| Name, Vorname Matrikelnummer | HOCHSCHULE ESSLINGEN |
|---|---|
| **Prüfungsfach: Mathematik 2** | **Wintersemester 22/23** |
| **Studiengänge: SWB/TIB/IEP** | **Seite: 1 von 12** |
| **Prüfungsnummer: IT 105 20 03 und 105 20 13** | **Zeit: 90 Minuten** |
| **Dozent: Michele Adesso** | **Punkte: 54** |

**Hilfsmittel:** Manuskript
Literatur
Taschenrechner Casio FX-87DE Plus / Casio FX-87DE Plus 2nd edition

**Hinweise:** **Bearbeiten Sie die Aufgaben ausschließlich auf diesen Prüfungsblättern.**
**Begründen Sie alle Lösungsschritte.**

**Aufgabe 1 (10 Punkte)** Hinweis: Alle Teilaufgaben können unabhängig voneinander bearbeitet werden.

**a)** Welche der folgenden linearen Differenzialgleichungen ist homogen? Bitte kreuzen Sie den entsprechenden Eintrag an:

| | | |
|---|---|---|
| $y'(x) = y(x)$ | ☒ homogen | ☐ inhomogen |
| $y'(x) + y(x) + x = 0$ | ☐ homogen | ☒ inhomogen |
| $y'(x) + \cos(x) = 0$ | ☐ homogen | ☒ inhomogen |
| $y'(x) = \sin(x)\, y(x)$ | ☒ homogen | ☐ inhomogen |

**b)** Bei welchen Störfunktionen $r$ tritt bei der Differenzialgleichung

$$y'' + 6\,y' + 9\,y(x) = r(x)$$

NNF
$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$ $\quad \dfrac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 9}}{2 \cdot 1} = -3$

Resonanz auf? Bitte kreuzen Sie den entsprechenden Eintrag an:

| | | |
|---|---|---|
| $r(x) = -3\,\mathrm{e}^{3x}$ | ☐ Resonanz | ☒ keine Resonanz |
| $r(x) = 3\,\mathrm{e}^{-3x}$ | ☒ Resonanz | ☐ keine Resonanz |
| $r(x) = -3$ | ☐ Resonanz | ☒ keine Resonanz |
| $r(x) = -3\,\cos(x)\,\mathrm{e}^{-3x}$ | ☐ Resonanz | ☒ keine Resonanz |

**c)** Welchen Grenzwert $S$ hat die Reihe

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^k ?$$

← Für Differenzengleichungen auch $S = \frac{1}{1-p}$

Ansatz:

$\boxed{S = \frac{1}{1-q}}$ , $q = -\frac{2}{3}$

$\hookrightarrow S = \dfrac{1}{1-(-\frac{2}{3})} = \dfrac{1}{1+\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{\frac{5}{3}} = \dfrac{3}{5}$ , mit $|q| < 1$

**d)** Berechnen Sie für die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = \frac{e^{y-3}}{2+x}, \quad y(2) = 3,$$

einen Näherungswert, indem Sie einen Schritt mit dem Euler-Polygonzugverfahren mit der Schrittweite $h = 0.5$ durchführen.

Euler Polygonzugverfahren:

$\boxed{y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)}$ $\boxed{x_1 = x_0 + h}$

1. Schritte berechnen:

$\hookrightarrow x_0 = 2, \ y_0 = 3, \ f(x_0, y_0) = \frac{e^{3-3}}{2+2} = \frac{e^0}{4} = \frac{1}{4}$

$\rightarrow x_1 = 2 + 0{,}5 = 2{,}5, \ y_1 = 3 + 0{,}5 \cdot \frac{1}{4} = 3 + \frac{1}{8} = \frac{25}{8}$

**e)** Der sogenannte Duffing-Oszillator wird durch die nicht lineare Differenzialgleichung

$$\ddot{x} + \delta\,\dot{x} + \alpha\,x + \beta x^3 = \gamma\cos(\omega_0\,t)$$

beschrieben. Dabei sind $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ und $\omega_0$ Parameter. Stellen Sie die Differenzialgleichung mithilfe von Zustandsvariablen durch ein äquivalentes System von Differenzialgleichungen erster Ordnung dar.

Ansatz:

1. $x_1, x_2$ zuordnen:

$x_1 = x$

$x_2 = x'$

2. einsetzen in Gleichung und umstellen:

$x_2' + \delta x_2 + \alpha x_1 + \beta x_1^3 = \gamma\cos(\omega_0 t) \quad | -(\delta x + \alpha x_1 + \beta x_1^3)$

$x_2' = -\delta x_2 - \alpha x_1 - \beta x_1^2 + \gamma\cos(\omega_0 t)$

3. Gleichungssystem aufstellen:

$x_1' = x_2$

$x_2' = -\delta x_2 - \alpha x_1 - \beta x_1^2 + \gamma\cos(\omega_0 t)$

① Differenzialgleichung 1. Ordnung

| Name, Vorname Matrikelnummer | HOCHSCHULE ESSLINGEN |
|---|---|
| Prüfungsfach: Mathematik 2 | Wintersemester 22/23 |
| Studiengänge: SWB/TIB/IEP |  |

## Aufgabe 2 (8 Punkte)

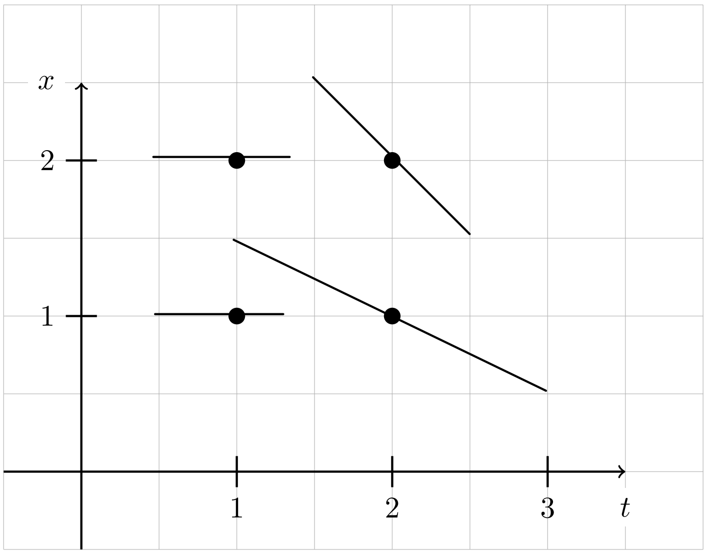
Gegeben ist die Differenzialgleichung erster Ordnung

$$t\,\dot{x} = (1-t)x$$

und der Anfangswert $x(1) = 1$.

**a)** Berechnen Sie die Lösung $x$ des Anfangswertproblems.

**b)** Skizzieren Sie das Richtungsfeld der Differenzialgleichung an den vier markierten Punkten, d.h. für $t \in \{1, 2\}$ und $x \in \{1, 2\}$.




Ansatz DGL 1. Ordnung homogen nicht linear:

① umschreiben von $x'$ zu $\frac{dx}{dt}$ und umstellen:

a) $t x' = (1-t)x$

$t \frac{dx}{dt} = (1-t)x \quad | \cdot dt \quad | : x \quad | : t$

$\frac{1}{x}\,dx = \frac{(1-t)}{t} \cdot dt$

② integrieren:

$\int \frac{1}{x}\,dx = \int \frac{(1-t)}{t} \cdot dt$

$\int \frac{1}{x}\,dx = \int \frac{1}{t}\,dt \int \frac{-t}{t}\,dt$ Bruch unbedingt auseinander ziehen! — nicht vergessen!

$\int \frac{1}{x}\,dx = \int \frac{1}{t}\,dt - \int 1\,dt$

$\ln(x) = \ln(t) - t + \underline{C}$ ← integrationskonstante nicht vergessen!

$e^{\ln(x)} = e^{\ln(t) - t + c}$

$x = t \cdot e^{-t+c}$

③ einsetzen AWP: $x_1 = 1, t = 1$:

↳ $1 = 1e^{-1+c} \quad | \ln$

$\ln(1) = \ln(1e^{-1+c})$

$0 = -1 + c \quad | +1$

$c = 1$

④ einsetzen von $C = 1$ in Gleichung:

↳ $x = t \cdot e^{-t+1}$

b) Steigung:

$t x' = (1-t) \cdot x \quad | : t$

$x' = \frac{(1-t) \cdot x}{t}$

↳ $x = 1$, $t = 1$:

$x' = \frac{(1-1) \cdot 1}{1} = 0$

↳ $x = 2$, $t = 1$:

$x' = \frac{(1-1)}{1} \cdot 2 = 0$

↳ $x = 2$, $t = 2$:

$x' = \frac{(1-2)}{2} \cdot 2 = -\frac{1}{2} \cdot 2 = -1$

↳ $x = 1$, $t = 2$:

$x' = \frac{(1-2)}{2} \cdot 1 = -\frac{1}{2}$

② allgemein reelle Lösung Differenzialgleichungssystem

| | |
|---|---|
| Name, Vorname Matrikelnummer | HOCHSCHULE ESSLINGEN |
| Prüfungsfach: Mathematik 2 | Wintersemester 22/23 |
| Studiengänge: SWB/TIB/IEP | Seite: 5 von 12 |

**Aufgabe 3 (10 Punkte)** Gegeben ist das Differenzialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2\,x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 &= 2\,x_1 \end{aligned}$$

**a)** Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung des Differenzialgleichungssystems.

**b)** Ist das Differenzialgleichungssystem asymptotisch stabil? Bitte begründen Sie Ihre Antwort!

Hinweis:

-> verrechnen von Vektoren: $(a+b)\cdot\binom{c}{d} = a\cdot\binom{c}{d} + b\cdot\binom{c}{d} = \binom{ac}{ad} + \binom{bc}{ad}$

Ansatz:

① Matrix aufstellen:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} x$$

② Eigenwerte berechnen $A = \lambda \cdot I$:

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 \\ 2 & 0-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)\cdot(0-\lambda) - 2\cdot(-1) = \lambda^2 + 2\lambda + 2$$

MNF:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i$$

$\hookrightarrow \lambda_1 = -1 + i \quad , \lambda_2 = -1 - i$

③ Eigenvektoren v berechnen zu $\lambda_1 = -1 + i$: ⇐ es reicht 1 komplexer Eigenwert aus, muss nicht extra noch für $\lambda_2$ machen

$$\begin{pmatrix} -2-(-1+i) & -1 \\ 2 & 0-(-1+i) \end{pmatrix} \cdot v = \begin{pmatrix} -1-i & -1 \\ 2 & 1-i \end{pmatrix} \cdot v = 0$$

$\hookrightarrow$ I $(-1-i)x_1 - 1x_2 = 0 \quad | + x_2$

II $2x_1 + (1-ix_2) = 0$

$\hookrightarrow x_2 = (-1-i)x_1$ in II: $2x_1 + (1-i)(-1-i)x_1 = 0$

$= 2x_1 + (-1+i-i+i^2)x_1 = 0$

$= 2x_1 + (-1-1)x_1 = 0$

$\longrightarrow 0 = 0$

$\hookrightarrow 0=0$ wähle $x_1 = 1$ in I: $x_2 = -1-i$

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1-i \end{pmatrix} \cdot (-1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1+i \end{pmatrix}$$ ← Vorzeichenwechsel

④ komplexe Fundamentallösung zu $\lambda_1 = -1+i$ und $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1+i \end{pmatrix}$:

$$z(t) = e^{\lambda_1 t} \cdot v = e^{(-1+i)t} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1+i \end{pmatrix}$$

⑤ Umformung für reelle Lösung:

$$z(t) = e^{\lambda t} \cdot v = e^{(a+bi)t} \cdot v = e^{at} \cdot e^{bit} \cdot v = \boxed{e^{at} \cdot (\cos(bt) + i \cdot \sin(bt)) \cdot v}$$

↳ einsetzen in Form für $\lambda_1 = -1 \pm i$ für $a = -1$, $b = 1$:

$$z(t) = e^{-t} (\cos(t) + i \sin(t)) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1+i \end{pmatrix}$$

⑥ aufteilen des Vektors $v = \begin{pmatrix} -1+0i \\ 1+1i \end{pmatrix}$ in $v_{real}$ und $v_{imag}$:

↳ $v_{real} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_{imag} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ← im ersten Teil kam keine i vor
← hier kam i vor

⑦ bilden reeller Lösung durch einsetzen von $v_{real}$, $v_{imag}$, a, b:

$$\boxed{z(t) = c_1 e^{at} \cdot (\cos(bt) \cdot v_{real} - \sin(bt) \cdot v_{imag})) + c_2 e^{at} (\sin(bt) \cdot v_{real} + \cos(bt) \cdot v_{imag})}$$

$$= c_1 e^{-t} \cdot \left(\cos(t) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \sin(t) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + c_2 e^{-t} \left(\sin(t) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \cos(t) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= c_1 e^{-t} \cdot \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ \cos(t) - \sin(t) \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \sin(t) + \cos(t) \end{pmatrix}$$

b) Asymptotisch stabil, wenn Eigenwerte negativen Realteil besitzen,
da $-1$ asymptotisch stabil

③ umwandeln Rekursive in Explizite Form

| Name, Vorname Matrikelnummer | HOCHSCHULE ESSLINGEN |
|---|---|
| Prüfungsfach: Mathematik 2 | Wintersemester 22/23 |
| Studiengänge: SWB/TIB/IEP | Seite: 7 von 12 |

unterschiedliche Formen, explizite, rekursive, Normalenform

Umformen erfordert so möglich?

**Aufgabe 4 (8 Punkte)** Geben ist die rekursiv definierte Folge $(x_k)$ mit

$$x_{k+2} = \frac{x_{k+1} + x_k}{2}, \quad x_0 = 0,\ x_1 = 2.$$

**a)** Ermitteln Sie die expliziten Werte der Folgenglieder $x_2$, $x_3$, $x_4$ und $x_5$.

**b)** Lösen Sie die Differenzengleichung, d.h. geben Sie eine Formel an, mit der man das Folgenglied $x_k$ direkt für jeden Index $k$ berechnen kann.

explizite

① explizite Folgenglieder ermitteln:

a) ↳ einfach nur einsetzen!

$\rightarrow x_2 = \frac{2+0}{2} = 1$

$\rightarrow x_3 = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$

$\rightarrow x_4 = \frac{\frac{3}{2}+1}{2} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$

$\rightarrow x_5 = \frac{\frac{5}{4}+\frac{3}{2}}{2} = \frac{11}{8}$

b) Ansatz: umwandeln Rekursive in explizite:

① Form umschreiben in Normalenform:

$$x_{k+2} = \frac{x_{k+1}+x_k}{2} \quad \Big| - \left(\frac{x_{k+1}+x_k}{2}\right)$$

$$x_{k+2} - \left(\frac{x_{k+1}+x_k}{2}\right) = 0$$

$$x_{k+2} - \frac{1}{2}x_{k+1} - \frac{1}{2}x_k = 0$$

② Charakteristische Gleichung und homogene Lösung:

$$\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2} = 0$$

MNF:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{2}^2 - 4\cdot(\frac{1}{2})}}{2} = \frac{-\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}}{2}$$

$\hookrightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2}$

allgemein homogene Lösung: $\boxed{x_{kh} = C \cdot \lambda_1^k + C \cdot \lambda_2^k}$ ← mit doppelter Nullstelle wäre $x_k = (C_1 k + C_2)\lambda^k$

$\rightarrow$ homogene Lösung: $x_{kh} = C_1 \cdot 1^k + C_2 \cdot (-\frac{1}{2})^k = C_1 + C_2 \cdot (-\frac{1}{2})^k$

③ Anfangswerte derchen LGS aufstellen: ← bei mehreren $x_0, x_1$ LGS aufstellen!

$x_0 = 0$ einsetzen für $x_n$:

$\hookrightarrow 0 = C_1 + C_2$

$x_1 = 2$ einsetzen für $x_n$:

$\hookrightarrow 2 = C_1 + C_2 \cdot -\frac{1}{2}$

→ LGS aufstellen:

$\text{I} \quad 1C_1 + 1C_2 = 0$

$\text{II} \quad 1C_1 - \frac{1}{2}C_2 = 2 \quad | + \frac{1}{2}C_2$

$\hookrightarrow C_1 = 2 + \frac{1}{2}C_2$ einsetzen in I:

$2 + \frac{1}{2}C_2 + C_2 = 0 \quad | -2$

$\frac{3}{2}C_2 = -2 \quad | : \frac{3}{2}$

$C_2 = -\frac{4}{3}$ in II:

$\hookrightarrow C_1 = 2 + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3}$

④ einsetzen von $C_1 = \frac{4}{3}$, $C_2 = -\frac{4}{3}$ in $x_n$:

$x_n = \frac{4}{3} - \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$

# 5) Entwickeln von Reihen

| | |
|---|---|
| Name, Vorname Matrikelnummer | HOCHSCHULE ESSLINGEN |
| Prüfungsfach: Mathematik 2 | Wintersemester 22/23 |
| Studiengänge: SWB/TIB/IEP | Seite: 9 von 12 |

**Aufgabe 5 (8 Punkte)** Gegeben ist die Funktion $f$ mit

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x^2} \sin(x)\,.$$

**a)** Ist die Funktion $f$ gerade, ungerade oder weder gerade noch ungerade?

**b)** Entwickeln Sie die Funktion $f$ in eine Potenzreihe um die Entwicklungsstelle $x_0 = 0$. Geben Sie dabei alle Glieder bis zur Ordnung 4 explizit an. zum entwickeln $e^{-x^2} \cdot \sin(x)$, separat entwickeln $e^{-x^2}$ und $\sin(x)$ anschließend Reihen multiplizieren

**c)** Welchen Konvergenzradius hat die Potenzreihe aus Aufgabenteil **b)**?

**d)** Berechnen Sie für das bestimmte Integral

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2} \sin(x)\,\mathrm{d}\,x$$

mithilfe der Potenzreihe aus Aufgabenteil **b)** einen Näherungswert.

a) Prüfung auf Geradheit:

↳ Funktion gerade wenn $f(x) = f(-x)$

$$f(-x) = e^{-(-x)^2} \sin(-x)$$

$$= e^{x^2} \cdot (-\sin(x))$$

← kann man umschreiben

es ist egal ob $-x^2$ oder $x^2$, da immer das gleiche Ergebnis rauskommt!

$$= -e^{-x^2} \cdot \sin(x)$$

← es ist also $-f(x)$ geworden

-> Funktion ungerade wenn $f(-x) = -f(x)$

↳ in der Rechnung oben wurde bewiesen, dass für $-x$ eingesetzt $-f(x)$ herauskommt also ungerade.

b) Ansatz:

↳ entwickeln entsprechender Formen im Cheat Sheet anschauen!

-> allgemeine Form Maclaurin-Reihen für $f(x)$: $\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n}$

-> Form $\boxed{\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}, \dots}$

-> Form $\boxed{e^x: \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}, \dots}$

**Die wichtigsten Potenzreihen**

Lösungsansatz — gegeben — r

- $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots, \quad r = 1$
- $\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots, \quad r = \infty$
- $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \pm \dots, \quad r = \infty$
- $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp \dots, \quad r = \infty$

-> spezieller Ansatz für $e^{-x^2}$:

$$\boxed{e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots}$$

← unbedingt merken!

alternierend: Faktor $(-1)^k$ vor Potenzreihe: z.B. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{k!}$

ungerade Potenzen: $2k-1$ im Exponent: z.B. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2k x^{2k-1}}{k!}$

immer +2: $2kx$ als Faktor: z.B. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2k x^{2k-1}}{k!}$

wenn es sich verdoppelt: $2^k x$ als Faktor: z.B. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{2^k x^{2k-1}}{k!}$

← wie man Potenzreihen manipulieren kann!

① Reihen separat nur für $e^{-x^2}$ und $\sin(x)$ extra entwickeln bis zu Ordnung 4:

spezielle Form $\rightarrow$ $e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!}$ ← $e^{-x^2}$ ist gerade Funktion, da $e^{-x^2}$ ← Exponent nur elemente mit gerader Potenz wichtig 1! verschiebt sich, anders als bei normaler Reihe

$\sin(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!}$

② Reihen miteinander multiplizieren:

$e^{-x^2} \cdot \sin(x) = \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} \pm \dots\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} \pm \dots\right)$ ← Fakultäten ausrechnen $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$

$= \left(1 - \frac{x^2}{1} + \frac{x^4}{2}\right)\left(x - \frac{x^3}{6}\right)$

$= x - x^3 + \cancel{\frac{x^5}{2}} - \frac{x^3}{6} + \cancel{\frac{x^5}{6}} - \cancel{\frac{x^7}{12}}$ ← diese können weggestrichen werden, da höhere Ordnung als 4!!!

$= x - x^3 - \frac{x^3}{6}$ ← nur Ordnungen bis 4 vorhanden!

$= x - \frac{7}{6}x^3 \pm \dots$

c) → Der Konvergenzradius ist für $e^x$, $\sin(x)$, $\cos(x)$ immer $r = \infty$.

→ bei $\frac{1}{1-x}$ → $r = 1$

d) Näherungswert des bestimmten Integral berechnen:

$\int_0^1 e^{-x^2} \sin(x)$

$= \int_0^1 x - \frac{7}{6}x^3 \pm \dots \, dx$

$= \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{6} \cdot \frac{1}{4}x^4 \pm \dots\right]_0^1$

$= \frac{1}{2} - \frac{7}{24} - 0 \pm \dots \approx \frac{5}{24}$

| Name, Vorname | Matrikelnummer | HOCHSCHULE ESSLINGEN |
|---|---|---|
| Prüfungsfach: Mathematik 2 | | Wintersemester 22/23 |
| Studiengänge: SWB/TIB/IEP | |  |

**Aufgabe 6 (10 Punkte)** Gegeben ist die periodische Funktion $f$, mit

$$f(t) = 5\,\mathrm{e}^{-t} \text{ für } t \in [0, 2\,\pi), \quad f(t + 2\,\pi) = f(t)\,.$$

**a)** Skizzieren Sie die Funktion $f$ für $t \in [-\pi, 4\,\pi]$.

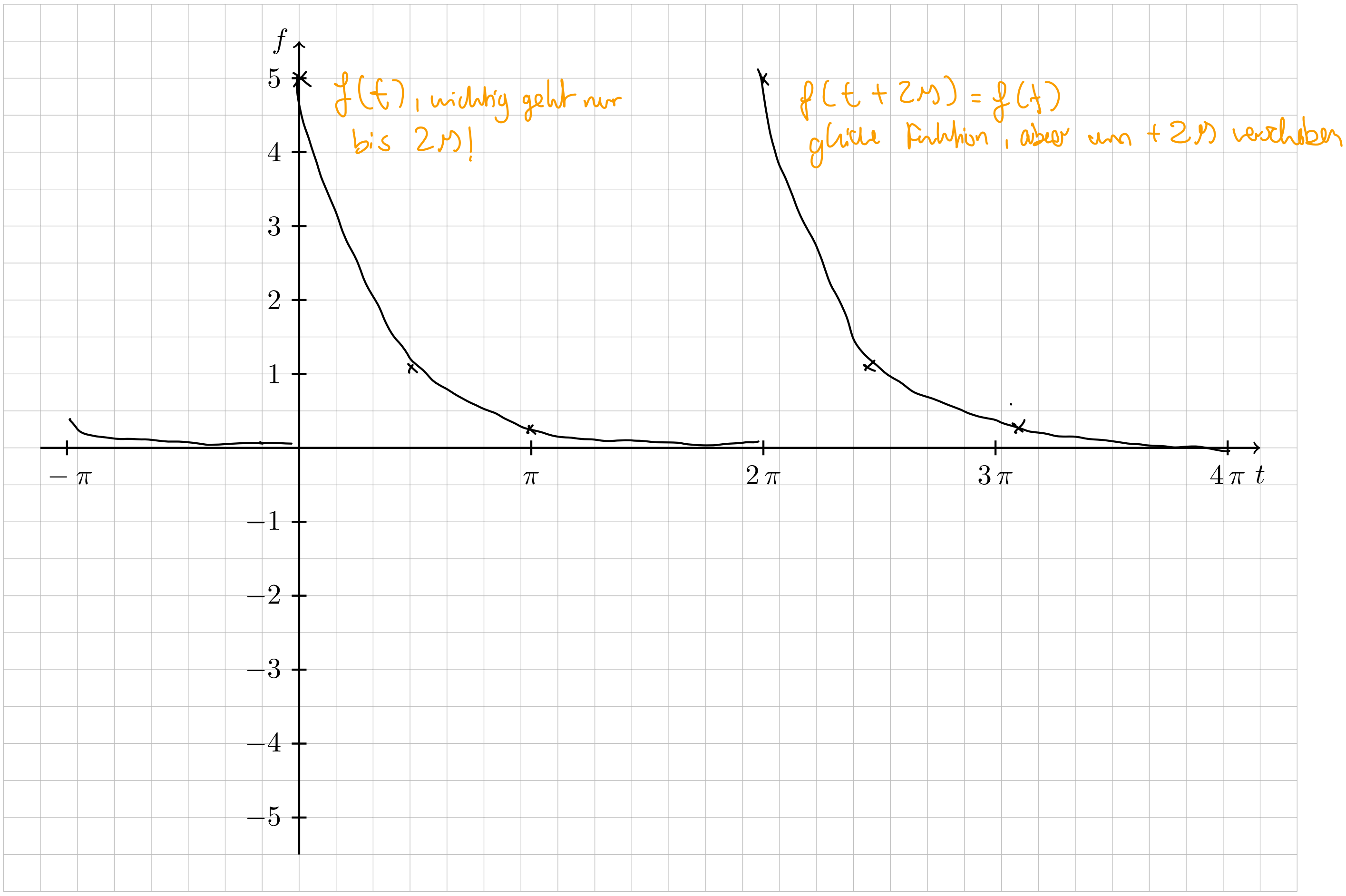
$c_k$ eigene Formel!

**b)** Bestimmen Sie eine Formel für die komplexen Fourier-Koeffizienten $c_k$ der Funktion $f$, für $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

↳ standardformel anwenden!

**c)** Welchen Mittelwert $m$ hat die Funktion $f$?

**d)** An welchen Stellen tritt bei der Funktion $f$ das Gibbsche Phänomen auf? Wie groß sind die Überschwinger?



b) 1. Kreisfrequenz $\omega$ finden:

↳ allgemeine Formel:

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$ Intervall von $[0, 2\pi)$

2. allgemeine Formel komplexe Koeffizienten:

$$\boxed{c_k = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega t}\,\mathrm{d}t, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots}$$ ← allgemeine Funktion mit der wir arbeiten

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{-ik\omega t}\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 5e^{-t} \cdot e^{-ik1t}\, dt$$

3. Integrieren und vereinfachen:

5 rausgezogen

$$c_k = \frac{5}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-t-ikt}\, dt$$

t rausgezogen

$$= \frac{5}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{(-1-ik)t}\, dt$$ ← Bsp $e^{4x}$ integriert $= \frac{e^{4x}}{4}$

merken!! $\boxed{e^{-ik2\pi} = 1}$ $\boxed{e^{-ik\pi} = (-1)^k \text{ als Vergleich}}$

$$= \frac{5}{2\pi}\left[\frac{e^{(-1-ik)t}}{-1-ik}\right]_0^{2\pi}$$

Bruch konnte man einfach rausziehen

$$= \frac{5}{2\pi}\left(\frac{e^{(-1-ik)2\pi}}{-1-ik} - \frac{e^{(-1-ik)\cdot 0}}{-1-ik}\right) = \frac{5}{2\pi(-1-ik)}\cdot\left(e^{-2\pi}\cdot e^{-ik2\pi} - e^0\right)$$

$$= \frac{5}{-2\pi - ik2\pi}\cdot\left(e^{-2\pi}\cdot 1 - 1\right)$$

$$= \frac{5e^{-2\pi}-1}{-2\pi-ik2\pi}$$

c) 4. Mittelwert bestimmen:

↳ einfach $c_0$ berechnen also für $k=0$ einsetzen

$$\rightarrow c_0 = \frac{5e^{-2\pi}-1}{2\pi} \approx 0{,}79$$

d) 5. Gibbsches Phänomen:

→ Dort wo Diskontinuitäten auftreten, also Graph „eckig ist etc"

→ meistens so, dass Differenz genommen wird von dem Abstand der Funktion

↳ $t_k = k\cdot 2\pi,\ k = 0, 1, 2, 3 \ldots$

Überschwinger: höhere Stelle

$$\boxed{\pm 0{,}09\cdot(5e^{-0} - 5e^{-2\pi}) \approx \pm 0{,}45}$$ Standard, niedrigere Stelle

← höchster und niedrigster Wert aus normaler Gleichung nicht von Koeffizienten formel!!