

Apuntes MNA

Índice

1. Numeros complejos	2
1.1. Propiedades	2
1.2. Forma polar	2
1.2.1. Forma Polar Trigonométrica	2
1.2.2. Forma Polar Exponencial	2
1.2.3. Propiedades	2
1.3. Clasificación de las Transformaciones Lineales	11
1.4. Teorema de las dimensiones	11
1.5. Teorema	11
1.6. Teorema fundamental de las TL	12
1.7. Matriz Asociada a una Transformación Lineal	12
1.8. Diagonalización	14
1.8.1. Ventajas de matrices diagonales	14
1.9. Matrices Semejantes	14
1.10. Autovalores y Autovectores	14

1. Numeros complejos

$$i^{2n} = (-1)^n, \quad i^{2n+1} = (-1)^n i$$

1.1. Propiedades

- Sea $z = a_z + ib_z$, se cumple que:

$$z^{-1} = \frac{a_z}{a_z^2 + b_z^2} - i \frac{b_z}{a_z^2 + b_z^2}$$

- \mathbb{C} es un cuerpo no ordenado.
- El **conjugado** de $z = a + bi$ es $\bar{z} = a - bi$

1.2. Forma polar

$$z = a + ib = \left(\underbrace{\sqrt{a^2 + b^2}}_{\rho}, \underbrace{\arg(z)}_{\theta} \right) = (\rho, \theta) \text{ donde } |\arg(z)| = \arctan(b/a)$$

1.2.1. Forma Polar Trigonométrica

$$z = \rho \cos(\theta) + i\rho \sin(\theta)$$

1.2.2. Forma Polar Exponencial

$$z = \rho e^{i\theta}$$

1.2.3. Propiedades

- $\arg(z w) = \arg(z) + \arg(w)$
- $\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \arg(z) - \arg(w)$
- $\arg(z^n) = n \arg(z)$
- $\arg(z^{-1}) = -\arg(z)$
- $z^n = |z|^n e^{i n \arg(z)}$ con $n \in \mathbb{N}$
- El **conjugado** de $z = (\rho, \theta)$ es $\bar{z} = (\rho, -\theta)$

Propiedades del conjugado

- $z = \bar{z} \iff \operatorname{Im}(z) = 0$
- $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
- $\overline{z \bar{w}} = \bar{z} w$
- $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$
- $z \bar{z} = |z|^2$
- $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$
- $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z)$
- $|z| = |\bar{z}|$

Radicación

Sea $w^n = z$ con $n \in \mathbb{N}$, se deduce que:

$$w_k = \sqrt[n]{\rho} e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}, \quad k \in \{0, \dots, n-1\}$$

Logaritmación

Sea $e^w = z \iff w = \ln(z)$, las soluciones son:

$$w_k = \ln |z| + i(\arg(z) + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$$

A veces se trabaja en el valor principal del logaritmo dado por:

$$w_0 = \ln |z| + i \arg(z)$$

Potencia compleja

$$z^w = e^{w \ln z}$$

Matrices

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} \in K = \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$$

- Notación: $A = (a_{ij})_{ij}$. Se interpreta como decir que el elemento dentro de los paréntesis a_{ij} se inserta en la posición ij de la matriz resultante.

- Vector fila: $F_k = (a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn})$

- Vector columna: $C_k = \begin{pmatrix} a_{k1} \\ a_{k2} \\ \vdots \\ a_{kn} \end{pmatrix}$

Matriz transpuesta

$$A^T = (a_{ji})_{ij}$$

Notación: A^T, A^t, A^*, A'

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -12 & 7 \\ 8 & 4 & -2 \end{pmatrix} \implies A^T = \begin{pmatrix} 11 & 8 \\ -12 & 4 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$$

Propiedades:

- $(A^T)^T = A$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(\lambda A)^T = \lambda A^T$
- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

Matriz Simétrica

Solo definido para matrices cuadradas. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es simétrica $\iff A = A^T \iff a_{ij} = a_{ji} \forall i, j \leq n$

Observación: Si $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, quedan definidas $A \cdot A^T$ y $A^T \cdot A$ que con **cuadradas** y **simétricas**.

Matriz Antisimétrica

Definido sólo para matrices cuadradas. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es simétrica $\iff a_{ij} = -a_{ji} \implies a_{kk} = 0$

Traza

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \text{Suma diagonal}$$

Propiedades:

- $Tr(A + B) = Tr(A) + Tr(B)$
- $Tr(\lambda A) = \lambda Tr(A)$
- En general: $Tr(A \cdot B) \neq Tr(A) \cdot Tr(B)$

Matrices especiales

Definido para matrices cuadradas únicamente:

- Matriz triangular superior:
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

- Matriz triangular inferior:
$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

- Matriz diagonal:
$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

- Matriz escalar: es una matriz diagonal con todos los valores iguales.
$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

- Matriz identidad ($I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$):
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Propiedad: Para toda $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$

Matriz Inversa

Sea $A \in K^{n \times n}$, si existe $B \in K^{n \times n}$ tal que:

$$A \cdot B = B \cdot A = I \implies A \text{ es inversible}$$

Notación: $B = A^{-1}$. No siempre existe la inversa de una matriz. **Propiedades:**

- Es única
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(k.A) = \frac{1}{k}A^{-1}$
- $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

Definiciones

- Si existe A^{-1} , se dice que A es **regular o inversible**.
- Si no existe A^{-1} se dice que A es **singular o no inversible**.
- A es **ortogonal** $\iff A^{-1} = A^T \iff A^T \cdot A = I$

Determinantes

Notación: $d(A) = \det(A)$ **Propiedades:** Sea $A = (A_1, \dots, A_n) \in K^{n \times n}$:

- $d(I) = 1$
- Si existe $j \mid A_j = A_{j+1} \implies d(A) = 0$
- Si $A'_j = \alpha A_j \implies d(A_1, \dots, A'_j, \dots, A_n) = \alpha \cdot d(A_1, \dots, A_n)$

Ejemplo:

$$\det \left(\begin{pmatrix} a_{11} & 2a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 2a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & 2a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \right) = 2 \cdot \det \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \right)$$

- Si $A_j = B_j + C_j \implies \det(A_1, \dots, A_n) = \det(A_1, \dots, B_j, \dots, A_n) + \det(A_1, \dots, C_j, \dots, A_n)$

Ejemplo:

$$\det \left(\begin{pmatrix} a_{11} & b_{12} + c_{12} & a_{13} \\ a_{21} & b_{22} + c_{22} & a_{23} \\ a_{31} & b_{32} + c_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \right) = \det \left(\begin{pmatrix} a_{11} & b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & b_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \right) + \det \left(\begin{pmatrix} a_{11} & c_{12} & a_{13} \\ a_{21} & c_{22} & a_{23} \\ a_{31} & c_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \right)$$

Cálculo de determinantes

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

El determinante de A se calcula como:

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Para el caso de una matriz $B \in K^{3 \times 3}$:

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

El cálculo de hace de la siguiente forma:

$$\det(B) = a_{11} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

En general, el signo de cada factor es $(-1)^{i+j}$.

Propiedad

$$A \text{ es regular} \iff \det(A) \neq 0$$

Espacios vectoriales

Sea un cuerpo $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, un espacio vectorial es una cuaterna de la forma (V, \oplus, K, \otimes) donde:

- $\oplus : V \times V \rightarrow V$
 - $u + (v + w) = (u + v) + w$
 - Existe elemento neutro $n \in V \mid n + v = v + n = v$
 - Existe elemento opuesto $-v \forall v \in V \mid v + (-v) = n$
- $\otimes : K \times V \rightarrow V$
 - $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$
 - $\lambda(\beta v) = (\lambda\beta)v$
 - Sea $1 \in K$ el neutro multiplicativo $\implies 1.v = v$
 - Sea $0 \in K$ el elemento nulo $\implies 0.v = \mathbf{0} \in V$

Subespacios

Sea V espacio vectorial y $S \subseteq V$. Decimos que S es un **subespacio vectorial** si:

1. $\forall u, v \in S : (u + v) \in S$
2. $\forall v \in S, \lambda \in K : (\lambda.v) \in S$

Combinación lineal

Sea (V, \oplus, K, \otimes) un espacio vectorial, y sea $A = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$. Decimos que $v \in V$ es una **combinación lineal de A** si existen $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ tales que:

$$v = \alpha_1.v_1 + \dots + \alpha_n.v_n$$

- A es **linealmente dependiente (LD)** si:

$$\exists \alpha_i \neq 0 \mid \alpha_1.v_1 + \dots + \alpha_n.v_n = 0$$

- A es **linealmente independiente (LI)** si:

$$\alpha_1.v_1 + \dots + \alpha_n.v_n = 0 \iff \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$$

Subespacio generado

Se define como **subespacio generado por** A al conjunto de todas las combinaciones lineales de A .

$$A = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot v_i \mid \alpha_i \in K \right\}$$

Notación: $\langle A \rangle, \text{gen}(A)$

Base y Dimensión

Sea (V, \oplus, K, \otimes) un espacio vectorial y $B = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$. Decimos que B es una **base de** V si:

1. Es **linealmente independiente (LI)**.
2. Genera V , es decir: $\text{gen}(B) = V$

Definición: Se define como **dimensión de** V **un espacio vectorial** al cardinal de una base de V . Notación: $\dim(V)$

Proposición

Todo espacio vectorial tiene infinitas bases pero todas tienen el mismo cardinal.

Propiedades

Sean $S, T \subseteq V$ subespacios entonces:

- $S \subseteq T \implies \dim(S) \leq \dim(T)$
- $S \subseteq T \wedge \dim(S) = \dim(T) \implies S = T$

Coordenadas de un vector en una Base

Sea (V, \oplus, K, \otimes) un espacio vectorial, $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V . Sea $v \in V$, sabemos que existen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tal que:

$$v = \alpha_1 \cdot v_1 + \dots + \alpha_n \cdot v_n$$

A los escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ se los llama **coordenadas de** V **en la base** B y se suele usar el vector $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

Notación: $[v]_B = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

Transformaciones lineales

La idea es definir una función entre espacios vectoriales pero que preserve estructura.

Sea V, W espacios vectoriales. Una transformación lineal es una función $T : V \rightarrow W$ que cumple:

1. $T(v_1 + v_2) = Tv_1 + Tv_2$
2. $T(\lambda v) = \lambda.T(v)$

Núcleo de una TL

Se define como **núcleo de una TL** $T : V \rightarrow W$ al conjunto: $N(T) = \{v \in V \mid T(v) = 0_W\}$

Proposición: $N(T)$ es un subespacio vectorial.

Imagen de una TL

Se define como **Imagen de T** a: $R(T) = \{T(v) \mid v \in V\}$

1.3. Clasificación de las Transformaciones Lineales

- $T : V \rightarrow W$ es **inyectiva** si dados $v_1, v_2 \in V : T(v_1) = T(v_2) \implies v_1 = v_2$

Proposición: T es inyectiva $\iff N(T) = \{0\}$

- $T : V \rightarrow W$ es **sobreyectiva** si $R(T) = W$

Recordar: $S \subseteq T \wedge \dim(S) = \dim(T) \implies S = T$

- T es **biyectiva (isomorfismo)** si es inyectiva y sobreyectiva.

1.4. Teorema de las dimensiones

Sea V espacio vectorial de dimensión finita y $T : V \rightarrow W$ una TL con $R(T)$ de dimensión finita:

$$\dim(V) = \dim(N(T)) + \dim(R(T))$$

1.5. Teorema

Si $T : V \rightarrow W$ y $\dim(V) = \dim(W)$, entonces:

$$T \text{ es Monoformismo} \iff T \text{ es Epimorfismo} \iff T \text{ es Isomorfismo}$$

1.6. Teorema fundamental de las TL

Sea V, W dos espacios vectoriales. Sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V y $A = \{w_1, \dots, w_n\} \subseteq W$. Entonces existe una única transformación lineal $T : V \rightarrow W$ que cumple:

$$T(v_1) = w_1, \dots, T(v_n) = w_n$$

1.7. Matriz Asociada a una Transformación Lineal

Sea $T : V \rightarrow W$ una TL, existe un $\tilde{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ con $n = \dim(V)$ y $m = \dim(W)$

Consideremos $B_V = \{v_1, \dots, v_n\}, B_W = \{w_1, \dots, w_n\}$ bases de V y W respectivamente:

- Dado $v \in V$, existe:

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) / v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

- Dado $w \in W$, existe:

$$(\beta_1, \dots, \beta_m) / w = \beta_1 w_1 + \dots + \beta_m w_m$$

- Además:

$$T(v_i) = a_{i1} w_1 + \dots + a_{im} w_m$$

Es decir:

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_A \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \text{ que equivale a decir: } [T(v)]_{B_W} = A \cdot [v]_{B_V}$$

A la matriz A se la llama **Matriz asociada a la Transformación en las bases B_V y B_W**

Notación: $A = M(T)_{B_V B_W}$

Informalmente:

”Todas las TL entre espacios de dim. finita son de la forma $T(X) = A \cdot X$ ”

Sea $T : V \rightarrow W$, con $B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $B_W = \{w_1, \dots, w_m\}$ notar:

$$M(T)_{B_V B_W} = \begin{pmatrix} [T(v_1)]_{B_W} & \cdots & [T(v_n)]_{B_W} \end{pmatrix}$$

Autovalores y Autovectores

1.8. Diagonalización

Una **matriz diagonal** (solo aplica a matrices cuadradas) tiene la siguiente forma:

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

1.8.1. Ventajas de matrices diagonales

1. Sistemas de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \implies b_1 = a_{11}x, b_2 = a_{22}y, b_3 = a_{33}z$$

2. Cálculo Funcional:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, D \text{ diagonal} \implies f(D) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$$D^2 = \begin{pmatrix} a_{11}^2 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}^2 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}^2 \end{pmatrix}$$

1.9. Matrices Semejantes

Sean $A, B \in K^{n \times n}$, se dice que A es **semejante a** B si ocurre que:

$$\exists P \in K^{n \times n} / B = P^{-1} \cdot A \cdot P \iff A = P \cdot B \cdot P^{-1}.$$

A P se le llama **Matriz Cambio de Base**.

1.10. Autovalores y Autovectores

Sea $A \in K^{n \times n}$. Se dice que $X \in K^n - \{0\}$ es **autovector de** A , si existe $\lambda \in K$ tal que:

$$A \cdot X = \lambda \cdot X$$

Al escalar λ se lo llama **autovalor asociado al autovector** X .

A $\langle A \cdot X \rangle = \langle X \rangle$ se los llama **subespacios invariantes**.