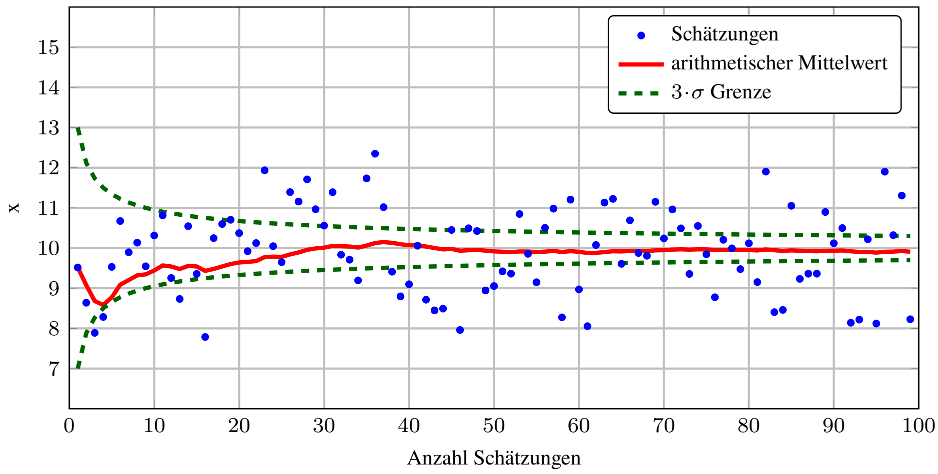
- *Lösung*:

Folie 1.10

Schätzung einer unbekannten Konstanten



Folie 1.11

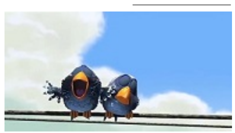
Verbesserung der Schätzungen einer unbekannten Konstanten

Überlegen Sie sich wie man die Datenfusion weiter verbessern kann?

Lösung/Ideen:

-
-
-

Folie 1.12



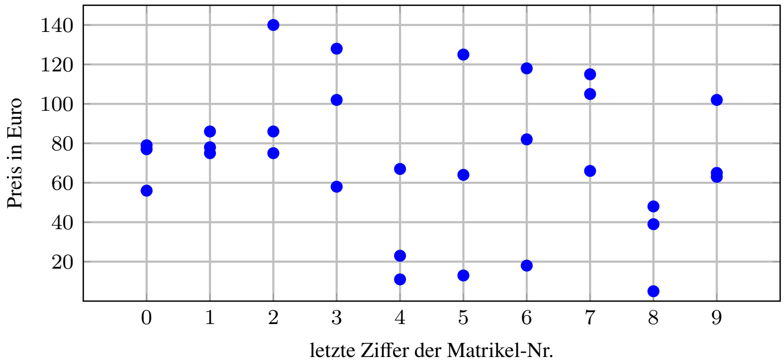
2.2 Beispiel Abhängigkeiten

Schätzung des Preises einer Weinflasche

1. Schreiben Sie bitte auf dem Zettel die letzte Ziffer Ihrer Matrikel-Nr. auf!
2. Schätzen Sie nun den Preis der Weinflasche

Folie 1.14

Theoretisches Ergebnis



Fragen:

- Macht es überhaupt Sinn die Matrikelnummer bei der Fusion des geschätzten Preises der Weinflasche zu verwenden?
- Unter welchen Voraussetzungen würde es Sinn machen und unter welchen nicht?

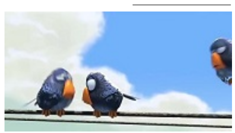
Folie 1.15

2.3 Beispiel Schätzung unbekannter Größen

Fragestellung

- Frage: Wie viel Klavierstimmer gibt es in Chicago?
- Schreiben Sie Ihre Schätzung auf einen Zettel.
- Lösungsansatz: Überlegen Sie sich eine Formel (Modell) mit der man die Anzahl der Klavierstimmer berechnen könnte.
- Schätzen Sie die in der Formel benötigten Größen ab und berechnen Sie mit der Formel die Anzahl der Klavierstimmer.

Folie 1.17



3.3 Momente und zentrale Momente

Charakterisierung von Zufallsexperimenten

- Es gibt eine *Vielzahl von Größen* die ein Zufallsexperiment *charakterisieren*.
- Neben der Charakterisierung mittels *Häufigkeitsverteilungen* existieren noch *Kennwerte*, die jedoch in *unvollständiger Weise* einen Zufallsprozess beschreiben.
- Zu diesen *Kennwerten* eines Zufallsexperiments zählen u. a.:
  -
  -
  -
  -

Folie 2.17

Erwartungswert

- Für eine Zufallsvariable X mit der Dichtefunktion $f_X(x)$ gilt für das *i-te Moment*:

$$\alpha_i = \mathrm{E}\left(X^i\right) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^i \cdot f_X(x)\, dx & \text{falls X stetig ist} \\ \sum_{k\in\mathbb{N}} x(k)^i \cdot f_X\left(x(k)\right) & \text{falls X diskret ist} \end{cases}$$

- Das wichtigste Moment stellt das *erste Moment* dar, welches auch als *Erwartungswert E(X)* der Zufallsvariable X bezeichnet wird.
- Für eine Zufallsvariable X mit der Dichtefunktion $f_X(x)$ gilt für den Erwartungswert:

$$\alpha = \mathrm{E}(X) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)\, dx & \text{falls X stetig ist} \\ \sum_{k\in\mathbb{N}} x(k) \cdot f_X\left(x(k)\right) & \text{falls X diskret ist} \end{cases}$$

Folie 2.18

Varianz

- Für eine Zufallsvariable X mit der Dichtefunktion $f_X(x)$ gilt für das *i-te zentrale Moment*:

$$\mu_i = \mathrm{E}\left(\left(X - \mathrm{E}(X)\right)^i\right) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(X - \mathrm{E}(X)\right)^i \cdot f_X(x)\, dx & \text{falls X stetig} \\ \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(x(k) - \mathrm{E}(X)\right)^i \cdot f_X\left(x(k)\right) & \text{falls X diskret} \end{cases}$$

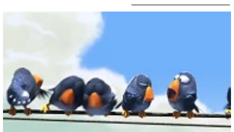
- Das wichtigste zentrale Moment stellt d. *zweite zentrale Moment* dar, welches auch als *Varianz* der Zufallsvariable X bezeichnet wird.
- Für eine Zufallsvariable X mit der Dichtefunktion $f_X(x)$ gilt für die Varianz:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}\left(\left(X - \mathrm{E}(X)\right)^2\right) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(X - \mathrm{E}(X)\right)^2 \cdot f_X(x)\, dx & \text{falls X stetig} \\ \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(x(k) - \mathrm{E}(X)\right)^2 \cdot f_X\left(x(k)\right) & \text{falls X diskret} \end{cases}$$

- Die Streuung oder Standardabweichung einer Zufallsvariable X ist definiert durch:

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$$

Folie 2.19



- Oft behilft man sich, indem man den Erwartungswert durch eine Mittelwertbildung annähert.
- Der *Mittelwert* einer Zahlenfolge $x(k)$ berechnet sich durch:

$$\boxed{\overline{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x(i)}$$

- Der Mittelwert entspricht genau dann dem Erwartungswert, wenn die gesamte *Population* vorhanden ist.
- Da selten die gesamte Population vorhanden ist, muss man sich mit einer *Stichprobe* genügen.
- Je repräsentativer die Stichprobe, die Gesamtpopulation entspricht, desto mehr entspricht der Mittelwert (geschätzter Erwartungswert) dem Erwartungswert.

Folie 2.24

Frage zum Mittelwert

Frage: Darf die Formel für die Mittelwertbildung auch bei *nicht gleichverteilten Dichtefunktionen* verwendet werden?

- Allgemein berechnet sich der *Erwartungswert* mit:

$$\alpha = \mathrm{E}\left(X\right) = \sum\nolimits_{k \in \mathbb{N}} x(k) \cdot f_X\big(x(k)\big)$$

- Der *Mittelwert* einer Zahlenfolge $x(k)$ berechnet sich durch:

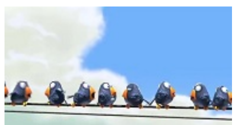
$$\overline{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x(i)$$

Antwort:

Folie 2.25

Erwartungstreue Schätzer: Mittelwert

- **Frage: Ist der Mittelwert und die Varianz** *erwartungstreu*?
- *Erwartungstreu* bezeichnet man die Eigenschaft, wenn der Erwartungswert eines Schätzers gleich dem wahren Wert des zu schätzenden Parameters ist.
- Ist $x(k)$ die Ausprägung der unabhängig identisch verteilten Zufallsvariablen $X(k)$ mit der Varianz σ^2 und dem Mittelwert α der Grundgesamtheit, so gilt: $\alpha = \mathrm{E}\left(X(k)\right)$



$$\mathrm{E}\left(\overline{X}\right) = \mathrm{E}\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\mathrm{E}\left(X_k\right) = \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\alpha = \frac{1}{n}\cdot n\cdot\alpha = \alpha$$

- Folglich ist der Mittelwert ein *erwartungstreuer Schätzer*.

Folie 2.26

Erwartungstreue Schätzer: Varianz s_0^2

- Es gilt $\sigma^2 = \mathrm{Var}\left(X(k)\right) = \mathrm{E}\left((X(k) - \mathrm{E}(X))^2\right) = \mathrm{E}\left((X(k) - \alpha)^2\right)$.
- Definiert man für die Varianz einer Stichprobe: $s_0^2 = \frac{1}{n}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}\left(X(k) - \alpha\right)^2$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(s_0^2\right) &= \mathrm{E}\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(X(k) - \alpha\right)^2\right) = \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\underbrace{\mathrm{E}\left(\left(X(k) - \alpha\right)^2\right)}_{\sigma^2} \\
&= \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\sigma^2 = \frac{1}{n}\cdot n\cdot\sigma^2 = \sigma^2
\end{aligned}$$

- Folglich ist die Varianz ein *erwartungstreuer Schätzer*.

Folie 2.27

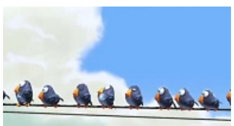
Erwartungstreue Schätzer: Varianz s_1^2

- Es gilt $\sigma^2 = \mathrm{Var}\left(X(k)\right) = \mathrm{E}\left((X(k) - \mathrm{E}(X))^2\right) = \mathrm{E}\left((X(k) - \alpha)^2\right)$.
- Definiert man für die Varianz einer Stichprobe: $s_1^2 = \frac{1}{n}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}\left(X(k) - \overline{X}\right)^2$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(s_1^2\right) &= \mathrm{E}\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(X(k) - \overline{X}\right)^2\right) = \frac{1}{n}\cdot\mathrm{E}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(X(k) - \alpha + \alpha - \overline{X}\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{n}\cdot\mathrm{E}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\left(X(k) - \alpha\right)^2 - 2\cdot\left(X(k) - \alpha\right)\cdot\left(\overline{X} - \alpha\right) + \left(\overline{X} - \alpha\right)^2\right)\right) \\
&= \frac{1}{n}\cdot\mathrm{E}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(X(k) - \alpha\right)^2 - 2\cdot\left(\overline{X} - \alpha\right)\cdot\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\left(X(k) - \alpha\right)}_{n\cdot\left(\overline{X} - \alpha\right)} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\left(\overline{X} - \alpha\right)^2}_{n\cdot\left(\overline{X} - \alpha\right)^2}\right) \\
&= \frac{1}{n}\cdot\mathrm{E}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(X(k) - \alpha\right)^2 - n\cdot\left(\overline{X} - \alpha\right)^2\right) \\
&= \underbrace{\mathrm{E}\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(X(k) - \alpha\right)^2\right)}_{\mathrm{E}\left(s_0^2\right) = \sigma^2} - \underbrace{\mathrm{E}\left(\left(\overline{X} - \alpha\right)^2\right)}_{\mathrm{Var}\left(\overline{X}\right) = \frac{\sigma^2}{n}\ \text{siehe Folie I.10}} = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} = \frac{n-1}{n}\cdot\sigma^2
\end{aligned}$$

- Folglich ist die Varianz s_1^2 *kein erwartungstreuer Schätzer*.

Folie 2.28



Steuerbarkeit

- Der Vollständigkeit halber ist erwähnt, dass es neben der Beobachtbarkeit auch die *Steuerbarkeit* eines System gibt. Diese ist jedoch für d. *Datenfusion* von *keiner Bedeutung* .
- Ein lineares zeitinvariantes System, im Zustandsraum ist vollständig *steuerbar*, wenn es möglich ist, innerhalb eines endlichen Intervalls $[t_0, t_1]$, aus *geeignete Eingangsgrößen* $\underline{u}(t)$ jeden *Anfangszustand* des Zustandsvektors $\underline{\mathbf{x}}(\mathbf{t_0})$ in jeden *Zustand* $\underline{\mathbf{x}}(\mathbf{t_1})$ zu überführen [1].
- Nach Kalman gilt: Ein lineares zeitinvariantes System der *Ordnung n* ist *steuerbar*, wenn die *Steuerbarkeitsmatrix* S_S

  $$\underline{S}_S = \begin{bmatrix} \underline{B}, & \underline{A}\cdot\underline{B}, & \underline{A}^2\cdot\underline{B}, & \ldots, & \underline{A}^{n-1}\cdot\underline{B} \end{bmatrix}$$

  den *Rang n* besitzt.

Folie 4.17

6.3 Zeitdiskrete Systeme

Lösung der Zustandsgleichung I

- Multipliziert man die Zustandsdifferentialgleichung $\underline{\dot{x}}(t) = \underline{A}\cdot\underline{x}(t) + \underline{B}\cdot\underline{u}(t)$ mit $e^{-\underline{A}\cdot t}$ folgt:

$$e^{-\underline{A}\cdot t}\cdot\underline{\dot{x}}(t) - e^{-\underline{A}\cdot t}\cdot\underline{A}\cdot\underline{x}(t) = e^{-\underline{A}\cdot t}\cdot\underline{B}\cdot\underline{u}(t) \tag{1}$$

- Leitet man $e^{-\underline{A}\cdot t}\cdot\underline{x}(t)$ ab, erhält man mithilfe der Produktregel $(g\cdot h)' = g'\cdot h + g\cdot h'$:

$$\frac{d}{dt}\Big(\underbrace{e^{-\underline{A}\cdot t}}_{g}\cdot\underbrace{\underline{x}(t)}_{h}\Big) = \underbrace{-\underline{A}\cdot e^{-\underline{A}\cdot t}}_{\dot{g}}\cdot\underbrace{\underline{x}(t)}_{h} + \underbrace{e^{-\underline{A}\cdot t}}_{g}\cdot\underbrace{\underline{\dot{x}}(t)}_{\dot{h}} \tag{2}$$

- Somit lässt sich die Gleichung (1) mit (2) schreiben:

$$\frac{d}{dt}\Big(e^{-\underline{A}\cdot t}\cdot\underline{x}(t)\Big) = e^{-\underline{A}\cdot t}\cdot\underline{B}\cdot\underline{u}(t) \tag{3}$$

- Durch Integration folgt:

$$\int_{t_0}^{t}\left(\frac{d}{d\tau}\Big(e^{-\underline{A}\cdot\tau}\cdot\underline{x}(\tau)\Big)\right)d\tau = \int_{t_0}^{t} e^{-\underline{A}\cdot\tau}\cdot\underline{B}\cdot\underline{u}(\tau)d\tau$$

$$e^{-\underline{A}\cdot t}\cdot\underline{x}(t) - e^{-\underline{A}\cdot t_0}\cdot\underline{x}(t_0) = \int_{t_0}^{t} e^{-\underline{A}\cdot\tau}\cdot\underline{B}\cdot\underline{u}(\tau)d\tau \tag{4}$$

Folie 4.19

Lösung der Zustandsgleichung II

- Gleichung (4) nach $\underline{x}(t)$ aufgelöst, ergibt:

$$\underline{x}(t) = \underbrace{e^{\underline{A}\cdot(t-t_0)}\cdot\underline{x}(t_0)}_{\text{homogene Lösung}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} e^{\underline{A}\cdot(t-\tau)}\cdot\underline{B}\cdot\underline{u}(\tau)d\tau}_{\text{partikuläre Lösung}} \tag{5}$$

- Tastet man das kontinuierliche Signal alle $t = n\cdot T_s$ $(n = 0, 1, 2, ...)$ Sekunden ab, folgt für die Anfangszeit $t_0 = 0$ und $t = n\cdot T_s$ mit $n = 0, 1, 2, ...$:

$$\underline{x}(n\cdot T_s) = e^{\underline{A}\cdot n\cdot T_s}\cdot\underline{x}(0) + \int_{0}^{n\cdot T_s} e^{\underline{A}\cdot(n\cdot T_s-\tau)}\cdot\underline{B}\cdot\underline{u}(\tau)\,d\tau \tag{6}$$

- Für $t = (n+1)\cdot T_s$ folgt:

$$\underline{x}\Big((n+1)\cdot T_s\Big) = e^{\underline{A}(n+1)\cdot T_s}\cdot\underline{x}(0) + \int_{0}^{(n+1)T_s} e^{\underline{A}\left((n+1)T_s-\tau\right)}\cdot\underline{B}\cdot\underline{u}(\tau)\,d\tau \tag{7}$$

Folie 4.20