# Apuntes MNA

# Índice

# 1. Numeros complejos

$$i^{2n} = (-1)^n, \quad i^{2n+1} = (-1)^n i$$

## 1.1. Propiedades

- Sea $z = a_z + ib_z$, se cumple que:

$$z^{-1} = \frac{a_z}{a_z^2 + b_z^2} - i\frac{b_z}{a_z^2 + b_z^2}$$

- $\mathbb{C}$ es un cuerpo no ordenado.
- El **conjugado** de $z = a + bi$ es $\overline{z} = a - bi$

## 1.2. Forma polar

$$z = a + ib = \left(\underbrace{\sqrt{a^2 + b^2}}_{\rho}, \underbrace{arg(z)}_{\theta}\right) = (\rho, \theta) \text{ donde } |arg(z)| = \operatorname{arc\,tg}(b/a)$$

### 1.2.1. Forma Polar Trigonométrica

$$z = \rho\cos(\theta) + i\rho\sin(\theta)$$

### 1.2.2. Forma Polar Exponencial

$$z = \rho\, e^{i\theta}$$

### 1.2.3. Propiedades

- $\arg(z\ w) = \arg(z) + \arg(w)$
- $\arg(\frac{z}{w}) = \arg(z) - \arg(w)$
- $\arg(z^n) = n\ \arg(z)$
- $\arg(z^{-1}) = -\arg(z)$
- $z^n = |z|^n\ e^{i\ n\ \arg(z)}$ con $n \in \mathbb{N}$
- El **conjugado** de $z = (\rho, \theta)$ es $\overline{z} = (\rho, -\theta)$

**Propiedades del conjugado**

- $z = \overline{z} \iff Im(z) = 0$
- $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$
- $\overline{z\,w} = \overline{z}\,\overline{w}$
- $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$
- $z\,\overline{z} = |z|^2$
- $z + \overline{z} = 2Re(z)$
- $z - \overline{z} = 2\,i\,Im(z)$
- $|z| = |\overline{z}|$

**Radicación**

Sea $w^n = z$ con $n \in \mathbb{N}$, se deduce que:

$$w_k = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}, \quad k \in \{0, \ldots, n-1\}$$

**Logaritmación**

Sea $e^w = z \iff w = \ln(z)$, las soluciones son:

$$w_k = \ln|z| + i(\arg(z) + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$$

A veces se trabaja en el valor principal del logaritmo dado por:

$$w_0 = \ln|z| + i\arg(z)$$

**Potencia compleja**

$$z^w = e^{w \ln z}$$

## Matrices

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} \in K = \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$$

- Notación: $A = (a_{ij})_{ij}$. Se interpreta como decir que el elemento dentro de los paréntesis $a_{ij}$ se inserta en la posición $ij$ de la matriz resultante.
- Vector fila: $F_k = (a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn})$
- Vector columna: $C_k = \begin{pmatrix} a_{k1} \\ a_{k2} \\ \vdots \\ a_{kn} \end{pmatrix}$

### Matriz transpuesta

$$A^T = (a_{ji})_{ij}$$

Notación: $A^T, A^t, A^*, A'$

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -12 & 7 \\ 8 & 4 & -2 \end{pmatrix} \implies A^T = \begin{pmatrix} 11 & 8 \\ -12 & 4 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$$

**Propiedades:**

- $(A^T)^T = A$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(\lambda A)^T = \lambda\, A^T$
- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

### Matriz Simétrica

Solo definido para matrices cuadradas. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es simétrica $\iff A = A^T \iff a_{ij} = a_{ji}\ \forall i, j \leq n$

**Observación:** Si $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, quedan definidas $A \cdot A^T$ y $A^T \cdot A$ que con **cuadradas** y **simétricas**.

**Matriz Antisimétrica**

Definido sólo para matrices cuadradas. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es simétrica $\iff a_{ij} = -a_{ji} \implies a_{kk} = 0$

**Traza**

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = Suma\ diagonal$$

**Propiedades:**

- $Tr(A + B) = Tr(A) + Tr(B)$
- $Tr(\lambda) = \lambda\, Tr(A)$
- En general: $Tr(A \cdot B) \neq Tr(A).Tr(B)$

**Matrices especiales**

Definido para matrices cuadradas únicamente:

- Matriz triangular superior: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$
- Matriz triangular inferior: $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$
- Matriz diagonal: $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$
- Matriz escalar: es una matriz diagonal con todos los valores iguales. $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$
- Matriz identidad ($I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$): $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

**Propiedad:** Para toda $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\quad A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$

**Matriz Inversa**

Sea $A \in K^{n\times n}$, si existe $B \in K^{n\times n}$ tal que:

$$A \cdot B = B \cdot A = I \implies A \text{ es inversible}$$

Notación: $B = A^{-1}$. No siempre existe la inversa de una matriz. **Propiedades:**

- Es única
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(k.A) = \frac{1}{k}A^{-1}$
- $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

**Definiciones**

- Si existe $A^{-1}$, se dice que $A$ **es regular o inversible**.
- Si no existe $A^{-1}$ se dice que $A$ es **singular o no inversible**.
- $A$ es **ortogonal** $\iff A^{-1} = A^T \iff A^T \cdot A = I$

# Determinantes

Notación: $d(A) = det(A)$ **Propiedades:** Sea $A = (A_1, \dots, A_n) \in K^{n \times n}$:

- $d(I) = 1$
- Si existe $j \left| A_j = A_{j+1} \implies d(A) = 0\right.$
- Si $A'_j = \alpha A_j \implies d(A_1, \dots, A'_j, \dots, A_n) = \alpha.d(A_1, \dots, A_n)$

  Ejemplo:

$$det\left(\begin{pmatrix} a_{11} & 2.a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 2.a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & 2.a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\right) = 2.det\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\right)$$

- Si $A_j = B_j + C_j \implies det\,(A_1, \dots, A_n) = det\,(A_1, \dots, B_j, \dots, A_n) + det\,(A_1, \dots, C_j, \dots, A_n)$
  Ejemplo:

$$det\left(\begin{pmatrix} a_{11} & b_{12}+c_{12} & a_{13} \\ a_{21} & b_{22}+c_{22} & a_{23} \\ a_{31} & b_{32}+c_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\right) = det\left(\begin{pmatrix} a_{11} & b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & b_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\right) + det\left(\begin{pmatrix} a_{11} & c_{12} & a_{13} \\ a_{21} & c_{22} & a_{23} \\ a_{31} & c_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\right)$$

**Cálculo de determinantes**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

El determinante de $A$ se calcula como:

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Para el caso de una matriz $B \in K^{3 \times 3}$:

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

El cálculo de hace de la siguiente forma:

$$\det(B) = a_{11} \cdot \det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12} \cdot \det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13} \cdot \det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

En general, el signo de cada factor es $(-1)^{i+j}$.

**Propiedad**

$$A \text{ es regular} \iff det(A) \neq 0$$

# Espacios vectoriales

Sea un cuerpo $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, un espacio vectorial es una cuaterna de la forma $(V, \oplus, K, \otimes)$ donde:

- $\oplus : V \times V \to V$
  - $u + (v + w) = (u + v) + w$
  - Existe elemento neutro $n \in V \mid n + v = v + n = v$
  - Existe elemento opuesto $-v \forall v \in V \mid v + (-v) = n$
- $\otimes : K \times V \to V$
  - $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$
  - $\lambda(\beta v) = (\lambda\beta)v$
  - Sea $1 \in K$ el neutro multiplicativo $\implies 1.v = v$
  - Sea $0 \in K$ el elemento nulo $\implies 0.v = \mathbf{0} \in V$

## Subespacios

Sea $V$ espacio vectorial y $S \subseteq V$. Decimos que $S$ es un **subespacio vectorial** si:

1. $\forall u, v \in S : (u + v) \in S$
2. $\forall v \in S, \lambda \in K : (\lambda.v) \in S$

### Combinación lineal

Sea $(V, \oplus, K, \otimes)$ un espacio vectorial, y sea $A = \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$. Decimos que $v \in V$ es una **combinación lineal de A** si existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ tales que:

$$v = \alpha_1.v_1 + \cdots + \alpha_n.v_n$$

- $A$ es **linealmente dependiente (LD)** si:

$$\exists \alpha_i \neq 0 \setminus \alpha_1.v_1 + \cdots + \alpha_n.v_n = 0$$

- $A$ es **linealmente independiente (LI)** si:

$$\alpha_1.v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0 \iff \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$$

### Subespacio generado

Se define como **subespacio generado por** $A$ al conjunto de todas las combinaciones lineales de A.

$$A = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i . v_i \setminus \alpha_i \in K \right\}$$

Notación: $\langle A \rangle , gen(A)$

### Base y Dimensión

Sea $(V, \oplus, K, \otimes)$ un espacio vectorial y $B = \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$. Decimos que $B$ es una **base de** $V$ si:

1. Es **linealmente independiente (LI)**.
2. Genera $V$, es decir: $gen(B) = V$

**Definición:** Se define como **dimensión de** $V$ **un espacio vectorial** al cardinal de una base de $V$. Notación: $dim(V)$

### Proposición

Todo espacio vectorial tiene infinitas bases pero todas tienen el mismo cardinal.

### Propiedades

Sean $S, T \subseteq V$ subsespacios entonces:

- $S \subseteq T \implies dim(S) \leq dim(T)$
- $S \subseteq T \ \wedge \ dim(S) = dim(T) \implies S = T$

### Coordenadas de un bector en una Base

Sea $(V, \oplus, K, \otimes)$ un espacio vectorial, $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de $V$. Sea $v \in V$, sabemos que existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tal que:

$$v = \alpha_1 . v_1 + \cdots + \alpha_n . v_n$$

A los escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ se los llama **coordenadas de** $V$ **en la base** $B$ y se suele usar el vector $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$

Notación: $[v]_B = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$