Name, Vorname Matrikelnummer	HOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2	Sommersemester 23
Studiengänge: SWB/TIB/IEP	Seite: 1 von 13
Prüfungsnummer: IT 105 20 03 und 105 20 13	Zeit: 90 Minuten
Dozent: Prof. Dr. Jürgen Koch	Punkte: 54

Hilfsmittel: Manuskript
Literatur
Taschenrechner Casio FX-87DE Plus / Casio FX-87DE Plus 2nd edition

Hinweise: **Bearbeiten Sie die Aufgaben ausschließlich auf diesen Prüfungsblättern.**
Begründen Sie alle Lösungsschritte.

Aufgabe 1 (10 Punkte) Hinweis: Alle Teilaufgaben können unabhängig voneinander bearbeitet werden.

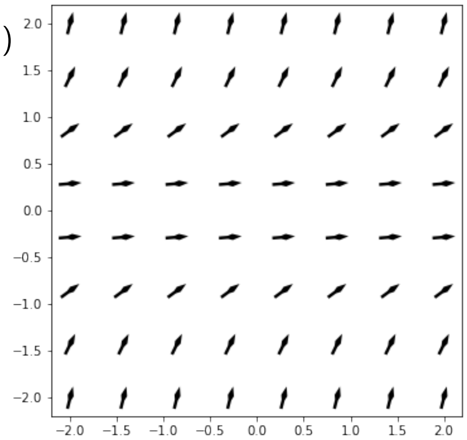
a) Ordnen Sie den Differenzialgleichungen die Richtungsfelder zu:

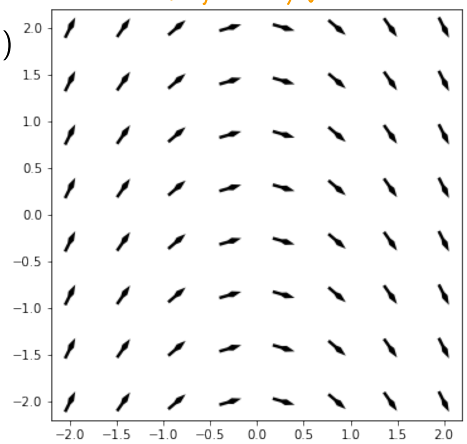
(A) $y' = -y$
→ oberhalb x-Achse neg, unterhalb pos

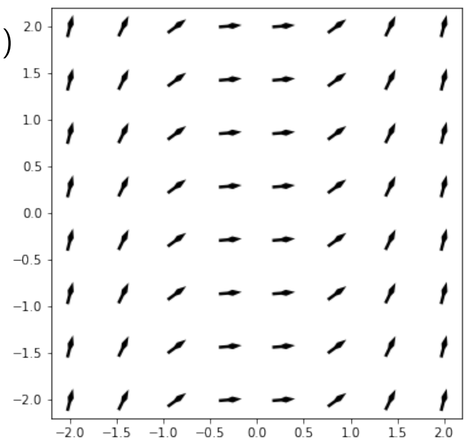
(B) $y' = -x$
↳ links von 0 pos rechts neg.

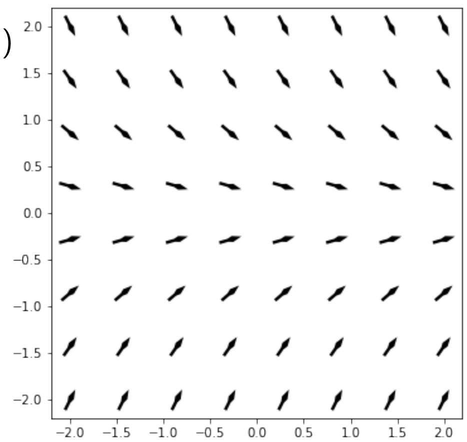
(C) $y' = y^2$
↳ immer positiv, stärkere Steigung, wenn y größer

(D) $y' = x^2$
↳ immer pos., stärkere Steigung, wenn x größer

(C)


(B)


(D)


(A)


b) Welche Differenzialgleichung ist linear? Bitte kreuzen Sie den entsprechenden Eintrag an:

$y'' + 2\,y' + y = \sin(x)$	☒ linear	☐ nicht linear
$y'' + 2\,y' + \sin(y) = 0$	☐ linear	☒ nicht linear
$y'' + 2\,y' + \sin(x) = 0$	☒ linear	☐ nicht linear
$y'' + 2\,y' + \sin(x)\,y = 0$	☒ linear	☐ nicht linear

c) Die Differenzialgleichung der Balkendurchbiegung $w(x)$ lautet:

$$\frac{w''(x)}{(1+(w'(x))^2)^{3/2}} = -\frac{M_y(x)}{E\,I_y}\,.$$

Dabei bezeichnet $M_y(x)$ das Biegemoment an der Stelle x, E das Elastizitätsmodul des Balkenmaterials und I_y das axiale Flächenträgheitsmoment des Balkenquerschnitts. Stellen Sie die Differenzialgleichung mit Zustandsvariablen durch ein äquivalentes System von Differenzialgleichungen erster Ordnung dar.

1. Zustandsvariablen:

$z_1 = w\,,\quad z_2 = w'$

2. erstellen z_1', z_2':

$z_1' = z_2$

$z_2' = (1 + (z_2)^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \left(-\frac{M_y(x)}{E\,I_y}\right)$

d) Folgende Frage wurde ChatGPT in der Version vom 12. Mai 2023 gestellt:

`Ein Teich enthält 1000 Liter Wasser. Täglich verdunsten 2% des Wassers im Teich und 10 Liter Wasser werden nachgefüllt. Wieviel Wasser enthält der Teich nach 2 Tagen?`

Die Antwort lautete:

`Zuerst berechnen wir die tägliche Verdunstungsmenge: 2% von 1000 Litern sind 20 Liter. Da täglich 10 Liter Wasser nachgefüllt werden, verringert sich die Wasserstandsmenge um 10 Liter - 20 Liter = -10 Liter pro Tag. Nach 2 Tagen würde sich die Wassermenge im Teich um -10 Liter * 2 Tage = -20 Liter verringern. Da der Wasserverlust die Nachfüllung übersteigt, enthält der Teich nach 2 Tagen kein Wasser mehr.`

Bestimmen Sie die korrekte Wassermenge im Teich nach 2 Tagen mithilfe einer Differenzengleichung.

$a_{n+1} = a_n \cdot 0{,}98 + 10 \quad , a_0 = 1000$

$a_1 = 1000 \cdot 0{,}98 + 10 = 990$

$a_2 = 990 \cdot 0{,}98 + 10 = 980{,}2$

rekursiv: a_{n+1}
explizit: a_n

e) Welchen Grenzwert S hat die Reihe

$$S = \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k ?$$

$\boxed{S = \frac{1}{1-q}} \quad , q = \frac{1}{3}$ (falls nicht ≥ 1, dann unendlich)

$S = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = 1 : \frac{2}{3} = 1 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

↳ da aber bei $k=2$ Startet und man $k=0$, muss noch die ersten 2 Glieder abgezogen werden also $\left(\frac{1}{3}\right)^0 + \left(\frac{1}{3}\right)^1$:

↳ $S = \frac{3}{2} - \left(\left(\frac{1}{3}\right)^0 + \left(\frac{1}{3}\right)^1\right) = \frac{3}{2} - 1 - \frac{1}{3} = \frac{9-6-2}{6} = \frac{1}{6}$

Name, Vorname	Matrikelnummer	HOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2		Sommersemester 23
Studiengänge: SWB/TIB/IEP		

Aufgabe 2 (8 Punkte) Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$y' = (y+1)\cos(x), \quad y(0) = 1.$$

a) Ist die Differenzialgleichung linear?

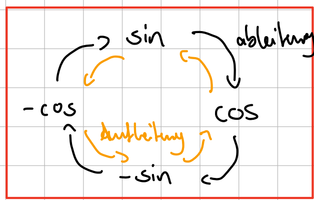
b) Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems.

hier steht nicht x_0, deshalb ist dies schon vollständiger Schritt

c) Ermitteln Sie einen Näherungswert $\tilde{y}_1$ für die Lösung des Anfangswertproblems an der Stelle $x = 0.1$, indem Sie einen Schritt mit dem Euler-Polygonzugverfahren mit der Schrittweite $h = 0.1$ durchführen. Wie weit weicht der Näherungswert $\tilde{y}_1$ von der exakten Lösung ab?

a) nein die Differenzialgleichung ist nicht linear, da y mit cos(x) multipliziert wird

b) Ansatz:



1. $y' = \frac{dy}{dx}$ und trennen der Variablen:

$$\frac{dy}{dx} = (y+1)\cos(x) \quad | \cdot dx \quad | : (y+1)$$

$$\int \frac{1}{(y+1)}\, dy = \int \cos(x)\, dy$$

$$\ln|y+1| = \sin(x) + C \quad | e \qquad C \in \mathbb{R}$$

nicht +C vergessen!

$$|y+1| = e^{\sin(x)+c}$$

$$y+1 = \pm e^{c} \cdot e^{\sin(x)} \quad | -1$$

$$y = C_1 \cdot e^{\sin(x)} - 1 \qquad C \in \mathbb{R}$$

2. Anfangswertproblem einsetzen $x = 0,\ y = 1$:

$$1 = C \cdot e^{\sin(0)} - 1 \quad | +1$$

$$2 = C \cdot 1$$

$$\hookrightarrow C = 2$$

3. aufstellen der Gleichung mit Anfangswertproblem:

$$y = 2 \cdot e^{\sin(x)} - 1$$

c) Euler Polygonzugverfahren:

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)} \qquad \boxed{x_1 = x_0 + h}$$

1. Schritte berechnen: $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ ← oben schon gegeben mit $y(0) = 1$!

$\hookrightarrow f(x_0, y_0) = (1+1) \cdot \cos(0.1)$ ← ursprüngliche Gleichung verwenden, nicht umgestellte!

$\hookrightarrow x_1 = 0.1$ ← wurde oben schon gegeben, sehr tricky

$$\tilde{y}_1 = 1 + 0{,}1 \cdot (1+1) \cdot \cos(0) = 1{,}2$$

2. Abweichung berechnen:

→ exakte Lösung: ← hier wurde aus Anfangswertproblem Gleichung genommen

$$y(0{,}1) = 2 \cdot e^{\sin(0{,}1)} - 1 \approx 1{,}2099$$

$$\rightarrow y(0{,}1) - \tilde{y}_1 = 1{,}2099 - 1{,}2 \approx 0{,}009974$$ ← Differenz von exaktem Wert und Approximation

$a = 0$ sehen

$f_1 = (\underbrace{x+1}_{p})(\underbrace{x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1}_{q})$

$x = 0$ einsetzen $\rightarrow f_1 \not\equiv 0 \mod 2$

$x = 1$ einsetzen

$\hookrightarrow f_1 = (1+1)(x^4 + \ldots)$

$\hookrightarrow (1+1) = 2$, da p gerade $f_1 \equiv 0 \mod 2$

$a = 0$

$f_2 = (\underbrace{x^2 + x + 1}_{p})(x^3 + \ldots)$

$x = 0$ einsetzen: $f_2 = (0^2 + 0 + 1)(1^3 + \ldots)$

$\hookrightarrow p = 1$ ungerade also $f_2 \not\equiv 0 \mod 2$

$x = 1$ einsetzen: $f_2 (1^2 + 1 + 1)(1^3 + \ldots)$

$\hookrightarrow p = 3$ ungerade, also $f_3 \not\equiv 0 \mod 2$

Aufgabe 3 (10 Punkte) Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der Differenzialgleichung

$$y'' + 4\,y = 3\,\cos(2\,x)\,.$$

Ansatz:

→ inhomogen linear 2. Ordnung

① charakteristische Gleichung und λ berechnen:

$$\lambda^2 + 4 = 0 \quad | -4$$

$$\lambda^2 = -4 \quad | \sqrt{\ }$$

$$\lambda = \sqrt{-4} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = \pm 2i$$ ← $\pm 2i$ nicht $2 \pm i$!!!

↳ $\lambda_1 = 2i \quad , \quad \lambda_2 = -2i$

② in entsprechende homogene Darstellung:

$\boxed{y_{CH} = c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{\lambda x}}$ ← homogen, komplex

$\boxed{y_{RH} = e^{\alpha x}\left(c_1 \cdot \cos(\beta x) + c_2 \cdot \sin(\beta x)\right)}$ ← homogene, reel

↳ $\lambda_{1,2} = \underline{0} \pm \underline{2}i$ ← $\alpha = 0$, $\beta = 2$

$$\to y_{RH} = e^{0 \cdot x}\left(c_1 \cdot \cos(2x) + c_2 \cdot \sin(2x)\right)$$

$$= C_1 \cdot \cos(2x) + C_2 \cdot \sin(2x)$$

③ entsprechender Ansatz partikuläre Lösung:

Bestimmung der partikulären Lösung und Störfunktion:

BESTIMMUNG DER PARTIKULÄREN LÖSUNG

Schleife über alle Linearkombinationen / Superposition

Zugeordneter EW		Störfunktion		Ansatz für partikuläre Lösung
$\tilde{\lambda} = 0$	←	Polynom vom Grad m $r(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$	→	$\tilde{y}_p(x) = A_0 + A_1 x + \ldots + A_m x^m$
$\tilde{\lambda} = k$	←	Exponentialfunktion $r(x) = a e^{kx}$	→	$\tilde{y}_p(x) = A e^{kx}$
$\tilde{\lambda} = \pm \omega i$	←	Harmonische Schwingung $r(x) = a_1 \cos(\omega x) + a_2 \sin(\omega x)$	→	$\tilde{y}_p(x) = A_1 \cos(\omega x) + A_2 \sin(\omega x)$
$\tilde{\lambda} = k \pm \omega i$	←	Gedämpfte harmonische Schwingung $r(x) = e^{kx}(a_1 \cos(\omega x) + a_2 \sin(\omega x))$	→	$\tilde{y}_p(x) = e^{kx}(A_1 \cos(\omega x) + A_2 \sin(\omega x))$

Name, Vorname	Matrikelnummer	HOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2		Sommersemester 23
Studiengänge: SWB/TIB/IEP		

③ entsprechender Ansatz partikuläre Lösung und y_p', y_p'' bilden:

Resonanz beachten!!

$\hookrightarrow \boxed{y_p(x) = A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)}$

↳ ist normalerweise der Ansatz, aber die Partikuläre, muss sich von der ho[mogenen] unterscheiden deshalb:

Störfunktion $r(x) = 3\cos(2x)$ kommt im Ansatz vor → da $\cos(x)$ vorkommt Resonanz, wenn $r(x)$ auch in Ansatz vorkommt

$\boxed{y_p(x) = x\cdot(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x))}$ ← das ist der Ansatz wenn $y_p = y_h$ wäre, deshalb noch $\cdot x$!

$= x\cdot(A\cdot\cos(2x) + B\sin(2x))$

Ansatz Resonanz, da immer noch zusätzlich $\cdot x$, immer wenn Störfunktion auch in Ansatz vorkommt

$y_p' = 1\cdot(A\cdot\cos(2x) + B\sin(2x)) + x\cdot(-2A\sin(2x) + 2B\cos(2x))$

$y_p'' = -2A\sin(2x) + 2B\cos(2x) - 2A\sin(2x) + 2B\cos(2x)$

$+ x\cdot(-4A\cos(2x) - 4B\sin(2x))$

$= -4A\sin(2x) + 4B\cos(2x) + x\cdot(-4A\cos(2x) - 4B\sin(2x))$

④ einsetzen in ursprüngliche Gleichung von y_p'' und y_p:

$-4A\sin(2x) + 4B\cos(2x) + x\cdot(-4A\cos(2x) - 4B\sin(2x)) + 4(x\cdot(A\cdot\cos(2x) + B\sin(2x))) - 3\cos(2x)$

$-4A\sin(2x) + 4B\cos(2x) = 3\cos(2x)$ ← es sollte sich immer viel rauskürzen, als Kontrolle

⑤ Koeffizientenvergleich:

beachten, dass auch 0 sein kann →

$-4A\sin(2x) + 4B\cos(2x) = 0 \quad + 3\cos(2x)$

I $-4A\sin(2x) = 0 \quad |:(-4\cdot\sin(2x))$

↳ $A = 0$

II $+4B\cos(2x) = 3\cos(2x) \quad |: 4B\cos(2x)$

↳ $B = \frac{3}{4}$

← Koeffizientenvergleich mit trigonometrischen Funktionen werden trigonometrische Funktionen miteinander verglichen und nicht Faktoren von x

⑥ allgemeine Reelle Lösung:

$y = y_h + y_p = C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x) + \frac{3}{4}x\sin(2x)$

zu Koeffizientenvergleich:

z.B $(2Ax+1) + 3B = 5x + 6$

↳ $2Ax + 3B + 1 = 5x + 6$ ← so sieht man den Koeffizientenvergleich an

I $2A = 5$

II $3B + 1 = 6$

Beispiel 2:

$(2Ax+1) + 3Bx = 5x + 6$

$2Ax + 3Bx + 1 = 5x + 6$

$(2A + 3B)x + 1 = 5x + 6$ ← immer zuerst umstellen

I $2A + 3B = 5$

II $1 = 6$ ↯

Name, Vorname Matrikelnummer	HOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2	Sommersemester 23
Studiengänge: SWB/TIB/IEP	Seite: 8 von 13

Wie wäre es inhomogen Lösungsansatz?

Aufgabe 4 (8 Punkte) Gegeben ist das Differenzengleichungssystem

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= -2\,x_k + 3\,y_k, \\ y_{k+1} &= 2\,x_k + 3\,y_k, \end{aligned} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

a) Berechnen Sie die allgemeine Lösung des Differenzengleichungssystems.

b) Ist das Differenzengleichungssystem asymptotisch stabil?

Ansatz:

1. Eigenwerte durch det $A - \lambda \cdot I$:

$$\begin{pmatrix} x_{u+1} \\ y_{u+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-\lambda & 3 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow \begin{vmatrix} -2-\lambda & 3 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)(3-\lambda) - 2\cdot 3 = -6 - 3\lambda + 2\lambda + \lambda^2 - 6 = \lambda^2 - \lambda - 12 = 0$$

MNF:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2}$$

$$\hookrightarrow \lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = -3$$

2. Eigenvektoren berechnen:

$\hookrightarrow$ von $\lambda_1 = 4$:

$$\begin{pmatrix} -2-4 & 3 \\ 2 & 3-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ von $\lambda_1 = -3$:

$$\begin{pmatrix} -2-(-3) & 3 \\ 2 & 3-(-3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow V_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ in Klausur nochmal gegenrechnen ob passend! z.B $\begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 3(-1) \\ 2 \cdot 3 + 6 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

3. allgemeine Lösung:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} = C_1 \lambda_1^u \cdot V_1 + C_2 \lambda_2^u \cdot V_2}$$ $\leftarrow$ allgemeine Lösung für homogen ohne Spezialfälle

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = C_1 \cdot 4^u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 \cdot (-3)^u \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

4. Asymptotisch stabil?

$\rightarrow$ Beträge der Eigenwerte ist nicht < 1, deshalb nicht asymptotisch stabil

Name, Vorname Matrikelnummer	HOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2	Sommersemester 23
Studiengänge: SWB/TIB/IEP	

Aufgabe 5 (8 Punkte) Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{1}{x}\ln(1+x)\,.$$

a) Geben Sie die Potenzreihe der Funktion f an.

b) Welchen Konvergenzradius r hat die Potenzreihe aus Aufgabenteil **a)**.

c) Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} f(x)$$

mithilfe der Potenzreihe aus Aufgabenteil **a)**.

d) Berechnen Sie einen Näherungswert $\tilde{I}$ für das bestimmte Integral

$$I = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x$$

mithilfe der Potenzreihe aus Aufgabenteil **a)** mit allen Gliedern bis zur Ordnung 2.

e) Schätzen Sie die maximale Abweichung des Näherungswertes $\tilde{I}$ aus Aufgabenteil **d)** vom exakten Wert I mithilfe des Leibniz-Kriteriums.

Die wichtigsten Potenzreihen

Lösungsansatz gegeben

- $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots, \quad r = 1$
- $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots, \quad r = \infty$
- $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \pm \ldots, \quad r = \infty$
- $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp \ldots, \quad r = \infty$

$$\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} x^n = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \frac{7x^5}{256} \leftarrow \binom{1/2}{n} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \leftarrow \text{gültig für } -1 < x \le 1 \text{ (außer } x=-1)$$

<u>allgemeine Formel Taylor-Reihe:</u>

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}$$

a) ① richtige Form auswählen:

↳ logarithmische Funktion ablesen:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \dots$$

→ Potenzreihe von $f(x) = \frac{1}{x} \cdot \ln(x+1)$:

wenn man $x^2 \cdot \frac{1}{x}$ reduziert sich potenz um -1: $\frac{x^2}{x} = \frac{x^{2-1}}{1} = x$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \cdot x^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \cdot x^{k-1}}{k}} = 1^{1-1} - \frac{x^{2-1}}{2} + \frac{x^{3-1}}{3} - \frac{x^{4-1}}{4}$$

← (immer z.B. $\frac{x^4}{4x} = \frac{x^3}{4}$)

$$= 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}$$

b) ② Konvergenzradius für $\ln(1+x)$ immer $r = 1$

c) ③ bestimmen des Grenzwertes S:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \left(1 - \frac{0}{2} + \frac{0^2}{3} - \frac{0^3}{4} \pm \dots\right) = 1$$

d) ④ Näherungswert für das bestimmte Integral berechnen bis Ordnung 2.

$$\tilde{I} = \int_0^1 f(x)\,dx$$

↳ da Ordnung 2 gegeben also nur bis $\frac{x^2}{3}$ gehen!

$$\tilde{I} = \int_0^1 \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3}\right) dx = \left[x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9}\right]_0^1$$

$$= 1 - \frac{1^2}{4} + \frac{1^3}{9} - 0 = \frac{31}{36}$$

e) ⑤ Abschätzen der maximalen Abweichung durch Leibniz-Kriterium:

↳ Leibniz-Kriterium verwendet immer das nächste Glied, welches beim Näherungswert nicht mehr verwendet wurde

↳ also: $\frac{x^3}{4}$

→ muss hier aber zusätzlich integriert werden, da Näherungswert auch integriert wurde!!

$$|\tilde{I} - I| \le \left|\int_0^1 -\frac{x^3}{4}\right| = \left|\left[-\frac{x^4}{16}\right]_0^1\right| = \left|-\frac{1}{16}\right| = \frac{1}{16}$$

man muss eigentlich nichts subtrahieren, nur Schreibweise, einfach so akzeptieren

→ Begründung weshalb man Leibniz verwenden darf:

→ alternierende Reihe (+ − + − ...)

→ Glieder bilden Nullfolge (Glieder gehen gegen 0 $(1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{16}, \dots \to 0)$)

Aufgabe 6 (10 Punkte) Gegeben ist die periodische Funktion f, mit

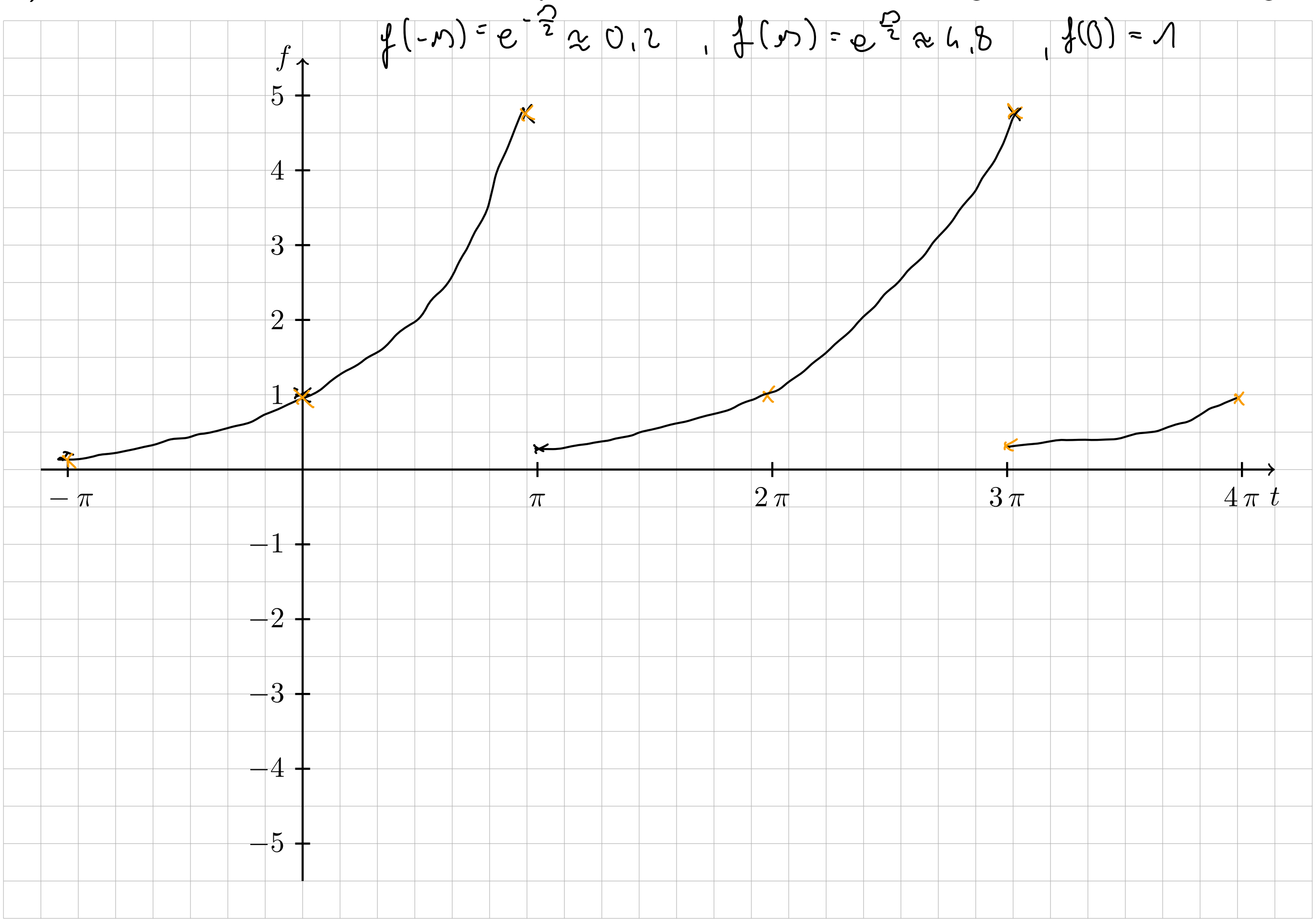
$$f(t) = \mathrm{e}^{t/2} \text{ für } t \in [-\pi, \pi), \quad f(t + 2\pi) = f(t)\,.$$

a) Skizzieren Sie die Funktion f für $t \in [-\pi, 4\pi]$.

b) Bestimmen Sie eine Formel für die komplexen Fourier-Koeffizienten c_k der Funktion f, für $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

c) Welchen Mittelwert m hat die Funktion f?

d) An welchen Stellen tritt bei der Funktion f das Gibbsche Phänomen auf? Wie groß sind die Überschwinger?



Name, Vorname	Matrikelnummer	HOCHSCHULE ESSLINGEN
Prüfungsfach: Mathematik 2		Sommersemester 23
Studiengänge: SWB/TIB/IEP		

b) ① Kreisfrequenz bestimmen:

$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$ ← konnte man aus Graph ablesen Intervall $[-\pi, \pi]$

② allgemeine Formel für Koeffizienten c_k:

Integral verändern wenn Integral von $[-\pi; \pi]$ geht!

$$\boxed{c_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\, e^{-ik\omega t}\, dt, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots}$$

← allgemeine Funktion mit der wir arbeiten

$\hookrightarrow c_k = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} e^{\frac{t}{2}} \cdot e^{-ik1t}\, dt$

sehr wichtige Beispiele:

$e^{-ik2\pi} = \cos(-k2\pi) + i\sin(-k2\pi) = 1$

$e^{-ik\pi} = \cos(-k\pi) + i\sin(-k\pi) = (-1)^k$

③ integrieren und vereinfachen:

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} e^{(\frac{1}{2} - ik)t}\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \left[\frac{e^{(\frac{1}{2} - ik)t}}{\frac{1}{2} - ik} \right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{e^{(\frac{1}{2} - ik)\pi}}{\frac{1}{2} - ik} - \frac{e^{-(\frac{1}{2} - ik)\pi}}{\frac{1}{2} - ik} \right) = \frac{e^{\frac{\pi}{2}} \cdot \overbrace{\boxed{e^{-ik\pi}}}^{(-1)^k} - e^{-\frac{\pi}{2}} \cdot \overbrace{\boxed{e^{+ik\pi}}}^{(-1)^k}}{2\pi(\frac{1}{2} - ik)} = \frac{(-1)^k e^{\frac{\pi}{2}} - e^{-\frac{\pi}{2}}}{2\pi(\frac{1}{2} - ik)}$$

④ Mittelwert bestimmen:

−> c_0 berechnen also $k=0$ setzen

$$c_0 = \frac{(-1)^0 (e^{\pi/2} - e^{-\pi/2})}{\pi} = 1{,}465$$

⑤ Gibbsche Phänomen:

$$\boxed{\begin{array}{l} t_k = \pi + k \cdot 2\pi, \quad k = 0, 1, 2, 3 \dots \\ \hookrightarrow \pm 0{,}09 \left(e^{\frac{\pi}{2}} - e^{-\frac{\pi}{2}} \right) \approx \pm 4 \end{array}}$$

Dort wo am größten

Dort wo am kleinsten

} Man verwendet ganz normale Gleichung $f(t) = e^{\frac{t}{2}}$ wo am höchsten und niedrigsten. nicht Koeffizientengleichung verwenden!!

SS 21, Aufgabe 3c Euler Polygonzugverfahren:

$x'' - (x-1)x' - x = 0$

c) Euler Polygonzugverfahren $x_0 = 0$, $x_0' = 1$, $h = 0{,}1$

2 Schritte $t_0 = 0 \rightsquigarrow t_1 = 0{,}1 \rightsquigarrow t_2 = 0{,}2$

b) Zustandsvariablen: $z_1 = x$, $z_2 = x'$

$\to z_1' = z_2$

$z_2' - (z_1 - 1) z_2 - z_1 = 0$

$z_2' = (z_1 - 1) z_2 + z_1$

Ergebnis:

$$\begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ (z_1 - 1) z_2 + z_1 \end{pmatrix}$$

zu c) 1. Schritt:

$$\tilde{z}^{(1)} = \tilde{z}^{(0)} + h \cdot \begin{pmatrix} \tilde{z}_2^{(0)} \\ (\tilde{z}_1^{(0)} - 1)\tilde{z}_2^{(0)} + \tilde{z}_1^{(0)} \end{pmatrix}$$

$x_0 = 0$
$x_0' = 1$ $\longrightarrow$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0{,}1 \begin{pmatrix} 1 \\ (0-1) \cdot 1 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}9 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{z}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}9 \end{pmatrix} + 0{,}1 \begin{pmatrix} 0{,}9 \\ (0{,}1 - 1) \cdot 0{,}9 + 0{,}1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}19 \\ 0{,}9 + 0{,}1(-0{,}81 + 0{,}1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}19 \\ 0{,}9 + 0{,}1 \cdot (-0{,}71) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}19 \\ 0{,}9 - 0{,}071 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}19 \\ 0{,}829 \end{pmatrix}$$

WS 20/21 (SWB) Aufgabe 4

Konvergenzradius mit Quotientenkriterium

$$\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{(-2)^k}{3k}}_{a_k} x^k$$

→ Es gibt:

→ Quotienten und Wurzelkriterium $\boxed{q = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|}$

→ Konvergenzradius r: $\boxed{r = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|}$

↳ wir nehmen hier für Konvergenzradius:

$$r = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{(-2)^k}{3k}}{\frac{(-2)^{k+1}}{3(k+1)}} \right|$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left| \frac{(-2)^k}{3k} \cdot \frac{3(k+1)}{(-2)^{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{k+1}{-2k} \right|$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left| \frac{k}{-2k} + \frac{1}{-2k} \right| = \frac{1}{2}$$

↳ Konvergenzradius ist $r = \frac{1}{2}$