Funktionen:

allg. Funktionsform:

$y = mx + b$

Steigung der Funktion:

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ oder $f'(x) = m$

Funktionen 2. Grades oder höher:

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Exponentialfunktionen:

$f(x) = 2^x$

$f(x) = e^x$

Wurzelfunktion:

$f(x) = \sqrt{x}$ kann man umschreiben zu $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$

$f(x) = \sqrt[3]{x}$ — $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$

$f(x) = \sqrt{x-2}$

$f(x) = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$

$= \sqrt[3]{-8} = -2$ → Sonderfall 3. Wurzel auch Minuszahlen möglich, Taschenrechner ausprobieren

Log oder ln Funktion:

$f(x) = \ln(x)$, $f(x) = \ln(x-2)$

$f(x) = \log_{10}(x)$ → kann auch $\lg(x)$ geschrieben werden

Aufstellen linearer Funktion mit 2 Punkten:

$y = mx + b \quad P_1(-7|-1), P_2(8|0)$

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-(-1)}{8-(-7)} = \frac{1}{15}$

$y = \frac{1}{15}x + b$ ← einsetzen von z.B P_1

$(-1) = \frac{1}{15} \cdot (-7) + b$

$b = -\frac{8}{15}$

↳ $y = \frac{1}{15}x - \frac{8}{15}$ → zum überprüfen kann man noch Punktprobe machen indem man anderen Punkt in Gleichung einsetzt

verschieben / spiegeln Funktionen x-y-Achse:

verschieben y-Achse:

$f(x) + a$

$f(x) = e^{-x-4}$

$f(x) = e^{-x-4} + 4$ ← verschieben in +4 nach oben

verschieben x-achse:

$f(x+a)$

$f(x) = x^3 - 4x$ überall wo x ist −1 rechnen um nach rechts zu verschieben

$f_{ver}(x) = (x-1)^3 - 4(x-1)$ → wenn $(x-1)$, dann wird Funktion um +1 nach rechts verschoben

$f(x) = e^x$ verschieben um +4 in x-Achse

$f(x) = e^{(x-4)}$

Spiegeln y-Achse:

$f(-x)$ ← einfach x durch −x ersetzen

$f(x) = x^3 - 4x$

$f(-x) = -x^3 - 4(-x)$

$f(x) = e^{x-4}$

$f(-x) = e^{-x-4}$

Spiegeln x-Achse:

$-f(x)$

$f(x) = x^3 - 4x$ } kompletten Term mit (-1) multiplizieren

$f(x) = (x^3 - 4x) \cdot (-1)$

$f(x) = -x^3 + 4x$

Umkehrfunktion bilden:

① Schritt: Funktionsgleichung nach x auflösen:

$$f(x) = -\frac{2x}{8x+3}$$

$$y = \frac{-2x}{8x+3} \quad | \cdot (8x+3)$$

$$y \cdot (8x+3) = -2x$$

$$8xy + 3y = -2x \quad | -3y$$

$$8xy = -2x - 3y \quad | +2x$$

$$8xy + 2x = -3y$$ ← ausklammern!

$$x(8y+2) = -3y \quad | : (8y+2)$$

$$x = \frac{-3y}{8y+2}$$

② Schritt: x und y vertauschen:

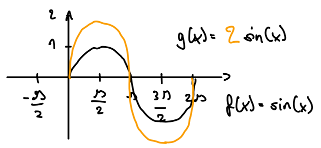
$$y = \frac{-3x}{8x+2}$$

Stauchen Strecken Sinusfunktion:

$g(x) = \sin(x)$

$f(x) = \underline{a} \cdot \sin(\underline{b} \cdot (x - \underline{c})) + \underline{d}$

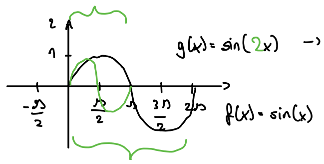
a = Amplitude, Ausschlag in y-Achse hoch und runter



b = Stauchung der Periode (Standardperiode immer 2π)

- Periode lässt sich deshalb wiefolgt berechnen $P = \frac{2\pi}{b}$

mit Faktor 2 Periode schon bei π



$\rightarrow P = \frac{2\pi}{2} = \pi$

Periode normalerweise immer 2π groß

c = Verschiebung in x-Richtung $(x - \frac{\pi}{2}) \rightarrow$ z.B dann $+\frac{\pi}{2}$ nach rechts

d = Verschiebung in y-Richtung

Periode herausfinden, wenn Hoch und Tiefpunkt gegeben sind:

z.B. TP an Stelle $t = \frac{\pi}{2}$, HP an Stelle $t = 2\pi$

↳ Periode wenn eine Schwingung durchlaufen ist HP zu HP / TP zu TP

→ halbe Periode, wenn von TP zu HP durchlaufen

das heißt Periode lässt sich berechnen mit:

$$\underbrace{T}_{\text{Periode}} = \underbrace{HP - TP}_{\text{Differenz gibt die Länge der halben Periode an}} \cdot \underbrace{2}_{\cdot 2 \text{, da von HP zu TP nur halbe Periode}}$$

$$T = 2 \cdot \left(2\pi - \frac{\pi}{2}\right) = 3\pi$$

mit Periode kann man nun Kreisfrequenz b berechnen:

$$T = \frac{2\pi}{b}$$

$$b = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{3\pi} = \frac{2}{3}$$

Nullstellen bestimmen:

Aufstellen Funktionsgleichung mithilfe gegebenen Nullstellen und Punkt:

Nullstellengleichung:

gegebene Nullstellen:

$x_1 = 3$, $x_2 = -6$, $x_3 = 4$

$f(x) = a \cdot (x-3) \cdot (x+6) \cdot (x-4)$ --> a Faktor notwendig, damit aufgelöst werden kann

einsetzen von Punkt $P(1|-1)$

$-1 = a \cdot (1-3) \cdot (1+6) \cdot (1-4)$

$a = -\frac{1}{42}$

↳ vollständige Gleichung: $f(x) = -\frac{1}{42} \cdot (x-3) \cdot (x+6) \cdot (x-4)$

Nullstellen bestimmen e-Funktion:

- mehrere Beispiele, wie man Nullstellen berechnen kann
  - wichtig $\boxed{\ln(0) \text{ ↯}}$ nicht möglich

Bsp 1:

$f(x) = 9 - 9 \cdot e^{x-2}$

$0 = 9 - 9e^{x-2} \quad | -9 \quad | :(-9)$

$1 = e^{x-2} \quad | \ln$

$\ln(1) = x - 2 \quad | +2$

$x = \ln(1) + 2$

Bsp 2:

$2 \cdot e^{4x} = 0 \quad | :2$

$e^{4x} = 0 \quad | \ln$ ↯ --> $\ln(0)$ nicht möglich

Bsp 3:

$e^{4x} - 2 = 0 \quad |+2$

$e^{4x} = 2 \quad |\ln$

$4x = \ln(2) \quad |:4$

$x = \frac{\ln(2)}{4}$

Bsp 4:

$2x \cdot e^{-x} = 0$

SVNP:

$2x = 0$

$x_1 = 0$

$e^{-x} = 0 \quad |\ln$ ↯ → ln(0) nicht möglich

Bsp 5:

$f(x) = x^2 \cdot e^{x+1} - 4 \cdot e^{x+1}$

↳ ausklammern von e^{x+1}:

$e^{x+1}(x^2 - 4) = 0$

SVNP: → SVNP nun verwendbar, da multiplikation

$e^{x+1} = 0 \quad |\ln$ ↯ → ln(0) nicht möglich

$x^2 - 4 = 0 \quad |+4 \quad |\sqrt{\ }$

$x_1 = 2, \; x_2 = -2$ → wenn man Wurzel von x^2 zieht immer 2 Ergebnisse

Bsp. 6:

$\frac{e^x + 4}{e^{2x} - 3} = 0 \quad |\cdot(e^{2x} - 3)$

$e^x + 4 = 0 \cdot (e^{2x} - 3)$

$e^x + 4 = 0 \quad |-4$

$e^x = -4 \quad |\ln(-4)$ ↯ → ln(-4) nicht möglich

umschreiben von ln und e^x:

$\ln(e) = 1$

$\ln(1) = 0$

$\ln(0) =$ ↯ nicht möglich

$\ln(e^{2x}) = 2x$

$\ln(e^{2x-1}) = 2x-1$

$\ln(2 \cdot e^{3x}) = \ln(2) + 3x$ → Faktor vor e wird ln(2) und können addiert

$\ln\left(\frac{e^{3x}}{8x}\right) = 3x - (\ln(8x))$ → bei division wird ln(8x) gezogen und anschließend minus genommen

$= 3x - (\ln(8) + \ln(x))$ → könnte man so umschreiben

$e^{\ln(2x)} = 2x$ ← $e^{\ln(x)}$, e und ln kürzen sich raus! Nur Klammer bleibt übrig

$e^{3 \cdot \ln(2x)} = (2x)^3 = 2^3 \cdot x^3 = 8x^3$ → ln(2x) von e wurde gezogen, das heißt e fällt dort weg, die 3 bleibt aber noch im Exponenten stehen

$e^{4\ln(x^2)} = \overbrace{(e^{\ln(x^2)})^4}^{\text{Zwischenschritt kann man weglassen}} = (x^2)^4 = x^8$

Allgemein zu Logarithmus:

$$\boxed{\underset{\text{Basis}}{3}^{\overset{\text{Exponent}}{2}} = \underset{\text{Ergebnis}}{9} \longrightarrow \log_{\underset{\text{Basis}}{3}}(\overset{\text{Ergebnis}}{9}) = \underset{\text{Exponent}}{2}}$$

$-1 \quad 3^x = 9 \longrightarrow \log_3(9) = x$

↳ mit log sucht man normalerweise immer nach Exponenten

Polynomdivision:

- zum finden der Nullstellen

! Auf Vorzeichen extrem achten, damit man sich nicht verrechnet!!

! Auflösen der $-(\ +\ )$ Klammern beachten da $\rightarrow$ $-(12x+4) = 12x-4$ ist!!

Bsp: $f(x) = x^4 - x^3 - 12x^2 - 4x + 16$

1. Nullstellen raten:

Nullstelle $x=1$ erraten: $1^4 - 1^3 - 12 - 4 + 16 = 0$ ✓

2. Funktion aufschreiben und durch $(x-1)$ teilen:

– immer gleiches Schema Funktion : (x – Nullstelle teilen), NS war $x=1$ also $(x-1)$

$x^4 : x = x^3$, deshalb rechte Seite x^3

$$
\begin{array}{l}
(x^4 - x^3 - 12x^2 - 4x + 16) : (x-1) = x^3 - 12x - 16 \\
-(x^4 - x^3) \\
\hline
0 \quad 0 - 12x^2 - 4x + 16 \\
\quad -(-12x^2 + 12x) \\
\hline
\quad\quad 0 \quad -16x + 16 \\
\quad\quad\quad -(16x + 16) \\
\hline
\quad\quad\quad\quad 0
\end{array}
$$

Da nichts abgezogen einfach runter hinschreiben

x^3 jeweils zurück multiplizieren

3. weiter vereinfachen durch raten:

$x_2 = -2$ Nullstelle gesucht und in neue Gleichung einsetzen:

4. Funktion : $(x-(-2))$ rechnen also : $(x+2)$:

$$
\begin{array}{l}
(x^3 - 12x - 16) : (x+2) = x^2 - 2x - 8 \\
-(x^3 + 2x^2) \\
\hline
0 - 2x^2 - 12x - 16 \\
-(-2x^2 - 4x) \\
\hline
\quad 0 - 8x - 16 \\
\quad -(-8x - 16) \\
\hline
\quad\quad 0
\end{array}
$$

$2x^2 \rightarrow$ von daher genommen

$-2x^2 : x = -2x$

x^2, da $x^3 : x = x^2$ ergibt und jetzt wieder mit x^2 Rückmultiplizieren, damit man auf linker Seite Subtrahieren kann

5. Vereinfacht bis auf 2er Potenz, deshalb MNF anwenden:

MNF: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$= \dfrac{-(-2) \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1}$

$= \dfrac{2 \pm \sqrt{36}}{2}$

$x_1 = 4$, $x_2 = -2$

alle Nullstellen: $x_1 = 4$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$, $x_4 = -2$

⑥ Falls gefragt: Linearfaktordarstellung der Funktion bilden:

$$f(x) = x^4 - x^3 - 12x^2 - 4x + 16$$

$$f(x) = (x-4) \cdot (x+2) \cdot (x+2) \cdot (x-1)$$

$$= (x-4) \cdot (x+2)^2 \cdot (x-1)$$

Polynomdivision: Asymptote finden, Polynomdivision mit Rest:

- immer wenn bei gebrochen Rationalen Funktionen Zähler höhere Potenz als Nenner lässt sich eine Asymptote mit der Polynomdivision finden

$$f(x) = \frac{4x^3 + 2x^2 - x + 1}{2x^2 - 2x + 1}$$

① Zähler durch Nenner teilen Polynomdivision:

$$(4x^3 + 2x^2 - x + 1) : (2x^2 - 2x + 1) = \boxed{2x + 3} + \frac{3x - 2}{2x^2 - 2x + 1}$$

← oben im Zähler übrig gebliebener Rest

← im Nenner durch was man in der Polynomdivision eh schon geteilt hat

ist die Asymptote

$$\begin{array}{l} -(4x^3 - 4x^2 + 2x) \\ \hline 0 \quad 6x^2 - 3x + 1 \\ \quad -(6x^2 - 6x + 3) \\ \hline \quad 0 \quad \underbrace{\boxed{+3x - 2}}_{\text{Rest}} \end{array}$$

← kein Durchlauf mehr möglich

↳ Asymptote ist $2x+3$ → alles auf rechter Seite was vor Bruch steht

Partialbruchzerlegung:

① Nullstellen des Nenners:

Anwendungszweck:
- vereinfachen Term, komplexe Brüche
- wird zum Integrieren benötigt

$$\frac{2x^2-6x-32}{x^3+x^2-17x+15}$$

Polynomdivision erforderlich da x^3 Exponent 3. Grades:

raten einer Nullstelle: $x_1 = 1$ ← $x_1=1$ geraten

Nenner $:(x-1)$ nehmen:

$$x^3+x^2-17x+15 : (x-1) = x^2+2x-15$$
$$-(x^3-x^2)$$
$$0 + 2x^2 - 17x + 15$$
$$-(2x^2-2x)$$
$$0 \; -15x+15$$
$$-(-15x+15)$$
$$0$$

MNF anwenden:

$$x^2+2x-13$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2-4\cdot 1\cdot(-15)}}{2} \rightarrow x_1 = 3, \; x_2=-5, \; x_3 = 1$$ (geratene Nullstelle von vorhin)

② Ansatz zur Partialbruchzerlegung:

Bruch umschreiben in Linearfaktorzerlegung und hinzufügen:

$$\frac{2x^2-6x-32}{x^3+x^2-17x+15}$$

$$\boxed{\frac{2x^2-6x-32}{(x-3)\cdot(x+5)\cdot(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x+5}}$$ ← für jede Nullstelle Bruch und Buchstaben hinzufügen

auflösen der Gleichung:

$$\frac{2x^2-6x-32}{(x-3)\cdot(x+5)\cdot(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x+5} \quad | \cdot (x-3)\cdot(x+5)\cdot(x-1)$$ ← Nenner auf linken Seite loswerden

$$2x^2-6x-3 = \frac{A\cdot(x-3)\cdot(x+5)\cdot(x-1)}{x-1} + \frac{B\cdot(x-3)\cdot(x+5)\cdot(x-1)}{x-3} + \frac{C\cdot(x-3)\cdot(x+5)\cdot(x-1)}{x+5}$$

$$2x^2-6x-3 = A\cdot\underbrace{(x-3)\cdot(x+5)}_{\text{als erstes x-Klammern ausmultiplizieren bevor Buchstaben}} + B\cdot(x+5)\cdot(x-1) + C\cdot(x-3)\cdot(x-1)$$ ← ausmultiplizieren

$$2x^2-6x-3 = A\cdot(x^2+5x-3x-15) + B\cdot(x^2-x+5x-5) + C\cdot(x^2-x-3x+3)$$

$$= A\cdot(x^2+2x-15) + B\cdot(x^2+4x-5) + C\cdot(x^2-4x+3)$$ ← zuerst in den Klammern zusammenfassen

$$= Ax^2 + 2Ax - 15A + Bx^2 + 4Bx - 5B + Cx^2 - 4Cx + 3C$$ ← ausklammern nach x^2, x und Zahl!

$$= x^2\cdot(A+B+C) + x\,(2A+4B-4C) + (-15A-5B+3C)$$

③ Koeffizientenvergleich:

$$2x^2 - 6x - 32 = (A+B+C)\cdot x^2 + (2A+4B-4C)\cdot x + (-15A-5B+3C)$$

was vor dem x^2 steht muss 2 ergeben, also:

LGS aufstellen aus den Koeffizienten:

$$\boxed{\begin{aligned} A+B+C &= 2 \\ 2A+4B-4C &= -6 \\ -15A-5B-3C &= -32 \end{aligned}}$$

in Matrixschreibweise

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & +1 & +1 & 2 \\ 2 & +4 & -4 & -6 \\ -15 & -5 & -3 & -32 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} II - 2I \\ III + 15I \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -6 & -10 \\ 0 & 10 & 18 & -2 \end{array}\right) \quad III + 5\cdot II$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -6 & -10 \\ 0 & 0 & 48 & 48 \end{array}\right)$$

$48C = 48 \quad |:48$

$C = 1$ einsetzen in II:

$-2B + 6 = 10$

$B = -2$ und $C = 1$ einsetzen in I:

$A - 2 + 2 = 2$

$A = 3$

einsetzen von A, B, C in PartialBruchdarstellung:

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x+5}$$

$$= \boxed{\frac{3}{x-1} + \frac{2}{x-3} + \frac{1}{x+5}}$$ ← finale Darstellung Partialbruchzerlegung

wichtig:

$$\frac{2x^2 - 6x - 32}{5\cdot x^3 + x^2 - 17x + 15}$$

wenn Faktor vor x^3 gestanden wäre müsste man ihn unten auch hinschreiben

$$\frac{2x^2 - 6x - 32}{5\cdot (x-3)\cdot(x+5)\cdot(x-1)}$$

Partialbruch Bsp für doppelte Nullstelle:

- Nullstellen bereits gefunden $x_1=-1, x_2=-1, x_3=-3$ und umgeschriebene Term sieht so an

$$\frac{1}{x^3+5x^2+7x+3} = \frac{1}{(x+1)\cdot(x+1)\cdot(x+3)}$$

$$\frac{1}{(x+1)^2\cdot(x+3)} = \boxed{\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x+3}} \quad | \cdot (x+1)^2\cdot(x+3)$$

2. Nullstelle der doppelten Nullstelle im quadrat $(x+1)^2$

1. Nullstelle der doppelten Nullstelle normal

$$1 = \frac{A\cdot(x+1)^2\cdot(x+3)}{x+1} + \frac{B\cdot(x+1)^2\cdot(x+3)}{(x+1)^2} + \frac{C\cdot(x+1)^2\cdot(x+3)}{x+3}$$

$$1 = A\cdot(x+1)\cdot(x+3) + B\cdot(x+3) + C\cdot(x+1)^2$$

$$1 = Ax + A\cdot(x+3) + Bx + 3B + C\cdot(x^2+2x+1)$$

$$1 = Ax^2 + 3Ax + Ax + 3A + Bx + 3B + Cx^2 + 2Cx + C$$

$$0\cdot x^2\, 0\cdot x \quad 1 = \underbrace{(A+C)}_{=0}\cdot x^2 + \underbrace{(3A+A+B+2C)}_{=0}\cdot x + \underbrace{3A+3B+C}_{=1}$$

← Konstante = 1 da auf linker Seite nur 1 steht

da vor der 1 kein x^2 oder x steht müssen die Koeffizienten auf der rechten Seite von x^2 und x = 0 sein

LGS:

$$A + C = 0$$

$$4A + B + 2C = 0$$

$$3A + 3B + C = 1$$

↳ LGS gelöst $A = -\frac{1}{4}$, $B = \frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{4}$

also Endergebnis Partialbruchzerlegung:

$$-\frac{1}{4\cdot(x+1)} + \frac{1}{2\cdot(x+1)^2} + \frac{1}{4\cdot(x+3)}$$

← da alle Brüche sind A, B, C auch Zahl im Nenner zusätzlich vorhanden

Extremstellen Bestimmen:

Extremstellen Sinus bestimmen:

- alle Schritte auf einen Blick:

  1. $f'(x)$ und $f''(x)$ bilden
  2. $f'(x) = 0$ setzen
  3. $f''(x)$ prüfen
  4. Periode T berechnen

① Ableiten von $f(x)$:

$$f(x) = \frac{3}{2} \cdot \sin\Big(\underbrace{\frac{\pi}{3} \cdot (x-1)}_{}\Big) + 1$$

vereinfacht $\frac{\pi}{3}x - \frac{\pi}{3}$ und dann abgeleitet: $\frac{\pi}{3}$

← Kettenregel ableiten , innere abgeleitet · äußere abgeleitet

$$f'(x) = \frac{3}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot (x-1)\right) \cdot \frac{\pi}{3}$$

← kann man alles kürzen, da alles mal

$$= \frac{\cancel{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{\cancel{3}} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot (x-1)\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot (x-1)\right)$$

← wieder Kettenregel

$$f''(x) = \frac{\pi}{2} \cdot \left(-\sin\left(\frac{\pi}{3} \cdot (x-1)\right)\right) \cdot \frac{\pi}{3}$$

$$= -\frac{\pi^2}{6} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} \cdot (x-1)\right)$$

② $f'(x) = 0$ setzen:

$$0 = \frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot (x-1)\right) \quad \Big| : \frac{\pi}{2}$$

$$0 = \cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot (x-1)\right) \quad \Big| \cos^{-1}$$ ← Variante 1 mit Taschenrechner, Taschenrechner auf RAD stellen

$$1{,}571 = \frac{\pi}{3} \cdot (x-1) \qquad 4{,}712 = \frac{\pi}{3} \cdot (x-1)$$

- durch $\cos^{-1}$ entstehen 2 Gleichungen
  - einmal mit $\cos^{-1}(0) = 1{,}571$ dem positiven Wert, Taschenrechner zeigt nur diese an
  - es entsteht auch mit $\cos^{-1}(0) = -1{,}571$ ein negativer Wert,

    welcher einfach nur negativ gesetzt wird vom Wert, welchen man aus dem Taschenrechner bekommt

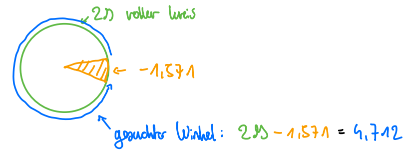
    - Hinweis: bei $\sin^{-1}(0) = 1{,}571$, wäre der negative Wert nicht einfach

      $-1{,}571$, sondern $\pi - 1{,}571$! Also $1{,}571$ nochmal von π abziehen

      und danach nochmal vom vollen Kreis: $2\pi - (\pi - 1{,}571)$

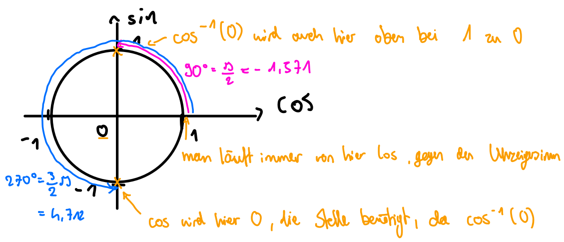
  ↳ da man keinen negativen Winkel haben will rechnet man

  von einem vollen Kreis minus $-1{,}571$:



alternativ über Einheitskreis:

- $\cos^{-1}$ kann man statt mit Taschenrechner auch mit Einheitskreis berechnen



↳ $\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3} \cdot (x-1) \quad \Big| : \frac{\pi}{3}$

$$\frac{3}{2} = x - 1 \quad | +1$$

$$x = \frac{3}{2} + 1$$

$$x_1 = \frac{5}{2}$$

$$\frac{3}{2}\pi = \frac{\pi}{3} \cdot (x-1) \quad \Big| : \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{9}{2} = x - 1 \quad | +1$$

$$x = \frac{11}{2}$$

③ x_1, x_2 einsetzen in $f''(x)$ zum überprüfen:

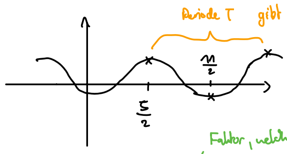
$$f''(x) = -\frac{\pi^2}{6} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} \cdot (x-1)\right)$$

$f''\left(\frac{5}{2}\right) = -1{,}64$ ← negativ, also Hochpunkt an der Stelle

$f''\left(\frac{11}{2}\right) = 1{,}64$ ← positiv, also Tiefpunkt an der Stelle

④ Periode T ausrechnen:

- Periode ausrechnen, damit man alle Hoch/Tiefpunkte angeben kann



Faktor, welcher Periode beeinflusst

$$f(x) = \frac{3}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} \cdot (x-1)\right) + 1$$

Standardperiode für $\sin(x)$, $T = 2\pi$

$$T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6$$

Periode, alle 6 Einheiten neuer Hochpunkt

↳ $x_H = \frac{5}{2} + k \cdot 6$

wo startet Hochpunkt

$x_H = \frac{11}{2} + k \cdot 6$

Ableitungsregeln:

allgemeine Tipps zum vereinfachen:

$f(x) = \frac{4x^2+3x+6}{2x} = \frac{4x^2}{2x} + \frac{3x}{2x} + \frac{6}{2x} = 2x + \frac{3}{2} + 3x^{-1}$ ← vereinfachen möglich bei Summen Brüche auseinander ziehen

$f'(x) = 2 - 3x^{-2}$

$f(x) = \frac{2}{x} - \frac{3}{4x^2} = 2x^{-1} - \frac{3}{4}x^{-2}$ ← durch x^{-2} wandert nur x^2 in Nenner nicht die 4! 4 bleibt im Bruch als $\frac{3}{4}x^{-2}$

$f'(x) = -2x^{-2} + \frac{3}{2}x^{-3}$

$= -\frac{2}{x^2} + \frac{3}{2x^3}$

umschreiben von x in Zähler zu x in Nenner

Konstanten:

$f(x) = 5$

$f'(x) = 0$

Potenzregeln:

$f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2$

$f(x) = x^{-7}$

$f'(x) = -7x^{-8}$

Faktorregel:

$f(x) = \sqrt{2} \cdot x^4$

$f'(x) = 4 \cdot \sqrt{2} \cdot x^3$

$f(x) = \frac{x^3}{3} = \frac{1}{3} \cdot x^3$

$f'(x) = \frac{3}{3} \cdot x^2$

Summenregel:

$f(x) = x^2 - 5x^3 + 7$

$f'(x) = 2x - 15x^2$

Produktregel:

$$\boxed{f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v'}$$

$f(x) = \underbrace{x^3}_{u} \cdot \underbrace{x^5}_{v}$ $\quad u = x^3 \quad u' = 3x^2$

$f'(x) = x^3 \cdot 5x^4 + 3x^2 \cdot x^5$ $\quad v = x^5 \quad v' = 5x^4$

Quotientenregel:

$$\boxed{f'(x) = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}}$$

$u = 2x+3 \quad u' = 2$

$v = x^5 \quad v' = 5x^4$

$$f(x) = \frac{\overbrace{2x+3}^{u}}{\underbrace{x^5}_{v}} = \frac{2x+3 \cdot 5x^4 - x^5 \cdot 2}{(x^5)^2} = \frac{2x+15x^4-2x^5}{x^{10}}$$

Kettenregel:

$\boxed{f'(x) = u' \cdot v'}$ ← innere Ableitung · äußere Ableitung

$f(x) = \overbrace{(\underbrace{x^4+5}_{u})^7}^{v}$

$f'(x) = 4x^3 \cdot 7(x^4+5)^6$

e-Funktion:

→ immer Kettenregel innere · äußere Ableitung: e^{4x^2} $\quad f'(x) = 8x \cdot e^{4x^2}$

$f(x) = e^x \qquad f(x) = 4e^x \qquad f(x) = e^{3x}$

$f'(x) = e^x \qquad f'(x) = 4e^x \qquad f'(x) = 3e^{3x}$

$f(x) = 5 \cdot e^{2x} + e^{-x}$

$f'(x) = 10 \cdot e^{2x} - e^{-x}$

$f(x) = e^{2x^3+5x^2+7}$

$f'(x) = (6x^2+10x) \cdot e^{2x^3+5x^2+7}$

$f(x) = (\underbrace{3x^2-4}_{u}) \cdot \underbrace{e^{2x}}_{v}$

$f'(x) = u \cdot v' + u' \cdot v$

$f'(x) = (3x^2-4) \cdot 2e^{2x} + 6x \cdot e^{2x}$

$f(x) = e^3 \cdot e^x + \frac{1}{e^x}$

$f(x) = e^3 \cdot e^x + e^{-x}$ ← e^3 wird behandelt wie irgendeine Zahl

$f'(x) = e^3 \cdot e^x - e^{-x}$

$f(x) = e^{\sqrt{x}} = e^{x^{\frac{1}{2}}}$

$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{\sqrt{x}}$

ln ableiten:

→ allg: $\boxed{f(x) = \ln(x) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}}$ ← ln fällt weg und das innere wird unter Bruch $\frac{1}{x}$ geschrieben

$f(x) = \ln\left(\frac{2}{\sqrt[3]{2x^2}}\right) = \ln\left(2 \cdot \overbrace{(2x^2)^{-\frac{1}{3}}}^{\text{auch Kettenregel}}\right)$ ← Kettenregel, $\ln(x) = \frac{1}{x}$ abgeleitet

$f'(x) = \underbrace{\frac{1}{2 \cdot (2x^2)^{-\frac{1}{3}}}}_{\ln(\,)\text{ abgeleitet}} \cdot 2 \cdot \underbrace{\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot (2x^2)^{-\frac{4}{3}}}_{\text{äußere}} \cdot \underbrace{4x}_{\text{innere}}$

$f'(x) = \frac{-\frac{4}{3} x \cdot (2x^2)^{-\frac{4}{3}}}{(2x^2)^{-\frac{1}{3}}}$ ← bei gleicher Basis $\frac{2x^2}{2x^2}$ im Bruch kann man $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$ rechnen

$= -\frac{4}{3} x \cdot (2x^2)^{-\frac{4}{3} - (-\frac{1}{3})}$

$= -\frac{4}{3} x \cdot (2x^2)^{-\frac{3}{3}}$

$= -\frac{4}{3} x \cdot (2x^2)^{-1}$

$= -\frac{4}{3} x \cdot \frac{1}{2x^2}$

$= -\frac{4x}{6x^2}$

$= -\frac{4}{6} \cdot \frac{x}{x^2}$ ← x im Nenner kürzt sich raus

$= -\frac{4}{6} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{2}{3} x$

Sinus, Cosinus ableiten:

$f(x) = \sin(x)$ $\quad$ $f(x) = \cos(x)$ $\quad$ $f(x) = -\cos(x)$ $\quad$ $f(x) = -\sin(x)$

$f'(x) = \cos(x)$ $\quad$ $f'(x) = -\sin(x)$ $\quad$ $f'(x) = -\sin(x)$ $\quad$ $f'(x) = -\cos(x)$

Ableitungskreis:

$\sin(x) \rightarrow \cos(x) \rightarrow -\sin(x) \rightarrow -\cos(x) \rightarrow \sin(x)$

$f(x) = \underline{\cos(\underline{x^2 - 4x})}$ ← innere Ableitung · äußere Ableitung

$f'(x) = \underline{-\sin(x^2 - 4x)} \cdot (\underline{2x - 4})$

$f(x) = \underline{(\underline{\sin x})^4}$ ← innere Ableitung · äußere Ableitung

$f'(x) = \underline{\cos(x)} \cdot \underline{4(\sin x)^4}$

$f(x) = -\cos(3x^5)$

$f'(x) = -\sin(3x^5) \cdot 15x^4$

$f(x) = 3 \cdot \cos\left(\frac{x}{3} + \pi\right)$

$f'(x) = -3\sin\left(\frac{x}{3} + \pi\right) \cdot \frac{1}{3}$

$= -\sin\left(\frac{x}{3} + \pi\right)$

$f(x) = (\sin x - \cos x)^3$

$f'(x) = 3 \cdot (\sin x - \cos x)^2 \cdot (\cos x - (-\sin x))$

Differentialrechnung:

Komplette Kurvendiskussion:

Alle Schritte:

1. Definitionsmenge
2. Nullstellen
3. Schnittpunkt y-Achse
4. Symmetrie
5. Asymptoten
6. Grenzverhalten
7. Extrempunkte
8. Wendepunkte
9. Graph zeichnen
10. Monotonie
11. Krümmung
12. Wertemenge

1. Definitionsmenge:

$$f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x+3}$$

$\hookrightarrow \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

2. Nullstellen:

$$0 = \frac{x^2+2x+1}{x+3} \quad | \cdot (x+3)$$

$$0 = x^2+2x+1$$

MNF: $x_1 = -1$

3. Schnittpunkt y-Achse:

$$f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x+3}$$

$$f(0) = \frac{0^2+2\cdot 0+1}{0+3} = \frac{1}{3}$$

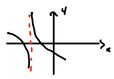
④ Symmetrie:

→ untersuchen auf Achsensymmetrisch oder Punktsymmetrisch

- Achsensymmetrisch: $f(x) = f(-x)$
- Punktsymmetrisch: $f(-x) = -f(x)$

⑤ Asymptoten:

→ findet man durch schauen auf die Definitionslücken

- Bsp graphisch: 
- nur bei Polstellen nicht bei hebbarer Lücke möglich

Herausfinden der 1. Asymptote an Definitionslücke:

$$f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x+3}$$ ← einsetzen von Definitionslücke $x = -3$ in den Nenner:

$D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$, -3 einsetzen in Nenner von $f(x)$:

$-3^2 + 2 \cdot (-3) + 1$

$= 9 - 6 + 1$

$= 4$ ← es kommt 4 heraus $4 \neq 0$ also Polstelle bzw. Asymptote vorhanden → wenn $=0$ im Nenner und $=0$ im Zähler, dann hebbare Lücke!
Die NS des Nenners $x = -3$ eingesetzt in den Nenner ergibt 4 und nicht 0, d.h. $x = -3$ ist keine NS des Zählers, da NS Zähler und Nenner verschieden → Polstelle!

↳ wenn $\neq 0$ rauskommt Asymptote

→ wenn $=0$ rausgekommen wäre hätte es auch eine hebbare Lücke sein können

↳ in diesem Fall handelt es sich um eine senkrechte Asymptote

Herausfinden der 2. Asymptote durch Polynomdivision:

Polynomdivision:

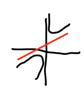
- wenn höchster Exponent im Zähler und Nenner um 1 verschieden, dann nicht senkrecht sondern schiefe Asymptote

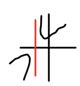
(um 1 verschieden Exponent also schief

$$f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x+3}$$ bei Polynomdivision Nenner durch Zähler teilen

$$x^2+2x+1 : (x+3) = \underbrace{\boxed{x-1}}_{\text{Asymptote}} + \frac{4}{x+3}$$

$$\begin{array}{l} -(x^2+3x) \\ \hline \quad -x + 1 \\ \quad -(-x-3) \\ \hline \qquad 4 \end{array}$$

↳ Asymptote: $y = x - 1$ → schräge Asymptote 

→ zweite Asymptote bildet die Definitionslücke bei $x = -3$ → senkrechte Asymptote 

6. Grenzverhalten:

-> Grenzwert gegen $+\infty$ und gegen $-\infty$ muss untersucht werden

-> normalerweise in normale Funktion $f(x)$ einsetzen aber hier kann man auch in Asymptote einsetzen

Grenzverhalten an Asymptote $y = x-1$:

$$\lim_{x \to \infty} = x - 1 = \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} = -\infty$$

Grenzverhalten bei senkrechter Asymptote $x = -3$:

$$\lim_{x \to -3^r} = +\infty$$ ← man setzt in $f(x)$ z.B. für $x = -2$ ein, Endergebnis ist positiv z.B. 5 -> es strebt gegen $+\infty$

$$\lim_{x \to -3^l} = -\infty$$ ← man setzt in $f(x)$ z.B. für $x = -4$ ein, Endergebnis ist negativ z.B. -9 -> es strebt gegen $-\infty$

7. Extrempunkte:

ableiten:

$$f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x+3}$$

$$f'(x) = \frac{(2x+2)\cdot(x+3) - (1\cdot x^2+2x+1)}{(x+3)^2}$$

$$= \frac{2x^2+6x+2x+6-(x^2+2x+1)}{x^2+6x+9}$$

$$= \frac{x^2+6x+5}{x^2+6x+9} = \frac{x^2+6x+5}{(x+3)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(2x+6)\cdot(x+3)^2 - (2(x+3))\cdot(x^2+6x+5))}{((x+3)^2)^2}$$ ← $(x+3)$ kommt links und rechts im Zähler vor, kann man ausklammern und danach mit einem $(x+3)$ aus dem Nenner rauskürzen

$$= \frac{(x+3)\cdot((2x+6)\cdot(x+3) - (2\cdot(x^2+6x+5)))}{(x+3)^4}$$ ← $(x+3)$ rauskürzen

$$= \frac{2x^2+6x+6x+18-2x^2-12x-10}{(x+3)^3}$$

$$= \frac{8}{(x+3)^3}$$

1. Ableitung $f'(x) = 0$ setzen:

$$0 = \frac{x^2+6x+5}{(x+3)^2} \quad | \cdot (x+3)^2$$

$$0 = x^2+6x+5$$

MNF:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-6 \pm \sqrt{6^2-4\cdot1\cdot5}}{2\cdot1}$$

$$x_1 = -1, \quad x_2 = -5$$

Überprüfen ob Hoch oder Tiefpunkt: ← einfach nur einsetzen der Nullstellen in $f''(x)$, nicht $f''(x)=0$ setzen!

einsetzen von $x_1=-1$ und $x_2=-5$ in $f''(x)$:

$$f''(x)=\frac{8}{(x+3)^2}$$

$$f''(-1)=\frac{8}{(-1+3)^3}=\frac{8}{2^3}=\frac{8}{8}=1$$ ← 2. Ableitung $1>0$ mit $x_1=-1$, also Tiefpunkt an der Stelle

$$f''(-5)=\frac{8}{(-5+3)^3}=\frac{8}{-2^3}=\frac{8}{-8}=-1$$ ← 2. Ableitung $-1<0$ mit $x_2=-5$, also Hochpunkt an der Stelle

↳ bei $x_1=-1$ handelt es sich um einen Tiefpunkt

bei $x_2=-5$ handelt es sich um einen Hochpunkt

→ bei Sattelpunkt wäre $f''(x)=0$ herausgekommen!

→ $f''(x)>0$ → Tiefpunkt

→ $f''(x)<0$ → Hochpunkt

→ $f''(x)=0$ → Sattelpunkt

einsetzen von $x_1=-1$ und $x_2=-5$ in $f(x)$ für dazugehörige y-Koordinaten:

$f(-1)=0$ → Tiefpunkt $TP(-1|0)$

$f(-5)=-8$ → Hochpunkt $HP(-5|-8)$

⑧ Wendepunkte:

2. Ableitung $f''(x)=0$ gleich 0 setzen: ← hier $f''(x)=0$ setzen und keine x-Werte einsetzen!!

$f''(x)=0$

$$0=\frac{8}{(x+3)^3} \quad |\cdot(x+3)^3$$

$0=8$ ϟ

↳ keine Wendepunkte, da kein richtiges Ergebnis

Falls Wendepunkt vorhanden gewesen wäre:

→ falls $f''(x)=0$ z.B. $x=1$ rausgekommen wäre: ← wenn in der 2. Ableitung ein wahrer Wert rausgekommen wäre z.B. $x=1$ Überprüfung Wendepunkt notwendig

1. Überprüfungsmethode:

→ $f'''(x)=0$ setzen und den Wert $x=1$ einsetzen

- falls $f'''(x)<0$, Links → Rechts Krümmung ← also ↺ links nach ↻ rechts also 
- falls $f'''(x)>0$, Rechts → Links Krümmung ← also ↻ rechts nach ↺ links Krümmung 
- falls $f'''(x)=0$, dann keine Wendestelle

2. Überprüfungsmethode:

-> $f''(x)=0$ hat wieder einen wahren Wert ergeben z.B. $x=1$

-> statt $x=1$ in $f'''(x)=0$ einzusetzen einfach Krümmungstabelle verwenden

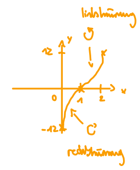
-> Krümmungstabelle:

x	0	1	2
$f''(x)$	-12	0	12
	R		L

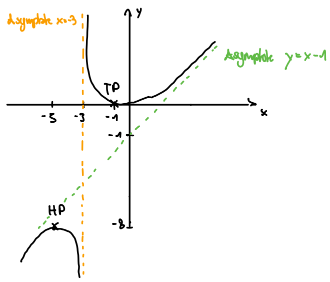
← aussuchen der Werte um die Wendestelle $x=1$

-> negativer Wert -> Rechtskrümmung

-> positiver Wert -> Linkskrümmung



(9) graphisch einzeichnen:



(10) Monotonie:

-> Angabe in Intervallen normalerweise:

$(-\infty, -5]$ streng monoton steigend

$[-5, -3)$ streng monoton wachsend ← offene Klammer bei -3, da -3 nicht definiert, da sie Nullstelle Bruch ist und man nicht geteilt durch 0 rechnen kann.

$(-3, -1]$ streng monoton fallend

$[-1, \infty)$ streng monoton wachsend

(11) Krümmung:

-> keine Wendepunkte

$(-\infty, -3)$ rechtskrümmung

$(-3, +\infty)$ linkskrümmung

} ablesen Graph

(12) Wertebereich:

$W = \{ y \in \mathbb{R} : y \leq -8 \vee y \geq 0 \}$

Monotonieverhalten Funktion bestimmen:

1.) Definitionsmenge bestimmen:

$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4$

$\hookrightarrow \mathbb{D} = \mathbb{R}$ ← keine Begrenzung vorhanden

2.) Extremstellen bestimmen:

$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x$

$f''(x) = \frac{3}{2}x - 3$

$f'(x) = 0$ setzen für Extremstellen:

$0 = \frac{3}{4}x^2 - 3x$

$0 = x\left(\frac{3}{4}x - 3\right)$

SvNP: $x_1 = 0$, $x_2 = 4$

einsetzen von $x_1 = 0$, $x_2 = 4$ in $f''(x)$, schauen Hoch/Tief/Sattelpunkt: ← hier muss nicht $f''(x) = 0$ gesetzt werden, nur wenn man herausfinden will ob Sattelpunkt

$f''(x) = \frac{3}{2}x - 3$

$f''(0) = \frac{3}{2} \cdot 0 - 3$

$= -3 < 0$ ← negativ, also Hochpunkt an der Stelle

$f''(4) = \frac{3}{2} \cdot 4 - 3$

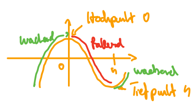
$= 3 > 0$ ← positiv, also Tiefpunkt an der Stelle

3.) Monotonieverhalten bestimmen:

→ Intervalle angeben $-\infty$ bis Extremstellen / Definitionslücken bis $+\infty$

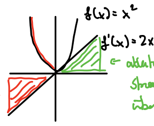
$(-\infty, 0]$ streng monoton steigend ← da bei 0 Hochpunkt ist, d.h. linke Seite muss wachsen und rechte Seite fallen

$[0, 4]$ streng monoton fallend ← die rechte Seite der Hochpunktstelle 0, also muss hier fallen



$[4, +\infty)$ streng monoton wachsend ← da bei 4 Tiefpunkt ist

$\hookrightarrow$ Monotonie lässt sich also mit 1. Ableitung bestimmen z.B. graphisch



← Ableitung ist im positiven Bereich wo es streng monoton wachsend ist, also sie ist über der x-Achse

wo streng monoton fallend, ist die Ableitung im negativen Bereich unter der x-Achse

Sonderfall Sattelpunkt:

$f(x) = x^3$, $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

↳ da Sattelpunkt und alle reellen Zahlen ist die Monotonie hier:

$(-\infty, +\infty)$ streng monoton wachsend

→ wenn man nicht weiß wie der Graph aussieht:

1. Ableitung bilden, schauen wie die Steigung an random Punkt ist

$f'(x) = 3x^2$

$f'(1) = 3 \cdot 1^2 = 3 > 0$ ← $3 > 0$, also positives Ergebnis, also streng monoton wachsend, da positive Steigung

Sonderfall Definitionslücke:

$f(x) = \frac{3}{(x-5)^2}$

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{5\}$

↳ $(-\infty, 5)$ streng monoton steigend

$(5, +\infty)$ streng monoton fallend

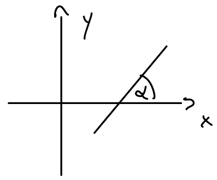
↳ auch hier kann man mit $f'(x)$ die Steigung berechnen und dann schauen ob links von -5 positiv ist → sms

und ob rechts von -5 negativ → smf

Schnittwinkel berechnen:

Schnittwinkel mit x-Achse:

$\boxed{\tan(\alpha) = m}$ ← m ist die Steigung



Beispiel:

$y = \underline{3}x - 2$ ← m=3 ist die Steigung

$y = mx + n$

↳ m = 3 einsetzen in $\tan(\alpha)$:

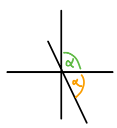
$\tan(\alpha) = 3 \quad | \tan^{-1}$ ← mit $\tan^{-1}$ umformen!

$\alpha = \tan^{-1}(3)$ ← umformen extrem wichtig!

$\boxed{\tan^{-1}(3) = 71°}$ ← so im Taschenrechner eingeben, TR auf D gestellt.

↳ im Taschenrechner um den Winkel herauszubekommen $\tan^{-1}(3)$ eingeben!

Beispiel negativer Winkel:



$f(x) = -2x$

↳ m = -2 einsetzen in $\tan(\alpha)$:

$\tan(\alpha) = -2 \quad | \tan^{-1}$

$\alpha = \tan^{-1}(-2)$

$= -63{,}43°$ ← negativer Winkel nicht möglich

↳ negativen Winkel von 180° abziehen:

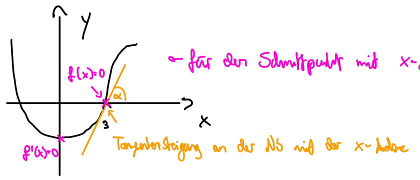
$\alpha_{neu} = 180° - 63{,}43° = 116{,}57°$

bei komplexerer Funktion:

→ wird auch die Steigung des jeweiligen Punktes benötigt

→ man muss Tangente anlegen

- braucht Steigung der Tangente also $f'(x)$



← für den Schnittpunkt mit x-Achse braucht man NS von $f(x)=0$ und nicht $f'(x)=0$!

einzelne Schritte:

1. Nullstelle finden $f(x)=0$ setzen ← nicht $f'(x)=0$, da man hier herausfinden würde wo Extrempunkte bzw. wo die Steigung $=0$ ist!
2. einsetzen der Nullstelle von $f(x)$, also wo der Graph die x-Achse schneidet

   in $f'(x)$ → z.B.: $f'(3)=30$ → $m=30$ ← die Steigung an der Stelle 3 ist 30! $f'(x)$ ist immer Steigung!
3. m wieder in $\tan(\alpha)=m$ einsetzen

Tangente bestimmen:

Allgemeiner Aufbau Tangente:

$\boxed{y=mx+b}$

①. Punkt berechnen:

$f(x)=x^3-6x^2+9x$, gesucht an Stelle $x=2$ ← angegebene Aufgabenstellung, wenn z.B kein Punkt angegeben wäre und stattdessen Schnittpunkt mit x-Achse, einfach $f(x)=0$ setzen

$f(2)=2^3-6\cdot2^2+9\cdot2=2$

↳ $P(2|2)$

② Steigung m berechnen:

1. Ableitung bilden:

$f'(x)=3x^2-12x+9$

einsetzen von x-Koordinate in $f'(x)$ um Steigung herauszufinden:

$f'(2)=3\cdot2^2-12\cdot2+9$

$=-3$

↳ $m=-3$

③ <u>b berechnen:</u>

einsetzen der bisher gefundenen Werte:

$y = mx + b$

$2 = -3 \cdot 2 + b$

$b = 8$

↳ <u>vollständige Tangentengleichung:</u>

$y = -3x + 8$

Mögliche Aufgaben Differentialrechnung:

1. Ableitung bilden:

$$f(x) = \frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 + 6x + 8}$$

$$f'(x) = \frac{(2x - 8) \cdot (x^2 + 6x + 8) - (x^2 - 8x + 15) \cdot (2x + 6)}{(x^2 + 6x + 8)^2}$$

$$= \frac{2x^3 + 12x^2 + 16x - 8x^2 - 48x - 64 - (2x^3 - 16x^2 + 30x + 6x^2 - 48x + 90)}{(x^2 + 6x + 8)^2}$$

$$= \frac{14x^2 - 14x - 154}{(x^2 + 6x + 8)^2}$$

2. Unter welchem Winkel α schneidet das Schaubild der Funktion die x-Achse?

1. Schnittpunkt x-Achse finden $\rightarrow f(x) = 0$:

$$f(x) = \log_{10}(x + 14) - 1$$

$$\log_{10}(x + 14) - 1 = 0 \quad | + 1$$ ← $f(x) = 0$ gesetzt und jetzt umstellen

$$\log_{10}(x + 14) = 1$$

↳ mit dem umgestellten $\log_{10}(x + 14) = 1$ jetzt überlegen:

als Erinnerung:

→ im Logarithmusterm steht auf der linken Seite immer der Exponent!

allgemein gilt:

Exponent
$3^2 = 9 \longrightarrow \log_3(9) = 2$
Basis, Ergebnis — Ergebnis, Basis, Exponent

in diesem Fall also:

$$\log_{10}(x + 95) = 2$$ ← man wandelt einfach um indem man sozusagen hoch 10 rechnet, das hoch 10 wird nicht beachtet man stellt nur noch so um wie in der Form wo kein Logarithmus vorkam

$$10^2 = x + 95$$ ← umgestellt von Form mit Log zu Form ohne Log

$$100 - 95 = x$$

$$x = 5$$

↳ man hat einfach umgestellt mit allgemeiner Log Formel kam für $x = 5$ heraus

man hätte es auch mathematisch berechnen können:

$f(x) = \log_{10}(x+95) - 2$

$= \frac{1}{\ln(10)} \cdot \ln(x+95) - 2$ ← $\log_{10}$ in der Basis wird im Bruch geschrieben $\frac{1}{\ln(10)}$, von der Klammer wird auch der ln genommen, da aber nicht in der Basis nicht im Bruch! Feste Regel einfach akzeptieren

$f(x) = 0$ setzen:

$\frac{1}{\ln(10)} \cdot \ln(x+95) - 2 = 0 \quad | +2$

$\frac{1}{\ln(10)} \cdot \ln(x+95) = 2 \quad | \cdot \ln(10)$

$\ln(x+95) = 2 \cdot \ln(10) \quad | e$ ← beide Seiten hoch e nehmen da im $\ln_e$ in der Basis unsichtbar steht

$e^{\ln(x+95)} = e^{\ln(10)^2}$ ← alles was mit ln(Klammern) steht kommt in Exponent von e also $e^{\ln(\text{Klammer})}$
alles was nicht mit ln(Klammern) sondern einzeln steht kommt in Exponent des Exponenten
also $e^{\ln(\text{Klammer})^{\text{einzeln}}}$

$x + 95 = 10^2 \quad | -95$

$x = 100 - 95$ e hoch ln kürzt sich raus d.h. $e^{\ln(x)} \rightarrow x$, da sich $e^{\ln}$ rauskürzt!

$x = 5$

② **Ableitung bilden:**

$f(x) = \frac{1}{\ln(10)} \cdot \ln(x+95) - 2$

$f'(x) = \frac{1}{\ln(10)} \cdot \frac{1}{x+95}$ ← beim ableiten wird $\ln(x)$ einfach zu $\frac{1}{x}$ und fällt weg außer Vorfaktor

$= \frac{1}{\ln(10) \cdot (x+95)}$

③ **Steigung berechnen Schnittpunkt x-Achse $x=5$ in $f'(x)$ einsetzen:**

$f'(5) = \frac{1}{\ln(10) \cdot (5+95)} = 4{,}34 \cdot 10^{-3}$

↳ $m = 4{,}34 \cdot 10^{-3}$

④ **Schnittwinkel berechnen:**

$\tan \alpha = 4{,}34 \cdot 10^{-3} \quad | \tan^{-1}$

$\alpha = 0{,}24°$

↳ Schnittwinkel von Graph f mit x-Achse ist $0{,}24°$

3. Schnittpunkt zweier Tangenten berechnen:

→ Graph schneidet x-Achse im Punkt P(0|0) und A(a|0), an diesen Punkten werden Tangenten angelegt.

Punkt B ist der Schnittpunkt der Tangenten

- Berechne Flächeninhalt Dreieck PBA
- Für welches c ist Dreieck rechtwinklig?

① Nullstelle berechnen:

$\frac{1}{4}x^2 - cx = 0$

$x \cdot (\frac{1}{4}x - c) = 0$

SVNP:

$x_1 = 0$

$\frac{1}{4}x - c = 0 \quad |+c$ ← Rechnen mit Faktor einfach so wie normale Zahl behandeln!!

$\frac{1}{4}x = c \quad |\cdot 4$

$x_2 = 4c$ ← Antwort ist 4c also einfach mit Faktor das Ergebnis

② Tangenten berechnen:

Tangente im Punkt P(0|0) berechnen:

$y = mx$ ← da durch Ursprung läuft ist b = 0!

1. Ableitung berechnen:

$f'(x) = \frac{1}{2}x - c$

einsetzen von $x = 0$ in $f'(x)$:

$f'(0) = \frac{1}{2} \cdot 0 - c = -c$

↳ $m = -c$

→ Tangente also: $y = -cx$

Tangente im Punkt $A(4c \mid 0)$ berechnen:

$y = mx + b$

m berechnen mit 1. Ableitung:

$f'(x) = \frac{1}{2}x - c$

einsetzen von $x = 4c$ in $f'(x)$:

$f'(4c) = \frac{1}{2} \cdot 4c - c$

$\Rightarrow 2c - c = c$

$\hookrightarrow m = c$

einsetzen aller Werte in $y = mx + b$:

$0 = c \cdot 4c + b$

$\hookrightarrow b = -4c^2$

$\rightarrow$ Tangente also: $y = cx - 4c^2$

③. Schnittpunkt der beiden Tangenten berechnen:

$\rightarrow$ Schnittpunkt findet man indem man Funktionen gleichsetzt also $g(x) = h(x)$

$g(x) = h(x)$

$-cx = cx - 4c^2 \quad | -cx$

$-2cx = -4c^2 \quad | : (-2c)$

$x = \frac{-4c^2}{-2c} = 2c$ $\leftarrow$ Vorfaktor ist egal! muss nicht z.B. $\frac{-4c^2}{-4c}$ sein und auch nicht $\frac{-4c^2}{-2c^2}$! $\frac{-4c^2}{-2c}$ kann einfach so verrechnet werden!

$\rightarrow$ für den y-Wert $x = 2c$ noch in beliebige Tangente einsetzen, nicht in $f(x)$! :

$y = -cx$

$y = -c \cdot 2c$

$\Rightarrow -2c^2$

$\hookrightarrow$ Schnittpunkt der beiden Tangenten: $B(2c \mid -2c^2)$

4) Dreieck berechnen:

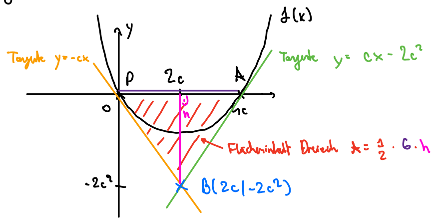
$A = \frac{1}{2} \cdot G \cdot h$ ← anders als bei Vektoren kann man Länge einfach so z.B. aus Koordinatensystem ablesen

$= \frac{1}{2} \cdot 4c \cdot 2c^2$ ← $-2c^2$ wird zu $2c^2$, da Fläche nie negativ sein kann

$= 4c^3$

↳ Flächeninhalt ist $4c^3$

graphisch:



5) Für welchen Wert c wäre Dreieck rechtwinklig?

→ Geraden stehen senkrecht aufeinander wenn die beiden Steigungen $m_1 \cdot m_2 = -1$ ergeben!

$\boxed{m_1 \cdot m_2 = -1}$

$-c \cdot c = -1$

$-c^2 = -1 \quad | :(-1) \quad | \sqrt{\ }$

$c_1 = 1$, $c_2 = -1$ ← nach Wurzel immer 2 Ergebnisse, $c = -1$ unnötig, da $c \geq 0$ sein muss!

↳ also muss $c = 1$ sein

4. Ableiten e – Funktion, Hoch / Tiefpunkt Beispiel:

Gegeben ist die Funktion $f(x) = (5-x) \cdot e^{-3x-1}$

An welcher Stelle x_0 besitzt Schaubild f Extremum? Ist dieser Hoch oder Tiefpunkt?

Extremstelle finden $f'(x)=0$ setzen:

$$f(x) = (5-x) \cdot e^{-3x-1}$$

$$f'(x) = -1 \cdot e^{-3x-1} + (5-x) \cdot (-3) e^{-3x-1}$$

$$= -e^{-3x-1} - 15 e^{-3x-1} + 3x e^{-3x-1}$$

$$= -16 e^{-3x-1} + 3x e^{-3x-1}$$ } kann man auch ausklammern!

$$= e^{-3x-1} \cdot (-16 + 3x) = 0$$ ← man kann auch hier wieder den Satz vom Nullprodukt anwenden

SVNP

$e^{-3x-1} = 0$ ↯

$-16 + 3x = 0 \quad | +16$

$3x = 16 \quad | :3$

$x = \frac{16}{3}$

2. Ableitung für hoch oder Tiefpunkt?

$$f''(x) = e^{-3x-1} \cdot 3 + (-16 + 3x) \cdot (-3) e^{-3x-1}$$

$$= 3 e^{-3x-1} + 48 e^{-3x-1} - 9x e^{-3x-1}$$

$$= e^{-3x-1} (-9x + 51)$$

$$f''\left(\frac{16}{3}\right) = e^{-3 \cdot \frac{16}{3} - 1} \left(-9 \cdot \frac{16}{3} + 51\right)$$

$$= 1{,}24 \cdot 10^{-7}$$ → positiv, also Tiefpunkt

5. Tangente bestimmen:

$f(x) = -4x^2 + 2x + 3$ an der Stelle $x_0 = -3$

$f'(x) = -8x + 2$

$f'(-3) = -8 \cdot (-3) + 2$

$= 24 + 2 = 26$

y-Koordinate herausfinden $x_0 = -3$ in $f(x)$ einsetzen:

$f(-3) = -4 \cdot (-3)^2 + 2 \cdot (-3) + 3$

$= -36 + 3 - 6 = -39$

einsetzen aller Werte in $y = mx + b$:

$-39 = 26 \cdot (-3) + b$ → $b = 39$ → $y = 26x + 39$

6. Gebe größtmögliches Intervall, wo Funktion streng monoton fallend:

$f(x) = 2x^3 - 12x^2 - 30x + 1$

$f'(x) = 6x^2 - 24x - 30$

MNF:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{24 \pm \sqrt{24^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-30)}}{2 \cdot 6}$$

$$= \frac{24 \pm \sqrt{576 + 720}}{12} = 24 \pm \sqrt{1296}$$

$$= \frac{24 \pm 36}{12}$$

$$= \frac{60}{12} = 5 \qquad x_1 = 5$$

$$= -\frac{12}{12} = -1 \qquad x_2 = -1$$

7. Berechne den Grenzwert:

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x - 3}{e^{2 \cdot x - 2} - 1}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{3 \cdot 1 - 3}{e^{2 \cdot 1 - 2} - 1} = \frac{0}{0}$$ ← L'Hopital anwendbar da $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x \to 1} \frac{3}{2 \cdot e^{2x - 2}}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{3}{2 \cdot e^{2 \cdot 1 - 2}} = \frac{3}{2 \cdot 1} = \frac{3}{2}$$ ← 1 eingesetzt kann $\frac{3}{2}$ Grenzwert sein

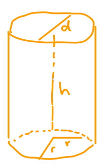
↳ Grenzwert bei $\frac{3}{2}$

8. Wie Höhe h und Radius r für Zylinder wählen?

→ damit Sie Volumen von 0.1 Litern hat und Oberfläche minimal ist

Oberfläche Zylinder: $O = 2\pi r^2 + 2\pi r h$

Volumen Zylinder: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$



Durchmesser $d = 2r$
Umfang $U = 2\pi r$
Grundfläche $G = \pi r^2$
Mantelfläche $M = 2\pi r$
Oberfläche $O = 2\pi r^2 + 2\pi r h$

a) Geben Sie die Formel für Höhe h an in Abhängigkeit von Radius r:

↳ also: $0{,}1\,L = \pi \cdot r^2 \cdot h \quad | : (\pi \cdot r^2)$ ← einfach Volumenformel nehmen $V = 0{,}1$ setzen und dann nach h umstellen

$$h = \frac{0{,}1\,L}{\pi \cdot r^2}$$

b) Oberfläche von Zylinder hängt von Höhe h und Radius r ab

Gebe die Formel für Oberfläche O nur in Abhängigkeit von r an:

↳ Volumenformel, welche nach h umgestellt wurde in Flächenformel für h einsetzen:

$O = 2\pi r^2 + 2\pi r h$

$O = 2\pi r^2 + 2\pi \cdot r \cdot \frac{0{,}1}{\pi \cdot r^2}$ ← einsetzen von $h = \frac{0{,}1}{\pi \cdot r^2}$

$O = 2\pi r^2 + \frac{2 \cdot 0{,}1}{r}$ ← $\pi \cdot r$ kürzen sich raus nur noch r bleibt unter dem Bruchstrich übrig

c) Sei r_0 der von ihnen berechnete Radius. Wie kann argumentiert werden, dass r eine Minimalstelle ist? ← Frage dann gestellt, einfach nur prüfen, wann Tiefpunkt ist?

→ r_0 ist die einzige Extremstelle und $O'(r)$ wechselt an der Stelle Vorzeichen von negativ zu positiv

↳ Erklärung: $f'(x)$ hat VZW von − nach +, d.h. Graph war davor sinkend und danach streng monoton steigend, dieses Verhalten immer bei Tiefpunkt

→ $O'(r_0) = 0 \wedge O''(r_0) > 0$ ← wenn 2. Ableitung der Wert positiv ist handelt es sich um einen Tiefpunkt

d) Geben Sie den Radius r_0 und die Höhe h_0 an für die die Oberfläche des Zylinders minimal ist

↳ auch hier wieder kaum ausgedrückt. Man muss Formel für Oberfläche verwenden und dann die Nebenbedingung des Volumens nach h umstellen. Da abhängig von r, darf h nicht mehr in der Formel stehen

→ einfach die abhängige Formel von r verwenden:

$O = 2\pi r^2 + \frac{0{,}2}{r}$

1. Ableitung bilden und $O'(r_0) = 0$ setzen:

$O'(r_0) = 4\pi r - \frac{0{,}2}{r^2}$

$O'(r_0) = 0$

$4\pi r - \frac{0{,}2}{r^2} = 0 \quad | \cdot r^2$

$4\pi r^3 - 0{,}2 = 0 \quad | +0{,}2 \quad | : 4\pi$

$r^3 = \frac{0{,}2}{4\pi} \quad | \sqrt[3]{}$

$r = \sqrt[3]{\frac{0{,}2}{4\pi}} = 0{,}25 \text{ dm}$

↳ 0,25 dm umwandeln in mm:

0,25 dm · 100 = 25 mm

0,25 dm einsetzen in $h = \frac{0{,}1}{\pi \cdot r^2} = \frac{0{,}1}{\pi \cdot 0{,}25^2} = 0{,}5 \text{ dm}$ ← hier musste 0,25 dm eingesetzt werden, da dies richtige physikalische Formel ist!

→ radius r = 25 mm

→ höhe h = 50 mm

9. Berechnen Sie einen Näherungswert x_n für die Nullstelle der Funktion f:

- mithilfe des Newton-Verfahrens mit Startwert $x_0 = 1$. Iteration kann beendet werden wenn $|f(x_n)| \leq 0.005$

Vorgehensweise:

→ für Newton Verfahren startet man mit Schätzung x_0 für die Nullstelle

→ Herleitung über Tangentengleichung: $t_{x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ ← ursprüngliche Tangentenformel

→ Umgestellte Rekursionsformel:

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x)}{f'(x)} \qquad x_0 = \text{Startwert}}$$

Ableitung bilden:

$$f(x) = 7x + 3\sin(x) - 7$$

$$f'(x) = 7 + 3\cos(x)$$

einsetzen in Rekursionsformel:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{7x + 3\sin(x) - 7}{7 + 3\cos(x)} \quad ; x_0 = 1$$

Definitionsbereich:

- Werte, welche in Funktion eingesetzt werden dürfen ohne Probleme zu verursachen

bei normaler linearen Funktion:

$f(x) = 2x - 2 \rightarrow \mathbb{D} = \mathbb{R}$ alle reelen Zahlen möglich

bei Funktion 2. Grades:

$f(x) = x^2 - 4x + 4 \rightarrow \mathbb{D} = \mathbb{R}$ auch hier keine Einschränkung

bei Funktion 3. Grades:

$f(x) = 2x^3 - x^2 + 4x + 5 \rightarrow \mathbb{R} = \mathbb{R}$ keine Einschränkung

↳ ganzrationale Funktion, wenn ohne Einschränkung

bei exponentiell Funktionen:

$f(x) = 2^x$, $f(x) = e^x$ $\mathbb{D} = \mathbb{R} \rightarrow$ keine Einschränkung

bei Wurzelfunktion:

- alles größer, gleich 0 erlaubt also $\boxed{x \geq 0}$, ungerade Wurzeln machen keine Probleme

$f(x) = \sqrt{x} \rightarrow \mathbb{D} = \mathbb{R} \geq 0 \rightarrow$ alles größer/gleich 0, 0 geht auch $\sqrt{0} = 0$

$f(x) = \sqrt{x-2} \rightarrow \mathbb{D} = \mathbb{R} \geq 2 \rightarrow$ alles größer/gleich 2 möglich

bei Bruchfunktionen:

- wenn im Nenner x steht gibt es Einschränkung, keine $\boxed{x \neq 0}$ darf vorhanden sein

$f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ → alle reelen Zahlen, außer 0, da 0 nie im Nenner

$f(x) = \frac{7}{x-3} \rightarrow \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ → alle reelen Zahlen außer 3

$f(x) = \frac{2}{x^2-1} \rightarrow \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ → alle reelen Zahlen außer 1

$f(x) = e^{\frac{1}{x}} \rightarrow \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ → alle reelen Zahlen außer 0

log oder ln Funktion:

- keine negativen Zahlen und auch keine 0, $\boxed{x > 0}$ verwenden!

$f(x) = \ln(x) \rightarrow \mathbb{D} = \mathbb{R} > 0$ → keine negativen Zahlen und keine 0

$f(x) = \log_{10}(x)$ auch $f(x) = \lg(x)$ geschrieben

$f(x) = \ln(x-2) \rightarrow \mathbb{D} = \mathbb{R} > 2$ → größer als 2, da nicht 0 oder negativ sein darf

Definitionsmenge bei Bruchgleichungen:

- Gleichung aus mehreren Brüchen, nicht nur einzelner Bruch, deshalb Definitionsmenge → alle =0 setzen

Bsp 1:

$$\frac{3}{2x+1} = \frac{2}{2-x}$$

↳ $2x+1=0$, $x=-\frac{1}{2}$ ↳ $2-x$, $x=2$

↳ Definitionsmenge $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, 2\}$

Bsp 2:

$$\frac{1}{x}_1 - \frac{x}{x^2-6x+9}_2 = \frac{-5}{x^2-3x}_3$$

1_1 $x=0$

2_2 $x^2-6x+9=0$ ← binomische Formel, alternativ auch MNF: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$= (x-3)^2 = 0$

3_3 $x^2-3x=0$

$= x(x-3) = 0$

↳ $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$

Definitionsmenge Wurzeln:

- x muss größer gleich 0 sein

Bsp 1:

$f(b) = \sqrt{5b-3}$

$5b-3 \geq 0$

$b \geq \frac{3}{5}$

↳ Definitionsmenge $D = \{b \in \mathbb{R} \mid b \geq \frac{3}{5}\}$ ← b alle reelen Zahlen, solange $b \geq \frac{3}{5}$ Bedingung erfüllt ist

Bsp 2:

$f(x) = \sqrt{2x^2-8}$

$2x^2-8 \geq 0 \quad |+8 \; |:2$

$x^2 \geq 4 \quad |\sqrt{\ } \rightarrow x_1 \geq 2, \; x_2 \leq -2$ nach Wurzeln ziehen Quadratzahl immer 2 Lösungen

↳ $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq 2\}$ ← Betrag von $|x|$ muss ≥ 2 sein, da es -2 und 2 gibt unter der Wurzel

Bsp 3:

$f(x) = \sqrt{3x^2 + 15}$ ← wenn unter der Wurzel immer positiv ist, alle Zahlen möglich

$3x^2 + 15 \geq 0 \quad | -15 \quad | :3$

$x^2 \geq -5 \quad | \sqrt{\ }$ ↯

↳ Widerspruch, man findet keine Bedingung

→ d.h $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}\}$ ← gibt keine Einschränkung / Bedingung, da immer ≥ 0 gegeben ist

ln Definitionsmenge:

- $\boxed{x > 0}$

- Bsp:

$f(x) = \ln(-x)$

Das in der Klammer rausschreiben und einfach > 0 setzen

$-x > 0 \quad | \cdot(-1)$

$x < 0$ Vorzeichen dreht sich um, deshalb muss x jetzt negative Zahl sein

↳ $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$

Definitionsmenge schweres Beispiel:

$$f(x) = \frac{\ln(-x)\sqrt{4 - x^2}}{x + 1}$$

1. $x + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = -1$

2. $-x > 0 \quad | \cdot(-1)$

$x < 0$ Vorzeichen dreht sich um, deshalb muss x jetzt negative Zahl sein

3. $4 - x^2 \geq 0 \quad | -4$ (← alternativ hätte man auch $+x^2$ statt -4 rechnen können und dann $\geq$ zu $\leq$ tauschen)

$-x^2 \geq -4 \quad | \cdot(-1)$

$x^2 \leq 4 \quad | \sqrt{\ }$

Bei $\cdot(-1)$ vertauscht sich das Vorzeichen also auch um $-x^2 \leq -4$ zu $x^2 \geq 4$

$x_1 = 2, \; x_2 = -2$

also $|x| \leq 2 \quad \rightarrow -2 \leq x \leq 2$

kann man umschreiben von $x_1 = 2, x_2 = -2$ zu $|x| \leq 2$ zu $-2 \leq x \leq 2$

↳ Definitionsmenge insgesamt also $(x \in [-2, 0) \setminus \{-1\})$

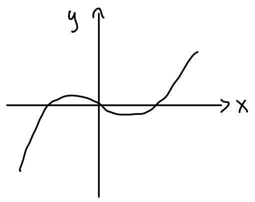
andere Schreibweise für das oben

$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid \underbrace{-2 \leq x \leq 0, \; x \neq -1}_{\text{außer } |x| \leq 2 \text{ und } x \neq -1}\}$

↑ alle Reellen Zahlen

Wertebereich:

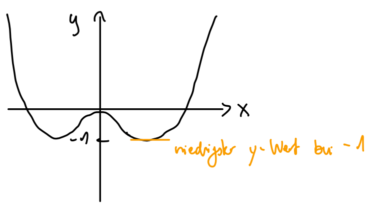
- im Prinzip, genauso wie Definitionsbereich nur um y-Werte statt x-Werte



→ Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

→ Wertebereich: $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

↳ alle reellen Zahlen, da es keine Begrenzung gibt



→ $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

↳ $\mathbb{W} = \mathbb{R}^{\geq 1}$ ← Wertebereich geht nur bis $y \geq 1$

↳ Einschränkung Wertebereich kann nicht kleiner als 1 werden

Mögliche Aufgaben Definitionsbereich:

1. bestimme den maximalen Definitionsbereich der Funktion:

$$f(x) = \frac{\ln(-x)\sqrt{4-x^2}}{x+1}$$

1. $x+1 = 0 \;\rightarrow\; x = -1$

2. $-x > 0 \quad |\cdot(-1)$

   $x < 0$ Vorzeichen dreht sich um, deshalb muss x jetzt negative Zahl sein

3. $4-x^2 \geq 0 \quad |-4$ (← alternativ hätte man auch $+x^2$ statt -4 rechnen können und dann $\geq$ zu $\leq$ tauschen)

   $-x^2 \geq -4 \quad |\cdot(-1)$

   $x^2 \leq 4 \quad |\sqrt{}$

   Bei $\cdot(-1)$ vertauscht sich das Vorzeichen also auch von $-x^2 \leq -4$ zu $x^2 \geq 4$

   $x_1 = 2,\; x_2 = -2$

   also $|x| \leq 2 \;\rightarrow\; -2 \leq x \leq 2$

   kann man umschreiben von $x_1 = 2, x_2 = -2$ zu $|x| \leq 2$ zu $-2 \leq x \leq 2$

   ↳ Definitionsmenge insgesamt also $(x \in [-2, 0) \setminus \{-1\})$

   andere Schreibweise für das oben

   $$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid \underbrace{-2 \leq x \leq 0,\; x \neq -1}_{\text{außer } |x| \leq 2 \text{ und } x \neq -1}\}$$

   alle Reelen Zahlen

2. Bestimme maximalen Definitionsbereich Funktion f

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$$

↳ MNF, dann angeben in Definitionsmenge $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 2\}$

3. Löse folgende Gleichung nach x auf:

$\ln(y-2) + 3 - x = 0 \quad |+x \quad |-3$

$\ln(y-2) = x - 3 \quad |\cdot e$

$y - 2 = e^{x-3} \quad |+2$

$y = e^{x-3} + 2$

4. bilde die Umkehrfunktion:

1. Schritt: Funktionsgleichung nach x auflösen

2. Schritt: Variablen x und y vertauschen

Folgen:

geometrische Folgen:

- immer mit gleichen Faktor multipliziert

z.B. $a_1 = 1 \underbrace{\quad}_{\cdot 2} 2 \underbrace{\quad}_{\cdot 2} 4 \underbrace{\quad}_{\cdot 2} 8$, $q = 2$ ← Faktor mit dem multipliziert wird

Formel für geometrische Folge:

$\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$ ← wenn der Startwert a_1 ist
← allgemeine Gleichung, wenn angegeben werden muss

$a_n = a_0 \cdot q^n$ ← wenn der Startwert a_0 ist

$q = \frac{a_n}{a_{n-1}}$ ← Faktor q lässt sich berechnen durch z.B $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{3}{1} = 3$

$a_5 = a_2 \cdot q^3$ bzw $q = \frac{a_5}{a_2 \cdot q \cdot q} = \frac{a_5}{a_2 \cdot q^2} = \sqrt[3]{\frac{a_5}{a_2}}$ ← Beispiel, wenn Folgenglieder gegeben sind, welche weiter auseinanderliegen a_2 und a_5

Bsp 1:

- Bestimme die ersten 5 Glieder der folgenden geometrischen Folgen:

$1, 3, \dots$

$\overset{a_1}{1} \underbrace{\quad}_{\cdot 3} \overset{a_2}{3} \underbrace{\quad}_{\cdot 3} 9 \underbrace{\quad}_{\cdot 3} 27$

$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{3}{1}$ ← genauso wäre $q = \frac{a_4}{a_3} = \frac{27}{9} = 3$ möglich

$q = 3$

Bsp 2:

- dieses mal nur $a_2 = 2$ und $q = -2$ gegeben, auch wieder erste 5 Folgenglieder gesucht

$q = \frac{a_2}{a_1}$

$-2 = \frac{2}{a_1}$ $\rightarrow a_1 = -1$

$-1 \underbrace{\quad}_{\cdot(-2)} 2 \underbrace{\quad}_{\cdot(-2)} 4 \underbrace{\quad}_{\cdot(-2)}$

Bsp 3:

- Bestimme die ersten 5 Glieder der Folge, wenn $a_2 = 9$, $a_5 = \frac{1}{3}$

$a_1 \quad a_2 = 9 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 = \frac{1}{3}$

$\underbrace{}_{\cdot q} \quad \underbrace{}_{\cdot q} \quad \underbrace{}_{\cdot q}$

$a_5 = a_2 \cdot q^3$ ← entweder so herleiten

$q = \frac{a_5}{a_2 \cdot q \cdot q} = \frac{a_5}{a_2 \cdot q^2} \quad | \cdot (a_2 \cdot q^2)$ ← oder so herleiten mit Standardformel

$q^3 \cdot a_2 = a_5 \quad | : a_2 \quad | \sqrt[3]{}$

$q = \sqrt[3]{\frac{a_5}{a_2}} = \sqrt[3]{\frac{\frac{1}{3}}{9}} = \frac{1}{3}$

Bsp 4:

- Bestimme das 101 Folgenglied der geometrischen Folge:

$2, -\sqrt{2}, 1, -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-\sqrt{2}}{2} = \frac{-\sqrt{2}}{\underbrace{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}_{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

2 kann man auch so schreiben, da $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ ergibt

↳ $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$a_{101} = 2 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{101-1} = 2 \cdot \frac{1}{2^{50}} = \frac{1}{2^{49}}$

arithmetische Folgen:

- von einem Folgenglied zum nächsten immer das gleiche dazurechnen

$\boxed{a_n = a_1 + (n-1) \cdot d}$

Bsp 1:

$a_4 = 5, \quad a_8 = 17$

$a_4 = 5 \xrightarrow{+d} a_5 \xrightarrow{+d} a_6 \xrightarrow{+d} a_7 \xrightarrow{+d} a_8 = 17$

$5 + 4 \cdot d = 17$

$d = 3$ ← konstanter Faktor welcher dazuaddiert wird

einsetzen von $a_4 = 5$ in:

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

$5 = a_1 + (5-1) \cdot 3$

$a_1 = -4$

↳ $a_n = -4 + (n-1) \cdot 3$ ← fertige Gleichung

explizite Formel für Folgen:

- immer darauf achten ob Faktor der Folge Quadratzahl ist oder normale
  - → immer mit Quadratzahlen vergleichen, oder höhere Exponenten
  - → bei Brüchen immer Zähler und Nenner einzeln
    - darauf achten ob Brüche gekürzt wurden, wenn zuerst größer werden, dann kleiner oder normale Zahlen auftauchen

} - Gib für folgende Folgenglieder die explizite Formel an

Bsp 1:

1^2+1 $\quad 2^2+1 \quad 3^2+1 \quad 4^2+1 \quad 5^2+1$

$a_1 = 2 \quad a_2 = 5 \quad a_3 = 10 \quad a_4 = 17 \quad a_5 = 26$

$+3 \quad +5 \quad +7 \quad +9$

$+2 \quad +2 \quad +2$

↳ eigentlicher Ansatz:

erstmal mit Quadratzahlen vergleichen:

$a_3 = 3^2+1$, also wäre:

↳ $a_n = n^2+1$

Bsp 2:

$a_1 = 2 \quad a_2 = 9 \quad a_3 = 28 \quad a_4 = 65$

$1^3+1 \quad 2^3+1 \quad 3^3+1 \quad 4^3+1$

erstmal wieder mit Potenzen vergleichen:

$1^3 = 1 \quad 2^3 = 8 \quad 3^3 = 27 \quad 4^3 = 64$

↳ $a_n = n^3+1$

Bsp 3:

- bei Brüchen Zähler und Nenner getrennt anschauen

$a_0 = 0 \quad a_1 = \frac{1}{2} \quad a_2 = \frac{2}{3} \quad a_3 = \frac{3}{4} \quad a_4 = \frac{4}{5}$

$+1 \quad +1 \quad +1$

$+1 \quad +1 \quad +1$

$\frac{2}{2+1} \quad \frac{3}{3+1} \quad \frac{4}{4+1}$

oben steht das n von a_n, also 4 bei a_4

← unten n+1 also a_4, dann 4+1

↳ $a_1 = \frac{n}{n+1}$

Bsp 4:

- normale Zahlen und Brüche
  - wenn normale Zahlen dastehen und Brüche zuerst größer, dann kleiner werden, meist gekürzt

$a_0 = -1 = \frac{-1}{1}$ $\quad a_1 = 1 = \frac{3}{3} \xrightarrow[+2]{+4} a_2 = \frac{7}{5} \xrightarrow[+2]{+4} a_3 = \frac{11}{7} \xrightarrow[+2]{+4} a_4 = \frac{5}{3} = \frac{11+4}{7+2} = \frac{5 \cdot 3}{3 \cdot 3} = \frac{15}{9}$ ← man ist Folge ungekürzt weitergegangen. $\frac{15}{9}$ wurde nämlich durch 3 gekürzt

Startwert musste ermittelt werden

man überträgt das hier erkennbare Schema +4/+2 auf die nächste Folge

↳ $\underline{a_n = \frac{4n-1}{2n+1}}$ ← Startwert $a_0 = \frac{-1}{1}$, also -1 im Nenner und 1 im Zähler

obere Folge war Abstand immer +4 und unten +2 also 4n und 2n

Bsp 5:

$a_0 = 0 \quad a_1 = \frac{1}{3} \xrightarrow[+6]{+3} a_2 = \frac{4}{9} \xrightarrow[+18]{+5} a_3 = \frac{1}{3} = \frac{3 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{9}{27} \xrightarrow[+54]{+6} a_4 = \frac{16}{81}$ ← obere Zähler n^2 ← untere Nenner 3^n

↳ $\underline{a_n = \frac{n^2}{3^n}}$

Rekursive Formel aufstellen:

- beziehen sich immer auf ihr vorangehendes Folgenglied

→ immer Schreibweise mit vorherigem a_{n-1} in Formel:

↳ $\boxed{a_n = a_{n-1} \cdot 2}$, $\boxed{a_n = n_{-1} + 2^{n-1}}$ (nur mögliche Beispiele)

z.B $\cancel{a_1 = 3}$ $\quad \cancel{a_2 = 5}$ $\quad \boxed{a_3 = 7 \quad a_4 = 9}$ ← z.B. wenn man sich nur auf diese bezieht werden andere nicht beachtet

$a_{n-1} \leftarrow a_n \longrightarrow a_{n+1}$

Vorgänger — aktuelles Folgenglied — Nachfolger

Bsp 1:

$a_1 = 3 \xrightarrow{+2} a_2 = 5 \xrightarrow{+2} a_3 = 7 \xrightarrow{+2} a_4 = 9$

$a_4 = a_3 + 2$

$a_3 = a_2 + 2$

↳ $\underline{a_n = a_{n-1} + 2}$, $\underline{a_1 = 3}$ ← Startwert, Anker nun immer mit dazu bei rekursiv

Bsp 2:

$a_1 = 1 \xrightarrow{+2} a_2 = 3 \xrightarrow{+4} a_3 = 7 \xrightarrow{+8} a_4 = 15 \xrightarrow{+16} a_5 = 31$

$a_2 = a_1 + 2 \quad = a_{\underline{1}} + 2^{\underline{1}}$

$a_3 = a_2 + 4 \quad = a_{\underline{2}} + 2^{\underline{2}}$

$a_4 = a_3 + 8 \quad = a_{\underline{3}} + 2^{\underline{3}}$

~~$a_n = 2^{n-1} - 1 \qquad a_1 = 1$~~

↳ so falsch, da vorheriges Folgenglied a_{n-1} nicht miteinbezogen wurde

↳ $\boxed{a_n = a_{n-1} + 2^{n-1}}$, $a_1 = 1$

Folgenglied wurde miteinbezogen

Rekursive Formel in explizite Umwandeln:

- Im Vergleich direkter Unterschied:

rekursiv	explizit
$\boxed{a_n = \underline{a_{n-1}} - 3 \, , a_0 = 2}$ ← Anker Vorgänger immer mitenthalten	$\boxed{a_n = 2 - 3\underline{n}}$ ← nur aktuelle Folge enthalten nicht vorherige Folge Startwert $a_0 = 2$ enthalten
$\boxed{a_n = a_{n-1} + 2(n-1) + 1 \quad , a_0 = 0}$ vorgänger immer mit enthalten Anker	$\boxed{a_n = n^2}$ ← nur aktuelle Folge Startwert nicht immer notwendig, wenn n z.B. 0 ist

<u>Bsp 1:</u>

$a_n = a_{n-1} - 3$ mit $a_0 = 2$

einsetzen von $n = 1$ in $a_n = a_{n-1} - 3$:

$n = 1 \quad a_1 = a_0 - 3$

$\quad = 2 - 3 = -1$

-3 solange weiterführen bis man Muster erkennt

$n = 2 \quad a_2 = a_1 - 3$

-3

$\quad = -1 - 3 = -4$

in diesem Fall arithmetische Folge sinkt immer -3

-3

$n = 3 \quad a_3 = a_2 - 3$

$\quad = -4 - 3 = -7$

also ist die explizite Folgenvorschrift:

$\boxed{a_n = a_0 + d \cdot n}$ ← allgemeine Arithmetische Folgenvorschrift

$= 2 + (-3) \cdot n$

↳ $\underline{a_n = 2 - 3n}$

Bsp 2:

$$a_n = a_{n-1} + 2(n-1) + 1 \quad \text{mit } a_0 = 0$$

einsetzen für $n=1$ in a_n:

$n=1$ $\quad a_1 = 0 + 2(1-1) + 1$

$\quad\quad = +1$

$n=2$ $\quad a_2 = 1 + 2(2-1) + 1$

$\quad\quad = 4$

$n=3$ $\quad a_3 = 9$

$n=4$ $\quad a_4 = 16$

$\hookrightarrow$ $a_n = n^2$

Grenzwerte:

- allgemein gilt:

$-\infty \cdot \infty = -\infty$

$-\infty + \infty$ ← geht nicht, man weiß nicht was passiert, muss weiter vereinfachen

$\frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, 0 \pm \infty$ ← l'Hospital anwenden, Nenner ableiten und Zähler ableiten

$\lim\limits_{x \to \infty} -x^2 = -\infty$ ← Strebt gegen $-\infty$, da zuerst quadriert und dann minus, also $-(x^2)$ wird gerechnet

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} = \frac{1}{0} = \infty$ ← $\frac{1}{0}$ läuft gegen unendlich

$\left(3 - \frac{7+6n}{2n}\right) = \left(\frac{3 \cdot 2n}{2n} - \frac{7+6n}{2n}\right) = \left(\frac{6n-(7+6n)}{2n}\right) = \left(\frac{-7}{2n}\right)$ ← ergänzen mit Brüchen $\frac{2n}{2n}$, damit man auflösen kann

Wurzelfunktion:

$$\lim_{n \to \infty} \underbrace{\sqrt{n+1}}_{\to\infty} \cdot \left(\underbrace{\underbrace{\sqrt{n+2}}_{\to+\infty} - \underbrace{\sqrt{n}}_{\to\infty}}_{} \right)$$

unendlich - unendlich weiß man nicht, was passiert, $-\infty \cdot \infty$ wäre möglich gewesen

↳ Term muss noch weiter vereinfacht werden weil so kein Grenzwert abgelesen werden kann

$\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt{n+1} \cdot \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}\right)$ ← um weiter zu vereinfachen binomische Formel Trick anwenden:

$= \sqrt{n+1} \cdot \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}\right) \cdot \frac{(\sqrt{n+2} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+2} + \sqrt{n})}$ ← würde sich rauskürzen, deshalb erlaubt

↳ Trick: $\boxed{\text{ergänzen um binomische Formel anwenden zu können:}}$

→ man wendet hier 3. binomische Formel an:

$(a-b) \cdot (a+b) = a^2 - b^2$

$= \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}\right) \cdot \underline{\left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n}\right)} = n+2-n$

$$\sqrt{n+1} \cdot \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}\right) \cdot \frac{(\sqrt{n+2} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+2} + \sqrt{n})}$$

$$= \frac{\sqrt{n+1} \cdot \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}\right) \cdot \left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n}\right)}$$

$= \frac{\sqrt{n+1} \cdot (n+2-n)}{(\sqrt{n+2} + \sqrt{n})}$ ← weiter kürzen

$= \frac{2 \cdot \sqrt{n+1}}{(\sqrt{n+2} + \sqrt{n})}$ ← ausklammern von n

$= \frac{2 \cdot \sqrt{n \cdot (1+\frac{1}{n})}}{\sqrt{n \cdot (1+\underline{\frac{2}{n}})} + \sqrt{n}}$ ← $\frac{1}{n}$, da n rausgezogen wurde und wenn man mit n multiplizieren würde das n im Bruch wegfällt
← auch hier $\frac{2}{n}$, da n ausgeklammert

$$= \frac{2\cdot\sqrt{n}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{n}}$$ ← ausgeklammerte unter einer gemeinsamen Wurzel kann man auch unter 2 Eigene schreiben

$$= \frac{2\cdot\sqrt{n}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\sqrt{n}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1\right)}$$ ← umgeschrieben, sodass man $\sqrt{n}$ nun wegkürzen kann

↙ beim einsetzen von ∞ für n

$$= \frac{2\cdot\overbrace{\sqrt{1+\overset{\to 0}{\frac{1}{n}}}}^{\to 1}}{\underbrace{\left(\sqrt{1+\underset{\to 0}{\frac{2}{n}}}+1\right)}_{2}} = \frac{2\cdot 1}{2} = 1$$ ← beim einsetzen von ∞ für n

↳ bei $\lim_{n\to\infty}$, wenn man für n überall ∞ einsetzt, dann strebt die Funktion gegen 1

Grenzwert e-Funktion:

- allgemein zu wissen: $\ln(0) \to$ läuft gegen $-\infty$, $\ln(1) \to$ läuft gegen 0!

$$\lim_{x\to\infty} e^{x} = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^{x} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} e^{\overbrace{-x}^{\to-\infty}} = 0$$ ← Grenzwert 0 da e^{-x} und der Exponent dann gegen $-\infty$ läuft und e deshalb gegen 0

$$\lim_{x\to-\infty} e^{\overbrace{-x}^{\to\infty}} = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} e^{\overbrace{-x^2}^{-\infty}} = 0$$ ← Exponent $-\infty$, da $-x^2 = -(x^2)$ sind bzw $-x^2 = (-1)\cdot x^2$ ist!

$$\lim_{x\to\infty} 1+7\cdot e^{\overbrace{-x^2+4x}^{\to-\infty}}$$ ← höchste Potenz entscheidet über Wachstum, also $-x^2$
← läuft gegen $-\infty$, da zuerst x^2 gerechnet wird und danach dann $-$, wäre positiv bei $(-x)^2$, nicht bei $-(x^2)$! vorstellbar für Verständnis $-x^2 = -1\cdot x^2$, deshalb gegen $-\infty$ und nicht $+\infty$!

$$= 1+7\cdot 0 = 1$$

$$\lim_{x\to\infty} \underbrace{\frac{2}{\underbrace{e^{x}}_{\to\infty}}}_{\frac{2}{\infty}\to 0} - \underbrace{2\cdot e^{\overbrace{-2x}^{\to-\infty}}}_{\to 0 \;=\; 0} = 0-2\cdot 0 = 0$$

← 2 geteilt durch ∞ führt zu 0

$$\lim_{x\to\infty} \underbrace{-x}_{-\infty}\cdot e^{\overbrace{x}^{\to+\infty}} = -\infty\cdot\infty = -\infty$$ ← läuft insgesamt gegen $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \underbrace{-x}_{\to+\infty}\cdot e^{\overbrace{x}^{\to 0}} = \infty\cdot 0$$ ← geht nicht man weiß nicht was passiert

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\overset{\to\infty}{-x}}{\underset{\to\infty}{e^{-x}}}$$ ← $e^{x} = \frac{1}{e^{-x}}$ kann man so umschreiben in Nenner

↙ Zähler $-x$ abgeleitet $= -1$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{(-1)\cdot e^{-x}}$$ ← l'Hospital anwenden immer bei $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ möglich
dafür Nenner einmal ableiten und Zähler einmal ableiten

↖ Zähler abgeleitet mit Kettenregel

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\underbrace{e^{-x}}_{\to\infty}} = 0$$

L'Hospital Regel Grenzwerte:

- wenn die Funktion $\boxed{\frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \frac{0}{0}, 0\cdot\pm\infty}$ bildet, dann anwendbar
  - → Zähler ableiten und Nenner ableiten → nur wenn die oberen Fälle gegeben sind
    - ↳ falls nach Ableitung immer noch z.B. $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, kann man nochmals ableiten
      - ↳ mehrmals ableiten möglich, wenn z.B. nochmal $\frac{\infty}{\infty}$ rauskommt nochmal ableiten, z.B.: $\frac{\overset{\to\infty}{4x}}{\underset{\to\infty}{6x}} = \frac{4}{3}$ nochmal abgeleitet

Bsp 1:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overset{\to\infty}{2x}}{\underset{\to\infty}{e^x}} = \frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = 0$$

obere abgeleitet

untere abgeleitet

Bsp 2:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\overbrace{e^x - e}^{\to 0}}{\underbrace{\ln(x)}_{\ln(1)=0}} = \lim_{x\to 1} \frac{\overset{\to e}{e^x}}{\underset{\to 1}{\frac{1}{x}}} = e$$

ableiten da $\frac{0}{0}$

Bsp 3:

$$\lim_{x\to 0} \underset{\to 0}{x} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{\ln(0)=-\infty} = \lim_{x\to 0} \frac{\overset{-\infty}{\ln(x)}}{\underbrace{\frac{1}{x}}_{\frac{1}{0}\to\infty}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x\to 0} -x = 0$$

läuft gegen $-\infty$

l'Hospital, ableiten

ln(x) abgeleitet ist $\frac{1}{x}$

dreht oben, den Doppelbruch

$\frac{1}{x} = 1\cdot x^{-1}$ abgeleitet: $(-1)x^{-2} = -x^{-2} = \frac{1}{-x^2}$

Kehrwert im Bruch ist das gleiche wie x

1 durch 0 läuft gegen unendlich

Grenzwerte von Folgen berechnen:

Bsp 1:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2n^3 - 3n^2}{4n^3 + 2} = \frac{2}{4}$$ ← wenn die 2 höchsten Potenzen gleich sind kann man den Rest einfach streichen

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\cdot\left(2-\frac{3}{n}\right)}{n^3\cdot\left(4+\frac{2}{n^3}\right)} = \frac{2-\frac{3}{n}}{4+\frac{2}{n^3}} = \frac{2-0}{4+0} = \frac{2}{4}$$ ← lange Variante mit ausklammern geht immer

Bsp 2:

$$\lim_{n\to\infty} 7\cdot\left(3 - \frac{7+6n}{2n}\right)$$ ← ausklammern nicht möglich, deshalb ergänzen

$$= 7\cdot\left(\frac{3\cdot 2n}{2n} - \frac{7+6n}{2n}\right)$$ ← ergänzt mit $\frac{2n}{2n}$ damit man ausklammern kann

$$= 7\cdot\left(\frac{6n-(7+6n)}{2n}\right)$$

$$= 7\cdot\left(\frac{7}{2n}\right)$$

$$= -\frac{49}{\underset{\to 0}{2n}} = 0$$

↳ alternativ l'Hospital:

$$7\cdot\left(3-\frac{7+6n}{2n}\right)$$ ← kann auch hier schon gezogen werden: $7\left(3-\frac{7+6n}{2n}\right)$ ← $\frac{\infty}{\infty}$

$$= 21-\frac{49+42n}{2n}$$ ← l'Hospital ableiten

$$= 21-\frac{42}{2}$$

$$= 21-21=0$$

$$= 7\cdot\left(3-\frac{6}{2}\right)$$

$$= 7\cdot(3-3)$$

$$= 7\cdot 0 = 0$$

Bsp 3:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$$

↑ $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ bei -1 wird die Bruch klammer beim auflösen einfach umgedreht 2 das Ergebnis

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\cdot 2$$ ← klammern aufgelöst

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\underbrace{2n}_{\to\infty}}$$

$$= 0$$

Bsp 4:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\overbrace{2n-5}^{\infty}}{4} = \frac{\infty}{4} = \infty$$

Definitionslücken: Polstelle und hebbare Lücke, Grenzverhalten an Polstellen:

→ Definitionslücken findet man durch die Nullstellen des Nenners

→ Es gibt 2 Arten von Definitionslücken:

- Polstelle → wenn Nullstelle Zähler und Nenner verschieden sind → also mit NS Nenner eingesetzt in den Zähler kommt $=4$ raus anstatt $=0$
- hebbare Lücke → wenn Nullstelle Zähler und Nenner gleich sind → d.h. z.B. einsetzen der NS des Nenners $x=3$ in den Zähler eingesetzt muss auch $=0$ sein!

→ Verhalten an Grenzwerten findet man heraus indem man von links also $-\infty$ und rechts $+\infty$ auf die Polstelle zuläuft, nur bei Polstellen Vorzeichenwechsel möglich

→ entweder Grenzwertverhalten: Strebt nach $-\infty$

→ oder Strebt nach $+\infty$, nur die beiden Möglichkeiten

1. Nullstellen des Nenners, Nenner = 0 setzen:

$$f(x) = \frac{-(x-3)}{x^2-9}$$

$x^2 - 9 = 0 \quad | +9 \quad | \sqrt{\ }$

$x_1 = 3 \; , \; x_2 = -3$

↳ Definitionslücken bei $x_1 = 3, x_2 = -3$

2. Nullstellen des Zählers, Zähler = 0 setzen:

$-(x-3) = 0 \quad | \cdot(-1) \quad | +3$

$x = 3$

↳ wenn Nullstelle Zähler und Nenner gleich sind, dann hebbare Lücke

→ also ist $x=3$ eine hebbare Lücke und $x=-3$ eine Polstelle

3. Grenzverhalten an Polstellen untersuchen:

umformen der Gleichung (nicht notwendig): ← nicht notwendig, macht aber das einsehen einfacher!

$$f(x) = \frac{-(x-3)}{x^2-9}$$ ← man versucht hebbare Lücken rauszukürzen

$$= \frac{-(x-3)}{\underbrace{(x-3)(x+3)}_{\text{Linearfaktorzerlegungsform}}}$$ ← Angabe des Nenners in Nullstellen, damit hebbare Lücken rausgekürzt werden

$$= \frac{-1}{x+3}$$ ← nachdem sich hebbare Lücke $(x-3)$ rausgekürzt hat

Schritt kann übersprungen werden macht nur nachfolgendes rechnen einfacher man würde auch ohne umformen auf das Ergebnis kommen!

Grenzverhalten von $x=-3$ von beiden Seiten untersuchen:

- rechte Seite $\lim\limits_{x \to -3^r}$, wenn man von $+\infty$ auf -3 zuläuft, also von rechts
- linke Seite $\lim\limits_{x \to -3^l}$, wenn man von $-\infty$ auf -3 zuläuft, also von links

$-1 < 0$ also strebt gegen $-\infty$

$$\lim_{x \to -3^r} \frac{-1}{x+3} = \frac{-1}{-2+3} = \frac{-1}{+1} = -1 = -\infty$$

einsetzen von x, welches größer als -3 ist, da man von rechts kommt

$$\lim_{x \to -3^l} \frac{-1}{x+3} = \frac{-1}{-4+3} = \frac{-1}{-1} = 1 = \infty$$

einsetzen von x, kleiner als -3, da von links

Stetigkeit überprüfen und beweisen:

- Funktion, welche in Abschnitte unterteilt sind

-> solange stetig wie Funktion definiert, solange keine Definitionslücken

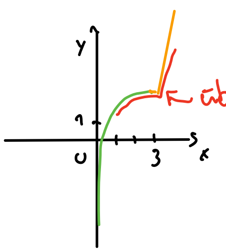
-> meistens fehlen, da unstetig, an der Anschlussstelle wo Funktionen verknüpft werden

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & , x \geq 3 \\ -\frac{1}{x} + 16 & , x < 3 \end{cases}$$

← 1. Teil der zusammengesetzten Funktion

← 2. Teil der zusammengesetzten Funktion

Beim Übergang treten die meisten Probleme auf



← Übergang ist stetig

① Grenzverhalten von links und rechts überprüfen:

$\lim\limits_{x \to 3^+} x^2 - 4 = 5$ ← für 3^+ muss die erste Funktion genommen werden, da sie für $x \geq 3$ gilt

$\lim\limits_{x \to 3^-} -\frac{1}{x} + \frac{16}{3} = 5$ ← für 3^- muss die zweite Funktion genommen werden, da sie für $x < 3$ gilt

Bsp 2:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = \underline{1}$ ← nicht notwendig Zahl einsetzen, da z.B $\frac{x}{x} = 1$ und $\frac{3}{3} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = \underline{-1}$ ← Betrag macht den Wert immer positiv, d.h, wenn man für x eine negative Zahl einsetzt muss sie positiv werden, d.h es muss $\frac{-x}{x}$ heißen denn $\frac{-x}{x}$ man ein $-x$ einsetzt $\frac{-(-x)}{x} = \frac{x}{x}$ ist und ein Betrag immer positiv werden muss.

↳ $-1 \neq 1$ also unstetig!

Mögliche Aufgaben Grenzwerte und Folgen:

1. Gebe explizite Formel für Folgenglied a_n an:

- Die Folge a_n ist für $n \in \mathbb{N}_0$ gegeben durch
  alle natürlichen Zahlen inklusive der 0

$-4, 0, -4, 0, -4, 0 \dots$

↳ $a_n = -2 \cdot ((-1)^n + 1)$ ← abwechselnd 0 und 2

2. überprüfe ob die Folge (a_n), alternierend, beschränkt und Monotie besitzt:

$a_n = \frac{3}{n^3} - 1 \quad , n = 1, 2, 3 \dots$

1. → alternierend: abwechselnd unterschiedliche Vorzeichen von aufeinander folgenden Gliedern

   Die Folge ist nicht alternierend, da positive Zahlen immer verwendet werden,

   da n in dem Fall immer positiv ist

   → für alternierend müsste negativer Wert stehen z.B. $(-1)^n$ ← exponent müsste abwechseln mit negativer Basis

2. Beschränkt, da n im Nenner steht und somit nicht größer als 3 werden kann

3. Die Funktion ist streng monoton steigend, da sie im negativen startet und

   n im Nenner steht und je größer n wird, die Funktion in Richtung 0 bzw. Richtung −1 strebt

   → $a_n < a_{n+1}$, streng monoton wachsend ← aktueller Fall

   → $a_n \leq a_{n+1}$, monoton wachsend

3. Bei einer Zahlenfolge $(a_n) = a_0, a_1, a_2, \dots$ ist das nächste Folgenglied gleich dem vorletzen:

- Geben Sie eine Rekursionsvorschrift zur Berechnung des Folgenglieds a_n an

Ansatz:

→ Es dürfen nur 2 Zahlen auftreten, welche sich abwechseln

nächstes Glied = vorletztem Glied

↳ $a_{n+1} = a_{n-1}$ | umstellen

$a_n = a_{n-2}$ → finale Formel

austesten für welche Werte von n möglich, n einsetzen:

$n = 0 \quad a_0 = a_{0-2}$ → a_{-2} nicht möglich, da nur positive ab a_0 möglich sind

$n = 1 \quad a_1 = a_{1-2}$

$n = 2 \quad a_2 = a_{2-2}$ → $a_2 = a_0$ → also erst ab $n = 2$ möglich, da dann a_0 gegeben ist

$n = 3 \quad a_3 = a_{3-2}$

$n = 4 \quad a_4 = a_{4-2}$ → $a_4 = a_2 = 2$

$n = 5 \quad a_5 = a_{5-2}$ → $a_5 = a_3 = 3$

$n = 6 \quad a_6 = a_{6-2}$ → $a_6 = a_4 = 2$

↳ $a_n = a_{n-2} \quad , n \geq 2$

→ Also $a_n = a_{n-2}$, da Zahlenfolge bei a_0 anfängt und a_{2-2} gleich a_0 ist

4. Bestimmen Sie das 5. Folgenglied der rekursiv definierten Folge (a_n):

$a_n = -2a_{n-1} + n \quad a_1 = 3 \quad n \in \mathbb{N}_{>1}$

↳ einfach nur einsetzen der Werte:

$n=2 \quad a_2 = -2 \cdot a_1 + 2$

$= -2 \cdot 3 + 2$

$= -4$

$n=3 \rightarrow a_3 = -11$ etc. solange bis bei $n=5$ angekommen

5. Bestimmen Sie für die Funktion f folgende Grenzwerte:

$$f(x) = \frac{x-2}{2 \cdot (x-1)(x+4)}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{0-2}{2 \cdot (0-1) \cdot (0+4)} = \frac{-2}{-8} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \to -4^+} \frac{-3}{2 \cdot (-3-1)(-3+4)} = \frac{-3}{-8} = \frac{3}{8} = +\infty$$ ← da $\lim_{x \to -4^+}$, handelt es sich um Polstelle bei der man von rechts kommt, das Ergebnis spielt keine Rolle nur ob positiv oder negativ bei positiv Grenzverhalten gegen $+\infty$

↑ hier wird Grenzverhalten untersucht da 4^+

6. Bestimmen Sie:

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sin(x^3-8)}{x^2-3x+2}$$

↳ für $x=2$ eingesetzt erhält man $\frac{0}{0}$:

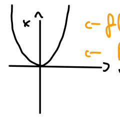
$$\lim_{x \to 2} \frac{\sin(2^3-8)}{2^2-3 \cdot 2+2} = \frac{0}{0}$$ ← L'Hospital anwenden da $\frac{0}{0}$ darf man Nenner und Zähler ableiten

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x^2 \cdot \cos(x^3-8)}{2x-3}$$ ← jetzt nochmal 2 einsetzen

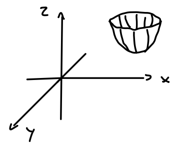
$$= \frac{12}{1} = 12$$

Mehrdimensionale Analysis:

$f(x) = y$ Wert $f(x,y) = z$ Wert ← als Vergleich unterschied



← $f(x) = x^2$
← Parabel



← Bottich

Partielle Ableitung:

→ es wird immer nach jeweils einer Variable abgeleitet, die andere wird dann als normale Zahl angesehen

① 1. Ableitung jeweils nach x und nach y:

$f(x,y) = e^{x \cdot y^2}$

$f_x = y^2 \cdot e^{x \cdot y^2}$ ← 1. Ableitung nach x: f_x

$f_y = 2yx \cdot e^{x \cdot y^2}$ ← 1. Ableitung nach y: f_y

② 2. Ableitung jeweils von f_x nach x und y, sowie von f_y nach x und y:

$f_x = y^2 \cdot e^{x \cdot y^2}$ ← Produktregel zum ableiten

$f_{xx} = y^2 y^2 \cdot e^{x \cdot y^2}$ ← 2. Ableitung von f_x nach x → also f_{xx}

$= y^4 \cdot e^{x \cdot y^2}$

$f_{xy} = y^2 \cdot 2xy \cdot e^{x \cdot y^2} + 2y \cdot e^{x \cdot y^2}$

$= e^{x \cdot y^2} (y^2 \cdot 2xy + 2y)$ ← ausklammern

$= e^{x \cdot y^2} (2y + 2xy^3)$ ← umstellen, zusammenfassen von $y^2 \cdot 2xy$ zu $2xy^3$

$f_y = 2yx \cdot e^{x \cdot y^2}$

$f_{yy} = 2x \cdot e^{x \cdot y^2} + 2yx \cdot 2yx \cdot e^{x \cdot y^2}$

$= e^{x \cdot y^2} (2x + 4x^2y^2)$

$\left(\begin{aligned} f_{yx} &= 2y \cdot e^{x \cdot y^2} + y^2 \cdot e^{x \cdot y^2} \cdot 2yx \\ &= e^{x \cdot y^2} (2y + 2x^2y^2) \end{aligned} \right)$ ← f_{xy} und f_{yx} sind gleich!
← nicht notwendig, da $f_{yx} = f_{xy}$ ist!

Partielle Ableitung von Brüchen:

Extrem wichtig:

Sehr gutes Verständnisbeispiel umstellen von Brüchen:

$$f(x,y) = \frac{1}{y\cdot(x-3)} = \cancel{1\cdot(y\cdot(x-3))^{-1} = (yx-3y)^{-1}}$$ ← umstellen

↑ das y wird als Faktor angesehen und bleibt im Bruch
genauso wie $\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{(x-3)}$!

$$= \frac{1}{y}\cdot\frac{1}{(x-3)} = \frac{1}{y}\cdot(x-3)^{-1}$$ ← so ist es richtig umgeschrieben

$$f_x(x,y) = \frac{1}{y}\cdot(-1)\cdot(x-3)^{-2}\cdot 1$$

$$= -\frac{1}{y\cdot(x-3)^2}$$

Quotientenregel:

$$\boxed{f'(x,y) = \frac{u'\cdot v - v'\cdot u}{v^2}}$$ ← Reihenfolge von $u'\cdot v$ wichtig! Da subtrahiert wird!

Bsp 1:

$$f(x,y) = \frac{\overbrace{xy}^{u}}{\underbrace{3x+y^2}_{v}}$$

$u = x\cdot y$ $\quad u'_x = y$

$v = 3x+y^2$ $\quad v'_x = 3$

$$f_x(x,y) = \frac{u'_x\cdot v - v'_x\cdot u}{v^2}$$

$$= \frac{y\cdot(3x+y^2) - 3\cdot(x\cdot y)}{(3x+y)^2}$$

$$= \frac{3xy+y^3-3x\cdot y}{(3x+y)^2}$$

$$= \frac{y^3}{(3x+y)^2}$$

↳ wichtig:

wenn statt $\frac{xy}{3x+y^2}$ gestanden wäre $\frac{xy}{3(x+y^2)}$, dann wäre es $\frac{1}{3}\cdot xy\cdot\frac{1}{(x+y^2)}$!

↳ einzelner Faktor im Bruch bleibt im Bruch: $\frac{1}{4x} = \frac{1}{4}x^{-1}$ und nicht $4x^{-1}$!

Extremstellen mehrdimensional:

① 1. Ableitung jeweils bilden:

$$f(x,y) = x^2 \cdot y - 2x^2 - y^2$$

$$f_x = 2yx - 4x$$

$$f_y = x^2 - 2y$$

② 2. Ableitung jeweils bilden:

$$f_{xx} = 2y - 4$$

$$f_{yy} = -2$$

$$f_{xy} = 2x$$

$$f_{yx} = 2x$$

③ LGS aufstellen mit $f_x = 0$ und $f_y = 0$:

→ Extremstellen findet man durch die Nullstellen der 1. Ableitung

→ also alles $=0$ setzen und in ein LGS schreiben:

LGS:

I $2xy - 4x = 0$

II $x^2 - 2y = 0$

↳ eine Gleichung nach Variablen umstellen und in andere einsetzen:

aus II: $y = \frac{1}{2}x^2$ in I einsetzen:

I $2x \cdot (\frac{1}{2}x^2) - 4x = 0$

$= x^3 - 4x = 0$

$= x(x^2 - 4) = 0$

↳ $x_1 = 0$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$ sind die Nullstellen der x-Achse

→ Bisher nur die x-Koordinaten der Punkte ausgerechnet:

$P_1(0| \quad)$

$P_2(2| \quad)$

$P_3(-2| \quad)$

4.) <u>Nullstellen der x-Koordinaten in Gleichung einsetzen für y-Werte:</u>

→ einsetzen der Nullstellen in bereits umgestellte y Gleichung:

$y = \frac{1}{2}x^2$

$x_1 = 0$ in $y = \frac{1}{2} \cdot 0^2 = 0$

$x_2 = 2$ in $y = \frac{1}{2} \cdot 2^2 = 2$

$x_3 = -2$ in $y = \frac{1}{2} \cdot (-2)^2 = 2$

↳ <u>man erhält die Punkte:</u>

$P_1(0|0)$

$P_2(2|2)$

$P_3(-2|2)$

5.) <u>Bilden der Hesse-Matrix um zu bestimmen ob Hoch-/Tief-/Sattelpunkt:</u>

<u>allgemeine Form Hesse-Matrix:</u>

→ es werden die 2. Ableitungen eingesetzt:

$$\boxed{H_f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}}$$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2y-4 & 2x \\ 2x & -2 \end{pmatrix}$$

<u>5.1 einsetzen von P_1, P_2, P_3 in die Hesse Matrix:</u>

$P_1(0|0)$ in $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2y-4 & 2x \\ 2x & -2 \end{pmatrix}$

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

↳ falls Matrix pos. def. ⇒ Tiefpunkt

neg. def. ⇒ Hochpunkt

indef. ⇒ Sattelpunkt

<u>5.2 det von $H_f(0|0)$ berechnen:</u>

$$\det \begin{pmatrix} \boxed{-4} & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = -4 \cdot (-2) - 0 \cdot 0 = 8$$

↳ det = 8, also positiv → Hochpunkt oder Tiefpunkt mögl.

→ wenn der 1. Wert der Hesse matrix negativ ist, dann Hochpunkt

→ wenn der 1. Wert der Matrix positiv ist, dann Tiefpunkt

→ wenn det < 0, also negativ gewesen wäre, wäre es ein Sattelpunkt

↳ da det > 0 ist, also positiv und der 1. Wert der Matrix $\boxed{-4}$ ist, also negativ, handelt es sich um einen Hochpunkt

HP(0|0)

Hesse Matrix aufstellen und det auch für P_2, P_3 bilden:

$$P(2|2) \text{ in } H_f(2|2) = \begin{pmatrix} 2\cdot 2-4 & 2\cdot 2 \\ 2\cdot 2 & -2\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = 0\cdot(-2) - 4\cdot 4 = -16 < 0$$

↳ indefinit da det < 0 → also Sattelpunkt

SP(2|2)

$$P(-2|2) \text{ in } H_f(2|2) = \begin{pmatrix} 2\cdot 2-4 & 2\cdot(-2) \\ 2\cdot(-2) & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} = 0\cdot(-2) - (-4)\cdot(-4) = -16$$

↳ indefinit da det < 0 → Sattelpunkt

SP(-2|2)

→ falls det = 0 sein sollte über Eigenwerte gehen und bestimmen

Nullstellen Mehrdimensional:

→ wird benötigt für Definitionsbereich

→ die Nullstelle ist keine Stelle mehr z.B $x_1 = 0$,

sondern ein Punkt $P(x|y)$ ($\in \mathbb{R}^2$ ← bedeutet Element aus der Ebene)

→ es gilt $f(x,y) = 0$ ← Gleichung = 0 setzen für Nullstelle

Tipp:

- durch quadratisch ergänzen, binomische Formel bilden
- ausklammern Nullstellen direkt ablesbar
- Nullstellenformel $(x-3)(x+1)$ am besten bilden

$$f(x,y) = x^4 + x^2 \cdot y^2 - 2x^2$$

$$f(x,y) = 0$$

$$x^4 + x^2 \cdot y^2 - 2x^2 = 0$$

$$x^2 (x^2 + y^2 - 2) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x^2 + y^2 = 2 \quad | \sqrt{}$$

$$x + y = \sqrt{2}$$

Definitionsbereich mehrdimensional:

a) $f(x,y) = \sqrt{(x-2)(5-y)}$ ← Bedingung bei Wurzel unter Wurzel muss ≥ 0 sein

$\mathbb{D} = \{x,y \in \mathbb{R} \mid (x \geq 2 \land y \leq 5) \lor (x \leq 2 \land y \geq 5)\}$ ← bei 2 Bedingungen gibt das unter der Wurzel 0

entweder ergibt $(x-2)=0$

oder $(5-y)=0$

c) $f(x,y) = \dfrac{e^{x^2-1}}{x^2-y}$ ← Nenner darf nicht $=0$ sein

↳ $x^2 - y = 0$ ← aus dieser Gleichung kann man durch umstellen jeden Fall ableiten

$x^2 = y$ ← erste Bedingung x^2 darf nicht so groß wie y sein, da ansonsten im Nenner 0 steht

↳ $\mathbb{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R} \mid y \neq x^2\}$

d) $f(x,y) = \sqrt{-x^2+4\cdot x-y^2}$ ← unter Wurzel muss ≥ 0 sein

↳ also $-x^2+4x-y^2 \geq 0$

$= -(x^2+4x+4)-(y^2-4) \geq 0$ ← quadratisch ergänzen! $-4+4$ ergibt 0 und löst sich auf

$= -(x+2)^2 - y^2 - 4 \geq 0$

$= -4 - y^2 - (x+2)^2 \geq 0 \quad |\cdot(-1)$

$= 4 + y^2 + (x+2)^2 < 0$

Höhenlinien:

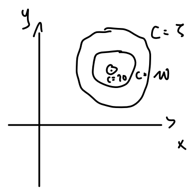
→ vorstellen wie man schaut von oben auf Karte und Höhenlinien wie z.B. bei Weltkarte.

→ es wird ein Höhenlevel vorgegeben C

1.) Gleichung = c setzen:

$$f(x,y) = \frac{\sqrt[3]{y-1}}{x}$$

$$f(x,y) = \frac{\sqrt[3]{y-1}}{x} = c$$



← so kann man sich unterschiedliche Höhenlevel vorstellen

2) umstellen nach beliebiger Variablen, hier nach y:

$$f(x,y) = \frac{\sqrt[3]{y-1}}{x} = c \quad |\cdot x$$

$$\sqrt[3]{y-1} = c\cdot x \quad |(\ldots)^3$$

$$y-1 = c^3\cdot x^3 \quad |+1$$

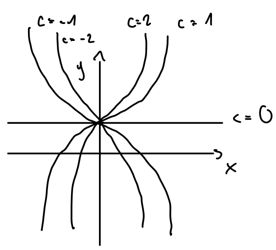
$$\boxed{y = c^3\cdot x^3+1}\ , x \neq 0$$

← wichtig $x \neq 0$, da in Ursprungsterm $\frac{\sqrt[3]{y-1}}{x}$ ← x im Nenner stand und man nicht durch 0 teilen darf

↳ gesuchte Funktion: $y = c^3\cdot x^3+1$

wenn man grafisch einzeichnen will:

$c=0$, $c=1$, $c=-1$ etc einsetzen in Funktion:



Tangentiale Ableitung einer Funktion:

→ die allgemeine Formel ist:

$$\boxed{z - z_0 = \underbrace{f_x(x_0, y_0)}_{\text{1. Ableitung nach } f_x \text{ mit } x_0 \text{ und } y_0 \text{ eingesetzt}} \cdot (x - x_0) + \underbrace{f_y(x_0, y_0)}_{\text{1. Ableitung nach } f_y \text{ mit } x_0, y_0 \text{ eingesetzt}} \cdot (y - y_0)}$$

z_0: einsetzen von x_0, y_0 in ganz normale Funktion $f(x,y)$

↳ 1. man setzt x_0 und y_0 in die normale Formel ein $f(x,y)$ und erhält z_0

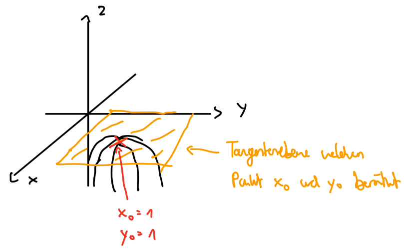
2. man benötigt die 1. Ableitung nach f_x, sowie f_y.

3. man setzt die Stellen x_0 und y_0 in die Funktion f_y und f_x ein

4. alle Werte in Ebenenformel einsetzen

Bsp:

$$\underbrace{f(x,y)}_{\text{ist z Wert auf z-Achse}} = 2x^3 - y^2 \quad , \; x_0 = 1 \; , \; y_0 = 1$$



1. $z_0 = 2 \cdot x_0^3 - y_0^2$

   $z_0 = 2 \cdot 1^3 - 1^2 = 1$

2. $f_x(x,y) = 6x$

   $f_y(x,y) = -2y$

3. $f_x(x_0, y_0) = 6 \cdot 1 = 6$

   $f_y(x_0, y_0) = -2 \cdot 1 = -2$

4. einsetzen in Formel:

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

$$z - 1 = 6 \cdot (x - 1) + (-2) \cdot (y - 1)$$

$$z - 1 = 6x - 6 - 2y + 2 \quad | + 1$$

$$\boxed{z = 6x - 2y - 3}$$

↳ finale Ebenentangentengleichung!

Mögliche Aufgaben:

1. Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich von f:

$f(x,y) = \sqrt{-x^2+4\cdot x-y^2}$ ← unter Wurzel muss ≥ 0 sein

↳ also $-x^2+4x-y^2 \geq 0$

$= -(x^2+4x+4)-y^2-4 \geq 0$ ← quadratisch ergänzen! $-4+4$ ergibt 0 und löst sich auf

$= -(x+2)^2-y^2-4 \geq 0$

$= -4-y^2-(x+2)^2 \geq 0 \quad |\cdot(-1)$

$= 4+y^2+(x+2)^2 < 0$

2. Bestimmen Sie eine Schnittkurve g von f:

- mit dem Graphen der Ebene $E: x=-3$ und skizzieren sie den Graphen der Schnittkurve

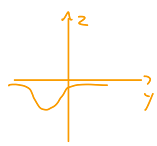
$f(x,y) = -4\cdot e^{-(x-y)^2}$

-> Schnittkurve g ist einfach die Funktion f aber mit $x=-3$ eingesetzt:

a) geben sie die Funktionsgleichung von g an

$g(y) = -4\cdot e^{-(-3-y)^2}$ ← einfach $x=-3$ eingesetzt

$g(y) = z$ ← die neue Funktion spuckt einen z Wert aus, so wie bei normalen Funktionen $f(x)=y$ wert ausspuckt



$(a-b)^2 = -3^2-2\cdot(-3)\cdot(-y)\cdot\ -y^2 = y^2+6y+9$

$(x-3) = x^2-2\cdot\quad +9 \qquad 2y+6$

b) Skizziere die Schnittkurve ← einfach in Gleichung Werte einsetzen von y im gegebenen Bereich

c) Grenzverhalten $\lim_{y\to\infty}$ lässt sich am Graph ablesen -> strebt gegen 0

d) Extremstelle lässt sich auch ablesen bei $y=3$

3. Bestimme eine Funktionsgleichung der Höhenlinie z:

$f(x,y) = \frac{x^2 - 2x + 1}{y+1}$ $\qquad$ $z = -\frac{1}{2}$ ← dort soll die Höhenlinie sein

1. Gleichung mit z gleichsetzen und nach Variablen umstellen:

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{y+1} = z \quad | \cdot (y+1)$$

$$x^2 - 2x + 1 = z \cdot (y+1) \quad | : z$$

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{z} = y + 1 \quad | - 1$$

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{z} - 1 = y$$

$z = -\frac{1}{2}$ einsetzen: $\quad \frac{x^2 - 2x + 1}{-\frac{1}{2}} - 1 = y$

$$(x^2 - 2x + 1) \cdot \left(-\frac{2}{1}\right) - 1 = y$$

$$-2x^2 + 4x - 2 - 1 = y$$

$$-2x^2 + 4x - 3 = y$$

4. Bestimme die partiellen Ableitungen:

$$f(x,y) = \frac{1}{y \cdot (x-3)} = \cancel{1 \cdot (y \cdot (x-3))^{-1} = (yx - 3y)^{-1}}$$ ← umstellen

das y wird als Faktor angesehen und bleibt im Bruch genauso wie $\frac{1}{y} \cdot \frac{1}{(x-3)}$!

$$= \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{(x-3)} = \frac{1}{y} \cdot (x-3)^{-1}$$ ← so ist es richtig umgeschrieben

$$f_x(x,y) = \frac{1}{y} \cdot (-1) \cdot (x-3)^{-2} \cdot 1$$

$$= -\frac{1}{y \cdot (x-3)^2}$$

$$f(x,y) = \frac{1}{(x-3)} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{(x-3)} \cdot y^{-1}$$ ← $f(x,y)$ nach y umgestellt

$$f_y(x,y) = (-1) \cdot \frac{1}{(x-3)} \cdot y^{-2}$$ ← abgeleitet $\frac{1}{(x-3)}$ ist nur ein Faktor bleibt im Bruch! Anzusehen wie eine Zahl

$$= -\frac{1}{y^2 \cdot (x-3)}$$

$$f_{yy}(x,y) = (-1) \cdot (-2) \cdot y^{-3} \cdot \frac{1}{(x-3)}$$

$$= \frac{2}{y^3 (x-3)}$$

$$f_{xx}(x,y) = \frac{1}{y} \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot (x-3)^{-3}$$

$$= \frac{2}{y \cdot (x-3)^3}$$

$$f_{xy}(x,y) = -\frac{1}{(x-3)^2} \cdot (-1) \cdot y^{-2}$$

$$= \frac{1}{y^2 \cdot (x-3)^2}$$

5. Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangentialebene der Funktion f

→ alle Punkte in Tangentengleichungsformel einsetzen:

$$z - z_0 = f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$$

→ für f_x und f_y einfach jeweils $f(x,y)$ einmal nach x und y ableiten

→ für z_0 einfach x_0, y_0 in $f(x,y)$ normale Gleichung einsetzen

→ Rest einsetzen und vereinfachen

$$f(x,y) = yx^2 - 2x^2 + 4yx - 8x + 4y - 8$$

$$(x_0,y_0) = (-1,-2)$$

einsetzen von x_0, y_0 in $f(x,y)$:

$$z_0 = -2\cdot(-1)^2 - 2\cdot(-1)^2 + 4\cdot(-2)\cdot(-1) - 8\cdot(-1) + 4\cdot(-2) - 8$$

$$= -2 - 2 + 8 + 8 - 8 - 8$$

$$z_0 = -4$$

ableiten nach x und y und einsetzen x_0, x_y:

$$f_x(x,y) = 2yx - 4x + 4y - 8$$

$$= 2\cdot(-2)\cdot(-1) - 4\cdot(-1) + 4\cdot(-2) - 8$$

$$= +4 + 4 - 8 - 8$$

$$= -8$$

$$f_y(x,y) = x^2 + 4x + 4$$

$$= (-1)^2 + 4\cdot(-1) + 4$$

$$= 1 - 4 + 4$$

$$= 1$$

einsetzen aller Werte in Formel:

$$z - z_0 = f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$$

$$z - (-4) = -8\cdot(x - (-1)) + 1\,(y - (-2))$$

$$z + 4 = -8x - 8 + y + 2 \quad | -4$$

$$z = -8x + y - 8 - 4 + 2$$

$$= -8x + y - 10$$

6. Berechnen Sie alle kritischen Stellen, falls vorhanden:

- Bestimmen Sie falls existent, alle kritischen Stellen, d.h. alle (x,y) mit

$f_x(x,y) = 0$ und $f_y(x,y) = 0$.

→ kritische Stellen sind einfach Extrempunkte

f_x und f_y erste Ableitung erstellen:

$f(x,y) = x \cdot y$

$f_x(x,y) = y$

$f_y(x,y) = x$

Punkte herausfinden:

Hier Extrempunkte sehr leicht rauszulesen

einfach nur $P_1(0|0)$

Schauen ob Hoch oder Tief/Sattelpunkt mit Hessematrix und det:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1$$ ← indef, da negativ, also Sattelpunkt

↳ $SP(0|0)$

einfragen der Antworten:

$f_x(x,y) = \underline{y} \overset{!}{=} 0 \iff L_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{x = \underline{t}, y = \underline{0}} \}$ ← grün markiert, was selbst eingefügt, nachdem gefragt wurde

Bedingung ist wahr, solange $y = 0$ ist
x, kann beliebig sein, da es das Ergebnis nicht beeinflusst, weil es nicht in $f_x(x,y) = y \neq 0$ vorkommt!

$f_y(x,y) = \underline{x} \overset{!}{=} 0 \iff L_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \underline{0}, y = \underline{s}\}$ ← auch grün selbst eingesetzt

Die Menge an kritischen Stellen lautet also:

$L_1 \wedge L_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \underline{0}, y = \underline{0}\}$ ← alle Stellen, welche man gefunden hat

7. Ein Unternehmen stellt Produkte X und Y her:

- Die Produktionskosten K hängen von der produzierten Anzahl x des Produktes X und Y ab:

$$K(x,y) = \frac{x}{10} + \frac{400}{x} + \frac{3y}{10} + \frac{1000}{y} + \frac{1}{5}$$

orange markiert: alles Modell X
grün markiert: alles Modell Y

Aktuell werden $x_0 = 200$ Stück des Produktes X und $y_0 = 200$ des Produktes Y hergestellt.

Berechne mithilfe totalen Differenzials an Stelle (x_0, y_0) einen Näherungswert K, wenn sich Anzahl x um 10% Anzahl y um 2% erhöht

→ Einfach nur ausrechnen wie hoch die gesamten Produktionskosten bei 200 X und 200 Y Modellen sind wenn Produktionspreis für X um 10% Steigt und für Y um 2%

→ Aufgabenstellung einfach extrem dumm ausgedrückt

$$K(x,y) = \frac{x}{10} + \frac{400}{x} + \frac{3y}{10} + \frac{1000}{y} + \frac{1}{5}$$ ← Formel gesamte Produktionskosten

$$K_x(x,y) = \frac{1}{10} - \frac{400}{x^2}$$ ← 1. Ableitung nach x

$$K_y(x,y) = \frac{3}{10} - \frac{1000}{y^2}$$ ← 1. Ableitung nach y

einsetzen der Werte für $x = 200$ und $y = 200$:

$$K_x(200,200) = \frac{1}{10} - \frac{400}{200^2} = \frac{9}{100} = 0{,}09$$ ← Kosten pro einzelne Brille X Modell

$$K_y(200,200) = \frac{3}{10} - \frac{1000}{200^2} = \frac{11}{40} = 0{,}275$$ ← Kosten pro einzelne Brille Y Modell

$$K(200,200) = \frac{200}{10} + \frac{400}{200} + \frac{3 \cdot 200}{10} + \frac{1000}{200} + \frac{1}{5} = \frac{436}{5} = 87{,}2$$ ← Produktionskosten wenn 200 X Modelle hergestellt werden und 200 Y Modelle → insgesamte Kosten

$$\Delta x = 0{,}1 \cdot 200 = 20$$ ← Differenz ausrechnen x

$$\Delta y = 0{,}02 \cdot 200 = 4$$ ← Differenz ausrechnen y

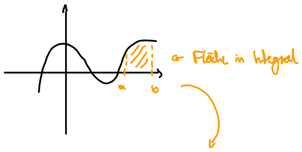
zusätzliche Kosten wenn x = 10% teurer wird
zusätzliche Kosten wenn y = 2% teurer wird

$$K(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = 87{,}2 + 0{,}09 \cdot 20 + 0{,}275 \cdot 4 = 90{,}1$$ ← neue Gesamtkosten

Produktionskosten gesamt bei jeweils 200 Modellen

Integralrechnung:

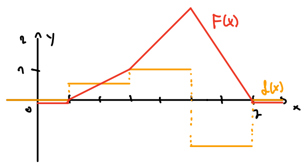
→ berechnet eingeschlossene Fläche zwischen Graph und x-Achse



$$\boxed{\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= [F(x)]_a^b \\ &= F(b)-F(a)\end{aligned}}$$

← so wird die Fläche integral allgemein berechnet

Schaubild einzeichnen:



← so wird F(x) eingezeichnet

Aufleitung Stammfunktion:

$f(x) = 8x^3$

$F(x) = \frac{8}{4}x^4$

immer aufleiten also Exponent + 1 und dann als Faktor davor 1 durch neuen Exponent also, $\frac{1}{4}$ und nicht $\frac{1}{3}$!

$= 2x^4 \boxed{+c}$ ← durch c sind alle und nicht nur eine gemeint

↳ wenn unbestimmtes Integral, dann immer mit c!

Bestimmen sie folgendes unbestimmtes Integral:
- Dann immer +c verwenden wenn unbestimmt

$f(x) = 3x^2 + 4x + 2$

$F(x) = \frac{3}{3}x^3 + \frac{4}{2}x^2 + 2x + c$ ← 2 wird aufgeleitet zu 2x

↳ c nicht vergessen wenn unbestimmt

$f(x) = x^{99} + 2x^{999}$

$F(x) = \frac{1}{100}x^{100} + \frac{2}{1000}x^{1000} + c$

$f(x) = \frac{x^2}{3} - \frac{x}{4}$

$f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x$

$F(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{8}x^2$

Stammfunktion e-Funktion:

$f(x) = 2 \cdot e^{3x}$ ← bei e Verkettung kommt innere Ableitung unter Bruchstrich also $\frac{1}{3}$

$F(x) = \frac{1}{3} \cdot 2e^{3x} = \frac{2}{3}e^{3x}$

$f(x) = 7 + 4 \cdot e^{2x}$

$F(x) = 7x + \frac{4}{2} \cdot e^{2x}$ ← 7 wird zu 7x und fällt nicht weg!

$f(x) = 30\,e^{x-3}$

$F(x) = \frac{30}{1}\,e^{x-3} = 30e^{x-3}$

partiell Integrieren notwendig, wenn:

$\int (x^2-1) \cdot e^{20x-30}\,dx$

Substitution:

$\int 20x \cdot e^{x^2}\,dx$

$\int \frac{4e^{2x}}{2+e^{2x}}$

partielle Integration e-Funktion:

→ wie beim Ableiten Produktregel, so beim Aufleiten partielle Integration

$\int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{e^x}_{v'}\,dx$ ← u und v' festlegen, Tipp: u immer das, was leichter wird, wenn man es ableitet

$u = x \qquad u' = 1$ ← wichtig, man hat $u = x$ gesetzt u abgeleitet wäre $u' = 1$

$v = e^x \qquad v' = e^x$ ← hier wurde $v' = e^x$ gesetzt, d.h. man hat e^x aus der ursprünglichen Funktion als abgeleitet definiert und sucht jetzt für v' die Aufleitung, damit man v erhält! Die Aufleitung von e^x bleibt e^x!

↳ $\int x \cdot e^x\,dx$

$\boxed{= u \cdot v - \int u' \cdot v}$ ← allgemeine Formel der partiellen Integration

$= x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x\,dx$ ← das ist die partielle Integration

$= x \cdot e^x - e^x$ ← finale Funktion

mit Grenzen sieht Ergebnis anders aus:

$\int_0^1 x \cdot e^x\,dx$

$= [x \cdot e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx$ ← das vordere wurde also schon integriert!

$= [x \cdot e^x]_0^1 - [e^x]_0^1 = [x \cdot e^x - e^x]_0^1$ ← das hintere nun auch da $\int$ wegfällt

mehrmals partielle Integration:

$$\int \underbrace{x^2}_{u} \cdot \underbrace{e^x}_{v'} \, dx$$

$u = x^2 \quad u' = 2x$

$v = e^x \quad v' = e^x$

$= u \cdot v - \int u' \cdot v'$ ← in Formel partielle Integration einsetzen

$= x^2 \cdot e^x - \int \underbrace{2x}_{u} \cdot \underbrace{e^x}_{v'} \, dx$ ← nochmal partiell integrieren

$u = 2x \quad u' = 2$

$v = e^x \quad v' = e^x$

$= x^2 \cdot e^x - (2x \cdot e^x - \int 2e^x \, dx)$ ← in der Klammer steht das neue partiell Integrierte

$= x^2 \cdot e^x - 2x \cdot e^x + 2e^x$

$= e^x \cdot (x^2 - 2x + 2)$

uneigentliche Integrale:

→ für $-\infty$ oder $+\infty$ wird Buchstabe eingesetzt

→ dann ganz normal integrieren wie immer

Berechnen Sie den Wert des folgenden uneigentlichen Integrals, falls es konvergiert:

$I = \int_{-\infty}^{\ln(3)} e^x \, dx$ ← man versucht das $-\infty$ wegzubekommen

$= \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{\ln(3)} e^x \, dx$ ← wichtigster Schritt: man will einen Buchstaben statt $-\infty$ haben

$= \lim_{a \to -\infty} \left[e^x \right]_a^{-\ln(3)}$ ← e-Funktion aufgeleitet bleibt e-Funktion

$= \lim_{a \to -\infty} \frac{1}{3} - e^{\overset{\to -\infty}{a}}$ ← vollständig integrierte Funktion, mit allen Werten bereits eingesetzt

$e^{-\infty}$ würde gegen 0 laufen also 0

$= \frac{1}{3} - 0$

$= \frac{1}{3}$

gebrochen rationale Funktionen integrieren:

→ alle verschiedenen Fälle:

1. Fall Sonderfall:

$\int \frac{3}{x}\,dx$ ← Bruch umschreiben

$= \int 3 \cdot \frac{1}{x}\,dx$ ← Sonderfall $\frac{1}{x}$ einfach merken

$= [3 \cdot \ln|x| + c]$ ← die aufgeleitete integrierte Funktion

2. Fall Brüche mit x nur im Nenner:

$\int \frac{3}{x^2}\,dx$

es wird +1 gerechnet also hochgeleitet x^{-1}

$= \int 3 \cdot x^{-2}\,dx$ ← x^2 kann man aus dem Bruch schreiben $\frac{1}{x^2} = 1 \cdot x^{-2}$, genauso z.B. bei $\frac{1}{x^3} = 1 \cdot x^{-3}$ möglich!

$= [\frac{3}{-1} x^{-1} + c]$

$= [\frac{3}{-x} + c]$

$\int \frac{2}{x^4}\,dx$

$= \int 2 \cdot x^{-4}\,dx$

$= [\frac{2}{-3} \cdot x^{-3} + c]$ ← von x^{-4} wird +1 im Exponent gerechnet bei Aufleitung! also x^{-4} wird zu $\frac{1}{-3} x^{-3}$!

$= [\frac{2}{-3x^3} + c]$

3. Fall Brüche auseinander ziehen.

$\int \frac{x^2 - 4 + x}{x^2}\,dx$

$= \int \frac{x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2} + \frac{x}{x^2}\,dx$ ← jede Summe von oben wird auseinander gezogen und alleine durch x^2 geteilt

$= \int 1 - 4 \cdot x^{-2} + \frac{1}{x}$

$= [x - \frac{4}{-1} \cdot x^{-1} + \ln|x| + c]$

$= [x + \frac{4}{x} + \ln|x| + c]$

schauen wie Substitution funktioniert

4. Fall Summe steht unter Spezialfall:

→ Schauen ob Zähler Ableitung des Nenners ist

$\int \frac{2x}{x^2+4}\,dx$ ← Nenner abgeleitet x^2+4 ist abgeleitet $2x$, also der Zähler

$= [\ln|x^2+4| + c]$ ← Stammfunktion dann einfach ln des Nenners also $\ln|x^2+4|$, aber nur wenn Nenner abgeleitet der Zähler ist

auch möglich:

$\int \frac{6x}{x^2-9}\,dx$ ← x^2-9 abgeleitet ist wieder $2x$, aber $6x$ im Zähler sind einfach $2x$ multipliziert mit dem Faktor 3, also $3 \cdot 2x = 6x$!

$= \int \frac{3 \cdot 2x}{x^2-9}$ ← hier nochmal verdeutlicht $6x = 3 \cdot 2x$

$= [3 \cdot \ln|x^2-9| + c]$ ← deshalb hier auch möglich aber mit Faktor

5. Fall Integrieren mit Substitution:

$\int \frac{x^2}{(x+3)^2}\,dx$

substituieren mit u:

$u = x+3 \quad |-3$ ← x+3 wird zu u substituiert

$x = u-3$ ← da $u = x+3$ ist und nicht x, muss das $u=x+3$ noch nach x umgestellt werden, damit man es auch für ein einzelnes x einsetzen kann

$u' = \frac{du}{dx} = 1$ ← u abgeleitet ist genau das gleiche wie $\frac{du}{dx}$ nur in anderer Schreibweise!
Dieser Schritt notwendig, da dx zu du werden muss

$\frac{du}{dx} = 1 \quad |\cdot dx$ ← Gleichung nach du umstellen, da ja nach du gesucht wurde

$du = 1 \cdot dx$ ← dx darf einfach durch du ersetzt werden, da nur $1 \cdot dx$, wäre z.B. $2 \cdot dx$ rausgekommen wäre es $du = 2dx$

↳ $\int \frac{(u-3)^2}{u^2}\,du$ ← alle Werte wurden in Substituierte Formel eingesetzt!

$\int \frac{u^2-6u+9}{u^2}\,du$ ← jetzt wieder Brüche auseinander ziehen!

$\int \frac{u^2}{u^2} - \frac{6u}{u^2} + \frac{9}{u^2}$

$= \int 1 - \frac{6}{u} + 9 \cdot u^{-2}$

$= [u - 6 \cdot \ln|u| + \frac{9}{-1} \cdot u^{-1} + c]$

resubstituieren:

$= [(x+3) - 6 \cdot \ln|x+3| + \frac{9}{-1} \cdot (x+3)^{-1} + c]$

8. Fall:

allgemeine Formel bei $\frac{1}{1+x^2}$:

$$\boxed{\int \frac{1}{1+x^2} = \arctan + C}$$

$$\int \frac{1}{(4x+4)^2+1}\,dx$$

Substitution:

$u = 4x+4$

$u' = \frac{du}{dx} = 4 \quad \rightarrow \quad dx = \frac{du}{4}$ } u und du bestimmen

$$\int \frac{1}{u^2+1} \quad \frac{du}{4}$$

$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{u^2+1}$ ← hier wird arctan verwendet einfach auswendig lernen

$= \frac{1}{4} \arctan(u) + c$

$= \frac{1}{4} \arctan(4x+4) + c$ ← resubstitution

Anwendung Partialbruchzerlegung:

1. Nullstellen des Nenners
2. Ansatz PBZ
3. Koeffizientenvergleich

① Nullstellen des Nenners:

$$f(x) = \frac{-2x-2}{x^2+7x+12}$$

$x^2 + 7x + 12 = 0$ ← Nullstellen des Nenners durch MNF:

MNF:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-7 \pm \sqrt{7^2-4\cdot 1\cdot 12}}{2\cdot 1}$$

$$= \frac{-7 \pm 1}{2}$$

$x_1 = -3$, $x_2 = -4$

f(x) darstellung in Linearfaktorzerlegung:

$$f(x) = \frac{-2x-2}{(x+3)\cdot(x+4)}$$ ← Nenner besteht jetzt aus Nullstellengleichung

② Ansatz PBZ:

$$\frac{-2x-2}{(x+3)\cdot(x+4)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+4} \quad | \cdot (x+3)\cdot(x+4)$$ ← Gleichsetzen mit umgeschriebener PBZ Gleichung und dann auf beiden Seite Nenner rausbekommen

$$-2x-2 = \frac{A\cdot(x+3)\cdot(x+4)}{x+3} + \frac{B\cdot(x+3)\cdot(x+4)}{x+4}$$

$$= A\cdot(x+4) + B\cdot(x+3)$$ ← vereinfachen

$$= Ax + 4A + Bx + 3B$$

$$= Ax + Bx + 4A + 3B$$ ← ordnen überall wo x dabei ist nach vorne

$$-2x-2 = x\cdot(A+B) + 4A + 3B$$ ← x ausklammern

③ Koeffizientenvergleich:

$-2x-2 = (A+B)\cdot x + 4A+3B$ ← Seiten vergleichen, Faktor vor x links muss so groß sein wie Faktor vor x auf der rechten Seite, genauso Zahlen nach x links müssen gleich sein wie Zahlen nach x rechts

LGS aufstellen:

I $\quad A+B = -2$ ← alles vor x

II $\quad 4A+3B = -2$ ← alles hinter x

I umgestellt $A = -2-B$ einsetzen in II:

$4(-2-B)+3B = -2$

$-8-4B+3B = -2 \quad |+8 \quad |\cdot(-1)$

$B = -6$

$B=-6$ einsetzen in I:

$A = -2-(-6) = 4$

A und B in ursprüngliche Formel eintragen:

$$f(x) = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+4}$$
$$= \frac{4}{x+3} - \frac{6}{x+4}$$

integrieren:

$$\int_1^2 \frac{-2x-2}{x^2+7x+12}\,dx$$

$$= \int_1^2 \frac{4}{x+3} - \frac{6}{x+4}\,dx$$

$$= \int_1^2 4\cdot\frac{1}{x+3} - 6\cdot\frac{1}{x+4}\,dx$$ ← den Faktor im Zähler extra rausziehen

$$= \Big[\,4\cdot\ln|x+3| - 6\cdot\ln|x+4|\,\Big]_1^2$$ ← Nenner abgeleitet ist 1, da Ableitung des Nenners gleich der Zähler ist einfach ln vom Nenner nehmen als Integration, also z.B. ln|x+3|

$$= \underline{4\cdot\ln(2+3) - 6\cdot\ln(2+4)} - \big(\underline{4\cdot\ln(1+3) - 6\cdot\ln(1+4)}\big)$$ ← 1. Wert also oberer Wert des Integrals minus den unteren Wert beide Werte jeweils in die Gleichung einsetzen

$\approx -0{,}201$

Mögliche Aufgaben Integralrechnung:

1. Bestimme unbestimmtes Integral mit Substitution:

$$\int \frac{1}{4x+4}\,dx$$

substitution:

$u = 4x+4$ ← alles unter Bruch durch u ersetzen

$u' = \frac{du}{dx} = 4 \quad |\cdot dx \; |:4$ ← u' ist $\frac{du}{dx}$, nach dx umstellen, da man dieses mit du ersetzen will

$dx = \frac{du}{4}$ ← nach dx umgestellt

$\int \frac{1}{u} \frac{du}{4}$ ← ersetzen aller Werte

$= \frac{1}{4} \int \frac{1}{u}\,du$ ← dass du ohne Bruch schreiben, außerhalb des Integrals

$= [\frac{1}{4} \ln|u| + c]$ ← nach integrieren wandert der Vorfaktor von du also $\frac{1}{4}$ wieder in die eckige Klammer!

resubstitution:

$[\frac{1}{4} \ln|4x+4| + c]$

$= \frac{1}{4} \ln|4x+4| + c$ ← unbestimmtes Integral ohne Grenzen hat keine eckigen Klammern

2. Berechne den Inhalt der Fläche, welcher durch Schaubild f und x-Achse eingeschlossen wird:

$f(x) = 6x^2 + 18x - 24$

$F(x) = \frac{6}{3}x^3 + \frac{18}{2}x^2 - 24x$

$f(x) = 0$ ← für Nullstellen Schnittpunkt mit x-Achse f(x)=0 setzen und nicht f'(x)!

$6x^2 + 18x - 24 = 0$

MNF:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-18 \pm \sqrt{18^2 - 4 \cdot 6 \cdot -(24)}}{2 \cdot 6}$$

$x_1 = 1 \quad x_2 = -4$

Nullstellen in Integral einsetzen:

$[2x^3 + 9x^2 - 24x]_{-4}^{1}$

$= 2 \cdot 1^3 + 9 \cdot 1^2 - 24 \cdot 1 - (2 \cdot (-4)^3 + 9 \cdot (-4)^2 - 24 \cdot (-4))$

$= |-125|$

$= 125$ ← Fläche kann nie negativ sein!

3. Berechne Inhalt der Fläche, welche durch f und g eingeschlossen wird:

$f(x) = 6x^2 + 10x - 118$, $g(x) =$

Schnittpunkte der Funktionen durch gleichsetzen von f und g:

$f(x) = g(x)$

$6x^2 + 10x - 118 = 4x+2 \quad | -4x - 2$

$6x^2 + 6x - 120 = 0$

MNF:

$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 6 \cdot (-120)}}{12}$

$x_1 = 4, \quad x_2 = -5$

Fläche zwischen 2 Funktionen berechnet sich wie folgt:

$\boxed{A = \int (f(x) - g(x))\, dx}$ ← allgemeine Formel

$A = \int_{-5}^{4} (6x^2 + 10x - 118 - (4x+2))\, dx$ ← f(x) − g(x) rechnen

$= \int_{-5}^{4} 6x^2 + 10x - 118 - 4x - 2 \quad dx$

$= \int_{-5}^{4} 6x^2 + 6x - 120 \quad dx$

$= \left[\frac{6}{3}x^3 + \frac{6}{2}x^2 - 120x \right]_{-5}^{4}$

$= \left[2x^3 + 3x^2 - 120x \right]_{-5}^{4}$

$= 2 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2 - 120 \cdot 4 - (2 \cdot (-5)^3 + 3 \cdot (-5)^2 - 120 \cdot 5)$

$= -304 - 425$

$= -729$

4. Bestimme Volumen Rotationskörper, Rotation um die x-Achse:

$f(x) = e^{-3x}$ zwischen $x = 0$ und $x = \ln(2)$

Volumen Rotationskörper:

$$\boxed{V = \pi \int_a^b (f(x))^2}$$

$$V = \pi \int_0^{\ln(2)} (e^{-3x})^2 \, dx$$ ← alles genauso einsetzen wie in Formel

$$V = \pi \int_0^{\ln(2)} e^{-6x} \, dx$$ ← quadratklammer auflösen es kommt e^{-6x} raus

$$= \pi \cdot \left[-\frac{1}{6} e^{-6x}\right]_0^{\ln(2)}$$ ← $e^{-6}x$ integriert ist $-\frac{1}{6}e^{-6x}$!

$$= \pi \cdot \left(-\frac{1}{6} \cdot e^{-6 \cdot \ln(2)} - \left(-\frac{1}{6} e^{-6 \cdot 0}\right)\right)$$ ← jetzt nur noch alles einsetzen

$$= \pi \cdot \left(-\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{64} + \frac{1}{6}\right)$$

$$= \pi \cdot \left(\frac{21}{128}\right) = 0{,}515$$

5. Bestimme Höhe h am Rotationskörper um y-Achse:

- Durch Rotation Funktion f um die y-Achse, mit $f(x) = \frac{50x^2}{9}$

für x-Werte zwischen 0 und b entsteht ein Rotationskörper.

Bestimmen sie die Höhe $h = f(b)$ so, dass der Körper das Volumen $V = 9\pi$ besitzt

① Umkehrfunktion bilden:

→ Zur Berechnung Rotationsvolumen bei Rotation um y-Achse benötigt man Umkehrfunktion von f:

$$y = \frac{50x^2}{9} \quad | \cdot 9 : 50 \ \sqrt{\ }$$ ← umkehrfunktion ist einfach von y nach x umgestellt

$$x = \sqrt{\frac{9y}{50}}$$ ← $f(x)$ wird zu $f^{-1}(x)$ also von $y =$ zu $x =$!

② einsetzen Umkehrfunktion in Rotationsvolumenformel:

$$V = \pi \cdot \int_0^b (f^{-1}(x))^2 \, dx$$

$$V = \pi \cdot \int_0^b \left(\sqrt{\frac{9y}{50}}\right)^2 dx$$

$$V = \pi \cdot \int_0^b \frac{9y}{50} \, dx$$

$$V = \pi \cdot \left[\frac{9}{50} \cdot \frac{1}{2} y^2\right]_0^b$$

$$V = \pi \cdot \left[\frac{9}{100} y^2\right]_0^b$$

$$V = \pi \cdot \left(\frac{9}{100} b^2 - \frac{9}{100} \cdot 0^2\right)$$

$$V = \frac{9}{100} \pi b^2$$

3. gleichsetzen mit $V = 9\pi$:

$$V = V$$

$$9\pi = \frac{9}{100}\pi b^2 \quad | \cdot 100$$

$$900\pi = 9\pi b^2 \quad | : (9 \cdot \pi)$$

$$\frac{900\pi}{9\pi} = b^2 \quad | \sqrt{}$$

$$\sqrt{100} = b$$ ← bei $\frac{900\pi}{9\pi}$ kürzt sich π und 9 raus!

$$\pm 10 = b$$

↳ Höhe ist also $h = 10$!