

Apuntes MNA

Índice

1. Numeros complejos	2
1.1. Propiedades	2
1.2. Forma polar	2
1.2.1. Forma Polar Trigonométrica	2
1.2.2. Forma Polar Exponencial	2
1.2.3. Propiedades	2

1. Numeros complejos

$$i^{2n} = (-1)^n, \quad i^{2n+1} = (-1)^n i$$

1.1. Propiedades

- Sea $z = a_z + ib_z$, se cumple que:

$$z^{-1} = \frac{a_z}{a_z^2 + b_z^2} - i \frac{b_z}{a_z^2 + b_z^2}$$

- \mathbb{C} es un cuerpo no ordenado.
- El **conjugado** de $z = a + bi$ es $\bar{z} = a - bi$

1.2. Forma polar

$$z = a + ib = \left(\underbrace{\sqrt{a^2 + b^2}}_{\rho} \underbrace{\arg(z)}_{\theta} \right) = (\rho, \theta), \text{ donde } |\arg(z)| = \arctan(b/a)$$

1.2.1. Forma Polar Trigonométrica

$$z = \rho \cos(\theta) + i\rho \sin(\theta)$$

1.2.2. Forma Polar Exponencial

$$z = \rho e^{i\theta}$$

1.2.3. Propiedades

- $\arg(z w) = \arg(z) + \arg(w)$
- $\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \arg(z) - \arg(w)$
- $\arg(z^n) = n \arg(z)$
- $\arg(z^{-1}) = -\arg(z)$
- $z^n = |z|^n e^{i n \arg(z)}$ con $n \in \mathbb{N}$
- El **conjugado** de $z = (\rho, \theta)$ es $\bar{z} = (\rho, -\theta)$

Propiedades del conjugado

- $z = \bar{z} \iff \operatorname{Im}(z) = 0$
- $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
- $\overline{z \bar{w}} = \bar{z} w$
- $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$
- $z \bar{z} = |z|^2$
- $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$
- $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z)$
- $|z| = |\bar{z}|$

Radicación

Sea $w^n = z$ con $n \in \mathbb{N}$, se deduce que:

$$w_k = \sqrt[n]{\rho} e^{i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)}, \quad k \in \{0, \dots, n-1\}$$

Logaritmación

Sea $e^w = z$, las soluciones son:

$$w_k = \ln |z| + i(\arg(z) + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$$

A veces se trabaja en el valor principal del logaritmo dado por:

$$w_0 = \ln |z| + i \arg(z)$$

Potencia compleja

$$z^w = e^{w \ln z}$$