1. DGL:

↳ Ziel:

- die normale Form der Funktion y (bzw. $f(x)$), da DGL aus mehreren Funktionen von y besteht (y'', y', etc.)

→ immer erstmal Bedingungen prüfen, welcher Ansatz zutrifft!!

verschiedene Lösungsansätze:

① nicht lineare DGL 1. Ordnung:

→ höchstens y' ← 1. Ordnung (y'' 2. Ordnung)

→ y nicht durch +/- verknüpft ($y' \cdot y$ ✓ , $y' - y$ ✗)

- mögliche Beispiele:

↳ $\boxed{y' = -\frac{6x}{y} \quad \text{oder} \quad y' - \frac{x^2}{y^2}(x^2+2) = 0}$ ← so könnten diese aussehen

Ansatz:

1. x und y trennen / umstellen
2. y' zu $\frac{dy}{dx}$ umschreiben, dx auf x Seite
3. Integrieren ← $+c$ auf keinen Fall vergessen!!
4. nach y auflösen ← y Funktion erhalten

Beispielaufgabe:

> Lösen Sie für $x \in [1, \infty)$ das Anfangswertproblem
> $y' = -\frac{6x}{y}, \quad y(1) = 1.$

$y' = -\frac{6x}{y}$, $y(1) = 1$

① x und y trennen: $y' \cdot y = -6x$

② $y' = \frac{dy}{dx}$: $\frac{dy}{dx} \cdot y = -6x \quad | \cdot dx$

$dy \cdot y = -6x \cdot dx$

③ integrieren: $\int y \cdot dy = \int -6x \cdot dx$

$\frac{1}{2} y^2 + c_1 = -\frac{6}{2} x^2 + c_2 \quad | -c_1 \quad | \cdot 2 \quad | \sqrt{}$ ← beim integrieren immer $+c$ nicht vergessen!!

④ nach y auflösen: $y = \sqrt{(-3x^2 + c) \cdot 2} = \sqrt{-6x^2 + 2c}$ ← da c Konstante ist $c_2 - c_1$ wieder Konstante also nur c!

⑤ Anfangswertproblem: $y(1) = 1$ einsetzen in y: $1 = \sqrt{6 \cdot 1^2 + 2c} \rightarrow c = 3{,}5$

(2) lineare, inhomogene DGL 1. Ordnung:

Ansatz:

-> Seperationsmethode, Trennung der Variablen

-> Variation der Konstanten

Vorgehensweise:

1. homogene Lösung durch Separation
2. Vorfaktoren einsetzen in Darstellung und integrieren -> vollständige homogene erhalten
3. partikuläre Lösung durch Variation der Konstanten c durch $c(t)$ und $y_p(t)$, $y'_p(t)$ bilden
4. einsetzen von $y_p(t)$, $y'_p(t)$ in ursprüngliche Gleichung (I) für $y'(t)$ und $y(t)$
5. einsetzen von $c(t)$ in $y_p(t)$ -> vollständige partikuläre DGL erhalten
6. einsetzen von homogener und partikulärer in $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$ -> vollständige allgemeine Gleichung

Satz 14.5 (Lösung homogener linearer Differenzialgleichungen 1. Ordnung)
Die allgemeine Lösung y_h einer homogenen linearen Differenzialgleichung

$$a_1(x)\,y' + a_0(x)\,y = 0$$ <- Vorfaktoren von y unten in Gleichung schreiben

erster Ordnung lässt sich durch Separation bestimmen und lautet

$$y_h(x) = C\,e^{-\int \frac{a_0(x)}{a_1(x)}\,dx}.$$

↳ so löst man homogene lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung.

Beispiel:

Gegeben ist fuer $t > 0$ die lineare, inhomogene Differezialgleichung
$2 \cdot t \cdot \left(\frac{d}{dt} y(t)\right) - 6 \cdot y(t) = 8 \cdot t^7$.

1. homogene Lösung durch Separation:

$$2t \cdot \left(\frac{d}{dt} y(t)\right) - 6 \cdot y(t) = \underbrace{8 \cdot t^7}$$

g(x) Störfunktion, wichtig, nicht alles mit t muss automatisch hier zu Störfunktion hinzugefügt werden
2t ist Vorfaktor von y' und nicht Teil der Störfunktion!!

(I) für inhomogen -> (I) $\quad 2t\,y'(t) - 6y(t) = 8t^7$

2t Vorfaktor von y' muss nicht extra auf rechte Seite gestellt werden!!

(H) für Homogen ↳ (H) $\quad 2t\,y'(t) - 6y(t) = 0$ ⟶ Erklärung:

2. Vorfaktoren einsetzen in Darstellung und integrieren:

allgemeine Schreibweise: $a_1 \cdot y'(x) + a_0 \cdot y(x) = 0$

allgemeine homogene Darstellung: $y_h(x) = C \cdot e^{-\int \frac{a_0(x)}{a_1(x)}\,dx}$

werte einfach einsetzen

$$y_h(x) = C\,e^{-\int \frac{-6}{2t}\,dt}$$

$$= C\,e^{\int \frac{3}{t}\,dt}$$

$$= C\,e^{3\ln(t)}$$ <- $\frac{1}{t}$ integriert $\ln(t)$

$$= C\,e^{\ln(t)^3}$$

$$= C \cdot t^3$$ <- in Klammer von $\ln(t)$ wird zur Basis, Vorfaktor 3 wird zu Exponent

③ partikuläre Lösung durch Variation der Konstanten c durch c(x) ersetzen und $y_p(t)$, $y_p'(t)$ bilden:

↳ Ansatz: $\boxed{C \text{ durch } C(x) \text{ ersetzen}}$:

$y_p(t) = C(t) \cdot t^3$ ← hier wurde einfach Ergebnis der homogenen genommen und c für c(t) ausgetauscht !!

Ableitung erhält man indem man Produktregel anwendet auf die Gleichung von $y_p(t)$ und diese ableitet !!

$y_p'(t) = 3 \cdot C(t) \cdot t^2 + C'(t) \cdot t^3$

④ einsetzen und auflösen von y_p, y_p' in ursprüngliche Gleichung (I):

einsetzen in (I):

$$2t\,(3 \cdot C(t) \cdot t^2 + C'(t) \cdot t^3) - 6(C(t) \cdot t^3) = 8t^7$$

$$6t^3 C(t) + 2t^4 C'(t) - 6t^3 C(t) = 8t^7$$

$$2t^4 C'(t) = 8t^7 \quad | : 2t^4$$

$$C'(t) = 4t^3$$

$$C(t) = 4 \int t^3 \, dt$$

$$C(t) = 4 \tfrac{1}{4} t^4 + D$$

$$C(t) = t^4 + D$$ ← dieses Ergebnis muss nun wieder in Partikuläre $y_p(x)$ eingesetzt werden für c(t) !!

wähle $D = 0$ z.B.: $c(t) = t^4$

⑤ einsetzen von c(t) in $y_p(t)$:

↳ $\boxed{c(t) = t^4 \text{ einsetzen in } y_p(t) = c(t) \cdot t^3}$:

$$y_p(t) = t^4 \cdot t^3$$
$$= t^7$$

⑥ homogene und partikuläre in $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$ einsetzen:

$$y = C \cdot t^3 + t^7$$

③ lineare - homogene DGL 2. Ordnung, komplex

→ y durch +/- verknüpft

→ y'' vorhanden bzw. $\frac{d^2y}{d^2x^2}$

→ rechts immer 0!

- mögliche Beispiele:

  ↳ $\boxed{5\frac{d^2y}{d^2x^2}+45y=0}$

Ansatz:

① $y=e^{\lambda x}$, $y'=\lambda e^{\lambda x}$, $y''=\lambda^2 e^{\lambda x}$ einsetzen

② charakteristische Gleichung durch $:e^{\lambda x}$ erhalten

③ Eigenwerte von λ berechnen

④ überprüfen ob λ vielfaches, aufstellen homogener Gleichung

↳ allgemein homogene Lösung:

$\boxed{y=c\cdot e^{\lambda x}}$ ← allgemeine Formel

bei 2 unterschiedlichen Eigenwerten:

↳ z.B $\lambda_1=2, \lambda_2=3$: $\boxed{y_0(x)=c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x}}$ ← $\lambda_1\neq\lambda_2$, dann wird es so aufgeschrieben

bei doppelter Nullstelle:

↳ z.B $\lambda_1=\lambda_2=1$: $\boxed{y_h=(c_1+c_2x)e^{\lambda x}}$ bzw. $\boxed{y_h=c_2xe^{\lambda x}+c_1e^{\lambda x}}$ ← $\lambda_1=\lambda_2$ (z.B MNF nur 1 Wert)

hier muss → noch an Punkt 4 ergänzt werden, komplexer Teil!

bei komplexer Lösung:

↳ z.B $\lambda=\underbrace{7}_{\alpha}\pm\underbrace{3i}_{\beta}$ → komplexe Lösung: $\boxed{y_h=e^{\overset{7=\alpha}{\alpha} x}\cdot(A\cdot\sin(\overset{3i=\beta}{\beta}x)+B\cdot\cos(\overset{3i=\beta}{\beta}x))}$

→ partielle Lösungen sehen anders aus!!

Beispiel:

Lösen Sie die Differenzialgleichung

$5\frac{d^2y}{dx^2}+45y=0.$

Verwenden Sie A und B als Integrationskonstanten.

$5y''+45y=0$

① $y=e^{\lambda x}$, $y''=\lambda^2e^{\lambda x}$ einsetzen:

② $5\lambda^2+45=0 \quad |-45 \quad |:5 \quad |\sqrt{\ }$

③ ↳ $\lambda=\pm 3i$

④ $\lambda = \pm 3i$ ist komplex, deshalb Ansatz für homogene Lösung:

$\hookrightarrow \; y = e^{\alpha x} \cdot (A \cdot \sin(\beta x) + B \cdot \cos(\beta x))$

also: $y = e^{0x} \cdot (A \cdot \sin(3x) + B \cdot \cos(3x))$

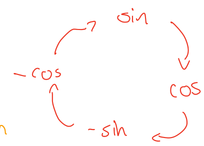
$y = A \cdot \sin(3x) + B \cdot \cos(3x)$

Lösen des Anfangswertproblem:

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$5y'' + 45y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3.$$

⑤ y' bestimmen:



$y = A \cdot \sin(3x) + B \cdot \cos(3x)$ ← Produktregel anwenden zum ableiten

↓ sin abgeleitet = cos ↓ cos abgeleitet gibt −sin

$y' = 3 \cdot A \cos(3x) - B \cdot 3 \sin(3x)$

⑥ $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$ einsetzen:

$1 = A \cdot \sin(3 \cdot 0) + B \cdot \cos(3 \cdot 0)$

$1 = B$

$3 = 3 \cdot A \cos(3 \cdot 0) - B \cdot 3 \sin(3 \cdot 0)$

$3 = 3A \quad |:3$

$A = 1$

⑦ Gleichung mit Anfangswertproblem:

$y = 1 \cdot \sin(3x) + 1 \cdot \cos(3x)$

$= \sin(3x) + \cos(3x)$

⑤ lineare - inhomogene DGL 2. Ordnung, komplex:

-> y'' mindestens

-> verbunden durch +/-

-> Störfunktion $g(x)$

Merke:

-> hier stehen alle partikulären Ansätze je nach Eigenwert

-> homogene Ansätze sind weiter oben bei Punkt 3 definiert!!

Bestimmung der partikulären Lösung und Störfunktion:

Schleife über alle Linearkombinationen / Superposition

BESTIMMUNG DER PARTIKULÄREN LÖSUNG

Zugeordneter EW		Störfunktion		Ansatz für partikuläre Lösung
$\tilde{\lambda} = 0$	←	Polynom vom Grad m $r(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$	→	$\tilde{y}_p(x) = A_0 + A_1 x + \ldots + A_m x^m$
$\tilde{\lambda} = k$	←	Exponentialfunktion $r(x) = a e^{kx}$	→	$\tilde{y}_p(x) = A e^{kx}$
$\tilde{\lambda} = \pm \omega i$	←	Harmonische Schwingung $r(x) = a_1 \cos(\omega x) + a_2 \sin(\omega x)$	→	$\tilde{y}_p(x) = A_1 \cos(\omega x) + A_2 \sin(\omega x)$
$\tilde{\lambda} = k \pm \omega i$	←	Gedämpfte harmonische Schwingung $r(x) = e^{kx}(a_1 \cos(\omega x) + a_2 \sin(\omega x))$	→	$\tilde{y}_p(x) = e^{kx}(A_1 \cos(\omega x) + A_2 \sin(\omega x))$

↳ Erklärung:

-> je nach zugeordnetem Eigenwert anderer Ansatz, diesen dann einfach nur kopieren und rot markierte Werte dementsprechend einsetzen

Ansatz:

① $y = e^{\lambda x}$, $y' = \lambda e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$ Ansatz

② Eigenwerte bestimmen

③ in entsprechende homogene Lösung eintragen

④ entsprechenden partikulären Ansatz wählen

⑤ y_p, y_p', y_p'' bilden

⑥ einsetzen von y_p, y_p', y_p'' in ursprüngliche Gleichung und A bestimmen

⑦ vollständige Lösung $y = y_h + y_p$ bilden

Beispiel:

Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung
$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 2 \cdot e^{-x}$.

$$y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$$

① Ansatz mit $y = e^{\lambda x}$:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

② Eigenwerte bestimmen:

$$\text{MNF: } \lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} \quad \Rightarrow \lambda_{1,2} = -1$$

③ homogene Lösung:

↳ da Eigenwert mit doppelter Nullstelle:

$$y_h = c_1 \cdot e^{\lambda x} + c_2 x \cdot e^{\lambda x}$$

$$\boxed{y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}}$$ ← homogene Lösung

④ entsprechenden partikulären Ansatz wählen:

↳ allgemeiner Ansatz:

$$\boxed{y_p = A e^{\lambda x}}$$

→ da aber doppelte Nullstelle:

$$\boxed{y_p = A x^2 e^{\lambda x}}$$ ← zusätzlich x^2 wegen doppelter Nullstelle

$$y_p = A x^2 e^{-x}$$

⑤ y_p, y_p', y_p'' bilden:

$$y_p = A x^2 e^{-x}$$

$$y_p' = 2Axe^{-x} - Ax^2 e^{-x}$$

$$y_p'' = 2Ae^{-x} - 2Axe^{-x} - 2Axe^{-x} + Ax^2 e^{-x}$$

⑥ Einsetzen von y_p, y_p', y_p'' in ursprüngliche Gleichung und A bestimmen:

$$[2Ae^{-x} - 2Axe^{-x} - 2Axe^{-x} + Ax^2 e^{-x}] + 2[2Axe^{-x} - Ax^2 e^{-x}] + Ax^2 e^{-x} = 2e^{-x} \quad | : e^{-x}$$

$$[2A - 2Ax - 2Ax + Ax^2] + [4Ax - 2Ax^2] + Ax^2 = 2$$

partikuläre Lösung

$$2A - 4Ax + 4Ax + 2Ax^2 - 2Ax^2 = 2 \quad \longrightarrow A = 1, \text{ einsetzen in } y_p = Ax^2 e^{-x} \rightarrow \boxed{y_p = 1x^2 e^{-x}}$$

⑦ aufstellen der Differenzialgleichung $y = y_h + y_p$:

$$y = y_h + y_p \rightarrow \boxed{y = c_1 \cdot e^{-x} + c_2 x e^{-x} + x^2 e^{-x}}$$ ← vollständige Lösung

4. lineare, inhomogene DGL 2. Ordnung, komplex, mit reeller und komplexer Lösung:

Ansatz:

1. homogene Lösung durch $y = e^{\lambda x}$ Ansatz und einsetzen
2. Eigenwerte λ bestimmen
3. Entsprechende homogene Darstellung wählen
4. Partikulärer Ansatz Störfunktion
5. vollständige Funktionen erstellen

Beispiel:

Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung
$y''(x) + 4y'(x) + 6y(x) = 8 \cdot e^{3 \cdot x}$.
Hinweis: Verwenden Sie für Konstanten c1, c2, ...

$$y''(x) + 4y'(x) + 6y(x) = 8 \cdot e^{3x}$$

1. homogene Lösung durch $y = e^{\lambda x}$ Ansatz und einsetzen:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 6 = 0$$

2. Eigenwerte λ bestimmen

MNF

$$\lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 24}}{2}$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{-8}}{2}$$

$$= \frac{-4 \pm 2 \cdot \sqrt{-2}}{2}$$

$$= -2 \pm \sqrt{2} \cdot i$$

3. Entsprechende homogene Darstellung wählen

$$\boxed{y_{CH} = c_1 e^{(-2-\sqrt{2} \cdot i)x} + c_2 e^{(-2+\sqrt{2} \cdot i)x}}$$ ← homogen, komplex

$$\boxed{y_{RH} = e^{-2x} \left(c_1 \cdot \cos(\sqrt{2}x) + c_2 \cdot \sin(\sqrt{2}x)\right)}$$ ← homogene, reel

Nochmal nachschlagen!!

Frage an andere:
Wann wähle ich welche Schreibweise??

mit euler und im Exponent → $y = c_1 \cdot e^{(-2+2i)x} + c_2 \cdot e^{(-2-2i)x}$

$-2 = \alpha$ $2 = \beta$ $2 = \beta$

$$\boxed{y_h = e^{\alpha x} \cdot \left(c_1 \cdot \sin(\beta x) + c_2 \cdot \cos(\beta x)\right)}$$

mit Sinus cos und A und B → $y_h = e^{-2x} \cdot \left(c_1 \cdot \sin(2x) + c_2 \cdot \cos(2x)\right)$

4. partikulärer Ansatz für Störfunktion:

↳ Störfunktion aus Gleichung wählen und ihre Vorfaktor einsetzen: ← hieran Frage: wann nicht $y_p = Ae^{\lambda x}$, klassischer Ansatz, sondern einfach e^{3x} aus Störfunktion kopieren? Wann $y_p = Ae^{3x}$?

$$\boxed{\begin{aligned} y_p(x) &= Ae^{3x} \\ y_p'(x) &= 3Ae^{3x} \\ y_p''(x) &= 9e^{3x} \end{aligned}}$$

↳ einsetzen in ursprüngliche Gleichung:

$$(9Ae^{3x}) + 4(3Ae^{3x}) + 6(Ae^{3x}) = 8e^{3x}$$

$$27Ae^{3x} = 8e^{3x} \quad \Big| : 27e^{3x}$$

$$A = \frac{8}{27}$$

⑤ vollständige Funktion erstellen:

$$\boxed{y_c = c_1 \cdot e^{(-2-2i)x} + c_2 \cdot e^{(-2+2i)x} + \frac{8}{27}e^{3x}}$$ ← vollständige komplexe

$$\boxed{y_R = e^{-2x}\left(c_1 \cdot \cos(\sqrt{2}x) + c_2 \cdot \sin(\sqrt{2}x)\right) + \frac{8}{27}e^{3x}}$$ ← vollständige reelle

$$y_c = c_1 \cdot \underbrace{e^{-2x}}_{R} \cdot \underbrace{e^{-2ix}}_{I} + c_2 \cdot \underbrace{e^{-2x}}_{R} \cdot \underbrace{e^{2ix}}_{I} + \frac{8}{27}e^{3x}$$