:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{+\frac{5}{2} \pm \sqrt{(-\frac{5}{2})^2 - 4 \cdot 1}}{2} = \frac{\frac{5}{2} \pm \frac{3}{2}}{2} =$$

$\hookrightarrow \lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}$

③ Eigenvektoren berechnen:

$\rightarrow$ zu $\lambda_1 = 2$:

$$\begin{pmatrix} 1-2 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{2}-2 \end{pmatrix} \cdot v_1 = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{I} \quad -1a + \frac{1}{2}b = 0$

$\mathrm{II} \quad 1a - \frac{1}{2}b = 0$

$\hookrightarrow a = +\frac{1}{2}b$ in I: $-1 \cdot (-\frac{1}{2})b + \frac{1}{2}b = 0$

$0 = 0 \rightarrow$ wähle $b = 1$ einsetzen $b = 1$ in II

$\rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \hookrightarrow a = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$

→ zu $\lambda_1 = \frac{1}{2}$:

$$\begin{pmatrix} 1-\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{2}-\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot v = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$$

↳ I $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = 0$

II $1a + 1b = 0$

↳ $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

4. aufstellen der Gleichung:

$$\boxed{z(t) = C_1 \cdot e^{\lambda_1 t} \cdot v + C_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \cdot v}$$

$$= C_1 e^{2t} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{\frac{1}{2}t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

5. Asymptotisch Stabil?:

b) Beträge der Eigenwerte sind nicht < 1 deshalb nicht asymptotisch stabil

Aufgabe 5 (10 Punkte) Die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-2x^2}}{x^2}$$

soll in eine Potenzreihe mit Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ entwickelt werden.

a) Geben Sie die Glieder der gesuchten Potenzreihe bis zum Term mit x^4 an.

b) Welchen Konvergenzradius hat die gesuchte Potenzreihe?

c) Wie lautet $f^{(4)}(0)$, also die vierte Ableitung der Funktion f an der Stelle $x = 0$?

d) Bestimmen Sie mithilfe der gesuchten Potenzreihe den Grenzwert

$$\lim_{x \to 0} f(x).$$

e) Ermitteln Sie mithilfe der gesuchten Potenzreihe einen Näherungswert für $f(0.1)$, der mindestens auf zwei Nachkommastellen genau ist. Geben Sie eine ausführliche Begründung an, wodurch die Genauigkeit sichergestellt ist.

a) Ansatz:

① ↳ zu entwickelnde Form im Cheat Sheet nachlesen:

→ Form $\boxed{e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}}$ ← Standardform, welche abgeändert werden muss

② ↳ spezieller Ansatz für $\boxed{e^{-2x^2}}$:

→ $x = -2x^2$ einsetzen einfach:

$$e^{(-2x^2)} = 1^0 + \frac{(-2x^2)^1}{1!} + \frac{(-2x^2)^2}{2!} + \frac{(-2x^2)^3}{3!} + \frac{(-2x^2)^4}{4!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2x^2)^k}{k!} = \boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot (2^k x^{2k})}{k!}}$$

$$\boxed{= 1 - 2x^2 + \frac{4x^4}{2!} - \frac{8x^6}{3!} + \frac{16x^8}{4!}} \ldots$$

③ einsetzen in ursprüngliche Gleichung für e^{-2x^2}:

$$\to f(x) = \frac{1 - e^{-2x^2}}{x^2}$$

$$= \frac{1 - \left(1 - 2x^2 + \frac{4x^4}{2!} - \frac{8x^6}{3!} \pm \ldots\right)}{x^2}$$

1 − 1 fällt raus, VZW da ja − Klammer aufgelöst wird

$$= \frac{2x^2}{x^2} - \frac{\frac{4}{2}x^4}{x^2} + \frac{\frac{8}{6}x^6}{x^2}$$

$$= 2 - 2x^2 + \frac{4}{3}x^4 \pm \ldots, \quad x \in \mathbb{R}$$

e^{-2x^2}:

- e^{-x} → $\boxed{\text{alternierend: Faktor } (-1)^k \text{ vor Potenzreihe: z.B. } \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{k!}}$
- ungerade Potenzen: $2k-1$ im Exponent: z.B. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2k x^{2k-1}}{k!}$
- immer +2: $2k\,x$ als Faktor: z.B. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2k x^{2k-1}}{k!}$
- e^{2x} → wenn es sich verdoppelt: $2^k x$ als Faktor: z.B. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{2^k x^{2k-1}}{k!}$
- e^{x^2} → wenn sich x quadriert: x^{2k} im Exponent $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!}$

Die wichtigsten Potenzreihen

Lösungsansatz — gegeben — r

▸ $\frac{1}{1-x}$	$=$	$\sum_{k=0}^{\infty} x^k$	$= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots,$	$r = 1$
▸ e^x	$=$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$	$= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots,$	$r = \infty$
▸ $\sin x$	$=$	$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$	$= \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \pm \ldots,$	$r = \infty$
▸ $\cos x$	$=$	$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$	$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp \ldots,$	$r = \infty$

(4) konvergenz:

-> e-Funktion konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$. Deshalb ist der Konvergenzradius $r = \infty$

-> e, sin, cos -> $r = \infty$

-> ln, $\sqrt{1+x}$ -> $r = 1$, konvergiert für $-1 < x \leq 1$, wobei Konvergenzpunkt $x = 1$ bedingt

-> $\frac{1}{1-x}$ -> $r = 1$ für $-1 < x < 1$

(5) c) Wie lautet $f^{(4)}(0)$, also die vierte Ableitung der Funktion an der Stelle $x = 0$?

↳ einfach schauen welches Glied x^4 hat und dessen Koeffizient mit 4! multiplizieren

$$f^{(4)}(0) = \frac{d^4}{dx^4}\left(\frac{4}{3}x^4\right) = 4! \cdot \frac{4}{3} = 32$$

(6) d) Grenzwert herausfinden:

-> einfach 0 für x einsetzen

↳ $\lim_{x \to 0} f(x) = 2 - 2 \cdot 0^2 + \frac{4}{3} 0^4 = 2$

(7) e) Ermittel mit der gegebenen Potenzreihe einen Näherungswert für $f(0.1)$, der mindestens auf 2 Nachkommastellen genau ist, gib eine Begründung an.

-> Leibniz-Kriterium

-> Der Näherungswert bei $f(0,1)$, muss mindestens auf 2 Nachkommastellen genau sein

↳ d.h. bis 0,00 genau sozusagen dies ist bei folgenden Gliedern der Fall:

$f(0.1) \approx 2 - 2 \cdot 0{,}1^2 = 1{,}98$ -> Erklärung weshalb nur die ersten beiden Glieder:
-> Genauigkeit von 2 Nachkommastellen also 0,00
-> Glied 1: 2
-> Glied 2: $x^2 = 0.1^2 = 0.1$
-> Glied 3: $\frac{4}{3}x^4 = \frac{4}{3} \cdot 0.1^4 = 0{,}0001\overline{3}$

ab hier sozusagen nicht mehr relevant deshalb kann es ausgeschlossen werden

-> Genauigkeit kann durch Leibniz-Kriterium sichergestellt werden:

$$\rightarrow \left|\underbrace{f(0.1) - 1{,}98}_{\text{das wird nicht gerechnet}}\right| \leq \underbrace{\frac{4}{3} \cdot 0.1^4}_{\text{ist das angerechnet!}} < 0.001$$

-> Hinweis:
beim Leibnizkriterium rechnet man nie wirklich die Differenz aus, stattdessen rechnet man einfach das nächste Glied aus, welches nicht beachtet wurde, da dieses den maximalen Fehler darstellt!

Musterlösung Begründung weshalb man so vorgegangen ist ->

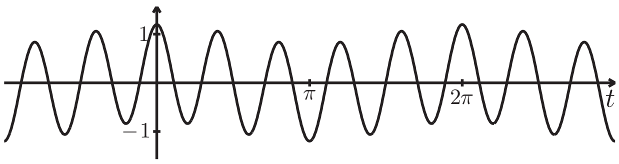
Begründung: Wenn man für x den Wert 0.1 in die Potenzreihe einsetzt, dann entsteht eine alternierende Reihe, bei der die Beträge der Reihenglieder eine monotone Nullfolge bilden. Nach dem Leibniz-Kriterium ist die Abweichung kleiner als der Betrag des ersten Reihengliedes, das nicht berücksichtigt wurde:

Aufgabe 6 (8 Punkte) Ordnen Sie den folgenden trigonometrischen Polynomen das richtige Schaubild zu. Bitte begründen Sie Ihre Zuordnung.

Merke: Funktion mit höchster Amplitude dominiert Grundschaubild

$$
\begin{aligned}
f_1(t) &= 1\cos(t) + \tfrac{1}{5}\cos(5\,t) \\
f_2(t) &= \tfrac{1}{5}\cos(t) + \cos(5\,t) \\
f_3(t) &= \cos(t) - \tfrac{1}{3}\cos(3\,t) + \tfrac{1}{5}\cos(5\,t) - \tfrac{1}{7}\cos(7\,t) + \tfrac{1}{9}\cos(9\,t) \\
f_4(t) &= \cos(t) + \tfrac{1}{9}\cos(3\,t) + \tfrac{1}{25}\cos(5\,t) + \tfrac{1}{49}\cos(7\,t) + \tfrac{1}{81}\cos(9\,t)
\end{aligned}
$$

Dieses Schaubild gehört zu Funktion:

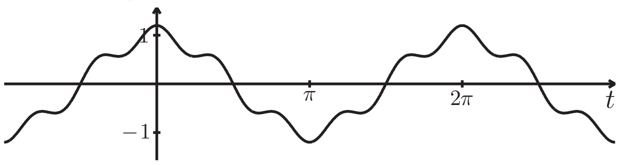


f_2

Begründung:

→ Das Schaubild ähnelt dem Schaubild von cos (5t), mit geringer Amplitude wird cos (t) überlagert
, da cos (5t) die höchste Amplitude besitzt dominiert sie hier,
$\frac{1}{5}$ cos (t) hat eine geringere Amplitude und hat deshalb nur einen geringen Effekt

Dieses Schaubild gehört zu Funktion:

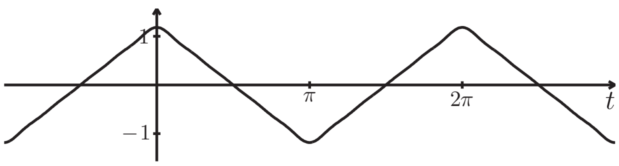


f_1

Begründung:

→ Das Schaubild ähnelt dem Schaubild von cos (t). Mit geringer Amplitude wird cos (5t) überlagert
→ cos (t) hat höchste Amplitude, deshalb an cos(t) orientiert, Überlagerung mit $\frac{1}{5}$ cos (5t) von geringerer Amplitude

Dieses Schaubild gehört zu Funktion:

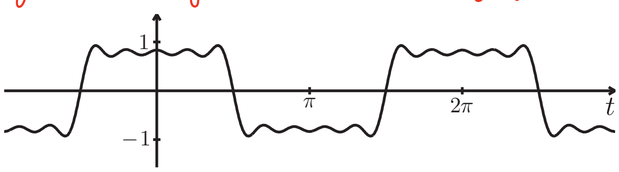


f_4

Begründung:

→ Wenn man zu f_4 weitere Fourier-Koeffizienten nach dem selben Muster hinzufügen würde, dann entsteht im Grenzwert eine stetige Funktion, da die Koeffizienten schnell, d.h proportional zu $\frac{1}{k^2}$ abnehmen
↳ schnell abnehmende Koeffizienten der Cosinus Terme, typisch für stetige Fourier Reihe ohne Sprungstellen

Dieses Schaubild gehört zu Funktion:



f_3

Begründung:

Wenn man zu f_3 weitere Fourier-Koeffizienten nach dem selben Muster hinzufügen würde, dann entsteht im Grenzwert eine Funktion mit Sprungstelle, da die Koeffizienten langsam, d.h proportional zu $\frac{1}{k}$, abnehmen.
↳ Sprungstelle:

→ alternierende Vorzeichen, Terme heben sich teilweise auf, komplexere Wellenform
→ langsam abnehmende Amplitude, typisch für Fourier Reihen mit Sprungstellen