Vektoren:

1. Länge eines Vektors berechnen:

$\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix}4\\5\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$

$|\vec{AB}| = \sqrt{2^2+1^2+2^2} = \sqrt{9} = 3$

Aufgabenstellung:
- Berechne Umfang
- zeige, gleichschenkliges Dreieck

2. Skalarprodukt:

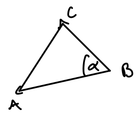
$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 32$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \rightarrow 90°$, senkrecht zueinander

- zeige ob senkrecht
- rechtwinkliges Dreieck
- Winkel zwischen Vektoren

Winkel zwischen 2 Vektoren berechnen:

$\boxed{\cos(\alpha) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}}$ $\xrightarrow{\text{Anwendungsbsp.}}$ $\cos(\beta) = \dfrac{\vec{BC} \cdot \vec{BA}}{|\vec{BC}| \cdot |\vec{BA}|}$



- wenn nach Winkel zwischen 2 Vektoren gefragt wird

- wichtig!

$\cos(\alpha) = 0{,}9428\ldots$

noch nicht vollständiges Ergebnis im Taschenrechner denn noch $\cos^{-1}$ nehmen auf DEG Einstellung

↳ $\alpha = 19{,}47°$

umwandeln mit $\cos^{-1}$

3. Kreuzprodukt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\cdot 8 - 3\cdot(-1) \\ 3\cdot 6 - 3\cdot 8 \\ 3\cdot(-1) - (-2)\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$\begin{matrix} \cancel{3} & \cancel{6} \\ -2 & -1 \\ 3 & 8 \\ 3 & 6 \\ -2 & -1 \\ \cancel{3} & \cancel{8} \end{matrix}$

- Vektor orthogonal zu 2 Vektoren
- $\vec{n}$ Vektor bestimmen Ebene

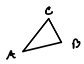
- parallele Vektoren Kreuzprodukt ist 0! $\vec{b} \times \vec{b} = 0$
- Kreuzprodukt liefert als Ergebnis Vektor, welcher orthogonal zu beiden Vektoren steht, $\vec{n}$ Vektor!

Wo kann Kreuzprodukt vorkommen?:

1. $\vec{n}$ bestimmen: $E: \vec{x} = (\ ) + r(\ ) + s(\ )$

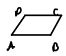
   nehmen und kreuzen → $\vec{n}$ Vektor

2. Flächeninhalt Dreieck: $F = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|$

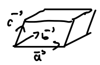


$= \left|\begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix}\right| = \sqrt{x^2 + x^2 + x^2} = x$ ← so wird Betrag Kreuzprodukt ausgerechnet

3. Flächeninhalt Parallelogramm: $F = |\vec{AD} \times \vec{AB}|$ → wenn Vektoren bereits gegeben einfach $A = |\vec{a} \times \vec{b}| = \left|\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$



4. Volumen Spat: $V = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$



5. Volumen Pyramide:

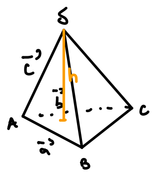
   $V = \frac{1}{3} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

   $V = \frac{1}{6} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

6. Volumen Tetraeder:

   $V = \frac{1}{6} \cdot |(\vec{a} \times b) \cdot \vec{c}|$

   $= \frac{1}{6} \cdot |(\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AS}|$



7. Diagonale berechnen: $d = \vec{a} + \vec{b}$, bzw. $d = \vec{a} - \vec{b}$ Länge somit $|\vec{d}| = |\vec{a} + \vec{b}|$ bzw. $|\vec{d}| = |\vec{a} - \vec{b}|$

Betrag Kreuzprodukt:

$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\alpha)$ ← mögliche Alternative

- Betrag gibt auch das Volumen an

$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{n}|$ ← wichtig $a \times b = \vec{n}$, betrag von $|a \times b|$ wäre dann also $|\vec{n}|$ also $\vec{n} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} \to |(n)| = \sqrt{x^2 + x^2 + x^2} = x$

- Betrag gibt die Länge des $\vec{n}$ Vektors an der orthogonal zu beiden steht

Spatprodukt:

$V = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ → Volumen

$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{d} = 0$ → linear abhängig wenn $= 0$

- Volumen
- Vektor $\vec{d}$ so wählen, dass $\vec{a}, \vec{b}$ linear unabhängig

Flächeninhalt Dreieck über Skalarprodukt und Vektorlänge berechnen:

allgemeine Formel Dreieck:

- $A = \frac{1}{2} h \cdot g$

$A = \frac{1}{2} |\underbrace{a \times b}_{\text{anstatt Kreuzprodukt alternative}}|$ oder

$\boxed{A = \frac{1}{2} |a| \cdot |b| \cdot |\sin(\alpha)}$

Dreieck Flächeninhalt berechnen, aber nur Winkel und Längen der Vektoren gegeben

2. Länge des Vektors bei Parallelogramm gesucht.

- gegeben ist Vektor $\vec{a}$ mit Länge $|\vec{a}| = 2$
- gesucht Länge Vektor $|\vec{b}|$, sodass $\vec{b}$ und $\vec{a}$ Winkel 150° einschließen und $A = 12$ des Parallelograms ergeben

$A = |a \times b|$

$A = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\sin(\alpha)|$ | umstellen nach $|\vec{b}|$

Alternative für Flächeninhaltberechnung statt Kreuzprodukt!

$|\vec{b}| = \frac{A}{|\vec{a}| \cdot \cancel{|\vec{b}|} \cdot |\sin \alpha|}$

- Länge Vektor berechnen wenn Winkel gegeben ist

Höhe Dreieck berechnen:

$A = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{G}_{} \cdot h$

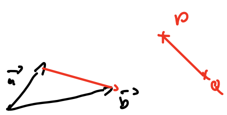
$A = \frac{1}{2} \cdot |\vec{AB}| \cdot h$

$h = \frac{2 \cdot A}{|\vec{AB}|} = 2 \cdot \frac{\frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|}{|\vec{AB}|} = \frac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}{|\vec{AB}|}$

Höhe Dreieck / Parallelogramm berechnen

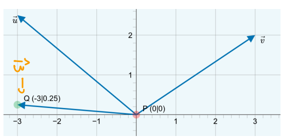
Verbindungsvektor berechnen:

Bsp: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$



- sehr wichtig! Grafische Darstellung üben!!!
- allgemeine Formeln zu Volumen Kegel / Tetraeder
- Fläche Kreis etc.

Ortsvektor aus Graph / Punkt bestimmen:



$\vec{u} = \vec{OU} = \vec{QP} = \vec{u} - \vec{o} = \vec{Q} - \vec{P} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2.5 \end{pmatrix}$

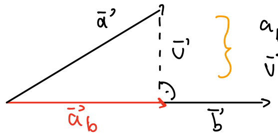
$\vec{v} = \vec{OV} = \vec{v} - \vec{o} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Projektion Vektor:

$$\boxed{a_b = \frac{a \cdot b}{|b|^2} \cdot b}$$

- Projektion von $\vec{a}$ auf $\vec{b}$
- Abstand Wand / Auto, Projektionspunkt bestimmen

Herleitung für Verständnis:



$a_b + \vec{v} = \vec{a}$ ← Anfangspunkt a_b + $\vec{v}$ Endpunkt ergibt Vektor $\vec{a}$

$\vec{v} = \vec{a} - \vec{a}_b$ ← umstellen nach gesuchtem

$a_b = \boxed{\lambda} \cdot \vec{b}$ → a_b lässt sich darstellen mit $\vec{b}$ multipliziert mit Faktor λ, welcher verkürzt oder verlängert

↳ I $\vec{a}_b = \lambda \cdot \vec{b}$ für a_b einsetzen

II $(\vec{a} - \vec{a}_b)^T \cdot \vec{b} = 0$

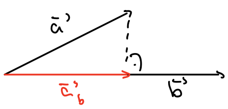
→ $(\vec{a} - \lambda \cdot \vec{b})^T \cdot \vec{b} = 0$

$\vec{a}^T \vec{b} - \lambda \cdot \underbrace{\vec{b}^T b}_{} = 0$

Vektor mit sich selbst skalar multipliziert ist so wie $|\vec{b}|^2$

$\boxed{\lambda} = \frac{\vec{a}^T \cdot \vec{b}}{|b|^2}$ → Streckungsfaktor λ, welcher $\vec{b}$ so streckt / staucht, dass $\vec{a}_b$ herauskommt

Bsp.:

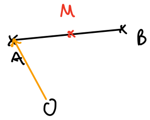


$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$

$$\vec{a}_b = \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}}{\left(\sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2}\right)^2} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{-3 + 8 - 10}{9 + 16 + 25} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} = \frac{-5}{50} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} = -\frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\frac{3}{10} \\ -\frac{4}{10} \\ +\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Mittelpunkt zwischen Vektoren:

$\vec{M} = \vec{A} + \frac{1}{2}\,\vec{AB}$

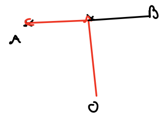


Bsp: $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

$\vec{M} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}1-1\\0-2\\1-3\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

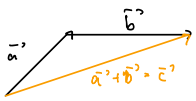


$\vec{A} = \vec{M} + \frac{1}{2}\,\vec{BM}$

$= \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1-1\\0-2\\1-3\end{pmatrix}$

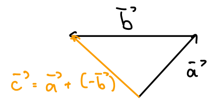
- Standardmäßig immer vom Ursprung aus, deshalb muss man vom Ursprung erst zu A und dann, die hälfte gehen von A nach B

Vektoren allg. addieren / subtrahieren:



$\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$

$\vec{c} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$



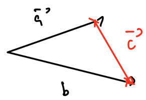
$a = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$

$\vec{c} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$

↳ es werden Vektoren addiert nicht die Spitzen, $\vec{c}$ ist nicht der Verbindungsvektor !!

Verbindungsvektor:

- verbindet die Spitzen zweier Vektoren bzw. Punkte

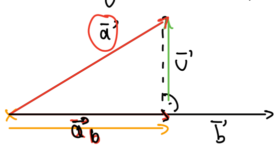


$\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$

$\vec{c} = \vec{ab} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-3\\2-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$

Addition Vektor:

- nur Anfangs und Endpunkt entscheidet:



$\vec{a}_b + \vec{v} = \vec{a}$

↑ Anfangs-Punkt

↑ Endpunkt

linear abhängig, unabhängig, parallel:

- linear abhängig immer wenn vielfaches vorhanden

bei 2 Vektoren:

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$

Faktor ist immer gleich $(=\frac{1}{2})$

$\hookrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} 2 = r \cdot 4 & \xrightarrow{:4} \; r = \frac{1}{2} \\ 3 = r \cdot 6 & \xrightarrow{:6} \; r = \frac{1}{2} \\ 4 = r \cdot 8 & \xrightarrow{:8} \; r = \frac{1}{2} \end{cases}$

bei 3 Vektoren:

Gleichung aufstellen, sodass man den Nullvektor $= \vec{0}$ rausbekommt

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{c} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

- prüfe ob linear abhängig,
- bestimme den $\vec{0}$ Vektor

$\hookrightarrow$ Gleichung: $\underset{=0 \;\; =1}{r} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \underset{=0 \;\; =0}{s} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \underset{=0 \;\; =3}{t} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

- sind alle Faktoren $= 0$, sind sie linear unabhängig
- sind die Werte unterschiedlich, so sind sie linear abhängig

ⓐ 1. LGS aufstellen:

$$\begin{aligned} 1r - 2s + 4t &= 0 \\ 2r + s + 3t &= 0 \quad \text{II} - 2 \cdot \text{I} \\ 1r + 3s - 1t &= 0 \quad \text{III} - \text{I} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1r - 2s + 4t &= 0 \\ 0 + 5s - 5t &= 0 \\ 0 + 5s - 5t &= 0 \quad \text{III} - \text{II} \end{aligned}$$

wenn man nur lineare Abhängigkeit wissen will reichen schon 2 Zeilen!

$$\begin{aligned} r - 2s + 4t &= 0 \\ 0 + 5s - 5t &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

$II: +5s - 5t = 0 \quad | -5s \quad |:5 \quad | \cdot (-1)$

$s = t$

einsetzen in I: $r - 2t + 4t = 0$

$r + 2t = 0 \quad | -2t$

$r = -2t$

$t = 1$ ← t ist frei wählbar

also: $t = 1, \; s = 1, \; r = -2$

↳ Ergebnis:

- die Werte sind alle $\neq 0$ und nicht gleich deshalb

  → linear abhängig da $\neq 0$ alle Werte

ⓑ mit Determinante:

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{matrix} = 0$

prüfe ob 3 Vektoren linear abhängig

↳ wenn $\det = 0$ → linear abhängig!

! mit det findet man nicht den $\vec{0}$ Nullvektor!

Mögliche Aufgaben Vektoren:

1. Fläche Dreieck gesucht:

- welches durch Vektoren $\vec{b}$ und $-3\vec{a}+\vec{b}$ aufgespannt wird
  - gegeben $\vec{a}$ Länge $|\vec{a}|=7$ und Vektor mit Länge $|\vec{b}|=8$, schließen Winkel $\alpha=150°$ ein

    ↳ Formel Dreieck $A=\frac{1}{2}|\vec{b}\times\vec{a}|$

$$=\frac{1}{2}|\vec{b}\times(-3\vec{a}+\vec{b})|$$ ← Klammer auflösen

$$=\frac{1}{2}|(\vec{b}\times(-3\vec{a}))+\underbrace{(\vec{b}\times\vec{b})}_{0}|$$ ← Kreuzprodukt parallele Vektoren $=0$

$$=\frac{1}{2}|\vec{b}\times(-3\vec{a})| = \frac{1}{2}(|\vec{b}||-3\vec{a}||\sin(\alpha)|) = \frac{1}{2}(|-3||\vec{b}||\vec{a}|\sin(\alpha)|)$$

alternative Rechnung ohne Kreuzprodukt

2. Länge des Vektors bei Parallelogramm gesucht.

- gegeben ist Vektor $\vec{a}$ mit Länge $|\vec{a}|=2$
- gesucht Länge Vektor $|\vec{b}|$, sodass $\vec{b}$ und $\vec{a}$ Winkel $150°$ einschließen und $A=12$ des Parallelograms ergeben

$$A=|a\times b|$$

$$A=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot|\sin(\alpha)|$$ | umstellen nach $|\vec{b}|$

$$|\vec{b}|=\frac{A}{|\vec{a}|\cdot\cancel{|\vec{b}|}\cdot|\sin\alpha|}$$

3. Gesucht ist ein Vektor $\vec{d}$, sodass $\vec{a}$ und $\vec{b}$ unabhängig:

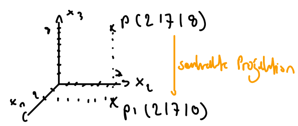
- gegeben 2 Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$
- $(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{d}$

4. gib einen Vektor an der senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ steht:

- Kreuzprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ ergibt $\vec{n}$ Vektor welcher orthogonal zu beiden ist

5. senkrechte Projektion Punkt in x_1, x_2 Ebene, Matrix aufstellen:

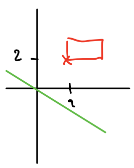
- gegebener Punkt und gesuchter Punkt gleichsetzen und mit Matrix multiplizieren
  - Bsp: $P(2|7|8)$



$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{A-Matrix dazu berechnen}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}}_{\text{gegeben Punkt } P} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{gesucht Punkt } P'}$$

→ Matrix multipliziert mit gegebenen Punkt multipliziert ergibt gesuchten Punkt

6. Projektion Vektor, bestimmen sie Abstand zwischen Auto und Wand



- Projektion von Punkt (2|2) (nächster Punkt zu Wand von Auto) zu Wand (dargestellt durch Vektor $\vec{b}$)

→ $\vec{OP}$ Vektor erstellen für P, $\vec{OB}$ Vektor erstellen, dann Formel einsetzen $\vec{a}_b = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \cdot b$

Vektorgeometrie:

Punkt auf Gerade:

(1) einsetzen von P in g: — überprüfen ob Punkt auf Gerade liegt

Bsp: $P(-23|7|39)$

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ -12 \end{pmatrix}$

(2) LGS aufstellen und lösen:

$$\begin{array}{lll} \text{I} & 4 + 9t = -23 & |-4 \\ \text{II} & -5 - 6t = 7 & |+5 \\ \text{III} & 3 - 12t = 39 & |-3 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} -27 = 9t & |:9 \\ 12 = -6t & |:(-6) \\ 36 = -12t & |:(-12) \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} -3 = t \\ -2 = t \\ -3 = t \end{array}\right\}$$ Punkt liegt nicht auf Geraden, da nicht alle Werte gleich sind

Lage von Geraden:

4 Fälle:

1. echt parallel
2. identisch
3. Schnittpunkt
4. Windschief

1. Schritt parallel/identisch:

- überprüfen ob Richtungsvektoren vielfache voneinander sind

Bsp: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Richtungsvektoren gleichsetzen:

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} r = \frac{1}{2} \\ r = \frac{1}{2} \\ r = \frac{1}{2} \end{array}$ → immer gleicher Faktor, also auf jeden Fall parallel, da vielfache, linear abhängig

2. Stützvektorpunkt in andere Gerade einsetzen:

- Stützvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ in Gerade h einsetzen:

$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$1 = 1 + 2t \quad \rightarrow t = 0$
$0 = 2 + 2t \quad \rightarrow t = -1$
$1 = 3 + 2t \quad \rightarrow t = -1{,}5$

↳ unterschiedliche Werte: P liegt nicht auf h

↳ also nicht identisch sondern echt parallel

- nur falls t immer gleich identisch

1. Schritt Schnittpunkt / Windschief:

- überprüfen ob Richtungsvektoren vielfache sind:

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Richtungsvektoren vergleichen:

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{aligned} 1 &= r \cdot 0 \\ 0 &= r \cdot 1 \\ 2 &= r \cdot 0 \end{aligned}$ ↯

↳ keine vielfachen, linear unabhängig

2. Schritt Geraden gleichsetzen mit LGS

- schauen ob Schnittpunkt vorhanden deshalb $g = h$ gleichsetzen

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

LGS aufstellen:

$\begin{aligned} \text{I} \quad 1 + s &= 1 + 0 & \rightarrow s &= 0 \\ \text{II} \quad 0 &= 2 + t & \rightarrow t &= -2 \\ \text{III} \quad 1 + 2s &= 3 + 0 & \rightarrow s &= 1 \end{aligned}$ ↯

↳ Widerspruch, mehrere Werte für s, also besitzen die Geraden keinen Schnittpunkt, also windschief

falls Schnittpunkt vorhanden:

- wenn z.B. bei gleichsetzen der Geraden $g = h$, Gleichung wahr ist

Wert von s in g einsetzen oder wert von t in h einsetzen

Bsp: $\begin{aligned} \text{I} \quad 1 + s &= 3 - t & \rightarrow t &= 1 \\ \text{II} \quad 2s &= 2t & s &= 1 \\ \text{III} \quad 1 + 3s &= 4t \end{aligned}$

↳ einsetzen von $t = 1$ und $s = 1$ in I: $1 + 1 = 3 - 1$
$2 = 2$ ✓

einsetzen von $s = 1$ in $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ ← Schnittpunkt der beiden Geraden

Geradengleichung aufstellen:

- Aus 2 Punkten, welche Gerade beinhaltet
- Punkt P als Stützvektor, Verbindungsvektor $\vec{PQ}$ als Richtungsvektor

$P(1|0|1)$, $Q(1|2|3)$

$$g: \vec{x} = \vec{p} + s \cdot \vec{PQ}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1-1 \\ 2-0 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ebenengleichung aufstellen:

- Voraussetzung, Punkte bilden keine Gerade
  - Probe mit Geradengleichung aus 2 Punkten aufstellen, einen einsetzen oder anschauen ob vielfache

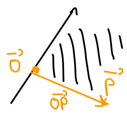
1. Mit 3 gegebenen Punkten:

$$E: \vec{x} = \overset{\text{Ortsvektor } \vec{a}}{\vec{a}} + \underbrace{r \cdot \overset{\text{Spannvektor } \vec{AB}}{\vec{AB}} + s \cdot \overset{\text{Spannvektor } \vec{AC}}{\vec{AC}}}_{\text{Spann / Richtungsvektoren, dürfen keine vielfache sein!}}$$

2. Gerade und Punkt:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad , \quad P(3|4|5)$$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \underbrace{\underset{\text{Punkt}}{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}} - \underset{\text{Ortsvektor}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$



Stützvektor aus $\vec{OP}$, also Verbindungsvektor $\vec{O}$ zu Punkt $\vec{P}$ also $\vec{p} - \vec{o} = \vec{OP} = \vec{SV}$

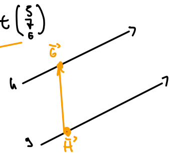
$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

3. 2 parallele Geraden:

- Richtungsvektoren sind gleich und spannen demnach keine Ebene auf
  - Eine gerade übernehmen $\vec{RV}$ aus Ortsvektoren der beiden Geraden ergänzen

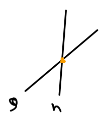
$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad , \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$E: \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\text{wird aus g übernommen}} + t \underbrace{\begin{pmatrix} 5-1 \\ 7-2 \\ 6-3 \end{pmatrix}}_{\substack{\vec{GH} = \vec{h} - \vec{g} \\ \text{(Richtungsvektoren} \\ \hookrightarrow \text{Stützvektor)}}}$$



4. Geraden Schneiden sich:

- Einfach Schnittpunkt und beide RV der beiden Geraden
- oder eine gerade nehmen und RV der anderen hinzufügen



$$E: \vec{x} = \underbrace{\vec{OG}}_{\text{Ortsvektor von } g} + s \cdot \underbrace{\vec{g}}_{\vec{RV} \text{ von } g} + t \cdot \underbrace{\vec{h}}_{\vec{RV} \text{ von } h}$$

Ebenenformen:

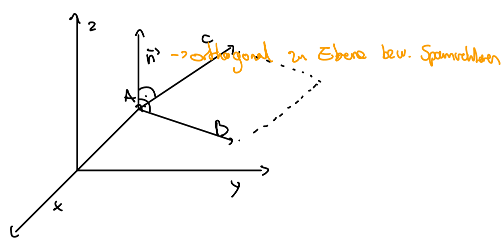
Parameterform:

$$E: \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\text{Ortsvektor}} + s \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\text{Spannvektor 1}} + t \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}}_{\text{Spannvektor 2}}$$

Normalenform:

$$E: \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\vec{n} \text{ Vektor}} \cdot \left[\underbrace{\vec{x}}_{x_1, x_2, x_3} - \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\text{- Punkt von Ebene}} \right] = 0$$

$$E: \vec{n} \cdot (\vec{x} - \underbrace{\vec{p}}_{\text{Punkt auf Ebene einsetzen}}) = 0$$



Koordinatenform:

$$E: 1x + 2y + 3z = 8$$

$$E: ax + bx + cx + d = 0$$

$\left.\right\} \vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

-sehr gut für Punktprobe

Koordinatenform beinhaltet Normalenvektor $\vec{n}$, lässt sich aus Kreuzprodukt berechnen

Umformen Ebenen:

Parameterform zu Koordinatenform:

Bsp: $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

1. Möglichkeit mit LGS: (2. Möglichkeit besser)

$$\begin{array}{llll} \text{I} & x_1 = 2 + r + 2s & \\ \text{II} & x_2 = 1 + r - 1s & \text{II} - \text{I} \\ \text{III} & x_3 = 1 - r + 3s & \text{III} + \text{II} \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \text{I} & x_1 = 2 + r + 2s & \\ \text{II} & x_2 - x_1 = -1 + 0 - 3s & \\ \text{III} & x_3 + x_2 = 2 + 0 + 2s & 2 \cdot \text{II} + 3 \cdot \text{III} \end{array}$$

$\text{III}\ \ 2(x_3 + x_2) + 3 \cdot (x_2 - x_1) = -2 + 6$

$2x_3 + 2x_2 + 3x_2 - 3x_1 = -2 + 6$

$E: -3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 4$

2. Möglichkeit mit Kreuzprodukt und Normalenvektor:

Bsp: $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\vec{n} = \vec{RV_1} \times \vec{RV_2} = \begin{array}{cc} \cancel{1} & \cancel{1} \\ 1 & 0 \\ 6 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ \cancel{6} & \cancel{2} \end{array} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 - 6 \cdot 0 \\ 6 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$E: ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ einsetzen von $\vec{n}$

$2x_1 + 4x_2 - 1x_3 = d$

Stützvektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ in E einsetzen:

$2 \cdot 3 + 4 \cdot 1 - 1 \cdot 2 = d$

$d = 8$ einsetzen in E: $2x_1 + 4x_2 - x_3 = 8$

– Kreuzprodukt und danach mit Stützvektor eingesetzt d ausrechnen

Koordinatenform in Parameterform:

- Spurpunkte (Punkte, welche x-Achsen durchstoßen) herausfinden

$E: 2x + 4y + 3z = 12$

Spurpunkt zu x:

$2x + 0y + 0z = 12$ ← alles 0 setzen außer gesuchten Spurpunkt zur Achse

$2x = 12 \quad |:6$

$\hookrightarrow S_1(6|0|0)$

$\left.\begin{array}{l} S_2(0|3|0) \\ S_3(0|0|4) \end{array}\right\}$ gleiches Prinzip für alle 3 Achsen wiederholen

Jetzt wie gewohnt aus 3 Punkten Parameterform erstellen:

$E: \vec{x} = \vec{S_1} + r \cdot \overrightarrow{S_1S_2} + t \cdot \overrightarrow{S_1S_3}$

$= \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0-6 \\ 3-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0-6 \\ 0-0 \\ 4-0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

Normalenform zu Koordinatenform:

- setzt sich aus Punkt und $\vec{n}$ Vektor zusammen

Bsp: Punkt und $\vec{n}$ Vektor gegeben

$P(2|1|1)$, $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$E: \vec{n} \cdot [\vec{x} - \vec{p}] = 0$ ⟶ alternative Schreibweise $\vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot p$

$E: \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = 0$

$4x_1 + x_2 + 2x_3 - (8 + 1 + 2) = 0$

$4x_1 + x_2 + 2x_3 - 8 - 1 - 2 = 0 \quad |+11$

$E: 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 11$

$\hookrightarrow$ einfach nur einsetzen und ausmultiplizieren

- wenn man in Parameterform formen will, einfach von Koordinatenform aus

Abstand Punkt und Gerade:

Beispielaufgabe:

Bestimmen Sie den Abstand vom Punkt $P(-8|-14|7)$ zu der Geraden

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$

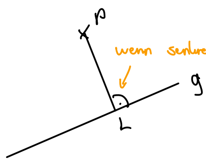
Bestimmen Sie zunächst den Lotfußpunkt L des Punktes P auf der Geraden g

Wie groß ist der Abstand $d(P, g)$ zu g?

1. Hilfsebene aufstellen:

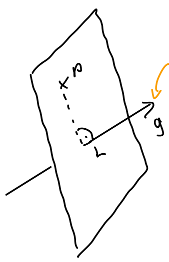
- welche orthogonal zu g und P einbezieht:

grafisch:



wenn senkrecht kleinster Abstand

Hilfsebene:



$\vec{n}$, RV von g ist Normalenvektor von E, da g orthogonal zu E, deshalb aufstellen von $\vec{n}$ dadurch möglich

$\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$ → lässt sich einfach aus RV von g ablesen

$\vec{p} = \begin{pmatrix} -8 \\ -14 \\ 7 \end{pmatrix}$ → der Punkt, welchen die Ebene beinhalten soll

↳ einsetzen in Normalenform:

$\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) = 0$

$\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -8 \\ -14 \\ 7 \end{pmatrix} \right] = 0$

$-x_1 + 5x - 5x - (8 + 60 - 33) = 0$

$-x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 8 - 60 + 33 = 0$

↳ Hilfsebene: $E: -x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -97$

② einsetzen der Geraden g in Ebene E (Schnittpunkt von g und E) ← man bestimmt so auch Schnittpunkt gerade mit Ebene

$g: \vec{x} = \boxed{\begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}}$ - jede Spalte für den jeweiligen x-Wert einsetzen

$E: -x + 5x - 5x + 97 = 0$

$-(-5 + (-1)t) + 5(-4 + 5t) - 5(-4 - 5t) + 97 =$

$+5 + t - 20 + 25t + 20 + 25t + 97 = 0$

$102 + 51t = 0 \quad | -102 \quad | :51$

$t = -2$

③ $t = -2$ einsetzen in g:

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} + (-2)\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ 10 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -3 \\ -14 \\ 6 \end{pmatrix}$

↳ Lotfußpunkt $L(-3 | -14 | 6)$ → Lotfußpunkt dort wo rechter Winkel auf g zu Punkt P
→ Schnittpunkt Hilfsebene und Gerade

④ Abstand d zwischen P und L berechnen:

$|\vec{PL}| = |\vec{l} - \vec{p}| = \left| \begin{pmatrix} -3 \\ -14 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -8 \\ -14 \\ 7 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{5^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{26}$

Abstand Punkt zu Ebene:

Beispielaufgabe:

- Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $P(-2|10|5)$ zur Ebene

$E: -2x + 4y + 4z + 8 = 0$

① Lotgerade aufstellen:

$$L: \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}} + t \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}}$$

Punkt P ist Ortsvektor von Gerade L

Richtungsvektor ist $\vec{n}$ Vektor aus Koordinatenebene

② Schnittpunkt von L und E (Einsetzen von L in E): ← Man bestimmt so auch Schnittpunkt Gerade und Ebene

- L in E einsetzen:

$L: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

einzelne Spalten in E einsetzen

für $x_1 = -2 - 2t$

für $x_2 = 10 + 4t$

für $x_3 = 5 + 4t$

$E: -2x + 4y + 4z + 8 = 0$

$-2(-2 + (-2)t) + 4(10 + 4t) + 4(5 + 4t) + 8$

$= 4 + 4t + 40 + 16t + 20 + 16t + 8$

$= 72 + 36t \quad | -72 \quad | :36$

$t = -2$

③ t = -2 einsetzen in L:

$L: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} + (-2) \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

$L(2|2|-3)$ ← Schnittpunkt von L und E

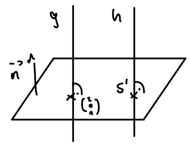
④ Abstand von P und L:

$$|\vec{PL}| = |\vec{l} - \vec{p}| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ -8 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4^2 + (-8)^2 + (-8)^2} = \sqrt{16 + 64 + 64} = \sqrt{144} = 12$$

Abstand Gerade zu Gerade:

1. parallel:

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$



(1.) Hilfsebene aufstellen mit Gerade g:

- daran beliebige Gerade nehmen und Koordinatenform davon aufstellen z.B. g

$\vec{n} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$E: \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = 0$

$-4x_1 + x_2 + x_3 - (-8 + 0 + 1) = 0$

$E: -4x_1 + x_2 + x_3 = -7$

(2.) einsetzen von h in E:

- andere Gerade h in die mit g erstellte Ebene einsetzen:

$E: -4x_1 + x_2 + x_3 = -7$

$-4(-8t) + 5 + 2t + 6 + 2t = -7$

$t = -\frac{1}{2}$

(3.) einsetzen von t in h:

$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + (-\frac{1}{2}) \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

Schnittpunkt $S'(4|4|5)$

(4.) Abstand Ortsvektor von g zu S':

$|\vec{GS}| = |\vec{s} - \vec{g}| = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6$

2. windschiefe Geraden:

(1) $\vec{n}$ Vektor bestimmen -> Richtungsvektoren der Geraden $\vec{RV}_g \times \vec{RV}_H$

(2) Koordinatenebene aufstellen -> einsetzen z.B. Ortsvektor von Geraden g

(3) Abstand von Ortsvektor Ebene (Ortsvektor von g)

zu Punkt P (Ortsvektor von h) bestimmen -> bestimmt Abstand der beiden Geraden durch Abstand Gerade h zu Hilfsebene von g

(1.) $\vec{n} = \begin{array}{cc} \cancel{0} & \cancel{3} \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & -3 \\ -3 & 0 \\ \cancel{1} & \cancel{2} \end{array} = \begin{pmatrix} -3\cdot 2 - 1\cdot 0 \\ 1\cdot(-3) - 0\cdot 2 \\ 0\cdot 0 - (-3)\cdot(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix}$

(2.) Koordinatenform:

$-6x_1 - 3x_2 - 9x_3 = d$

$-6\cdot 1 - 3\cdot 2 - 9\cdot 2 = d$

$-6 - 6 - 18 = d$

$d = -30$

$E: -6x_1 - 3x_2 - 9x_3 = -30$

(3.) Abstand Punkt zu Ebene: (Ortsvektorpunkt von h $H(5|4|2)$)

1. Lotgerade aufstellen

$l: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix}$

Punkt der gemacht wird

$\vec{n}$ Vektor Ebene

2. Schnittpunkt Lotgerade mit Ebene

einsetzen von Zeilen in x-Werte von Koordinatenform

$x_1 = 5 - 6s$

$x_2 = 4 - 3s$

$x_3 = 2 - 9s$

$-6\cdot(5-6s) - 3(4-3s) - 9(2-9s) = -30$

$-30 + 36s - 12 + 9s - 18 + 81s = -30$

$126s - 60 = -30 \quad |+60$

$126s = 30 \quad |:126 \qquad s = \frac{30}{126}$

3. Schnittpunkt in Lotgerade einsetzen

$L: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{30}{126} \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{180}{126} \\ -\frac{90}{126} \\ -\frac{270}{126} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{25}{7} \\ \frac{23}{7} \\ -\frac{1}{7} \end{pmatrix}$

Abstand von L zu H:

$\vec{LH} = \left| \begin{pmatrix} 5 - \frac{25}{7} \\ 4 - \frac{23}{7} \\ 2 - (-\frac{1}{7}) \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\left(\frac{10}{7}\right)^2 + \left(\frac{5}{7}\right)^2 + \left(\frac{15}{7}\right)^2} = \frac{5\sqrt{14}}{7}$

alternative zur Berechung Abstand windschiefer Geraden:

Stützpunkt von g
Stützpunkt von h

$$\boxed{d = \frac{|(\vec{p} - \vec{a}) \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}}$$ ← wesentlich kürzere Variante

$$|\vec{n}| = \left|\begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-6)^2 + (-3)^2 + (-9)^2} = \sqrt{126}$$

$$d = \frac{\left|\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{126}} = \frac{\left|\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{126}} = \frac{|+24 + 6|}{\sqrt{126}} = \frac{30}{\sqrt{126}} = \frac{5\sqrt{14}}{7}$$

Abstand von Gerade zu Ebene:

- müssen parallel sein
  ↳ überprüfen: normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene und RV von der Geraden müssen im Skalar 0 ergeben dann orthogonal, da $\vec{n}$ orthogonal zur Ebene ist

1. Stützvektor von g als Punkt P aus der auf g liegt
2. Abstand Punkt P von g zu Ebene E
   ↳ nachschlagen Abstand Punkt – Ebene in Formelsammlung

Abstand Ebene zu Ebene:

- müssen parallel sein
  ↳ sind parallel, wenn $\vec{n}$ Vektoren vielfache sind, also entweder ranlesen oder durch Kreuzprodukt $\vec{n}$ Vektor bestimmen und vergleichen auf vielfache
- Punkt von beliebiger Ebene auswählen
  ↳ aus Parameterform und Normalenform Stützvektor ablesbar, bei Koordinatenform raten, sodass gleichung aufgeht!
  ↳ dann wieder Abstand Punkt – Ebene nachschlagen in Formelsammlung

Schnittgerade zwischen 2 Ebenen:

- wenn in Parameterform oder Normalenform zu Koordinatenform umwandeln

① LGS aufstellen aus beiden Ebenen:

E_1: I $x + 2y + 3z = 4$

E_2: II $5x + 5y + 5z = 5$ $\quad II - 5I$ → es muss nur eine Variable wegfallen, welche ist egal

II $5y + 10z = 15 \quad | -10z \quad | :5$

$y = \underbrace{3 - 2z}$ → nach einer beliebigen Variablen umstellen

vollkommen in Ordnung so, y abhängig von z

② Einsetzen von $y = 3 - 2z$ in beliebige Ebene z.B. E_1:

$x + 2(3 - 2z) + 3z = 4$

$x + 6 = 4 + z$

$x = -2 + z$ → x, so umstellen dass abhängig von z

③ Geradengleichung aufstellen mit einsetzen von x, y, z:

$$\left.\begin{aligned} x &= -2 + z \\ y &= 3 - 2z \\ z &= z \end{aligned}\right\}$$ einsetzen in Geradengleichungsformel

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + z \\ 3 - 2z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ -2z \\ z \end{pmatrix}$$

↳ also $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Winkel zwischen 2 Ebenen bestimmen:

- $\vec{n}$ Vektoren der beiden Ebenen bestimmen -> ablesen Normalenform, Koordinatenform, Kreuzprodukt Parameterform

↳ einsetzen von $\vec{n}$ Vektoren in Winkelform:

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}}$$

$$|\vec{n}_1| = \left|\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-3)^2 + (5)^2 + 10^2} = \sqrt{9 + 25 + 100} = \sqrt{134}$$

$$|\vec{n}_2| = \left|\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2 + 11^2} = \sqrt{9 + 9 + 121} = \sqrt{139}$$

$$|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2| = \left|\underbrace{\begin{pmatrix} -3 \cdot (-3) \\ 5 \cdot 3 \\ 10 \cdot 11 \end{pmatrix}}_{\text{Skalare multiplikation}}\right| = \left|\cancel{\begin{pmatrix} 9 \\ 15 \\ 110 \end{pmatrix}}\right| = |9 + 15 + 110| = |134|$$

Skalar ergibt einen Wert keinen Vektor!

$$\cos\alpha = \frac{|134|}{\sqrt{134} \cdot \sqrt{139}} = \frac{134}{\sqrt{134} \cdot \sqrt{139}} = 0{,}9818496713$$

jetzt noch in Gradmaß umwandeln:

$$\cos^{-1}(0{,}981849) = 10{,}932$$

in Taschenrechner noch eingeben für Gradmaß

Mögliche Aufgaben Vektorgeometrie:

1. Gesucht Punkt C der Strecke AB im Verhältnis 1:4 teilt

- $C = \vec{A} + \frac{1}{5}\vec{AB}$

2. Bestimme die Ebene, die senkrecht zu g durch Punkt P läuft

- Bestimmen sie die Ebene, die senkrecht zur Geraden g, durch den Punkt P verläuft.

  Geben Sie die Gleichung in Koordinatenform an

  $P(1|0|1) \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

  -> Richtungsvektor von g ist schon der $\vec{n}$ Vektor von E, da E orthogonal zur Geraden sein soll kann man direkt einsetzen!

  $E: 2x_1 + x_2 + 0x_3 = d$ Punkt P einsetzen: $2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = d$, $d = 2$

  $E: 2x_1 + x_2 + 0x_3 = 2$

3. überprüfe ob Ebene und Gerade parallel:

- Skalarprodukt aus $\vec{n}$ Vektor der Ebene und $\vec{RV}$ von der Geraden müssen 0 ergeben, dann parallel

4. Matrizen:

1. Allgemeine Verrechnung:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{1 \ 2 \ 3} \\ 1 \ 3 \ 4 \end{pmatrix}}_{\text{höhe}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}} & \begin{matrix}4\\5\\6\end{matrix} & \begin{matrix}7\\8\\9\end{matrix} \end{pmatrix}}_{\text{breite}} = \begin{pmatrix} \boxed{14} & 32 & 50 \\ 19 & 43 & 67 \end{pmatrix}$$

NR: $1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3$
$1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6$
$1 \cdot 7 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 9$
$1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3$
$1 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 6$
$1 \cdot 7 + 3 \cdot 8 + 4 \cdot 9$

gleiches gilt für Matrix · Vektor:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1 \ 2 \ 3} \\ 1 \ 3 \ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{14} \\ 19 \end{pmatrix}$$

NR: $1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3$
$1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3$

2. Matrix Rechenregeln:

1. $(A+B)^T = A^T + B^T$ — transponiert einfach Zeile/Spalte vertauscht

$$\begin{pmatrix} \boxed{1 \ 3} \\ \boxed{2 \ 4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}1\\3\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}2\\4\end{matrix}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

2. $(AB)^T = B^T \cdot A^T$

3. $(c \cdot A)^T = c \cdot A^T$

4. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

5. $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(A^T)$

6. $(A^T)^T = A$

7. $A \cdot X = B$

$$X = B \cdot A^{-1}$$

8. $A \cdot X + B \cdot X = (A+B) \cdot X$

9. $A \cdot X - 7 \cdot X = (A - 7E) \cdot X$

10. $A \cdot X - 3X = B$

$$(A - 3E) \cdot X = B$$

Matrizen kann man nicht dividieren deshalb invertieren!

$$X = B \cdot (A - 3E)^{-1}$$

z.B

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} - 3 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Einheitsmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$ ← prüfen ob inverse überhaupt möglich, dafür det ≠ 0, wenn ja kann man invertieren

Determinante:

1. wird verwendet um LGS Lösung zu vergleichen

   det = 0 , keine eindeutige Lösung → unendlich viele oder → keine Lösung } nicht über determinante lösbar!!

   det ≠ 0 , eine eindeutige Lösung

2. |A| ist das Ergebnis der Determinante

3. det ≠ 0 , dann inverse Matrix möglich → reguläre Matrix

Determinanten berechnen:

1. Fall: 2er Matrix:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2$$

2. Fall: 3er Matrix:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \left(\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{matrix}\right)\begin{matrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{matrix} = 1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8 - 7 \cdot 5 \cdot 3 - 8 \cdot 6 \cdot 1 - 9 \cdot 4 \cdot 2$$

$$= 45 + 84 + 96 - 105 - 48 - 72$$

$$= 225 - 225$$

$$= 0$$

3. Fall: 4er Matrix und größer:

$$\det \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & \\ \left(\begin{array}{cccc} \cancel{1^{+}} & \boxed{\cancel{2^{-}}} & \cancel{3^{+}} & \cancel{4^{-}} \\ 5^{-} & 6^{+} & 7^{-} & 8^{+} \\ 9^{+} & 10^{-} & 11^{+} & 12^{-} \\ 13^{-} & 14^{+} & 15^{-} & 16^{+} \end{array} \right) \end{array}$$

3 ← 2 muss in -2 gewandelt werden Matrix ohne gestrichene Spalte und Zeile wird erstellt

gleiche Vorgang auch für 6 mit Matrix ohne Zeile und Spalte wo 6 vorkommt usw. für die anderen Matrizen

1. +/- [illegible]
2. Zeile / Spalte mit möglichst vielen 0en wählen
3. Zeilen / Spalten streichen (für jede einzelne Spalte in der eine Zahl steht)
4. neue determinanten zusammenrechnen

4. $-2 \cdot \det \begin{pmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 9 & 11 & 12 \\ 13 & 15 & 16 \end{pmatrix} + 6 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 9 & 11 & 12 \\ 13 & 15 & 16 \end{pmatrix} - 10 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 13 & 15 & 16 \end{pmatrix} + 14 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 9 & 11 & 12 \end{pmatrix}$

= Ergebnis (ist eine einzelne Zahl, entweder weiter vereinfachen oder 2. Fall anwenden)

4. Fall: Dreiecksmatrix:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 15 & -12 & -14 \\ 0 & -3 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & c & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

determinante lässt sich direkt aus der diagonalen einer Dreiecksmatrix bilden

$|A| = -2 \cdot (-3) \cdot c \cdot 1$

Schweres LGS Lösen:

1. man darf Zeilen und Spalten umstellen!

$$\begin{array}{lll} \mathrm{I} & -x + 4y + 2z = 1 & |\cdot p \\ \mathrm{II} & x + 4y + 0 = 2 & \\ \mathrm{III} & p\cdot x + 2y + 4z = 4 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \mathrm{I} & -px + 4yp + 2zp = 1p & \\ \mathrm{II} & x + 4y + 0 = 2 & |\cdot p \\ \mathrm{III}+\mathrm{I} & 0 + (2+4p)y + (4+2p)z = 4+p & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \mathrm{I} & -px + 4yp + 2zp = 1p & \\ \mathrm{II}+\mathrm{I} & 0 + 8yp + 2zp = 3p & |\cdot \left(\frac{1}{p} + 2\right) \quad |:4 \\ \mathrm{III} & 0 + (2+4p)y + (4+2p)z = 4+p & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \mathrm{I} & -px + 4yp + 2zp = 1p \\ \mathrm{II} & 0 + (2+4p)y + \left(\frac{1}{2}+p\right)z = \frac{3}{4} + \frac{6}{4}p \\ \mathrm{III} & 0 + (2+4p)y + (4+2p)z = 4+p \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \mathrm{I} & -px + 4yp + 2zp = 1p \\ \mathrm{II} & 0 + (2+4p)y + \left(\frac{1}{2}+p\right)z = \frac{3}{4} + \frac{6}{4}p \\ \mathrm{III}-\mathrm{II} & 0 + 0 + \left(\frac{8-1}{2} + p\right)z = \frac{13}{4} - \frac{2}{4}p \end{array}$$

$$x = \frac{\frac{13}{4} - \frac{2}{4}p}{\boxed{\frac{7}{2} + p}}$$

← Nenner muss $\neq 0$ sein, damit eine eine eindeutig lösbare Lösung rauskommt

$p = -\frac{7}{2}$

← $p = -\frac{7}{2}$ führt zu $= 0$, weshalb für alles außer $p = -\frac{7}{2}$ eine eindeutige Lösung entsteht

inverse Matrix bilden:

Inverse Matrix lässt sich in 7 einfachen Schritten bilden

1. $\begin{matrix} 1 & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ \end{matrix}$ 2. $\begin{matrix} 1 & \_ & \_ \\ 0 & \_ & \_ \\ 0 & \_ & \_ \end{matrix}$ 3. $\begin{matrix} 1 & \_ & \_ \\ 0 & 1 & \_ \\ 0 & \_ & \_ \end{matrix}$ 4. $\begin{matrix} 1 & \_ & \_ \\ 0 & 1 & \_ \\ 0 & 0 & \_ \end{matrix}$ 5. $\begin{matrix} 1 & \_ & \_ \\ 0 & 1 & \_ \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$ 6. $\begin{matrix} 1 & \_ & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$ 7. $\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$

1. $\begin{pmatrix} 6 & 8 & 3 \\ 4 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ tauschen $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 3 \\ 6 & 8 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \\ -4 \cdot I \\ -6 \cdot I \end{matrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & -6 \end{pmatrix} \quad | \cdot (-1)$

3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -6 \end{pmatrix} \quad + 4 II$

4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & -4 & 10 \end{pmatrix} \quad - III$

<- hier schon 1 unten rechts falls nicht komplette Zeile mit z.B 3 dividieren falls dort 3 steht

6. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & -4 & 10 \end{pmatrix} \quad - III$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & -6 \\ 1 & -4 & 10 \end{pmatrix} \quad - II$

7. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & -6 \\ 1 & -4 & 10 \end{pmatrix}}_{\text{das ist nun die inverse Matrix}}$

Formel inverse 2er Matrix:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a \cdot d - b \cdot c} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4 \cdot 1 - 7 \cdot 1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte berechnen:

1. Bilde $A - \lambda \cdot I$
2. Berechne $\det(A - \lambda \cdot I)$
3. Nullstellen von $\det(A - \lambda \cdot I)$

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$A - \lambda \cdot I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ -1 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$ ← diagonale $-\lambda$

2. $\det \left(\begin{array}{ccc|cc} 1-\lambda & 2 & -1 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 3-\lambda & 0 & 0 & 3-\lambda \\ -1 & 2 & 1-\lambda & -1 & 2 \end{array} \right)$

$$= (1-\lambda) \cdot \underline{(3-\lambda)} \cdot (1-\lambda) - (-1) \cdot \underline{(3-\lambda)} \cdot (-1)$$

versuchen ausklammern nicht vereinfachen

$$= (3-\lambda) \cdot ((1-\lambda)^2 + 1)$$

$$= (3-\lambda) \cdot (1 - 2\lambda + \lambda^2 - 1)$$

$$= (3-\lambda) \cdot (\lambda \cdot (-2+\lambda))$$

3. Nullstellen:

$\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$

Eigenvektoren berechnen:

1. Finde alle Eigenwerte
2. Berechne $A - \lambda \cdot I$ für alle berechneten Nullstellen!
3. Löse $(A - \lambda \cdot I) \cdot \vec{x} = 0$

2. $A - \lambda \cdot I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ -1 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$

einsetzen $\lambda_1 = 0$:

$$= \begin{pmatrix} 1-0 & 2 & -1 \\ 0 & 3-0 & 0 \\ -1 & 2 & 1-0 \end{pmatrix}$$

einsetzen $\lambda_2 = 2$

$$= \begin{pmatrix} 1-2 & 2 & -1 \\ 0 & 3-2 & 0 \\ -1 & 2 & 1-2 \end{pmatrix}$$

einsetzen $\lambda = 3$

$$= \begin{pmatrix} 1-3 & 2 & -1 \\ 0 & 3-3 & 0 \\ -1 & 2 & 1-3 \end{pmatrix}$$

3. $(A - \lambda \cdot I) \cdot \vec{x} = \underline{0}$ ($\lambda = 0$, für alle Fälle eigene Matrix)

in einfacher Matrixschreibweise (eigentlich wie LGS!):

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) & & & +I \end{array}$$

} mit Gauß Algorithmus lösen!

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ |\cdot 4 \\ |\cdot 3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -II \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

III: $0 = 0$ → Nullzeile

z frei wählbar

II: $12y = 0 \quad |:12$

$y = 0$

einsetzen in I: $1x - 0 - 1z = 0$

$x = z$

Lösung für LGS Eigenvektor $= \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$ für $\lambda = 0$

(z beliebig wählbar, also möglicher Eigenvektor $z = 1$): $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Diesen Schritt für alle anderen Eigenwerte (Nullstellen) auch durchführen!

Richtige Schreibweise:

für: $\lambda = 0 \quad \vec{x} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ a \in \mathbb{R}$

$\lambda = 2 \quad \vec{x} = b \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ b \in \mathbb{R}$

$\lambda = 3 \quad \vec{x} = c \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \ b \in \mathbb{R}$

Verschiedene Arten Matrizen:

- Ordnung Matrizen:
  - Anzahl Zeilen $m \cdot n$ Anzahl Spalten $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ -> z.B $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

1. einzeilige Matrizen:
   - Zeilenvektor $(a_{11} \; a_{12})$ bzw. $(a_{21} \; a_{22})$
   - Spaltenvektor $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$ bzw $\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$

2. quadratische Matrix

   $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

   - falls eine inverse Matrix $= A^{-1}$ besteht

     $\det \neq 0$ -> reguläre Matrix ansonsten singuläre Matrix

3. Hauptdiagonale Matrix:

   $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot \\ \cdot & a_{22} & \cdot \\ \cdot & \cdot & a_{33} \end{pmatrix}$ -> es gilt $m = n$

4. Einheitsmatrix

   $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. Nullmatrix

   $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

6. Symmetrische Matrix

   $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

   - transponierte Matrix = normale A Matrix $A^T = A$ wenn symmetrisch

7. Dreiecksmatrix

   $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

   - det einfach durch multiplikation Hauptdiagonale zu berechnen
   - invertierbar und LGS hat immer genau eine Lösung

8. Inverse Matrix:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

- Matrix $A \cdot A^{-1}$ ist gleich die Einheitsmatrix I $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{T}$ die inverse Matrix der transponierten Matrix entspricht der transponierten der inversen
- Wenn eine inverse Matrix vorhanden ist ist $\det \neq 0$

9. transponierte Matrix:

- Zeilen und Spalten vertauscht

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad A^{T} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Dimension, Basis von Bild und Kern:

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 17 & 11 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2\,\mathrm{I} \\ -4\,\mathrm{I} \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +\mathrm{II} \end{matrix}$

Pivot

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{-5} & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dimension in Zeilenstufenform ablesen

freie Variablen, wo keine Stufe
also x_2 und x_4

↳ Anzahl freier Variablen gibt die Dimension des Kerns an

also $\dim(\text{Kern}(A)) = 2$

- $\dim(\text{Bild}(A))$ ist die Anzahl der Pivot Elemente, also abhängige Variablen, ist also $\dim(\text{Bild}(A)) = 2$.

- Die Basis des Bildes wird aus 2 linear unabhängigen Spalten gebildet diese sind typischerweise die Pivotspalten, diese sind immer unabhängig und man kann daraus das Bild bilden:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & \boxed{3} & 2 \\ \boxed{4} & 2 & \boxed{1} & 1 \\ \boxed{8} & 4 & \boxed{17} & 11 \end{pmatrix}$$

Eine Basis des Bildes von A ist: $B = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 17 \end{pmatrix} \right)$

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{-5} & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- aus der Stufenform einzelne Zeilen rausschreiben

zweite Zeile: $-5x_3 - 3x_4 = 0 \quad \rightarrow \quad \underbrace{x_3}_{\text{abhängige Links}} = -\frac{3}{5} \underbrace{x_4}_{\text{unabhängige Variable rechts}}$

erste Zeile: $2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0$

$$\rightarrow x_1 = -\frac{1}{2} x_2 - \frac{1}{10} x_4$$

$$\text{Kern}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{10}x_4 \\ x_2 \\ -\frac{3}{5}x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| \underbrace{x_2, x_4 \in \mathbb{R}}_{\text{frei wählbar}} \right\}$$

$$= \left\{ x_2 \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} \\ 0 \\ -\frac{3}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \middle| x_2, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

Eine Basis des Kerns von A ist: $\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} \\ 0 \\ -\frac{3}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

<u>alternativ schnelle Rechnung bei simplen:</u>

- voller Rang wenn $\det \neq 0$, also maximale Dimension des Bildes
  (Anzahl der Zeilen, die keine Nullzeile sind)
  und Dimension des Kerns $= 0$

Mögliche Aufgabestellungen und Antworten:

1. Ermittle den Eigenwert zum Vektor:

- $A \cdot v = \lambda \cdot v$ beides mit Vektor multiplizieren oder
- $(A - \lambda \cdot I) \cdot v = 0$ und dann Matrix, diagonal $-\lambda$ nehmen und mit v multiplizieren und dann $= 0$ setzen

← Vorgang ungenau beschrieben

A einfach mit Eigenvektor multiplizieren

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 7 & 3 \\ -2 & 6 & 3 & 7 \\ -3 & -7 & 6 & -2 \\ -7 & -3 & -2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ -24 \\ 24 \\ -24 \end{pmatrix}$ ← Es entsteht neuer Vektor

↳ schauen was das vielfache ist $\lambda = 24 : 2 = 12$

-> also ist der Eigenwert des Eigenvektors 12

2. Streckung (Vektoren) durch Matrix transformiert:

- gegeben 3 Punkte A, B, C, bilden Streckung, welcher durch Matrix transformiert -> neue Koordinaten angeben
- für jeweilige Koordinate mit Matrix multiplizieren

↳ $A \cdot \vec{v}$ für jeweils $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$

konkret bedeutet das:

z.B. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Punkte: $A(3|3)$, $B(3|2)$, $C(1|2)$

Ortsvektor von Punkt A, also $\vec{OA} = \vec{a} - \vec{o} = \vec{A}$

Koordinate A transformiert $= A \cdot \vec{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

Koordinate B transformiert $= A \cdot \vec{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

komplexe Zahlen:

allgemein gut zu wissen:

$\boxed{i^2 = -1}$

$\boxed{i = \sqrt{-1}}$

allgemeine Darstellung:

$\boxed{z = a + bi}$

erweitern:

$\boxed{\cdot \frac{15-30i}{15-30i}}$ ← damit i aus dem Nenner fallen kann

komplexe Gleichung lösen:

$$\frac{60x - 50i}{3-2i} = 15x + 25 \quad | \cdot (3-2i)$$

$$60x - 50i = (15x+25) \cdot (3-2i) \quad | +50i$$

$$60x = 45x + 75 - 30ix - 50i + 50i$$

$$60x = 45x + 75 - 30ix \quad | -45x + 30ix$$

$$15x + 30ix = 75$$ ← ausklammern

$$x\,(15+30i) = 75 \quad | : (15+30i)$$

$$x = \frac{75}{(15+30i)}$$

↳ $x = \frac{75}{15+30i}$ in algebraische Form bringen $\boxed{z = a + bi}$:

- Erweiterung durch Nenner mit − statt + :

$$x = \frac{75}{15+30i} \cdot \boxed{\frac{15-30i}{15-30i}}$$ ← Erweiterung mit Bruch

$$= \frac{75 \cdot 15 - 75 \cdot 30i}{(15+30i) \cdot (15-30i)}$$ ← 3. binomische Formel

$$= \frac{1125 - 2250i}{225 - 900i^2}$$

$$= \frac{1125 - 2250i}{225 - 900 \cdot (-1)}$$ ← i^2 ist $i^2 = -1$!

$$= \frac{1125 - 2250i}{1125}$$ ← Bruch auseinander ziehen

$$= \frac{1125}{1125} - \frac{2250}{1125}i$$

$$= 1 - 2i$$

Formen komplexer Zahlen:

Realteil Imaginärteil

algebraische Form:	$z = a + b \cdot i$
trigonometrische Form:	$z = r \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$
Exponentialform:	$z = r \cdot e^{i\varphi}$

} Für Polarformen benötigt man radius $r = |z|$ und Winkel φ

berechnen von r:

$\boxed{r = |z| = \sqrt{Re^2 + Im^2}}$ ← $Re = a$, $Im = b$ (b ohne das i , sozusagen nur der Faktor vor dem i)

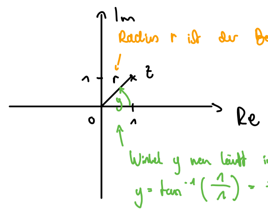
$\tan \varphi = \frac{Im}{Re} \quad | \tan^{-1}$

$\boxed{\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{Im}{Re}\right)}$

graphisch einzeichnen:

$z = 1 + i$

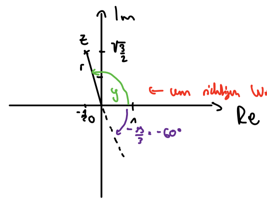
Radius r ist der Betrag der Strecke , so wie bei Vektoren auch $r = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$



Winkel φ nun läuft immer von der x-Achse aus los gegen den Uhrzeigersinn

$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}$

$z = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{2}}\, i$ ← $Re = -\frac{1}{2}$, $Im = \sqrt{\frac{3}{2}}$



← um richtigen Winkel φ zu bekommen $180° - 60° = 120°$ rechnen , dann endet man nicht im negativen

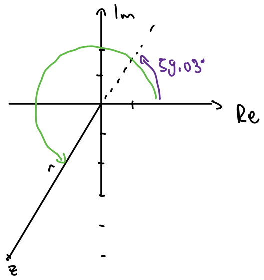
$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}\right)$

$= \tan^{-1}(-\sqrt{3})$

$= -\frac{\pi}{3}$ ← hier kam negativer Winkel raus

$\varphi = -\frac{\pi}{3} + \pi$ ← $+180°$ $(180° = \pi)$, damit nicht der negative Winkel das Ergebnis ist

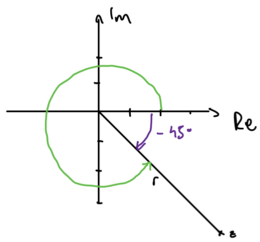
$z = -3 - 5 \cdot i$ ← $Re = -3$, $Im = -5$



$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{-5}{-3}\right)$

$= 59{,}03° + 180° = 239{,}03°$ ← dazurechnen von 180° für vollständigen Winkel

$z = 4 - 4i$



$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{-4}{4}\right)$

$= -45° + 2\pi$ ← dazurechnen von $360° = 2\pi$.

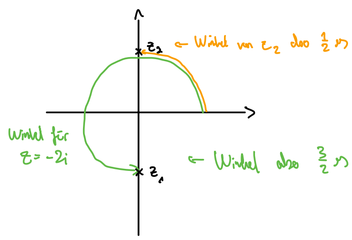
↑ wichtig, wenn man alles im Gradmaß rechnet, dann muss 2π auch im Gradmaß sein, also 360°, da $-45 + 360 \neq -45 + 2 \cdot 3{,}14$!

$= 315°$

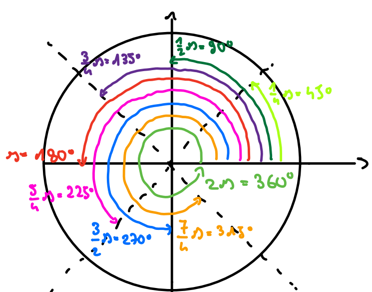
Spezialfälle:

$z_1 = -2i$

$z_2 = 2i$



Veranschaulichung wie viel Grad wie viel π:



Umwandlung von Grad in Bogenmaß:

Winkel in Rad $= 2\pi \cdot \frac{180°}{360°} = \pi$

komplexe Zahlen umformen:

Beispiel:

$$z = \frac{1}{(\underbrace{i-\sqrt{3}}_{k})^5} = \underbrace{a+b\cdot i}$$

so soll z später aussehen, damit man daraus später Polarformen bilden kann

die komplexe Zahl im Nenner wird als k definiert um sie gesondert umschreiben zu können

$$k = i - \sqrt{5} = -\sqrt{3} + i = \underbrace{-\sqrt{3}}_{Re} + \underbrace{1}_{Im}\cdot i$$ ← kartesische Darstellung der komplexen Zahl einfach umgestellt

↳ k in exponentialform umwandeln, damit man zum Schluss mit dem $(\ )^5$ also hoch 5 umgehen kann.

$$|k| \cdot e^{i\cdot y}$$ ← Betrag von k mal e hoch i mal den Winkel y

$$|k| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$$

$$\tan y = \frac{1}{-\sqrt{3}}$$

$$y = \tan^{-1}\left(\frac{1}{-\sqrt{3}}\right) = -30 + 180 = 150°$$

Umrechnung von Grad in Bogenmaß: $2\pi \cdot \frac{150°}{360°} = \frac{5}{6}\pi$

↳ $k = 2\cdot e^{\frac{5}{6}\pi\cdot i}$

→ k exponential einsetzen in z:

$$z = \frac{1}{(i-\sqrt{3})^5} = (i-\sqrt{3})^{-5} = \left(2\cdot e^{\frac{5}{6}\pi\cdot i}\right)^{-5}$$ ← Nenner lässt sich nun viel leichter auflösen $^{-5}$ bezieht sich auf 2 sowie auf $e^{\frac{5}{6}\pi\cdot i}$

$$= 2^{-5} \cdot e^{i\cdot\frac{5}{6}\pi\cdot(-5)}$$

$$= \frac{1}{2^5} \cdot e^{i\cdot(-\frac{25}{6}\pi)}$$

$$= \underline{\frac{1}{32}} \cdot e^{\boxed{-\frac{25}{6}\pi}\cdot i}$$ ← Winkel

↳ Radius, also Betrag von Zahl

→ umformen trigonometrische Form:

$$z = |z| \cdot \cos\alpha + |z| \cdot i \cdot \sin\alpha$$

$$= \frac{1}{32} \cdot \cos\left(-\frac{25}{6}\pi\right) + \frac{1}{32} \cdot i \cdot \sin\left(-\frac{25}{6}\pi\right)$$

$$= \frac{1}{32} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{32} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{64} - i \cdot \frac{1}{64}$$ ← das ist die kartesische Form der Ursprungszahl!

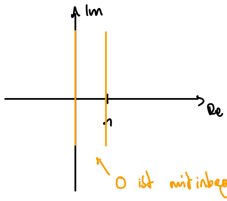
↳ kartesische Form an $z = a + bi$

$$z = \frac{\sqrt{3}}{64} - \frac{1}{64}\cdot i$$

komplexe Zahlen graphisch darstellen:

1. Beispiel:

$$M = \{ z \in \mathbb{C} \mid 0 \le \mathrm{Re}(z) < 1 \}$$



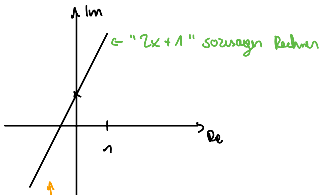
0 ist mitinbegriffen, 1 ist nicht mitinbegriffen, Rand 0 gehört dazu, Rand 1 gehört nicht dazu

2. Beispiel:

kann man sich vorstellen wie Geradengleichung $y = 2x+1$

$$M_2 = \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) \le \overbrace{\underbrace{2\,\mathrm{Re}(z)+1}_{(2x+1)}} \}$$

kann man sich vorstellen wie y

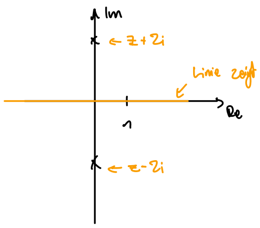


es sind also alle Zahlen möglich unter der Linie die Linie miteingeschlossen

3. Beispiel:

$$M_3 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |\overbrace{z-2i}^{z+2i}| = |\overbrace{z+2i}^{z-2i}| \}$$

bei Betrag immer invertiert so wie z.B. bei $(x-3) \rightarrow x = 3$ ist



Linie zeigt, dass beide gleichen Abstand haben

Rechnerisch:

$$|z-2i| = |z+2i|$$

$$|z-2i|^2 = |z+2i|^2 \quad \leftarrow \text{quadrieren damit Betrag wegfällt}$$

$$(z-2i)\overline{(z-2i)} = (z+2i)\overline{(z+2i)} \quad \leftarrow |z|^2 = \underset{x+iy}{z} \cdot \underset{x-iy}{\bar{z}}$$

$$(z-2i)(\bar{z}+2i) = (z+2i)(\bar{z}-2i)$$

$$z\bar{z} + 2iz - 2i\bar{z} - 4i = z\bar{z} - 2iz + 2i\bar{z} - 4i \qquad | + 4i + 2i\bar{z} - z\bar{z} + 2iz$$

$$4iz = +4i\bar{z} \quad |:4i$$

$$z = \bar{z}$$ ← einsetzen von $x + iy$ für z und $x - iy$ für $\bar{z}$

$$x + iy = x - iy \quad |-x$$

$$iy = -iy \quad |+iy$$

$$2iy = 0 \quad |:2i$$

$$\underbrace{y}_{\mathrm{Im}(z)} = 0$$ ← also Imaginärteil muss $= 0$ sein

4. Beispiel:

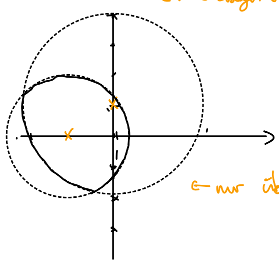
$$M_4 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - i| \leq 3 \wedge |2z + 3| \leq 4 \}$$

↓ :2 rechnen, alles komplett, da man keinen Vorfaktor vor der Zahl haben will

$$= \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - i| \leq 3 \wedge |z + \tfrac{3}{2}| \leq 2 \}$$

↑ $-\frac{3}{2}$ ohne Betrag zum einzeichnen, auf Realabschnitt

↑ $z + i$ sozusagen ohne Betrag zum einzeichnen



← nur Überschneidung der beiden Kreise zählt, inklusive der Ränder

Mögliche Aufgaben komplexe Zahlen:

Bestimmen sie a_3, a_2, a_1, a_0 über die Nullstellen z_1, z_2, z_3

Bereits gegeben:

$f(z) = a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$

$a_3 = 64$, z_1 ist reel und kleiner als 0,

$|z_1| = |z_2|$, z_2 ist rein imaginär,

$f(0) = 1$, $z_3 = \neg z_2$

$f(z) = 64z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + 1$ ← da $f(0)=1$ ergibt muss $a_0 = 1$ sein, $a_3 = 64$ schon gegeben

z_1 ist reel und kleiner als 0, d.h. $z_1 = c$ aus reelen Zahlen sehen

z_2 ist rein imaginär aber gleicher betrag also muss $z_2 = c \cdot i$ sein, da imaginär

z_3 ist $z_3 = \neg z_2$, d.h. einfach $z_3 = -c \cdot i$, also z_2, aber in negativ

↳ Substituierte Formel ist nun also:

$f(z) = 64 \cdot (z - c) \cdot (z - c \cdot i) \cdot (z + c \cdot i)$ ← da die z die Nullstellen angeben, muss hier mit der Nullstellenformel gearbeitet werden! Im Normalenfall wenn z. B. $x = 3$ die Nullstelle ist wird $(x-3)$ geschrieben!

$= 64 \cdot ((z - c) \cdot (z^2 - c^2 i^2))$

$= 64 \cdot (z^3 - c^2 \cdot i^2 \cdot z - z^2 c + c^3 \cdot i^2)$

$= 64 \cdot (z^3 - c z^2 + c^2 z - c^3)$ ← umgestellt und binomische Formel gelöst

$f(0) = 1$, also

$1 = 64 \cdot (0 - c \cdot 0 + c^2 \cdot 0 - c^3)$

$1 = 64 \cdot (-c^3) \quad | : (-64)$

$-\frac{1}{64} = c^3 \quad | \sqrt[3]{\ }$ ← bei Wurzel $\sqrt[3]{\ }$ sind negative Zahlen unter der Wurzel möglich

↳ $c = -\frac{1}{4}$ einsetzen in $f(z)$:

$f(z) = 64 \cdot (z^3 - (-\frac{1}{4}) z^2 + (-\frac{1}{4}^2) z - (-\frac{1}{4})^3$

$= 64z^3 + 16z^2 + 4z + 1$

Bestimmen sie die Koeffizienten des Polynoms p, sodass Polynom beide komplexe Nullstellen besitzt:

$p(z) = z^2 + a_1 z + a_0$

$z_{1,2} = 3 \pm 7i$

↳ da Nullstellen gegeben Linearfaktorenzerlegung anwenden, welche as Nullstellen beachtet:

$p(z) = (z - z_1)(z - z_2)$ ← linearfaktor ist dies immer die Grundschreibweise mit -

$= (z - 3 - 7i)(z - 3 + 7i)$ ← einsetzen der Nullstellen

$= z^2 - 3z + 7iz - 3z + 9 - 21i - 7iz + 21i - 49i^2$

$= z^2 - 6z + 58$