Estadistica Algebraica.
Draft 0.1

19 de octubre de 2022

Resumen

En este artículo, se van a repasar los fundamentos de la Geometría Algebraica y las variedades tóricas, y su relación con ciertos tipos de modelos estadísticos. Se explicara cómo utilizar estas herramientas algebraicas para describir un paseo aleatorio sobre un conjunto de tablas que comparten los mismos resultados estadísticos. Por último, se discutirá cómo los mismos ideales que definen las variedades tóricas también muestran que todo modelo estadístico tiene una base que conecta los datos observados con los datos relacionados.

Índice

1. Introducción.

La Geometría Algebraica proporciona una traducción entre ideales y variedades. La información geométrica sobre una variedad puede proporcionar un significado algebraico a través de su ideal correspondiente, y un ideal puede proporcionar información geométrica sobre su variedad. Este será el tema de la Sección 2.

En la Sección 3, se introduciran los conos y sus variedades tóricas asociadas a través de varias estructuras intermedias, incluyendo conos duales, monoides y anillos de coordenadas. Los generadores del monoide S_{sigma}, asociados a un cono racional σ, también proporcionan las relaciones binomiales de un ideal en el anillo polinomial sobre $\mathbb{C}$. Entonces, una variedad tórica afín asociada a un cono está definida por estos binomios.

En la sección 4 se estudiaran las bases de Markov. Son un vínculo importante entre el álgebra conmutativa y la estadística. Una base de Markov es un conjunto de vectores que nos permite generar tablas sintéticas a partir de una tabla observada. La muestra resultante de las tablas proporciona evidencia a favor o en contra de una hipótesis estadística propuesta. El Algoritmo de Metrópolis-Hastings describe un paseo aleatorio para probar una secuencia de tablas potenciales conectadas a la tabla observada mediante movimientos en la base de Markov. Además, los movimientos en una base de Markov pueden descomponerse para definir un ideal generado por binomios. El ideal tórico de una matriz asociada a un modelo log-lineal también está generado por binomios. El teorema fundamental de las bases de Markov, que establece que estos ideales son idénticos, garantiza que existe una base de Markov para cada modelo estadístico.

1.1. Background

Definición 0 : Un conjunto R junto con dos leyes de composición $+$ y $\cdot$ lo llamaremos anillo (con unidad) , si satisface las siguientes propiedades :

1. R es un grupo abeliano[1] con respecto a $+$. El correspondiente elemento cero es denotado por $0 \in R$.

2. $\cdot$ es asociativa i.e $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.

3. Existe un elemento unidad en R , el cual significa un elemento $1 \in R$ tal que $1 \cdot a = a = a \cdot 1$ para todo $a \in R$.

4. La multiplicación es distributiva sobre $+$ i.e para $a, b, c \in R$ tenemos : $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

, $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.
El anillo R lo llamaremos conmutativo si $\cdot$ es conmutativo.

Definición 1 : Sea $a \in R$ es llamado invertible o unidad si existe algún elemento $b \in R$ tal que $ab = 1 = ba$. Se sigue que el conjunto

$$R^* = \{a \in R : a \text{ es una unidad en } R\} .$$

sea un grupo con respecto a $\cdot$ dada en R.

Un elemento $a \in R$ es llamado divisor cero si existe un elemento $b \in R - \{0\}$ tal que $ab = 0$ o $ba = 0$. Además un anillo conmutativo $R \neq 0$[2] es llamado dominio entero si este no contiene divisores cero (no triviales) i.e si $ab = 0$ con $a, b \in R$ implica $a = 0$ o $b = 0$.

Definición 2 : Una función $\phi : R \to R'$ entre anillos es llamada homomorfismo de anillos[3] si para todo $a, b \in R$ las siguientes condiciones se satisfacen :

1. $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$.

2. $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$.

3. $\varphi(1) = 1$.

Los mono- , epi- , iso- , endo- y automorfismos de anillos los podemos definir de manera usual.

Sea $R' \subset R$, lo llamaremos un subanillo de R si $1 \in R'$ y si $a, b \in R' \Rightarrow a - b, a \cdot b \in R'$. Entonces R' es un anillo bajo $+$ y $\cdot$ heredadas de R. Cuando estemos dentro del álgebra conmutativa solo vamos a considerar anillos que sean conmutativos con unidad , por lo que usaremos el termino anillo para referirnos a este tipo de anillo (a menos que se mencione lo contrario).

Definición 3 : Sea R un anillo. Un subconjunto $\mathfrak{a} \subset R$ es llamando un ideal en R si :

1. $\mathfrak{a}$ es un subgrupo aditivo de R i.e $\mathfrak{a} \neq \varnothing$ y $a - b \in \mathfrak{a}$ para todo $a, b \in \mathfrak{a}$.

2. $ra \in \mathfrak{a}$ para todo $r \in R$ y $a \in \mathfrak{a}$.

Todo anillo R contiene ideales triviales , los cuales son el ideal cero 0 (consiste solo del elemento 0) y si mismo (también llamado ideal unitario). Para una familia $\{a_i\}_{i \in I}$ de elementos en R , podemos construir su ideal generado

$$\mathfrak{a} = \sum_{i \in I} Ra_i = \left\{ \sum_{i \in I} r_i a_i : r_i \in R, r_i = 0 \text{ para casi todo } i \in I \right\} .$$

[1] Dado un conjunto G con una operación que es asociativa , conmutativa , distributiva y con elemento neutro e inverso , es un grupo abeliano.

[2] mejor conocido como anillo trivial

[3] o morfismo de anillos.

Este es el ideal mas pequeño en R que contiene a todos los elementos $a_i, i \in I$. Si consideramos el índice I finito podemos escribir :

$$\mathfrak{a} = \sum_{i=0}^{n} Ra_i = (a_0, ..., a_n).$$

Además , un ideal $\mathfrak{a} \subset R$ es llamado finitamente generado si como antes , puede ser generado apartir de una cantidad finita de elementos (a este le llamamos generador). Un ideal $\mathfrak{a} \subset R$ se llama principal si es generado por un solo elemento , entonces si hay un elemento $a \in \mathfrak{a}$ tal que $\mathfrak{a} = (a)$ diremos que es principal. Todo dominio entero R se llama dominio ideal principal si todo ideal de R es principal.

Veamos otras formas de construir ideales mediante una familia de ideales $\{\mathfrak{a}_i\}_{i \in I}$:

- $\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i = \left\{\sum_{i \in I} a_i : a_i \in \mathfrak{a}_i, a_i = 0 \text{ para casi todo } i \in I\right\}$ es un ideal en R , y es llamado la suma de los ideales $\mathfrak{a}_i$.
- $\bigcap_{i \in I} \mathfrak{a}_i$ es un ideal en R.
- Si tenemos una coleccion finita de ideales $\mathfrak{a}_0, ..., \mathfrak{a}_n \subset R$ podemos construir su producto $\prod_{i=0}^{n} \mathfrak{a}_i$ el cual nuevamente es un ideal en R.

Proposición 0 : Sea $\varphi : R \to R'$ un morfismo de anillos. Entonces

$$\text{Ker}(\varphi) = \{r \in R : \varphi(r) = 0\}$$

es un ideal en R y $\text{im}(\varphi) = \varphi(R)$ es un subanillo de R'.

Dado un ideal $\mathfrak{a}$ en un anillo R , si queremos construir un homomorfismo suryectivo de anillos $\pi : R \to R'$ tal que $\text{Ker}(\pi) = \mathfrak{a}$. Para hacer esto , consideremos el conjunto $R/\mathfrak{a} = \{r + \mathfrak{a} : r \in R\}$ [4] donde $r + \mathfrak{a} = \{r + a : a \in \mathfrak{a}\}$ para todos las clases (aditivas) de $\mathfrak{a}$ en R y definimos las dos leyes de composición en ellas por : $(r + \mathfrak{a}) + (r' + \mathfrak{a}) := (r + r') + \mathfrak{a}$ y $(r + \mathfrak{a}) \cdot (r' + \mathfrak{a}) = (r \cdot r')(\mathfrak{a})$. Veamos que $\pi_R \to R/\mathfrak{a}$, $r \mapsto r + \mathfrak{a}$, es un homomorfismo suryectivo de anillos que satisface $\text{Ker}(\varphi) = \mathfrak{a}$ como buscabamos. Podemos caracterizar al anillo $R/\mathfrak{a}$ con el siguiente teorema :

Teorema fundamental de los homomorfismo : Sea $\varphi : R \to R'$ un morfismo de anillos y $\mathfrak{a} \subset R$ un ideal que satisface $\mathfrak{a} \subset \text{Ker}(\varphi)$. Entonces existe un único homorfismo de anillos $\bar{\varphi} : R/\mathfrak{a} \to R'$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r] \arrow[d, "\pi"'] & R' \\
R/\mathfrak{a} \arrow[ur, dotted, "\overline{\varphi}"'] &
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Además :

1. $\bar{\varphi}$ inyectivo $\Leftrightarrow \mathfrak{a} = \text{Ker}(\varphi)$.
2. $\bar{\varphi}$ suryectivo $\Leftrightarrow \varphi$ suryectivo.

Definición : Sea R un anillo.

1. Un ideal $\mathfrak{p} \subset R$ es llamado primo si $ab \in \mathfrak{p}$ implica $a \in \mathfrak{p}$ o $b \in \mathfrak{p}$, para cualquier $a, b \in R$.
2. Un ideal $\mathfrak{m} \subset R$ es llamado maximal si $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{a}$ implica $\mathfrak{m} = \mathfrak{a}$, para cualquier ideal propio $\mathfrak{a} \subset R$.

[4] anillo cociente

Proposición : Cualquier anillo $R \neq 0$ contiene un ideal maximal.

Corolario : Sea R un anillo y $\mathfrak{a} \subset R$ un ideal propio en R. Entonces existe un ideal maximal $\mathfrak{m} \subset R$ tal que $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}$.

Corolario : Sea R un anillo y $a \in R$ un anillo no unitario. Entonces existe un ideal $\mathfrak{m} \subset R$ tal que $a \in \mathfrak{a}$.

Para un anillo R el conjunto

$$\operatorname{Spec}(R) = \{\mathfrak{p} \subset R : \mathfrak{p} \text{ es un ideal primo en } R\}.$$

lo llamaremos el espectro primo de R. De igual manera el subconjunto

$$\operatorname{Spm}(R) = \{\mathfrak{m} \subset R : \mathfrak{m} \text{ es un ideal maximal en } R\}.$$

es llamado el espectro maximal de R.

Definición : Sea F un anillo en el cual todo elemento no cero tiene inverso bajo $\cdot$ lo llamaremos campo.

Definición : Un monomio de variables $x_1, ..., x_n$ es el producto $x^a = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}$ para un vector $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{N}^n$. Y un polinomio variables $x_1, .., x_n$ sobre un campo F es una combinación lineal finita de varios monomios , con coeficientes en F. O sea $f = \sum_{a \in A} c_a p^a$ donde A es un subconjunto finito de $\mathbb{N}^r$y cada coeficiente $c_a \in F$.

Sea $\mathbb{K}[x_1, .., x_n]$ el conjunto de todos los polinomios de variables $x_1, ..., x_n$ con coeficientes en $\mathbb{K}$. Este conjunto forma un anillo (considerando la suma y producto de polinomios usual). Cada polinomio puede ser pensado como una función multivaluada $\mathbb{K}^r \to \mathbb{K}$ por evaluación.

2. Generalidades sobre los anillos de coordenadas

El conjunto de todos los polinomios sobre un campo k forma un anillo. Recomiendo visualizar a lo largo de este texto $k = \mathbb{C}$.

Definition 2.1. Un polinomios f en n variables $x_1, \ldots, x_n$ con coeficientes k es la suma de un numero finito de monomios de la forma $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$:

$$f = \sum_\alpha \lambda_\alpha x^\alpha, \lambda_\alpha \in k.$$

El conjunto de todos los polinomios en $x_1, \ldots, x_n$ con coeficientes en k es el anillo de polinomios $k[x] = k[x_1, \ldots, x_n]$

Definition 2.2. El espacio afín n-dimensional[5] sobre k es el conjunto

$$k^n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1, \ldots, a_n \in k\}$$

Así que cada polinomio $f \in k[x]$ da una función $f : k^n \to k$. Tomando los polinomios $f_1, \ldots, f_t$ en $k[x]$. Este conjunto define una variedad afín[6] en k^n.

Definición 2.3. La variedad afín definida por $f_1, \ldots, f_t$ es

$$V(f_1, \ldots, f_t) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in k^n \mid f_i(a_1, \ldots, a_n) = 0, i = 1, \ldots, t\}.$$

Vamos a introducir los ideales , un tipo especial de anillo.

Definition 2.4. Un subconjunto $I \subset k[x]$ es un ideal si este satisface :

[5] No confundir con el espacio vectorial K^n sobre el campo k , este espacio viene equipado con la topología de Zariski.

[6] Si nos ponemos técnicos , en realidad esto es una cuasi-variedad afín , es necesario tener el lenguaje de los esquemas para poder definir apropiadamente una variedad.

1. $0 \in I$
2. Si $f, g \in I$, entonces $f + g \in I$
3. Si $f \in I$ y $h \in k[x]$, entonces $hf \in I$

Un ejemplo de esto es el ideal generado por un número finito de polinomios[7] :

Definition 2.5. Sea $f_1, \ldots, f_s \in k[x]$. Entonces definimos el ideal generado por $f_1, \ldots, f_s$ como

$$\langle f_1, \ldots, f_s \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{s} h_i f_i \mid h_1, \ldots, h_s \in k[x] \right\}$$

$\langle f_1, \ldots, f_s \rangle$ es un ideal por que si $f = \sum_{i=1}^{s} p_i f_i, g = \sum_{i=1}^{s} q_i f_i$, y $h \in k[x]$, esto cumple :

- $0 = \sum_{i=1}^{s} 0 \cdot f_i \in \langle f_1, \ldots, f_s \rangle$
- $f + g = \sum_{i=1}^{s} (p_i + q_i) f_i \in \langle f_1, \ldots, f_s \rangle$
- $hf = \sum_{i=1}^{s} (hp_i) f_i \in \langle f_1, \ldots, f_s \rangle$

Ahora podemos considerar el conjunto de todos los polinomios que se anulan en una variedad dada.

Definition 2.6. Sea $V \subset k^n$ una variedad . Definiremos el ideal de V como

$$I(V) = \{ f \in k[x] \mid f(a_1, \ldots, a_n) = 0, (a_1, \ldots, a_n) \in V \}$$

Podemos comprobar que $I(V)$ es un ideal. Sea $f, g \in I(V)$ y $h \in k[x]$. Por definición , $f(a_1, \ldots, a_n) = g(a_1, \ldots, a_n) = 0$ para todo $(a_1, \ldots, a_n)$ en V.

1. $0 \in I(V)$
2. $f + g \in I(V)$, dado $f(a_1, \ldots, a_n) + g(a_1, \ldots, a_n) = 0$ para $(a_1, \ldots, a_n) \in V$
3. $hf \in I(V)$, dado $h(a_1, \ldots, a_n) f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ para $(a_1, \ldots, a_n) \in V$

Ahora , ya vamos a tener una relación entre polinomios , variedades e ideales : $f_1, \ldots, f_s \rightarrow V(f_1, \ldots, f_s) \rightarrow I(V(f_1, \ldots, f_s))$. La función I tiene las siguientes propiedades :

Proposition 2.7. Sean V y W variedades afines en k^n. Entonces

1. $V \subset W$ si y solo si $I(V) \supset I(W)$
2. $V = W$ si y solo si $I(V) = I(W)$.

También tenemos la correspondencia V, de ideales a variedades , como consecuencia lo siguiente:

Teorema 2.8. (Teorema de la base de Hilbert) Todo ideal $I \subset k[x]$ es generado por un conjunto finito [8], tal que $I = \langle g_1, \ldots, g_t \rangle$ para algún $g_1, \ldots, g_t \in I$.

En términos geométricos, este teorema dice que cualquier conjunto algebraico es el conjunto de las ceros comunes de un número finito de ecuaciones polinómiales.

Corolario 2.9. Sea $I \subset k[x]$ un ideal . Entonces este es generado por el conjunto $f_1, \ldots, f_s \subset I$, tal que $V(I) = V(f_1, \ldots, f_s)$ es una variedad afín.

La variedad definida por un conjunto depende sólo de los ideales. El diccionario de Geometría Algebraica conecta ideales a las variedades, de modo que un análisis algebraico de un ideal puede traducirse geométricamente en la variedad. La relación entre polinomios, variedades e ideales se aclara en el

[7] El cual de echo es el ideal mas pequeño que contiene a los polinomios dados.
[8] dichos ideales son llamados Nötherianos

Nullstellensatz.

Teorema 2.10. (El Nullstellensatz debil) Sea k un campo algebraicamente cerrado, y $I \subset k[x]$ un ideal tal que $V(I)=\emptyset$. Entonces $I=k[x]$.

El Nullstellensatz débil es consistente con la relación de inclusión-inversión entre ideales y variedades (Proposición 2.7), de modo que la variedad más pequeña posible está asociada con el ideal más grande posible. El Nullstellensatz ilustra que todo ideal máximo corresponde a un punto del espacio afín.

Definition 2.11. Un ideal I en un anillo R es un ideal maximal si para todo ideal J tal que $I \subseteq J, J=I$ o $J=R$.

Sea E un conjunto de ecuaciones polinomiales en $k[x]$ tal que el conjunto de ceros comunes es un único punto, $a=\left(a_1, \ldots, a_n\right) \in k^n, V(E)=a$. Entonces su ideal $I(a)=\left\langle x_1-a_1, \ldots, x_n-a_n\right\rangle . I(a)$ es un ideal maximal , el cual denotamos por M_a.

Theorem 2.12. (Nullstellensatz de Hilbert) Sea k un campo algebraicamente cerrado. Todo ideal maximal en $k[x]$ puede ser expresado por $M_a=\left\langle x_1-a_1, \ldots, x_n-a_n\right\rangle$ para algún punto $a \in k^n$.

Ahora tenemos una relación entre puntos e ideales maximales atreves de la función $M(a)=M_a$.

Corolario 2.13. La correspondencia M es una biyección entre los puntos en k^n e ideales maximales M de $k[x]$.

$$
\begin{gathered}
M: k^n \rightarrow\{M \subset k[x] \mid M \text { maximal ideal }\} \\
M(a)=M_a, a \in k^n
\end{gathered}
$$

También podemos conocer las propiedades geométricas de una variedad V restringiendo las funciones polinómicas. El conjunto de todas las funciones polinómicas $f: V \rightarrow k$ se denota $k[V]$. Se puede construir como un anillo de cocientes. Para empezar, definimos una relación de equivalencia, $\sim$, para describir si dos funciones polinómicas son la misma función en $V=V\left(f_1, \ldots, f_s\right)$.

Definition 2.14. Sea $V \subset k^n$ una variedad afín , $f, g \in k[x]$. $f \sim g$ si $f-g \in I(V)$. Si $f \sim g$, para todo $a \in V, f(a)-g(a)=0$. f y g representan la misma función polinomial en V.

Definition 2.15. La clase de equivalencia de el elemento f in $k[x]$ bajo esta relación de equivalencia es denotado por $[f]=\{f+h \mid h \in I(V)\}$. El conjunto de todas las clases de equivalencia forma el anillo cociente $k[x] / I(V)$.

En otras palabras , $k\left[x_1, \ldots, x_n\right] / I(V)$ describe el conjunto de los distintos polinomios en V. Esto es , el anillo de coordenadas $k[V] \cong k\left[x_1, \ldots, x_n\right] / I(V)$.

Por ejemplo, sea $f(x, y)=x^3-y^2$, con $V=V(f)=\left\{(x, y) \in k^2 \mid x^3-y^2=0\right\}$. Entonces $k[x, y] /\left\langle x^3-y^2\right\rangle$ es el anillo de funciones en V.

Definition 2.16. Llamaremos $k[V]=k\left[x_1, \ldots, x_n\right] / I(V)$ al anillo de coordendas de V. Es una k-algebra generada por las clases de equivalencia $\left[x_1\right], \ldots,\left[x_n\right]$.

Definition 2.17. Una k-algebra finitamente generada R es una estructura conmutativa con suma multiplicación , y multiplicación por escalar tal que existe un conjunto finito $x_1, \ldots, x_n \in R$ tal que todo elemento $f \in R$ puede ser expresado como el polinomio $f=\sum_\alpha \lambda_\alpha x^\alpha, \lambda_\alpha \in k$.

La correspondencia entre las álgebras de generación finita y las variedades afines se refuerza en el diccionario de Geometría Algebraica, que ofrece una definición alternativa:

Teorema 2.18. R es una k-algebra finitamente generada si y solo si es isomorfo al anillo cociente

$k[x_1, \ldots, x_n]/I$, donde I es un ideal en $k[x_1, \ldots, x_n]$

El anillo de coordenadas afin $k[V] = k[x_1, \ldots, x_n]/I(V)$ nos permite generalizar el corolario 2.13:

Corolario 2.19. Hay una correspondencia entre puntos de una variedad V e ideales maximales de un anillo de coordenadas $k[V]$.

3. Variedades afines toricas.

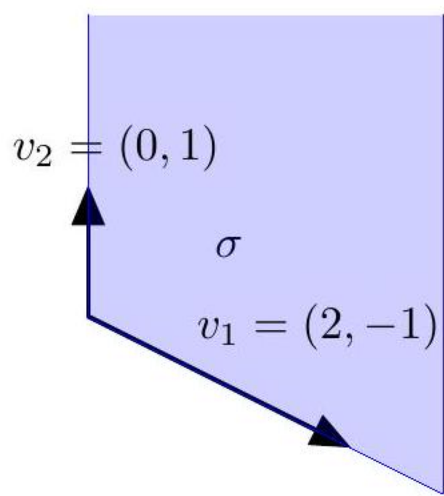
La intersección del álgebra conmutativa y la estadística se puede estudiar con variedades tóricas afines. A partir de un cono σ, podemos asociar el cono dual $\check{\sigma}$, luego un monoide S_σ, el anillo de coordenadas R_σ, y por último, la variedad tórica X_σ. Los ideales que representan a R_{sigma} serán importantes más adelante, al hablar de las bases de Markov.

Definición 3.1. Sea $A = \{v_1, \ldots, v_r\}$ un conjunto finito de vectores en $\mathbb{R}^n$. Entonces el conjunto

$$\sigma = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r, \lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_i \geq 0\}$$

es llamado cono poliédrico.

$A = \emptyset$ genera el cono cero , $\sigma = \{0\}$. Otro ejemplo , consideremos el cono generado por $v_1 = 2e_1 - e_2$ y $v_2 = e_2$.



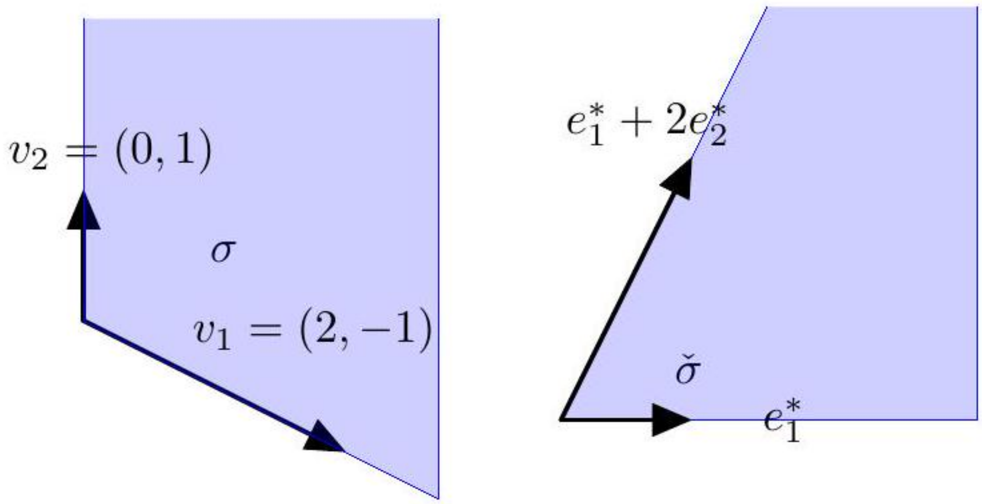
Cada cono σ puede ser asociado al cono dual en $(\mathbb{R}^n)^*$, el conjunto de todas las transformaciones lineales $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. $(\mathbb{R}^n)^*$ es el espacio dual de $\mathbb{R}^n$ con $\langle u, v\rangle$ como el par dual entre $v \in \mathbb{R}^n$ y $u \in (\mathbb{R})^*$. Podemos ver que $\mathbb{R}^n$ y $(\mathbb{R}^n)^*$ son isomorfos a través de la base dual $\{e_1, \ldots, e_n\}$ y la base estandar dual $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$, donde

$$\langle e_i^*, e_j\rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Definition 3.2. El cono dual $\check{\sigma}$ asociado al el cono σ es definido por

$$\check{\sigma} := \left\{u \in (\mathbb{R}^n)^* \mid \langle u, v\rangle \geq 0 \text{ for all } v \in \sigma\right\}$$

Así que para el cono σ con generados $v_1 = 2e_1 - e_2$ y $v_2 = e_2$, su cono dual $\check{\sigma}$ es generado por e_1^* y $e_1^* + 2e_2^*$:



Vamos introducir ahora a los lattices y lattices duales. Un lattice es un grupo isomorfo a $\mathbb{Z}^n$. Sea N u lattice, $N \cong \mathbb{Z}^n$. Fijamos su latice dual $M = Hom_{\mathbb{Z}}(N;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^n$ en $(\mathbb{R}^n)^*$. Las variedades toricas pueden ser construidos cuando los generadores de un cono están fijados en un lattice fijo.

Definition 3.3. Un cono σ es un cono racional si todos los generadores v_i están en N.

Si tomamos $N = \mathbb{Z}^2$, nuestro cono σ es racional dado que sus generadores $v_1 = 2e_1 - e_2$ y $v_2 = e_2$ están en N.

Definition 3.4. Un cono σ es fuertemente convexo si no hay líneas que puedan ser dibujadas a través del origen que estén contenidas en σ, o $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$.

A partir de la figura, podemos ver que σ es un cono fuertemente convexo y racional. Además, $\check{\sigma}$ es un cono racional con respecto a $(\mathbb{Z}^n)^*$. Si un cono es racional, su cono dual también lo es. Sin embargo, el cono dual de un cono fuertemente convexo no es necesariamente fuertemente convexo. Por ejemplo, el dual del cono cero en $\mathbb{R}^2$, $\sigma = \{0\}$, es $\check{\sigma} = \left(\mathbb{R}^2\right)^*$, que no es fuertemente convexo.

A continuación, podemos construir monoides a partir de conos. Los generadores de estos monoides serán más tarde relevantes a la hora de generar el ideal para representar los conos como anillos de coordenadas.

Definition 3.5. Un conjunto S con una operación binaria $+ : S \times S \to S$ es un monoide si satisface las siguientes propiedades :

1. Asociatividad: $(a+b)+c = a+(b+c) \forall a,b,c \in S$
2. Elemento identidad: $0 + a = a$

$\mathbb{N}$ forma un monoide bajo la suma , con 0 como elemento identidad. Un monoide puede ser formado de un cono y un lattice.

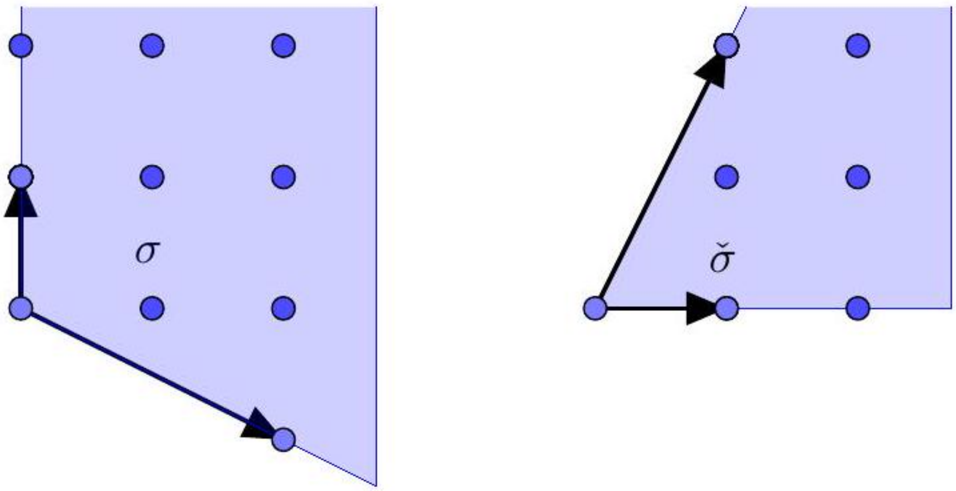
Lemma 3.6. Si σ es un cono, entonces $\sigma \cap N$ es un submonoide N.

Nota que si $x, y \in \sigma \cap N$, entonces $x + y \in \sigma \cap N$.

Definition 3.7. Un monoide S es finitamente generado si hay elementos $a_1, \ldots, a_k \in S$ tales que

$$\forall s \in S, s = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k \text{ with } \lambda_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Los elementos $a_1, \ldots, a_k$ son llamados generadores del monoide.



Los puntos dibujados en los conos σ y $\check{\sigma}$ representan a los monoides $\sigma \cap N$ y $\check{\sigma} \cap M$.$\sigma \cap N$ es generado por $\{e_1, e_2, 2e_1 - e_2\}$ y $\check{\sigma} \cap M$ es generado por $\{e_1^*, e_1^* + e_2^*, e_1^* + 2e_2^*\}$. Al estudiar las variedades tóricas, es necesario restringirse a los conos racionales debido al siguiente lema:

Lema 3.8. (Lema de Gordon) Si σ es un cono lattice poliédrico, entonces $\sigma \cap N$ es un monoide finitamente generado.

Para construir variedades tóricas a partir de conos, aplicamos el lema de Gordon al cono dual $\check{\sigma}$, centrándonos en el monoide $S_{sigma} := \check{\sigma} \cap M$. Los generadores de S_{sigma} corresponden a monomios de Laurent, lo cual es importante a la hora de asociar un anillo de coordenadas R_{sigma} al cono $sigma$.

Las variables de un monomio de Laurent pueden tener potencias positivas o negativas. Un monomio de Laurent en $\mathbb{C}$ se escribe como $\lambda x^\alpha = \lambda x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$, con $\lambda \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \backslash \{0\}$ and $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$. El conjunto de todos los monomios de Laurante forma un anillo , el cual es denotado con $\mathbb{C}\left[x, x^{-1}\right] = \mathbb{C}\left[x_1, \ldots, x_n, x_1^{-1}, \ldots, x_n^{-1}\right]$.

El grupo aditivo $\mathbb{Z}^n$ es isomorfo al grupo multiplicativo de monomios de Laurent con coeficiente 1 a través del mapa :

$$\theta : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}\left[x, x^{-1}\right]$$
$$\theta(\alpha) = x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}, \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$$

θ es un isomorfismo por que es biyectivo y cumple $\theta(a+b) = z^{a+b} = z^a \cdot z^b = \theta(a) \cdot \theta(b)$ para todo $a, b \in \mathbb{Z}^n$.

Definition 3.9. Sea f un polinomio de Laurent con terminos finitos. El soporte de un polinomio de Laurent $f = \sum_{\text{finite}} \lambda_\alpha z^\alpha$ is

$$\operatorname{supp}(f) = \{\alpha \in \mathbb{Z}^n \mid \lambda_\alpha \neq 0\}$$

Proposición 3.10. Sea σ un cono racional.

$$R_\sigma := \left\{f \in \mathbb{C}\left[x, x^{-1}\right] \mid \operatorname{supp}(f) \subset \check{\sigma} \cap M\right\}$$

es una $\mathbb{C}$-algebra finitamente generada por momomios de Laurent.

Esto se deduce directamente del lema de Gordon, ya que $\check{\sigma} \cap M$ es un monoide finitamente generado. Así que los generadores de $\check{\sigma} \cap M$ dan los monomios que general R_σ a tráves del mapeo θ. El S_σ de nuestro ejemplo está generado por $\{e_1^*, e_1^* + e_2^*, e_1^* + 2e_2^*\}$, por lo que la $\mathbb{C}$-algebra esta generado por $\left\{x_1, x_1x_2, x_1x_2^2\right\}$.

Recordemos que una $\mathbb{C}$-algebra finitamente generada puede escribirse como un anillo de coordenadas $\mathbb{C}\left[x_1, \ldots, x_n\right]/I$ para algún ideal I. Dependendiendo del conjunto de generadores de S_σ que se elijan ,

R_σ puede representarse como un anillo de coordenadas $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/I_\sigma$, donde $I_\sigma = \langle r_1, \ldots, r_k \rangle$ para las relaciones r_i. Las relaciones entre generadores S_σ se escriben $\sum_j u_j a_j = \sum_j v_j a_j$. Las relaciones $r_1, \ldots, r_k$ nos permiten asignar una variedades , denotada por $V(I_\sigma)$, al cono σ.

Definición 3.11. La variedad tórica afín correspondiente a un cono racional poliédrico y fuertemente convexo σ es $X_\sigma := \{M \subset R_\sigma \mid M \text{ ideal maximal }\}$.

La elección de generadores S_σ determina la representación de R_σ es un algebra finitamente generada $R_\sigma = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/I_\sigma$, y I_σ entonces define la variedad torica X_σ.

Teorema 3.12. Sea σ un cono racional en $\mathbb{R}^n$ y $A = (a_1, \ldots, a_n)$ sea un sistema de generadores de S_σ. Entonces la correspondiente variedad torica X_σ es representado por la variedad torica afín $V(I_\sigma) \subset \mathbb{C}^n$, donde $I_\sigma \subset \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ es generado por varios binomios finitos de la forma

$$x_1^{u_1} \cdots x_n^{u_n} = x_1^{v_1} \cdots x_n^{v_n}$$

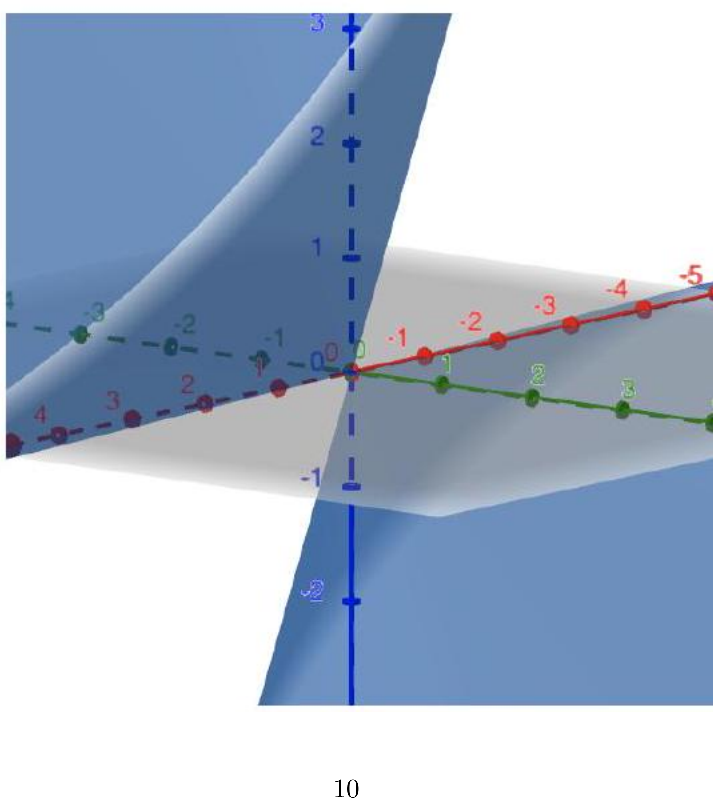
A través de θ, estos binomios corresponden a relaciones entre los generadores de S_σ :

$$\sum_j u_j a_j = \sum_j v_j a_j$$

Una consecuencia de este teorema es que un punto $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ es un punto en la variedad X_σ si y solo si satsfacen todas las relaciones binomiales.

$$x_1^{u_1} \cdots x_n^{u_n} = x_1^{v_1} \cdots x_n^{v_n}.$$

Ahora, construiremos X_σ a partir de nuestro cono de ejemplo generado por $v_1 = 2e_1 - e_2$ y $v_2 = e_2$, con $a_1 = e_1^* a_2 = e_1^* + e_2^*$, y $a_3 = e_1^* + 2e_2^*$ establecidos como el sistema de generadores de S_σ. El isomorfismo $\theta : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{C}\left[x_1, x_2, x_1^{-1}, x_2^{-1}\right]$ da los monomios de Laurent $x_1 = z_1, x_2 = z_1 z_2$, y $x_3 = z_1 z_2^2$ que generan R_σ. Tenemos la relación $a_1 + a_3 = 2a_2$, que proporciona la relación binomial $x_1 x_3 = x_2^2$. Entonces representamos $R_\sigma = \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]/I_\sigma$, donde el ideal I_σ está generado por la ecuación $x_1 x_3 = x_2^2$, es decir, $I_\sigma = \left\langle x_1 x_3 - x_2^2 \right\rangle$. Entonces, la variedad tórica correspondiente viene dada por $X_\sigma = V(I_\sigma) = \left\{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 \mid x_1 x_3 = x_2^2\right\}$ es un cono cuadrático en $\mathbb{C}^3$. La parte real de la misma en $\mathbb{R}^3$ se muestra a continuación:



Considera el cono $\sigma = \{0\}$, con el cono dual $\check{\sigma} = (\mathbb{R}^n)^*$. Ambos sistemas generan S_σ :

$$A_1 = (e_1^*, \ldots, e_n^*, -e_1^*, \ldots, -e_n^*)$$
$$A_2 = (e_1^*, \ldots, e_n^*, -(e_1^* + \cdots + e_n^*))$$

Si denotamos al primer sistema de generadores como , $A_1 = (a_1, \ldots, a_{2n})$, tenemos la siguiente relación entre elementos de A_1 :

$$a_1 + a_{n+1} = 0$$
$$\vdots$$
$$a_n + a_{2n} = 0$$

Así R_σ pueden ser escrito $\mathbb{C}\left[x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{2n}\right]/I_\sigma$, donde corresponden al ideal $I_\sigma = \langle x_1x_{n+1} - 1, x_2x_{n+2} - 1, \ldots, x$
Entonces la variedad torica es $X_\sigma = V\left(x_1x_{n+1} - 1, x_2x_{n+2} - 1, \ldots, x_nx_{2n} - 1\right)$.

Ademas dado R_σ es generado por $z_1, \ldots, z_n, z_1^{-1}, \ldots, z_n^{-1}$, el anillo de polinomios de Laurent sobre $\mathbb{C}$ puede ser representado como

$$\mathbb{C}\left[z_1, \ldots, z_n, z_1^{-1}, \ldots, z_n^{-1}\right] = \frac{\mathbb{C}\left[x_1, \ldots, x_{2n}\right]}{\langle x_1x_{n+1} - 1, x_2x_{n+2} - 1, \ldots, x_nx_{2n} - 1\rangle}$$

A_2 dada la relación:

$$a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1} = 0$$

así que $R_\sigma = \mathbb{C}\left[x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}\right]/\langle x_1 \cdots x_nx_{n+1} - 1\rangle$ y la variedad torica es $X_\sigma = V\left(x_1 \cdots x_nx_{n+1} - 1\right)$.

4. Modelos estadisticos.

Una tabla de contingencia muestra el cruce de casos observados entre dos o más variables discretas:

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1c} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{r1} & \cdots & u_{rc} \end{pmatrix}$$

donde u_{ij} es el número de observaciones donde $X_1 = i, X_2 = j$. Por ejemplo:

	Lateralidad		
Genero	Diestro	Zurdo	Total por genero
Masculino	3	1	4
Femenino	5	1	6
Total por lateralidad	8	2	10

Una cuestión que se podría estudiar sobre esta tabla es si el género es independiente de la lateralidad. En las pruebas de hipótesis en estadística, nos preguntamos qué probabilidad hay de obtener los datos que observamos si nuestra hipótesis de que el género es independiente de la lateralidad es cierta.

Definition 4.1. Las variables aleatorias X_1 y X_2 tienen porbabilidades conjuntas

$$p_{ij} = P\left(X_1 = i, X_2 = j\right),$$

y probablidades marginales

$$p_{i+} := \sum_{j=1}^{c} p_{ij}, \quad p_{+j} := \sum_{i=1}^{r} p_{ij}$$

para $i \in [r], j \in [c]$

Definition 4.2. X_1 and X_2 are independent if $p_{ij} = p_{i+}p_{+j}$ for all $i \in [r], j \in [c]$

In our example, we assumed gender and handedness were independent. This defines a statistical model. The joint probability matrix $p=(p_{ij})$ is unknown, so a statistical model $\mathcal{M}$ represents the set of all possible p. It is a subset of

$$\left\{q \in \mathbb{R}^{r\times c} \mid q_{ij} \geq 0 \text{ and } \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c} q_{ij}=1\right\}.$$

An algebraic statistical model can be represented by the image of a polynomial map

$$f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$$
$$f(\theta)=\big(f_1(\theta),\ldots,f_m(\theta),\theta=(\theta_1,\ldots,\theta_d)\in\mathbb{R}^d$$

The variables $\theta_1,\ldots,\theta_d$ represent the model parameters and $f_1(\theta),\ldots,f_m(\theta)$ make up the the probability distribution determined by the model. We require $f_1(\theta)+\cdots+f_m(\theta)=1$ for all θ in the parameter space, and each $f_i(\theta)$ is a polynomial with finitely many terms:

$$f_i(\theta)=\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^d}\lambda_{i,\alpha}\theta_1^{\alpha_1}\cdots\theta_d^{\alpha_d}$$

Two important classes of models are linear models and log linear models.

Definition 4.3. An algebraic statistical model $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^m$ is a linear model if each polynomial $f_i(\theta)$ is a real linear function of the paramenters $\theta_1,\ldots,\theta_d$,

$$f_i(\theta)=\sum_{j=1}^{d}a_{ij}\theta_j+b_i$$

One example of a linear model might involve conditional probability. Suppose there are two events A and B. Let $P(A)=\theta$ and $P\left(A^C\right)=1-\theta$ be unknown. If $P(B\mid A)=,25, P\left(B^C\mid A\right)=,75, P\left(B\mid A^C\right)=,6, P\left(B^C\mid A^C\right)=,4$, then the statistical model can be written as a linear function of the parameter θ :

$$\begin{aligned}
f_1(\theta) &:= P(B)=P(B\mid A)P(A)+P\left(B\mid A^C\right)P\left(A^C\right)\\
&= ,25\theta+,6(1-\theta)\\
&= -,35\theta+,6\\
f_2(\theta) &:= P\left(B^C\right)=P\left(B^C\mid A\right)P(A)+P\left(B^C\mid A^C\right)P\left(A^C\right)\\
&= ,75\theta+,4(1-\theta)\\
&= ,35\theta+,4
\end{aligned}$$

On the other hand, the coordinate functions f_i in a log linear model are monomials, so that $\log\left(f_i(\theta)\right)$ is a linear function of $\log\left(\theta_1\right),\ldots,\log\left(\theta_d\right)$. The independence model is a type of log linear model.

Let $A=(a_{ij})$ be a non-negative integer $d\times m$ matrix with all columns summing to the same value

$$\sum_{i=1}^{d}a_{i1}=\cdots=\sum_{i=1}^{d}a_{im}.$$

Each column a_j of A determines a monomial

$$\theta^{a_j}=\prod_{i=1}^{d}\theta_i^{a_{ij}}$$

Definition 4.4. An algebraic statistical model $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^m$ is a log linear model if each $f_j(\theta)$ has the form:

$$f_j(\theta)=\frac{1}{\sum_{i=1}^{m}\theta^{a_i}}\cdot\theta^{a_j}$$

Scaling by $\sum_{i=1}^{m} \theta^{a_i}$ ensures that $f_1(\theta) + \cdots + f_m(\theta) = 1$. Taking the logarithm of both sides, we have the linear relationship:

$$\log\left(f_j(\theta)\right) = \sum_{i=1}^{d} a_{ij} \log\left(\theta_i\right)$$

The independence model is a log linear model because each joint probability $p_{ij} = p_{i+}p_{+j}$, so that taking the logarithm gives the linear function

$$\log\left(p_{ij}\right) = \log\left(p_{i+}\right) + \log\left(p_{+j}\right).$$

Statistical hypotheses about contingency tables can be tested by performing random walks on a constrained set of tables with non-negative integer entries. Markov bases are useful because they ensure that the random walk connects every pair of tables in the considered set.

The following matrix A represents the model of independence.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

It satisfies the identity

$$Au = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{21} \\ u_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{1+} \\ u_{2+} \\ u_{+1} \\ u_{+2} \end{pmatrix}$$

Observe that the product Au has the marginal counts. We say the marginal counts make up the sufficient statistics for the independence model because knowing the probability of observing a contingency table u means knowing the marginal probabilities p_{i+} and p_{+j}. Under the assumptions in the independence model, the marginal counts u_{i+} and u_{+j} provide sufficient information.

We want to generate a set of tables v that has the same sufficient statistics, or that

$$Au = Av = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Definition 4.5. The set of tables

$$\mathcal{F}(u) = \{v \in \mathbb{N} \mid Av = Au\}$$

is called the fiber of a contingency table u.

Markov bases help generate a sequence of tables v, such that $Au = Av$, and allow us to create a Markov chain to sample from the fiber. Moves in the Markov basis connect the fiber. The Metropolis-Hastings Algorithm draws on running a random walk from u as a starting point.

Definition 4.6. Let $\mathcal{M}_A$ be the log-linear model associated with matrix A. A finite subset $\mathcal{B} \subset \ker_{\mathbb{Z}}(A)$ is a Markov basis for $\mathcal{M}$ if for all u and all pairs v, $v' \in \mathcal{F}(u)$ there exists a sequence $u_1, \ldots, u_L \in \mathcal{B}$ such that

$$v' = v + \sum_{k=1}^{L} u_k \text{ and } v + \sum_{k=1}^{l} u_k \geq 0 \text{ for all } l = 1, \ldots, L$$

The Markov basis represents the set of possible moves from the current contingency table to the next so that they produce the same results under the model. We know a Markov basis $\mathcal{B}$ is in $\ker_{\mathbb{Z}}(A)$, because if we consider a single step $v = v' + u$, $u \in \mathcal{B}$, it follows from $Av = Av'$ that $u = v' - v \in \ker_{\mathbb{Z}}(A)$.

For the example with gender and handedness, where we assumed independence, we have a useful proposition to find its Markov basis.

Proposition 4.7. The unique minimal Markov basis $\mathcal{B}$ for an independence model has $2 \cdot \begin{pmatrix} r \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ 2 \end{pmatrix}$ moves, and

$$\mathcal{B} = \{\pm (e_{ij} + e_{kl} - e_{il} - e_{kj}) \mid 1 \leq i < k \leq r, 1 \leq j < l \leq c\}$$

So we have these two moves for our model:

$$\mathcal{B} = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

We can confirm that $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ and $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ produce the same statistics as the observed table $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

For tables with larger fibers where sampling is difficult, we can use the MetropolisHastings Algorithm. Given a contingency table u and a Markov basis $\mathcal{B}$, it generates a sequence of tables $\{v_t\}_{t=1}^{\infty}$ in $\mathcal{F}(u)$ and their chi-square statistic values.

Start with $v_1 = u, t = 1$. Select at random $u_t \in \mathcal{B}$. If any entry in $v_t + u_t$ is negative, reject the table, keeping $v_{t+1} = v_t$. Otherwise, move so that $v_{t+1} = v_t + u_t$ with probability q or keep $v_{t+1} = v_t$ with probability $q - 1$, where

$$q = \text{mín} \left\{ 1, \frac{P(U = v_t + u_t \mid AU = Au)}{P(U = v_t \mid AU = Au)} \right\}.$$

We repeat for $t = 2, \ldots$ and compare $\chi^2(u)$ to every $\chi^2(v_t)$. So if we move to a candidate table that is more probable than the current table, it is set as the next table in the sequence, which will converge. The hypothesis is rejected if the observed $\chi^2(u)$ is very unlikely.

We can also take the moves in a Markov basis and construct an ideal to help determine if two tables u, v in the fiber are connected. Let $\mathcal{M}$ be any finite set in $\ker_{\mathbb{Z}}(A)$. Each $m \in \mathcal{M}$ can be decomposed into positive and negative components, $m = m^+ - m^-$, where each index $m_i^+ = \text{máx}\{m_i, 0\}$ and $m_i^- = \text{máx}\{-m_i, 0\}$. Then we can define a binomial $x^{m^+} - x^{m^-}$ in polynomial ring $k[x]$. So for the set $\mathcal{M}$ we define the ideal

$$I_{\mathcal{M}} := \left\langle x^{m^+} - x^{m^-} \mid m \in \mathcal{M} \right\rangle$$

Both $I_{\mathcal{M}}$ and the ideal I_σ that determines the toric variety X_σ are generated by binomials.

Proposition 4.8. There exists a nonnegative walk $v_1, \ldots, v_t$ between v and v' if and only if $x^u - x^v \in I_{\mathcal{M}}$.

If we take a sequence $v_1, \ldots, v_t$ that is nonnegative and connects u and v, we can confirm the proposition by rewriting $x^u - x^v$:

$$x^u - x^v = x^u - x^{v_1} + x^{v_1} + \ldots - x^{u_t} + x^{u_t} - x^v.$$

Since each step $u_{i-1} - u_i$ is a move in $\mathcal{M}, x^{u_{i-1}} - x^{u_i}$ is in $I_{\mathcal{M}}$ and $x^u - x^v \in I_{\mathcal{M}}$. The matrix A associated to a model also determines an ideal:

Definition 4.9. Let $A \in \mathbb{Z}^{d \times n}$. The toric ideal for A is

$$I_A = \langle x^u - x^v \mid u, v \in \ker_{\mathbb{Z}}(A) \rangle$$

The Fundamental Theorem ties I_A to $I_{\mathcal{M}}$ to show that all models have a Markov Basis.

Theorem 4.10. (The Fundamental Theorem of Markov Bases) $\mathcal{M} \subset \ker_{\mathbb{Z}}(A)$ is a Markov basis if and only if the corresponding set of binomials

$$\left\{ x^{m^+} - x^{m^-} \mid m \in \mathcal{M} \right\}$$

generates the toric ideal I_A, or $I_{\mathcal{M}} = I_A$.

Proof. $(\Rightarrow)$: Let $\mathcal{M} \subset \mathbb{Z}^n$ be a Markov basis. If $x^u - x^v \in I_A$, then $u, v \in \ker_{\mathbb{Z}}(A)$. It follows that $Au = Av$, so there is a walk connecting u and v. By Proposition 4.8, $x^u - x^v \in I_{\mathcal{M}}$, and $I_A \subset I_{\mathcal{M}}$
$(\Leftarrow)$: Since $\mathcal{M} \subset \ker_{\mathbb{Z}}(A)$, then

$$I_{\mathcal{M}} = \left\langle x^{m^+} - x^{m^-} \mid m \in \mathcal{M} \right\rangle \subset \left\langle x^{m^+} - x^{m^-} \mid m \in \ker_{\mathbb{Z}}(A) \right\rangle \subset I_A.$$

Recall the Hilbert Basis Theorem, which states that every ideal in a polynomial ring is finitely generated. Then the toric ideal I_A is finitely generated. We can take the generators of I_A to find the Markov basis. Most importantly, this means that there exists a Markov basis for any log-linear statistical model!

5. Referencias

[1] Jean-Paul Brasselet. Introduction to Toric Varieties. https://www2.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/fs2015/math/alg_geom/brasselet

[2] Mathias Drton, Bernd Sturmfels, Seth Sullivant. Lectures on Algebraic Statistics. https: //math.berkeley.edu/bernd/owl.pdf

[3] Thomas Kahle. What is a Markov basis and what is it good for? http://gta.math.unibuc. ro/dumi/sna2016/kahle1bis.pdf

[4] Lior Pachter and Bernd Sturmfels. Algebraic Statistics for Computational Biology. http://yaroslavvb.com/papers/pachter-algebraic.pdf

[5] David Cox, John Little, Donal O'Shea. Ideals, Varieties, and Algorithms. http: //people.dm . unipi.it/caboara/Misc/Cox, %20Little, %200 %27Shea % 20 - %20Ideals, %20varieties %20and %20algorithms.pdf